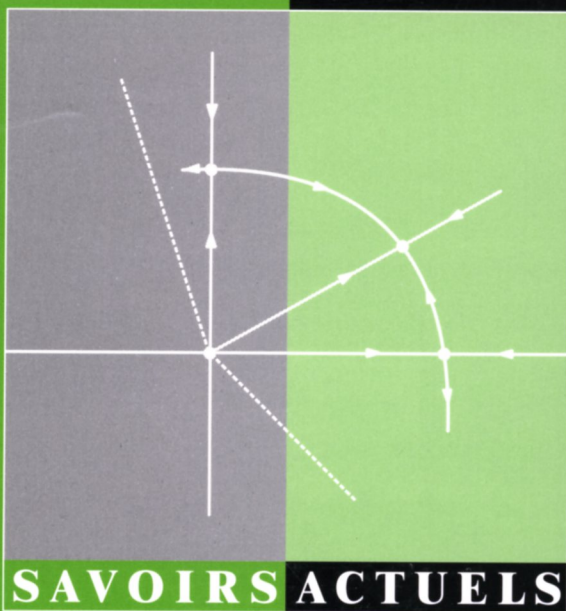


PHYSIQUE

Jean ZINN-JUSTIN

# Transitions de phase • et groupe • de renormalisation



 CNRS EDITIONS

  
**EDP**  
SCIENCES



Jean Zinn-Justin

# Transitions de phase et groupe de renormalisation

S A V O I R S    A C T U E L S

---

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Publié avec le concours du ministère chargé de l'enseignement supérieur et de la recherche.

© **2005, EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

**CNRS ÉDITIONS**, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

**ISBN** EDP Sciences 2-86883-790-5

**ISBN** CNRS ÉDITIONS 2-271-06319-1

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation</b>	<b>1</b>
1.1 L'électrodynamique quantique : une théorie quantique des champs . . . . .	3
1.2 L'électrodynamique quantique et le problème des infinis . . . .	5
1.3 Méthode de renormalisation . . . . .	8
1.4 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation . .	10
1.5 Le triomphe de la théorie quantique des champs : le Modèle Standard . . . . .	12
1.6 Phénomènes critiques : d'autres infinis . . . . .	15
1.7 Le groupe de renormalisation de Kadanoff–Wilson . . . . .	17
1.8 Théories quantiques des champs effectives . . . . .	19
<b>2 Valeurs moyennes gaussiennes. Méthode du col</b>	<b>23</b>
2.1 Fonction génératrice . . . . .	24
2.2 Valeurs moyennes gaussiennes. Théorème de Wick . . . . .	24
2.2.1 Intégrales gaussiennes paires . . . . .	25
2.2.2 Intégrale gaussienne générale . . . . .	26
2.2.3 Valeurs moyennes gaussiennes et théorème de Wick . .	27
2.3 Mesure gaussienne perturbée. Contributions connexes . . . . .	28
2.3.1 Mesure gaussienne perturbée . . . . .	28
2.3.2 Contributions connexes . . . . .	30
2.4 Diagrammes de Feynman . . . . .	31
2.5 Valeurs moyennes. Fonction génératrice. Cumulants . . . . .	32
2.5.1 La fonction à deux points . . . . .	32
2.5.2 Fonctions génératrices. Cumulants . . . . .	34
2.6 Méthode du col . . . . .	35
2.6.1 Intégrale réelle . . . . .	36
2.6.2 Intégrale de contour complexe . . . . .	39

2.7	Méthode du col à plusieurs variables. Calcul des fonctions génératrices . . . . .	42
2.7.1	Méthode du col . . . . .	42
2.7.2	Calcul des fonction génératrices . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Universalité et limite continue</b>	<b>51</b>
3.1	Théorème de la limite centrale des probabilités . . . . .	51
3.1.1	Transformation de Fourier . . . . .	52
3.1.2	Théorème de la limite centrale et conséquences . . . . .	54
3.1.3	Remarques diverses . . . . .	56
3.1.4	Variables aléatoires à valeurs entières . . . . .	58
3.2	Universalité et points fixes de transformations . . . . .	61
3.2.1	Situation générique . . . . .	62
3.2.2	Distribution centrée . . . . .	64
3.3	Marche au hasard et mouvement brownien . . . . .	66
3.3.1	Marche dans l'espace continu . . . . .	67
3.3.2	Invariance par translation et localité . . . . .	67
3.3.3	Fonction génératrice des cumulants . . . . .	69
3.3.4	Marche au hasard : comportement asymptotique . . . . .	70
3.3.5	Limite du temps continu . . . . .	71
3.3.6	Corrections à la limite continue . . . . .	72
3.3.7	Marche au hasard sur réseau . . . . .	73
3.3.8	Séries de Fourier . . . . .	75
3.3.9	Comportement asymptotique. Limite continue . . . . .	76
3.3.10	Dilatation de l'échelle des temps et points fixes . . . . .	78
3.4	Marche au hasard : remarques complémentaires . . . . .	79
3.4.1	Distribution asymptotique . . . . .	79
3.4.2	Équilibre détaillé . . . . .	80
3.5	Mouvement brownien et intégrale de chemin . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Mécanique statistique classique : une dimension</b>	<b>89</b>
4.1	Interactions de proches voisins. Matrice de transfert . . . . .	90
4.1.1	Interactions de proches voisins . . . . .	91
4.1.2	Matrice de transfert et fonction de partition . . . . .	92
4.1.3	Espace de Hilbert et matrice de transfert . . . . .	92
4.2	Fonctions de corrélation . . . . .	94
4.2.1	Fonction à un point . . . . .	94
4.2.2	Fonction de corrélation à $p$ points . . . . .	95
4.3	Limite thermodynamique . . . . .	95
4.3.1	La fonction de partition . . . . .	95
4.3.2	Fonction à un point . . . . .	96
4.3.3	Fonction à deux points et longueur de corrélation . . . . .	97
4.4	Fonctions connexes et propriété d'amas . . . . .	98
4.4.1	Variable moyenne et limite thermodynamique . . . . .	100
4.5	Modèles statistiques : exemples simples . . . . .	101

4.6	Le modèle gaussien . . . . .	103
4.6.1	Matrice de transfert gaussienne : propriétés algébriques . . . . .	104
4.6.2	Matrice de transfert. Vecteurs et valeurs propres . . . . .	106
4.6.3	Fonction de partition. Fonctions de corrélation . . . . .	107
4.7	Modèle gaussien : limite continue . . . . .	109
4.7.1	Limite continue et hamiltonien quantique . . . . .	109
4.7.2	Décimation et limite continue . . . . .	111
4.8	Modèles plus généraux : limite continue . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Limite continue et intégrale de chemin</b>	<b>121</b>
5.1	Intégrale de chemin gaussienne . . . . .	121
5.1.1	Fonctionnelle génératrice. Dérivée fonctionnelle . . . . .	123
5.1.2	Fonctions de corrélations gaussiennes . . . . .	125
5.1.3	Calcul de l'intégrale gaussienne . . . . .	126
5.2	Corrélations gaussiennes. Théorème de Wick . . . . .	128
5.3	Mesure gaussienne perturbée . . . . .	129
5.4	Calculs perturbatifs : exemples . . . . .	131
5.4.1	Fonction de partition . . . . .	131
5.4.2	Fonctions de corrélation . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Systèmes ferromagnétiques. Corrélations</b>	<b>137</b>
6.1	Systèmes ferromagnétiques : définition . . . . .	138
6.1.1	Distribution de spin moyen et énergie libre . . . . .	139
6.1.2	Transformation de Legendre . . . . .	140
6.1.3	Distribution du spin moyen et potentiel thermodynamique . . . . .	142
6.2	Fonctions de corrélation. Représentation de Fourier . . . . .	143
6.2.1	Fonctions connexes et propriété d'amas . . . . .	144
6.2.2	Invariance par translation et représentation de Fourier . . . . .	145
6.3	Transformation de Legendre et fonctions de vertex . . . . .	147
6.3.1	Transformation de Legendre : généralisation . . . . .	147
6.3.2	Fonctions de vertex . . . . .	150
6.3.3	Modèle gaussien . . . . .	151
6.4	Transformation de Legendre et méthode du col . . . . .	152
6.5	Fonctions de vertex à deux et quatre points . . . . .	153
<b>7</b>	<b>Transitions de phase : généralités et exemples</b>	<b>157</b>
7.1	Température infinie ou spins indépendants . . . . .	160
7.1.1	Modèle à un site . . . . .	160
7.1.2	Spins indépendants . . . . .	162
7.2	Transitions de phase en dimension infinie . . . . .	163
7.2.1	Distribution de spin moyen. Fonctions thermodynamiques . . . . .	164
7.2.2	Limites de basse et haute température . . . . .	166
7.2.3	Distribution du spin moyen et transition de phase . . . . .	167

7.3	Universalité en dimension infinie . . . . .	169
7.4	Transformations, points fixes et universalité . . . . .	172
7.5	Interactions de portée finie en dimension finie . . . . .	174
7.5.1	Symétries discrètes : le modèle d'Ising . . . . .	175
7.5.2	Symétries continues : l'exemple du groupe orthogonal . . . . .	176
7.6	Modèle d'Ising : matrice de transfert . . . . .	178
7.6.1	Matrice de transfert . . . . .	178
7.6.2	Limite de dimension transverse infinie : transitions de phase . . . . .	180
7.7	Symétries continues et matrice de transfert . . . . .	183
7.8	Symétries continues et modes de Goldstone . . . . .	185
<b>8</b>	<b>Approximation quasi-gaussienne : universalité, dimension critique</b>	<b>189</b>
8.1	Interactions à deux spins de courte portée . . . . .	191
8.2	Le modèle gaussien : la fonction à deux points . . . . .	194
8.2.1	Quantités homogènes . . . . .	195
8.2.2	Fonction à deux points . . . . .	196
8.2.3	Le comportement critique . . . . .	197
8.2.4	Domaine critique . . . . .	198
8.3	Modèle gaussien et marche au hasard . . . . .	199
8.4	Modèle gaussien et intégrale de champ . . . . .	200
8.4.1	Maximum de l'intégrand et fonction à deux points . . . . .	201
8.4.2	Intégration gaussienne . . . . .	203
8.4.3	Calcul explicite de la fonction à deux points . . . . .	203
8.4.4	Réseau et limite continue . . . . .	205
8.5	Approximation quasi-gaussienne . . . . .	205
8.6	La fonction à deux points : universalité . . . . .	207
8.7	Approximation quasi-gaussienne et théorie de Landau . . . . .	210
8.8	Symétries continues et modes de Goldstone . . . . .	212
8.9	Corrections à l'approximation quasi-gaussienne . . . . .	214
8.9.1	Calcul de la correction . . . . .	214
8.9.2	Le comportement critique . . . . .	217
8.10	Approximation de champ moyen et corrections . . . . .	220
8.10.1	Représentation de spins moyens et méthode du col . . . . .	220
8.10.2	Méthode du col : un paramètre de développement . . . . .	222
8.11	Points tricritiques . . . . .	224
<b>9</b>	<b>Groupe de renormalisation : formalisme général</b>	<b>231</b>
9.1	Théorie statistique des champs. Hamiltonien de Landau . . . . .	233
9.1.1	Théorie statistique des champs effective . . . . .	233
9.1.2	Hamiltonien de Landau . . . . .	234
9.2	Fonctions de corrélation connexes. Fonctions de vertex . . . . .	235
9.3	Le groupe de renormalisation : idée générale . . . . .	237
9.3.1	Équations de groupe de renormalisation . . . . .	237

9.3.2	Fonctions génératrices et fonctions de vertex . . . . .	238
9.3.3	Hamiltonien de point fixe . . . . .	240
9.4	Flots des hamiltoniens : points fixes et stabilité . . . . .	241
9.4.1	Points fixes et flot linéarisé . . . . .	242
9.4.2	Classification des vecteurs propres . . . . .	243
9.4.3	EGR : autre forme . . . . .	244
9.4.4	Le domaine critique : propriétés d'échelle . . . . .	245
9.5	Le point fixe gaussien . . . . .	246
9.5.1	Le point fixe gaussien . . . . .	247
9.5.2	Hamiltonien quadratique isotrope général . . . . .	248
9.6	Perturbations propres : analyse générale . . . . .	250
9.6.1	Perturbations propres . . . . .	250
9.6.2	Représentation de Fourier . . . . .	252
9.7	Un point fixe non gaussien : le développement en $\epsilon$ . . . . .	253
9.7.1	Points fixes . . . . .	253
9.7.2	Autres vecteurs propres . . . . .	256
9.8	Valeurs propres et dimensions des polynômes locaux . . . . .	258
<b>10</b>	<b>Groupe de renormalisation perturbatif : calculs explicites</b>	<b>261</b>
10.1	Hamiltonien critique et développement perturbatif . . . . .	262
10.2	Diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle . . . . .	264
10.3	Point fixe et comportement critique . . . . .	267
10.3.1	La fonction à deux points . . . . .	267
10.3.2	La fonction à quatre points . . . . .	268
10.3.3	Point fixe . . . . .	270
10.3.4	La dimension du champ à l'ordre $\epsilon^2$ . . . . .	271
10.4	Le domaine critique . . . . .	273
10.4.1	Fonction à deux points . . . . .	273
10.4.2	Groupe de renormalisation . . . . .	274
10.4.3	Fonction à deux points : comportement d'échelle dans le domaine critique . . . . .	276
10.5	Modèle avec symétrie orthogonale $O(N)$ . . . . .	277
10.6	Groupe de renormalisation près de la dimension 4 . . . . .	279
10.6.1	Hamiltonien critique et EGR . . . . .	279
10.6.2	Domaine critique . . . . .	280
10.7	Quantités universelles : résultats numériques . . . . .	282
<b>11</b>	<b>Théories des champs <math>\sigma^4</math> : champ à <math>N</math> composantes</b>	<b>287</b>
11.1	GR : remarques générales . . . . .	288
11.2	Flots de gradient . . . . .	289
11.2.1	Reparamétrisation . . . . .	290
11.2.2	Flots et variation du potentiel . . . . .	290
11.2.3	Points fixes et stabilité . . . . .	291

11.3	Modèle avec anisotropie cubique . . . . .	293
11.3.1	Groupe de renormalisation et points fixes . . . . .	294
11.3.2	Flot linéarisé et valeurs propres . . . . .	295
11.4	Expressions générales explicites : étude détaillée . . . . .	296
11.4.1	Groupe de renormalisation . . . . .	297
11.4.2	Stabilité du point fixe isotrope . . . . .	298
11.4.3	Flots de gradients : points fixes, stabilité et dimension du champ . . . . .	299
11.5	Exercice : modèle général à deux paramètres . . . . .	302
<b>12</b>	<b>Théorie statistique des champs :</b>	
	<b>développement perturbatif</b>	<b>307</b>
12.1	Fonctionnelles génératrices . . . . .	308
12.2	Théorie des champs gaussienne. Théorème de Wick . . . . .	309
12.3	Développement perturbatif . . . . .	311
12.3.1	Développement perturbatif . . . . .	312
12.3.2	Diagrammes de Feynman : boucles . . . . .	313
12.3.3	Diagrammes connexes et 1-irréductibles . . . . .	314
12.3.4	Exemple : l'interaction $\sigma^4$ . . . . .	315
12.4	Développement en nombre de boucles . . . . .	318
12.4.1	Ordre dominant : diagrammes en arbre . . . . .	319
12.4.2	Ordre suivant : diagrammes à une boucle . . . . .	320
12.5	Prolongement et régularisation dimensionnels . . . . .	322
12.5.1	Prolongement dimensionnel . . . . .	322
12.5.2	Régularisation dimensionnelle . . . . .	323
12.5.3	Exemples . . . . .	325
<b>13</b>	<b>Théorie des champs <math>\sigma^4</math> près de la dimension 4</b>	<b>331</b>
13.1	Hamiltonien effectif. Renormalisation . . . . .	332
13.1.1	Hamiltonien effectif . . . . .	333
13.1.2	Renormalisation gaussienne . . . . .	333
13.1.3	Analyse dimensionnelle et dimension critique . . . . .	334
13.1.4	Théorème de renormalisation . . . . .	336
13.2	Équations de groupe de renormalisation . . . . .	338
13.2.1	EGR pour la théorie critique . . . . .	339
13.2.2	Solution perturbative de l'EGR . . . . .	340
13.3	Solution des EGR : le développement en $\varepsilon$ . . . . .	342
13.3.1	Solution générale . . . . .	342
13.3.2	Calculs à l'ordre d'une boucle : point fixe et lois d'échelle . . . . .	344
13.3.3	La fonction $\eta(g)$ à deux boucles et l'exposant $\eta$ . . . . .	346
13.4	Interaction effective et interaction renormalisée . . . . .	348
13.5	Le domaine critique au-dessus de $T_c$ . . . . .	350
13.5.1	Solution des EGR . . . . .	351
13.5.2	Fonctions à aimantation fixée ou au-dessous de $T_c$ . . . . .	353

<b>14 Théorie <math>(\phi^2)^2</math> avec symétrie <math>O(N)</math> : limite <math>N \rightarrow \infty</math></b>	<b>355</b>
14.1 Préliminaires algébriques . . . . .	356
14.2 Intégrale sur le champ $\phi$ : le déterminant . . . . .	357
14.2.1 Le déterminant : définition perturbative . . . . .	358
14.2.2 Premiers diagrammes à une boucle : discussion . . . . .	359
14.3 Limite $N \rightarrow \infty$ : le domaine critique . . . . .	361
14.4 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ pour $N \rightarrow \infty$ . . . . .	364
14.5 Partie singulière de l'énergie libre et équation d'état . . . . .	367
14.6 Les fonctions à deux points $\langle \lambda \lambda \rangle$ et $\langle \phi^2 \phi^2 \rangle$ . . . . .	369
14.7 Groupe de renormalisation et corrections aux lois d'échelles . . . . .	372
14.7.1 Les fonctions du groupe de renormalisation . . . . .	372
14.7.2 Corrections dominantes aux relations d'échelle . . . . .	373
14.8 Le développement en $1/N$ . . . . .	375
14.8.1 Analyse dimensionnelle . . . . .	375
14.8.2 Application : développement perturbatif, singularités infrarouges et comportement à grande impulsion . . . . .	376
14.9 L'exposant $\eta$ à l'ordre $1/N$ . . . . .	377
14.10 Le modèle $\sigma$ non linéaire . . . . .	378
<b>15 Le modèle <math>\sigma</math> non linéaire</b>	<b>381</b>
15.1 Le modèle $\sigma$ non linéaire sur réseau . . . . .	382
15.2 Développement de basse température . . . . .	383
15.2.1 Paramétrisation . . . . .	384
15.2.2 Développement perturbatif . . . . .	386
15.2.3 Point fixe gaussien et perturbations . . . . .	387
15.3 Limite continue formelle . . . . .	389
15.4 Régularisation . . . . .	390
15.5 Divergences d'impulsion nulle ou infrarouges . . . . .	391
15.6 Groupe de renormalisation . . . . .	393
15.6.1 Renormalisation et EGR . . . . .	393
15.6.2 Calculs à l'ordre d'une boucle . . . . .	395
15.7 Solution des EGR. Points fixes . . . . .	397
15.7.1 Points fixes . . . . .	398
15.7.2 Intégration des EGR : $d > 2$ , $g < g^*$ . . . . .	399
15.8 Fonctions de corrélation : forme d'échelle . . . . .	400
15.9 Le domaine critique : exposants critiques . . . . .	402
15.10 Dimension 2 . . . . .	403
15.10.1 Le modèle non-abélien . . . . .	404
15.10.2 Le cas abélien $N = 2$ . . . . .	405
15.11 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ à basse température . . . . .	407

<b>16 Groupe de renormalisation fonctionnel</b>	<b>411</b>
16.1 Intégration partielle et variation du hamiltonien . . . . .	412
16.1.1 Intégration partielle . . . . .	412
16.1.2 Forme différentielle . . . . .	414
16.1.3 Évolution du hamiltonien . . . . .	416
16.1.4 Fonctionnelle connexe et solution formelle . . . . .	417
16.1.5 Fonctions de corrélation . . . . .	419
16.1.6 Renormalisation du champ . . . . .	420
16.2 Intégration sur les modes de grande impulsion et EGR . . . . .	420
16.2.1 EGR . . . . .	421
16.2.2 Représentation de Fourier . . . . .	422
16.2.3 Développement en puissances du champ . . . . .	423
16.2.4 Fonctions de corrélation . . . . .	424
16.3 Solution perturbative : théorie $\phi^4$ . . . . .	426
16.4 EGR : forme standard . . . . .	430
16.5 Dimension 4 . . . . .	433
16.5.1 Conditions de renormalisation. Fonctions $\beta$ et $\eta$ . . . . .	433
16.5.2 Solution des EGR à l'ordre $g$ . . . . .	435
16.5.3 Solution des EGR à l'ordre $g^2$ . . . . .	435
16.6 Point fixe : développement en $\varepsilon$ . . . . .	439
16.7 Stabilité locale du point fixe . . . . .	441
16.7.1 Point fixe gaussien . . . . .	442
16.7.2 Dimension $d = 4 - \varepsilon$ : perturbations $\phi^2$ et $\phi^4$ . . . . .	444
16.7.3 Perturbations brisant la symétrie $\mathbb{Z}_2$ . . . . .	445
<b>Appendice A : Compléments techniques</b>	<b>447</b>
A.1 Fonctions $\Gamma$ , $\psi$ , $\delta$ . . . . .	447
A.1.1 Distribution de Dirac . . . . .	448
A.2 Le propagateur massif en dimension 2 . . . . .	449
A.3 Déterminants d'opérateurs . . . . .	449
A.4 Le groupe orthogonal . . . . .	450
A.5 Transformation de Fourier : décroissance et régularité . . . . .	451
A.5.1 Mesures positives discrètes et séries de Fourier . . . . .	451
A.5.2 Transformation de Fourier . . . . .	455
<b>Appendice B : Transitions de phase : généralités</b>	<b>459</b>
B.1 Fondamental de la matrice de transfert . . . . .	459
B.2 Paramètre d'ordre et propriété d'amas . . . . .	460
B.3 Dynamiques stochastiques et transitions de phase . . . . .	462
<b>Appendice C : Développement en <math>1/N</math> : quelques calculs</b>	<b>465</b>
C.1 Diagramme de Feynman à une boucle . . . . .	465
C.2 La fonction à deux points à l'ordre $1/N$ pour $u \rightarrow 0$ . . . . .	466

<b>Appendice D : Groupe de renormalisation fonctionnel :</b>	
<b>    compléments</b>	<b>469</b>
D.1 GRF et équations de champ . . . . .	469
D.2 GRF : transformation de Legendre . . . . .	472
D.3 GRF et régularisation dimensionnelle . . . . .	475
<b>Index</b>	<b>477</b>



# Introduction

LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS est à la base d'une partie notable des développements théoriques de la physique du vingtième siècle. Le modèle qui décrit toutes les interactions fondamentales à l'échelle microscopique, en dehors de la gravitation, est une théorie quantique des champs. De façon plus surprenante, la théorie quantique des champs a permis de comprendre les propriétés macroscopiques singulières d'une large classe de transitions de phase au voisinage de la transition.

Cependant, à la différence de la mécanique newtonienne ou quantique non relativiste, la théorie quantique des champs dans sa formulation la plus immédiate conduit à de graves difficultés conceptuelles à cause de l'apparition d'infinis dans le calcul des observables physiques. Le problème des infinis a d'abord été résolu de façon empirique par une méthode appelée renormalisation. Cette méthode n'a trouvé une interprétation satisfaisante que plus tard, dans le cadre du *groupe de renormalisation*. Le problème des infinis a ainsi été relié à un phénomène inattendu, le non-découplage des différentes échelles de physique.

C'est dans le cadre de la physique statistique et des transitions de phase continues que la discussion de ces problèmes conceptuels est la plus simple. Cet ouvrage tente donc d'introduire de façon élémentaire les notions de limite continue et d'universalité dans les systèmes aléatoires à un grand nombre de degrés de liberté. Nous insisterons sur l'importance des mesures gaussiennes et leurs relations avec l'approximation de champ moyen et la théorie de Landau. Nous montrerons que les approximations quasi-gaussiennes ou de champ moyen ne peuvent pas décrire correctement les transitions de phase. Nous attribuerons cette difficulté au couplage d'échelles de physique très différentes, alors même que les interactions sont locales, c'est-à-dire à courte portée. Pour analyser ce problème, un concept nouveau est nécessaire : le groupe de renormalisation, dont les points fixes permettent de comprendre l'universalité de la physique à grande distance au-delà du champ moyen.

Les arguments de groupe de renormalisation conduisent alors à l'idée que les corrélations à grande distance près de la température de transition peuvent être décrites par des théories statistiques locales des champs, formellement des théories quantiques des champs en temps imaginaire.

Cet ouvrage, issue de trois années d'enseignement à l'université Paris 7, est organisé de la manière suivante.

Au chapitre 1, nous commençons par une courte introduction semi-historique, qui essaie de décrire l'évolution des idées depuis les premiers pas de la théorie quantique des champs [1–4] jusqu'à l'application des méthodes de groupe de renormalisation à la théorie des transitions de phase.

Dans le chapitre 2, nous avons rassemblé un certain nombre de résultats techniques sur les fonctions génératrices, les mesures gaussiennes et la méthode du col qui sont indispensables pour la compréhension de l'ouvrage.

Le chapitre 3 aborde plusieurs sujets essentiels de l'ouvrage : les notions de limite continue et d'universalité, à travers les exemples du théorème de la limite centrale et de la marche au hasard. Nous montrons que l'universalité a comme origine l'hypothèse de faible déviation de la valeur moyenne des distributions de probabilité, ce qui se traduit par une hypothèse de localité de la marche au hasard. Dans les deux cas, la propriété d'universalité se traduit par l'apparition de distributions gaussiennes asymptotiques. Nous montrons alors, qu'au-delà du calcul direct, l'universalité peut aussi se comprendre comme résultant de points fixes de transformations agissant sur l'espace des distributions de probabilité. Cela nous permettra, déjà à travers ces exemples très simples, d'introduire le langage du groupe de renormalisation. Enfin, l'existence de limites continues conduit naturellement à décrire les processus en terme d'intégrales de chemin.

Dans le chapitre 4, nous abordons le sujet principal de l'ouvrage, l'étude de systèmes de la physique statistique classique, à travers l'exemple de modèles uni-dimensionnels. Cela nous permet d'introduire le langage de la physique statistique, comme les fonctions de corrélation, la limite thermodynamique, la longueur de corrélation... Même si les systèmes uni-dimensionnels avec interactions de courte portée n'ont pas de transition de phase, il est possible de définir une limite continue au voisinage de la température nulle. De plus, dans le cas d'interactions à portée finie, ces modèles peuvent être résolus exactement par la méthode de la matrice de transfert, ce qui en fait des exemples pédagogiques intéressants.

La limite continue des modèles uni-dimensionnels conduit, de nouveau à des intégrales de chemin, dont nous discutons quelques propriétés au chapitre 5 (pour plus de détails voir, par exemple, la réf. [5]).

Au chapitre 6, nous définissons des systèmes statistiques plus généraux, en dimension d'espace arbitraire. Par commodité, nous utilisons le langage ferromagnétique même si, à travers les propriétés d'universalité, les résultats qui seront obtenus dans la suite de l'ouvrage s'appliquent à des systèmes statistiques plus généraux. Au-delà des fonctions de corrélation générales et connexes (dont nous rappelons les propriétés de décroissance ou propriété d'amas), que nous avons déjà définies dans les chapitres précédents, nous introduisons les fonctions de vertex, qui sont liées au potentiel thermodynamique. Énergie libre et potentiel thermodynamique, comme fonctions de

corrélation connexes et fonctions de vertex, sont reliés par une transformation de Legendre dont nous étudions quelques propriétés.

Le chapitre 7 est dédié à la notion de transitions de phase, une notion qui est loin d'être triviale dans la mesure où une transition de phase ne peut être engendrée que par l'interaction d'un nombre infini de degrés de liberté. Nous commençons par résoudre exactement un modèle dans la limite où le nombre de dimensions de l'espace tend vers l'infini. Un tel modèle exhibe une transition de phase de type quasi-gaussien ou de champ moyen, comme nous le verrons plus loin. Ensuite, nous discutons de l'existence de transitions de phase en fonction de la dimension d'espace. Nous insistons sur la différence entre modèles avec symétries discrètes et continues en dimension deux.

Au chapitre 8, nous examinons en détail les propriétés universelles des transitions de phases dans les approximations quasi-gaussienne ou de champ moyen. Nous étudions les singularités des fonctions thermodynamiques au point de transition ainsi que le comportement à grande distance de la fonction à deux points. Nous résumons les propriétés d'universalité sous la forme de la théorie de Landau [6]. Nous soulignons les particularités des modèles avec symétrie continue à basse température dues à l'apparition de modes de Goldstone. Enfin, nous évaluons les corrections au modèle quasi-gaussien et montrons que l'approximation quasi-gaussienne n'est cohérente qu'en dimension d'espace supérieure à 4 (nous inspirant de la présentation dans [7]). Nous mentionnons l'existence possible de points tricritiques.

Au chapitre 9, nous introduisons la notion générale de groupe de renormalisation [4] dans l'esprit de l'ouvrage [8]. Nous étudions le rôle des points fixes et leurs propriétés de stabilité. Nous exhibons un point fixe particulier, le point fixe gaussien qui est stable en dimension supérieure à 4. Nous identifions la perturbation principale au point fixe gaussien en dimension  $\leq 4$ . Nous discutons la possibilité d'identifier un point fixe non-gaussien au voisinage de la dimension 4.

Au chapitre 10, nous montrons qu'avec les hypothèses formulées au chapitre 9, il est possible de trouver, en effet, un point fixe non-gaussien en dimension  $d = 4 - \varepsilon$  [9], à la fois dans des modèles avec symétries de réflexion et de rotation. Nous introduisons brièvement les méthodes de théorie des champs [10, 11] que nous reprenons dans les chapitres suivants. Enfin, nous présentons une sélection de résultats numériques concernant des exposants critiques et certains rapports universels d'amplitude [12–16].

Le chapitre 11 contient une discussion générale des équations de groupe de renormalisation, et des propriétés des points fixes correspondants, de toute une classe de modèles qui possèdent des symétries plus générales que les groupes de réflexion et rotation considérés auparavant, généralisant quelque peu les résultats présentés dans [7, 17]. En particulier, une intéressante conjecture, reliant décroissance des fonctions de corrélation et stabilité des points fixes, émerge ainsi.

Avec le chapitre 12, commence une présentation plus systématique des méthodes de théorie des champs. Au-delà de la simple généralisation de méthodes perturbatives déjà présentées dans les chapitres précédents, plusieurs concepts nouveaux sont introduits comme le développement en nombre de boucles, le prolongement et la régularisation dimensionnels [18].

Muni de ces outils techniques, nous pouvons alors justifier, au chapitre 13, les équations de groupe de renormalisation asymptotique de la théorie des champs [3, 19–23]. Des propriétés générales d’universalité s’en déduisent, ainsi que le calcul de quantités universelles en puissances de la déviation  $\varepsilon = 4 - d$  à la dimension 4.

La théorie des champs avec symétrie de rotation de type  $O(N)$  peut être résolue dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , comme nous le montrons au chapitre 14. Toutes les propriétés universelles démontrées dans le cadre du développement en  $\varepsilon$  peuvent alors être démontrées, à dimension fixée, dans le cadre d’un développement en  $1/N$  [24–33].

Dans les modèles avec symétrie continue, la phase de basse température est dominée à grande distance par l’interaction de modes de Goldstone (de masse nulle). Cette interaction est décrite par le modèle  $\sigma$  non-linéaire. Son étude, par le groupe de renormalisation, permet de généraliser les lois d’échelles de la théorie critique à la transition à toute la phase de basse température et d’étudier les propriétés des transitions de phase au voisinage de la dimension 2 [34–37].

Le groupe de renormalisation de la théorie quantique des champs est un groupe de renormalisation asymptotique qui est basé sur l’hypothèse que le point fixe pertinent est proche du point fixe gaussien. Dès l’origine, des formes plus générales du groupe de renormalisation ne nécessitant pas une telle hypothèse [38–40] ont été proposées. Elles prennent la forme d’équations fonctionnelles qui décrivent l’évolution de l’interaction effective, mais qui sont d’un maniement beaucoup plus difficile que les équations issues de la théorie des champs. Cependant, dans une période récente, elles ont inspiré divers schémas d’approximations différents des développements perturbatifs de la théorie des champs [41]. Pour des raisons à la fois pédagogiques et, donc, pratiques, il nous a paru utile de les décrire dans cet ouvrage.

Enfin, les appendices rassemblent différentes considérations techniques utiles pour la compréhension du texte, ou quelques développements supplémentaires.

# Bibliographie

- [1] Beaucoup de détails intéressants et des références sur l'histoire primitive de l'Électrodynamique Quantique et du problème des divergences peuvent être trouvés dans :  
S. Weinberg, *The Theory of Quantum Fields*, vol. 1, chap. 1, Cambridge (Cambridge Univ. Press 1995).  
Nombre d'articles originaux sont reproduits dans :  
J. Schwinger éd., *Selected Papers in Electrodynamics* (Dover, New York 1958).  
Voir aussi :  
N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New York 1959).
- [2] Une revue de la situation après la construction du Modèle Standard de la physique des interactions fondamentales peut être trouvée dans :  
*Methods in Field Theory*, Les Houches, 1975, R. Balian et J. Zinn-Justin eds. (North-Holland, Amsterdam 1976) ;  
C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York 1980).  
Une sélection d'articles originaux a été reproduite dans :  
*Selected papers on Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions*, C.H. Lai ed. (World Scientific, Singapore 1981).
- [3] Les idées de groupe de renormalisation en théorie des champs ont été introduites dans :  
E.C.G. Stueckelberg and A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* 26 (1953) 499 ;  
M. Gell-Mann and F.E. Low, *Phys. Rev.* 95 (1954) 1300.  
Voir aussi :  
N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New York 1959) ;  
K.G. Wilson, *Phys. Rev.* 179 (1969) 1499.
- [4] Pour une présentation des idées de groupe de renormalisation appliquées aux phénomènes critiques voir :  
L.P. Kadanoff, *Physics* 2 (1966) 263 ;  
K.G. Wilson, *Phys. Rev.* B4 (1971) 3174, *ibidem* 3184 ;  
K.G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* 12C (1974) 75.

- [5] Une introduction à l'intégrale de chemin dans l'esprit de cet ouvrage est J. Zinn-Justin, *Intégrale de chemin en mécanique quantique : introduction*, (287 pages), Collection Savoir Actuels (EDP Sciences, Les Ulis 2003).
- [6] Pour l'origine de la théorie de Landau voir :  
L.D. Landau, *Phys. Z. Sowjetunion* 11 (1937) 26, reproduit dans *Collected Papers of L.D. Landau*, D. ter Haar ed. (Pergamon, New York 1965).
- [7] E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin, *Field Theory Approach to Critical Phenomena*, contribution à l'ouvrage [11] qui décrit l'application des méthodes de la théorie quantique des champs au calcul des quantités universelles.
- [8] Des détails techniques supplémentaires sur les sujets abordés dans cet ouvrage, exposés dans le même esprit et, de façon plus générale, une présentation unifiée de la théorie quantique des champs telle qu'elle apparaît en physique des particules et dans la théorie des phénomènes critiques peuvent être trouvés dans :  
J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press 1989 (4<sup>e</sup> éd. Oxford Univ. Press, Oxford 2002).
- [9] L'idée du développement en  $\varepsilon$ -expansion est due à :  
K.G. Wilson and M.E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* 28 (1972) 240.
- [10] Après les articles originaux de Wilson, plusieurs auteurs ont montré que le groupe de renormalisation de la théorie quantique des champs pouvait être appliqué aux phénomènes critiques :  
C. Di Castro, *Lett. Nuovo Cimento*. 5 (1972) 69 ;  
G. Mack, *Kaiserslautern 1972*, Lecture Notes in Physics, vol. 17, W. Ruhl and A. Vancura eds. (Springer-Verlag, Berlin 1972) ;  
E. Brézin, J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D* 8 (1973) 434, *ibidem* 2418 ;  
P.K. Mitter, *Phys. Rev. D* 7 (1973) 2927 ;  
G. Parisi, *Cargèse Lectures 1973*, publié dans *J. Stat. Phys.* 23 (1980) 49 ;  
B. Schroer, *Phys. Rev. B* 8 (1973) 4200 ;  
C. Di Castro, G. Jona-Lasinio and L. Peliti, *Ann. Phys. (NY)* 87 (1974) 327 ;  
F. Jegerlehner and B. Schroer, *Acta Phys. Austr. Suppl.* XI (1973) 389 (Springer-Verlag, Berlin).
- [11] De nombreux physiciens qui ont participé au développement de ce sujet ont contribué à :  
*Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 6, C. Domb et M.S. Green eds. (Academic Press, London 1976).
- [12] Les premières estimations précises des exposants critiques, utilisant une idée de Parisi [13] et les séries [14], et basées sur une sommation de Borel de séries divergentes, ont été publiées dans :  
J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* 39 (1977) 95 ;

- J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* B21 (1980) 3976.  
Des résultats plus récents ont été publiés dans :  
R. Guida and J. Zinn-Justin, *J. Phys. A* 31 (1998) 8103, cond-mat/9803240.
- [13] L'utilisation de la série perturbative à dimension fixée a été proposée dans :  
G. Parisi, *Cargèse Lectures 1973*, publié dans *J. Stat. Phys.* 23 (1980) 49.
- [14] Les séries à dimension fixée ont été publiées dans :  
G.A. Baker, B.G. Nickel, M.S. Green and D.I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.* 36 (1976) 1351 ;  
B.G. Nickel, D.I. Meiron, G.B. Baker, *Univ. of Guelph Report* 1977, qui contient aussi une première estimation des exposants de type Ising.
- [15] Le développement en  $\varepsilon$  est sommé dans :  
J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *J. Physique Lett. (Paris)* 46 (1985) L137 ; *J. Physique (Paris)* 48 (1987) 19 ; *ibidem* 50 (1989) 1365.
- [16] Une estimation de l'équation d'état pour la classe du modèle d'Ising a été publiée dans :  
R. Guida and J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* B489 [FS] (1997) 626.
- [17] Par exemple, le modèle à  $N$  composantes avec symétrie cubique a été étudié dans :  
D.J. Wallace, *J. Phys. C : Solid State Phys.* 6 (1973) 1390 ;  
A. Aharony, *Phys. Rev.* B8 (1973) 3342, 3349, 3358, 3363, 4270, *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 1494.
- [18] La régularisation dimensionnelle a été introduite dans :  
J. Ashmore, *Lett. Nuovo Cimento* 4 (1972) 289 ; G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* B44 (1972) 189 ;  
C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Phys. Lett.* 40B (1972) 566, *Nuovo Cimento* 12B (1972) 20.
- [19] La forme moderne des équations de groupe de renormalisation a été publiée dans :  
C.G. Callan, *Phys. Rev.* D2 (1970) 1541 ;  
K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.* 18 (1970) 227.  
Une présentation pédagogique peut être trouvée dans :  
S. Coleman, *Dilatations, Erice Lectures 1971*, reproduit dans *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge 1985).
- [20] Les théories critiques ou de masse nulle sont discutées dans :  
K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.* 7 (1973) 34.
- [21] La forme dite homogène des équations de groupe de renormalisation a été introduite dans :  
S. Weinberg, *Phys. Rev.* D8 (1973) 3497 ;  
G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* B61 (1973) 455 ;  
J. Zinn-Justin [22].

- [22] Les équations de groupe de renormalisation en fonction de l'échelle de coupure ont été présentées dans :  
J. Zinn-Justin, *Cargèse Lectures 1973*, non publié, et incorporé ensuite dans la référence [7].
- [23] Voir aussi les ouvrages :  
M. Le Bellac, *Des Phénomènes Critiques aux Champs de Jauge*, Inter-Editions (Paris 1988) ;  
C. Itzykson et J.M. Drouffe, *Statistical field theory*, 2 vol., Cambridge, UK, Univ. Pr. (1989) 1-403.
- [24] Comme l'a montré Stanley, la limite  $N$  grand du modèle classique à  $N$  composantes coïncide avec le modèle sphérique résolu par Berlin et Kac :  
T.H. Berlin et M. Kac, *Phys. Rev.* 86 (1952) 821 ;  
H.E. Stanley, *Phys. Rev.* 176 (1968) 718.
- [25] On trouve parmi les premiers travaux sur les propriétés critiques :  
R. Abe, *Prog. Theor. Phys.* 48 (1972) 1414 ; 49 (1973) 113, 1074, 1877 ;  
S.K. Ma, *Phys. Rev. Lett.* 29 (1972) 1311 ; *Phys. Rev.* A7 (1973) 2172 ;  
M. Suzuki, *Phys. Lett.* 42A (1972) 5 ; *Prog. Theor. Phys.* 49 (1973) 424, 1106, 1440 ;  
R.A. Ferrel et D.J. Scalapino, *Phys. Rev. Lett.* 29 (1972) 413 ;  
K.G. Wilson, *Phys. Rev.* D7 (1973) 2911.
- [26] L'équation d'état à l'ordre  $1/N$  est donnée dans :  
E. Brézin et D.J. Wallace, *Phys. Rev.* B7 (1973) 1967.
- [27] La fonction de corrélation spin-spin en champ nul est obtenue dans :  
M.E. Fisher et A. Aharony, *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 1238 ;  
A. Aharony, *Phys. Rev.* B10 (1974) 2834 ;  
R. Abe et S. Hikami, *Prog. Theor. Phys.* 51 (1974) 1041.
- [28] L'exposant  $\omega$  a été calculé à l'ordre  $1/N$  dans :  
S.K. Ma, *Phys. Rev.* A10 (1974) 1818.
- [29] Voir aussi les contributions de S.K. Ma et E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin à l'ouvrage [11].
- [30] La cohérence du développement en  $1/N$  à tous les ordres a été prouvée dans :  
I. Ya Aref'eva, E.R. Nissimov et S.J. Pacheva, *Commun. Math. Phys.* 71 (1980) 213 ;  
A.N. Vasil'ev et M.Yu. Nalimov, *Teor. Mat. Fiz.* 55 (1983) 163.
- [31] À présent, les plus longues séries en  $1/N$  pour les exposants et les amplitudes se trouvent dans :  
I. Kondor et T. Temesvari, *J. Physique Lett. (Paris)* 39 (1978) L99 ;  
Y. Okabe et M. Oki, *Prog. Theor. Phys.* 60 (1978) 1277, 1287 ; 61 (1979) 443 ;  
A.N. Vasil'ev, Yu.M. Pis'mak et Yu.R. Honkonen, *Teor. Mat. Fiz.* 46 (1981) 157 ; 50 (1982) 195.
- [32] Voir aussi :  
I. Kondor, T. Temesvari et L. Herenyi, *Phys. Rev.* B22 (1980) 1451.

- [33] Le cas des forces à longue portée a été discuté dans :  
S.K. Ma, *Phys. Rev.* A7 (1973) 2172.
- [34] Le groupe de renormalisation du modèle  $\sigma$  non linéaire a été discuté dans :  
A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* 59B (1975) 79;  
E. Brézin et J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* 36 (1976) 691 ; *Phys. Rev.* B14 (1976) 3110 ;  
W.A. Bardeen, B.W. Lee et R.E. Shrock, *Phys. Rev.* D14 (1976) 985.
- [35] Les calculs d'ordres plus élevés des exposants critiques sont dus à :  
S. Hikami, *Nucl. Phys.* B215[FS7] (1983) 555 ;  
W. Bernreuther et F.J. Wegner, *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 1383 ;  
F. Wegner, *Nucl. Phys.* B316 (1989) 663.
- [36] Des spéculations sur un flot du GR près de la dimension 2, cohérentes avec la transition de Kosterlitz-Thouless pour  $N = 2$  et les résultats du modèle  $\sigma$  non linéaire  $N > 2$  peuvent être trouvés dans :  
J.L. Cardy et H.W. Hamber, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 499.
- [37] Les forces à longue portée ont été discutées dans :  
E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin, *J. Phys. A : Math. Gen.* 9 (1976) L119.
- [38] Diverses formes des équations du groupe de renormalisation fonctionnel ont été proposées initialement par :  
F.J. Wegner and A. Houghton, *Phys. Rev.* A8 (1973) 401 ;  
F.J. Wegner, *J. Physics* C7 (1974) 2098 ;  
K.G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rept.* 12C (1974) 75.
- [39] La forme des équations du groupe de renormalisation fonctionnel discutée dans cet ouvrage est inspirée de :  
J. Polchinski, *Nucl. Phys.* B231 (1984) 269.
- [40] Voir aussi la revue de :  
F.J. Wegner, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 6, C. Domb and M.S. Green eds. (Academic Press, New York 1976).
- [41] Pour des applications plus récentes de telles idées voir par exemple :  
M. Bonini, M. D'Attanasio and G. Marchesini, *Nucl. Phys.* B409 (1993) 441, *ibidem* B444 (1995) 602 ;  
J. Adams, J. Berges, S. Bornholdt, F. Freire, N. Tetradis and C. Wetterich, *Mod. Phys. Lett.* A10 (1995) 2367 ; *Int. J. Mod. Phys.* A16 (2001) 1951, hep-ph/0101178 ;  
T.R. Morris, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 131 (1998) 395, hep-th/9802039, et références incluses.



# Chapitre 1

## Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation

SANS UNE COMPRÉHENSION MINIMALE des théories quantique ou statistique (reliées par le passage au temps imaginaire) des champs, les fondements théoriques d'une partie notable de la physique du vingtième siècle demeurent incompréhensibles.

En effet, la théorie des champs, dans des incarnations variées, décrit toute la physique des interactions fondamentales à l'échelle microscopique, les propriétés singulières des transitions de phase (liquide-vapeur, ferromagnétiques, superfluide, mélanges binaires...) au voisinage du point de transition, les propriétés des gaz quantiques dilués au-delà du modèle de la condensation de Bose-Einstein, les propriétés statistiques des longues chaînes polymériques (comme de la marche au hasard avec auto-évitement sur réseau), de la percolation...

En fait, la théorie quantique des champs offre, jusqu'à présent, le cadre le plus fécond dans lequel il est possible d'étudier des systèmes physiques qui sont caractérisés par une interaction forte entre un nombre très grand de degrés de liberté.

Cependant, dès l'origine, la théorie quantique des champs a été confrontée à un problème inattendu, le problème des *infinis*. La plupart des calculs de processus physiques conduisait à des résultats infinis. Une recette empirique, la *renormalisation*, a finalement été découverte. Elle a permis de déduire d'expressions divergentes des prédictions finies. Elle n'aurait guère été convaincante si les prédictions n'avaient pas été confirmées avec une précision croissante par l'expérience. Un concept nouveau, le *groupe de renormalisation* issu de la théorie quantique des champs, mais dont la signification n'a été complètement appréciée que dans le cadre plus général des transitions de phase, a conduit, plus tard, à une interprétation satisfaisante de l'origine et du rôle des théories quantiques des champs renormalisables et du processus de renormalisation.

Ce premier chapitre essaie de donner un bref aperçu historique des origines et du développement de la théorie quantique des champs, de l'évolution des idées sur les notions de renormalisation et groupe de renormalisation qui ont conduit à notre vision présente.

Cette histoire a deux aspects, l'un très directement lié à la théorie des interactions fondamentales qui décrit les phénomènes physiques à l'échelle microscopique, l'autre à la compréhension des transitions de phase de la physique macroscopique et leurs propriétés d'universalité. Le fait que deux domaines de la physique aussi différents aient nécessité le développement des mêmes concepts est extrêmement surprenant. C'est un des charmes de l'étude de la physique que de telles relations puissent parfois émerger.

### Quelques jalons utiles :

**1925** Heisenberg jette les bases de la Mécanique Quantique, sous la forme de la mécanique des matrices.

**1926** Schrödinger publie sa célèbre équation qui fonde la Mécanique Quantique sur la solution d'une équation d'onde non-relativiste. Comme la théorie de la relativité était déjà bien établie quand la mécanique quantique fut découverte, cela peut surprendre. En fait, pour des raisons accidentelles, le spectre de l'atome d'hydrogène est plus mal reproduit par une équation d'onde relativiste sans spin<sup>1</sup>, l'équation de Klein-Gordon (1926), que par l'équation de Schrödinger non-relativiste.

**1928** Dirac introduit une équation d'onde relativiste tenant compte du spin 1/2 de l'électron, qui conduit à des résultats en bien meilleur accord avec le spectre de l'atome d'hydrogène, et ceci ouvre la voie à une théorie quantique relativiste. Dans les deux ans qui suivent, Heisenberg et Pauli établissent, dans une série d'articles, les principes généraux de la *théorie quantique des champs*.

**1934** Premier calcul correct d'électrodynamique quantique (Weisskopf) et confirmation de l'existence de divergences, appelées ultraviolettes (car dues, dans ce calcul, aux photons de très courtes longueurs d'onde).

**1937** Landau publie sa théorie générale des transitions de phase.

**1944** Solution exacte du modèle d'Ising en dimension 2 par Onsager.

**1947** Mesure du déplacement de Lamb (ou Lambshift) et accord avec les prédictions de l'électrodynamique quantique après compensation des infinis.

**1947–1949** Développement d'une méthode empirique générale pour éliminer les divergences appelée *renormalisation* (Feynman, Schwinger, Tomonaga, Dyson...).

---

<sup>1</sup>Moment cinétique intrinsèque des particules, qui prend des valeurs demi-entières (fermions) ou entières (bosons) en unité  $\hbar$ .

**1954** Yang et Mills propose une généralisation des équations de Maxwell au cas de symétries de jauge non-abéliennes (associées à des groupes non commutatifs).

**1954–1956** Découverte d'une propriété formelle de la Théorie Quantique des Champs liée à l'existence d'un *groupe de renormalisation* dont la signification profonde est imparfaitement comprise (Peterman–Stückelberg, Gell-Mann–Low, Bogoliubov–Shirkov).

**1967–1975** Le Modèle Standard, une théorie quantique des champs renormalisable basée sur les notions de symétrie de jauge non-abélienne et de symétrie brisée spontanément, est construite. Elle décrit de façon précise toutes les interactions fondamentales, sauf la gravitation.

**1971–1972** Après un travail précurseur de Kadanoff (1966), Wilson, Wegner... développent un concept plus général de groupe de renormalisation qui inclut celui de la théorie des champs dans certaines limites, et qui explique les propriétés d'universalité des transitions de phase continues (liquide–vapeur, hélium superfluide, systèmes ferromagnétiques) ou des chemins aléatoires auto-évitant.

**1972–1975** Plusieurs groupes, en particulier Brézin, Le Guillou et Zinn-Justin, développent de puissantes techniques de théorie quantique des champs qui permettent de démontrer les propriétés d'universalité des phénomènes critiques et de calculer les quantités universelles.

**1973** Politzer, Gross–Wilczek établissent, par des arguments de groupe de renormalisation, la propriété de *liberté asymptotique* d'une classe de théories de jauge non-abéliennes, ce qui permet d'expliquer le comportement de particule libre des quarks à l'intérieur des nucléons.

**1975–1976** Des informations supplémentaires sur les propriétés universelles des transitions de phase sont déduites de l'étude du modèle  $\sigma$  non linéaire et du développement en  $d - 2$  (Polyakov, Brézin–Zinn-Justin).

**1977** À la suite d'une proposition de Parisi, Nickel calcule les coefficients du développement en séries des fonctions du groupe de renormalisation, par des méthodes de théorie des champs jusqu'à un ordre élevé. Le Guillou et Zinn-Justin en déduisent les premières estimations précises des exposants critiques dans les transitions de phase.

## 1.1 L'électrodynamique quantique : une théorie quantique des champs

L'électrodynamique quantique (QED) décrit, dans un cadre quantique et relativiste, les interactions entre toutes les particules électriquement chargées et le champ électromagnétique. L'électrodynamique quantique n'est pas une théorie de particules individualisées, comme la mécanique quantique non-relativiste, mais une *Théorie Quantique des Champs*. En effet, c'est aussi une

extension quantique d'une théorie des champs classique relativiste : l'électromagnétisme dans laquelle les variables dynamiques sont des champs, les champs électrique et magnétique. Par ailleurs, la découverte du fait qu'au champ électromagnétique est associé une particule de masse nulle et de spin un, le photon, a conduit à postuler que toutes les particules sont également des manifestations de champs quantiques.

Or une telle théorie se distingue radicalement d'une théorie de particules en ce sens que les champs ont un nombre *infini de degrés de liberté*. En effet, un point matériel de la mécanique classique a trois degrés de liberté ; il est défini par ses trois coordonnées cartésiennes. Par contraste, un champ est défini par sa valeur en chaque point d'espace, ce qui représente un nombre infini de données. La non conservation du nombre de particules dans les collisions de particules à haute énergie est une manifestation de cette propriété.

Par ailleurs, les théories des champs qui apparaissent dans la physique microscopique ont une propriété de *localité*, une notion qui généralise la notion de particule ponctuelle. Elles n'ont pas de structure de courte distance.

Le nombre infini de degrés de liberté et la localité expliquent que la théorie quantique des champs puisse avoir des propriétés quelque peu « exotiques ».

*Symétries de jauge.* Dans ce qui suit, il sera beaucoup question de symétrie de jauge et de théories de jauge comme l'Électrodynamique Quantique. En mécanique quantique non-relativiste, en présence d'un champ magnétique, l'invariance de jauge correspond simplement à la possibilité d'ajouter un terme de gradient au potentiel vecteur sans changer les équations du mouvement. En mécanique quantique non-relativiste, la physique ne change pas si l'on multiplie la fonction d'onde par une phase  $e^{i\theta}$  (correspondant à une transformation du groupe abélien  $U(1)$ ). Dans le cas d'une particule chargée, en présence d'un champ magnétique, on observe une symétrie beaucoup plus grande, une symétrie de jauge : on peut changer la phase de la fonction d'onde en chaque point d'espace indépendamment :

$$\psi(x) \mapsto e^{i\theta(x)} \psi(x),$$

en modifiant de façon corrélée le potentiel vecteur.

À la différence d'une symétrie ordinaire qui correspond à faire une transformation globale sur toutes les variables dynamiques, une symétrie de jauge correspondant alors à des transformations indépendantes en tout point d'espace, voire d'espace-temps. Imposer une symétrie de jauge est un principe dynamique qui engendre des interactions, au lieu simplement de les relier entre elles comme une symétrie ordinaire ou globale. Pour rendre une théorie invariante de jauge, il est nécessaire d'introduire un potentiel vecteur couplé de façon universelle à toutes les particules chargées. En théorie relativiste, ce potentiel vecteur prend la forme d'un champ dit de jauge correspondant à une particule de spin un, le photon dans le cas de l'électrodynamique quantique.

*Unités en théorie quantique relativiste.* Les phénomènes que nous décrivons ci-dessous apparaissent dans une limite relativiste et très quantique. Il est alors

physiquement raisonnable de prendre la vitesse de la lumière  $c$  et la constante de Planck  $\hbar$  comme unités. Ainsi, dans une théorie relativiste les échelles de masse  $M$ , impulsion (ou quantité de mouvement)  $p$  et énergie  $E$  peuvent être reliées à travers la vitesse de la lumière  $c$  :

$$E = pc = Mc^2,$$

et donc exprimées dans une unité commune comme l'électron-volt (eV). Aussi, parle-t-on de façon équivalente de grande impulsion ou grande énergie.

Par ailleurs, dans une théorie quantique, l'unité d'impulsion  $p$  (ou quantité de mouvement) peut être reliée à l'unité de distance  $\ell$  par la constante de Planck :

$$p\ell = \hbar.$$

Ainsi, les expériences faites à haute énergie sondent-elles les propriétés de la matière à courte distance.

## 1.2 L'électrodynamique quantique et le problème des infinis

À la fin des années vingt, après la découverte de l'équation de Dirac, tout était en place pour la construction d'une théorie quantique et relativiste, permettant une description précise des interactions électromagnétiques entre protons et électrons. Cette théorie, dont les principes furent établis par Heisenberg et Pauli (1929–1930) était une théorie des champs et non une théorie de particules individualisées, car la découverte que le champ électromagnétique pouvait se manifester sous forme de particules (les photons) suggérait que, de façon plus générale, toutes les particules étaient des manifestations de l'existence sous-jacente de champs.

Peu après les travaux de Heisenberg et Pauli, Oppenheimer et Waller (1930) publièrent indépendamment le calcul de l'effet du champ de photons sur la propagation de l'électron, au premier ordre dans la constante de structure fine, une constante *sans dimension* qui caractérise l'intensité de la force électromagnétique,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx 1/137, \quad (1.1)$$

où  $e$  est la charge de l'électron définie à partir du potentiel de Coulomb écrit  $e^2/4\pi R$ . Comme cette constante est numériquement petite (une phrase qui a un sens car c'est une quantité sans dimension), un calcul au premier ordre est significatif.

Une des motivations pour un tel calcul était de déterminer les corrections à la masse de l'électron en électrodynamique quantique et de résoudre ainsi le puzzle du modèle classique de l'électron. En théorie relativiste, la masse d'une particule est proportionnelle à son énergie au repos. Elle inclut donc des

termes d'énergie potentielle. Or il était bien connu que le « modèle classique » de l'électron comme une sphère chargée de rayon  $R$  conduisait à un résultat qui tendait vers l'infini comme  $e^2/R$  quand on prenait la limite de rayon nul. On pouvait espérer que la mécanique quantique, qui est une théorie de fonctions d'onde, allait guérir ce problème engendré par la nature ponctuelle de l'électron.

Toutefois, les premiers résultats se révélèrent tout à fait décevants. Non seulement la contribution à la masse était infinie, mais elle divergeait plus fortement que dans le modèle classique : introduisant une borne  $\Lambda c^2$  sur l'énergie du photon, (ceci est équivalent à modifier la théorie à courte distance  $R = \hbar/c\Lambda$ ), on trouvait une divergence quadratique  $\Lambda^2 \propto 1/R^2$ . En fait, il fut bientôt découvert que ces résultats étaient erronés. En effet, les calculs perturbatifs avec les outils de l'époque étaient laborieux. On utilisait des méthodes de calcul non explicitement relativiste ; le rôle des « trous » de la théorie de Dirac (prédits être des anti-électrons ou positrons en 1931 et expérimentalement découverts en 1932) était peu clair, et l'invariance de jauge créait un problème supplémentaire. Il fallut attendre 1934 pour que soit publié le résultat correct dans un article de Weisskopf (non sans qu'une dernière erreur ait été remarquée par Furry). Le processus physique responsable de cette contribution était un processus typique de la théorie quantique des champs : l'émission et la réabsorption par un électron d'énergie-impulsion (ou quadri-impulsion)  $q$  d'un photon virtuel (en pointillé sur la figure 1.1) de quadri-impulsion  $k$ , comme représenté par le diagramme de Feynman de la figure 1.1 (une représentation imaginée par Feynman des années plus tard).

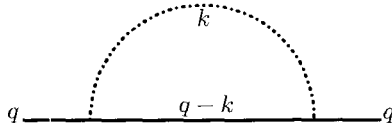


FIG. 1.1 – Contribution à la propagation de l'électron : le photon est en pointillé, l'électron en trait plein.

Le résultat était à la fois plus favorable et profondément inquiétant. La contribution à la masse était toujours infinie, quoique la divergence quadratique ait été remplacée par une divergence logarithmique beaucoup moins sévère :

$$\delta m_{\text{QED}} = -3 \frac{\alpha}{2\pi} m \ln(mRc/\hbar) ,$$

où  $m$  est la masse de l'électron.

La divergence résulte de la nécessité de sommer sur les photons virtuels de quadri-impulsion arbitrairement élevée (à cause de l'absence de structure à courte distance) d'où la dénomination de divergence ultra-violette. De plus, à cause de la conservation des probabilités, tous les processus contribuent de façon additive.

Ainsi, la théorie quantique des champs (TQC) conduisait à un résultat moins singulier que le modèle classique. Néanmoins, le problème des infinis n'était pas résolu et aucune modification simple ne pouvait être trouvée pour sauver la théorie quantique des champs.

De plus, ces divergences acquièrent même une signification beaucoup plus profonde, semblant une conséquence inévitable de la localité (les particules sont ponctuelles, avec interactions de contact) et de l'unitarité (conservation des probabilités). Or, il paraissait très difficile d'imaginer une théorie relativiste cohérente avec des particules non ponctuelles.

Le problème était donc très profond et touchait à l'essence même de la théorie. La QED était une théorie incomplète, mais il semblait difficile de la modifier sans sacrifier quelque principe physique fondamental. Il était possible de rendre la théorie finie en abandonnant l'unitarité, et donc la conservation des probabilités (comme ce fut proposé par Dirac (1942)), mais les conséquences physiques étaient difficilement acceptables. Ce que nous appelons maintenant régularisation de Pauli-Villars, une procédure *ad hoc* et temporaire pour rendre la théorie finie avant *renormalisation* (voir plus loin), est de cette nature. Il paraissait encore plus difficile de l'incorporer dans une extension relativiste non-locale (ce qui correspondrait à donner une structure interne aux particules), quoiqu'en 1938 Heisenberg ait proposé l'introduction d'une longueur fondamentale. En fait, il a fallu attendre les années quatre-vingt pour voir apparaître des candidats possibles sous le nom de théories de super-cordes.

La crise était si sérieuse que Wheeler (1937) et Heisenberg (1943) proposèrent d'abandonner complètement la théorie quantique des champs au profit d'une théorie d'observables physiques, en fait les données de collision entre particules : la théorie de la matrice  $S$ , une idée qui eut son heure de gloire dans les années soixante dans la théorie des Interactions Fortes (celles qui engendrent les forces nucléaires).

*Les infinis et le problème des bosons scalaires chargés.* Dans le même temps, des physiciens plus pragmatiques calculaient d'autres quantités physiques, explorant la forme et la nature de ces infinis. Je veux juste mentionner ici un autre article important de Weisskopf (1939) dans lequel l'auteur montre que les divergences logarithmiques persistent à tous les ordres de la théorie des perturbations, c'est-à-dire du développement en puissances de  $\alpha$ . Mais il remarque aussi que dans le cas de particules de spin nul (ou scalaires) chargées, la situation est bien pire : les divergences sont quadratiques ce qui est désastreux. En effet, si les divergences sont supprimées par un facteur de coupure (ou cut-off)  $\Lambda = \hbar/Rc$  lié à quelque nouvelle physique et que  $\Lambda/m$  n'est pas trop grand (et pour quelque temps, 100 MeV qui est la portée des forces nucléaires semblait un candidat raisonnable), alors le produit  $\alpha \ln(\Lambda/m)$  reste petit : une divergence logarithmique produit des corrections incalculables, mais néanmoins petites, ce qui n'est plus le cas pour des divergences quadratiques. Ceci pouvait être pris comme une indication que des

particules scalaires chargées ne pouvaient être considérées comme fondamentales.

Notons que ce problème est plus que jamais d'actualité puisque le Modèle Standard qui décrit avec précision tous les processus physiques entre particules jusqu'aux énergies les plus élevées accessibles dans les accélérateurs, contient une particule scalaire (c'est-à-dire sans spin), le boson de Higgs, et est maintenant appelé le problème de *l'ajustage fin* ou de *la hiérarchie*. En effet, pour compenser les infinis, il faut ajuster un paramètre de la théorie initiale avec une précision liée au rapport de la masse de la particule scalaire et du cut-off, ce qui n'est pas naturel. Ce problème est devenu particulièrement sévère depuis que nous avons pris conscience que des échelles de masse aussi grande que  $10^{15}$  (masse d'unification) ou  $10^{19}$  GeV (masse de Planck) peuvent être impliquées. Il est une des motivations principales pour l'introduction de la *Supersymétrie* (une symétrie qui, de façon très surprenante, relie des bosons à des fermions). La découverte expérimentale du boson de Higgs et la compréhension de ses propriétés sont parmi les enjeux majeurs de la nouvelle génération d'accélérateurs comme le Large Hadron Collider ou LHC actuellement en construction au CERN près de Genève.

### 1.3 Méthode de renormalisation

Calculant nombre de quantités physiques différentes, les physiciens notèrent que bien que beaucoup de quantités physiques étaient divergentes, c'étaient toujours les mêmes termes divergents qui apparaissaient. On pouvait donc trouver des combinaisons qui étaient finies (Weisskopf 1936). Toutefois, la signification physique d'une telle propriété, la compensation des infinis, était totalement obscure. En réalité, en l'absence de toute compréhension profonde du problème, peu de progrès était possible.

Chaque fois que les physiciens sont confrontés à de telles difficultés conceptuelles, la réponse ne peut venir que de l'expérience.

Ainsi, en 1947 Lamb et Retherford mesurèrent avec précision la séparation entre les niveaux  $2s_{1/2}2p_{1/2}$  de l'atome d'hydrogène, tandis que le groupe de Rabi à Columbia mesurait le moment magnétique anormal de l'électron. De façon assez remarquable, il fut possible d'organiser le calcul du déplacement de Lamb de telle sorte que les infinis se compensent (premier calcul approché par Bethe) et le résultat se trouva être en très bon accord avec l'expérience. Peu de temps après, Schwinger obtint le terme dominant du moment magnétique anormal de l'électron.

Ces résultats entraînèrent d'extraordinaires développements théoriques (un travail antérieur de Kramers sur la renormalisation de masse de l'électron classique étendu se révéla important pour généraliser l'idée de compensation des infinis par soustraction, à l'idée de renormalisation). En 1949 Dyson, s'appuyant sur les travaux de Feynman, Schwinger et Tomonaga, donna la première preuve de la compensation des infinis à tous les ordres de la théorie

des perturbations. Ce qui fut alors baptisée *théorie de la renormalisation* conduisait en QED à des résultats finis pour toutes les observables physiques.

L'idée est la suivante : on commence avec une théorie appelée *nue* qui dépend de paramètres comme la *masse nue*  $m_0$  et la *charge nue*  $e_0$  de l'électron (les masse et charge en l'absence d'interactions), ou, ce qui est équivalent, la constante de structure fine nue  $\alpha_0 = e_0^2/4\pi\hbar c$ . On introduit, de plus, une échelle de coupure des grandes impulsions  $c\Lambda$ , appelée *cut-off* (ce qui correspond à modifier de façon quelque peu arbitraire et non-physique la théorie à une très courte distance d'ordre  $\hbar/c\Lambda$ ). On calcule alors les valeurs physiques (c'est-à-dire, celles qu'on mesure), appelées *renormalisées*, des mêmes quantités (comme la charge observée  $e$ , et donc la constante de structure fine  $\alpha$  et la masse physique  $m$ ) en fonction des paramètres nus et du cut-off :

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 - \beta_2 \alpha_0^2 \ln(\Lambda/m_0) + \dots, \\ m &= m_0 - \gamma_1 m_0 \alpha \ln(\Lambda C_1/m_0) + \dots.\end{aligned}$$

$\beta_2$ ,  $\gamma_1$  et  $C_1$  sont trois constantes numériques. On inverse ces relations, exprimant maintenant les quantités nues en fonction des quantités renormalisées. Dans cette substitution on échange par exemple la constante nue  $\alpha_0$  avec la constante physique ou renormalisée  $\alpha$  comme paramètre de développement :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha + \beta_2 \alpha^2 \ln(\Lambda/m) + \dots, \\ m_0 &= m + \gamma_1 m \alpha \ln(\Lambda C_1/m) + \dots.\end{aligned}$$

On exprime ensuite toute autre observable (c'est-à-dire, toute autre quantité mesurable), initialement calculée en termes des paramètres nus, en termes de ces quantités physiques ou renormalisées. De façon très surprenante, quand on prend la limite du cut-off  $\Lambda$  infini, toutes les observables physiques ont alors une limite finie.

Cette procédure, *a priori* un peu étrange, la renormalisation, a permis et permet toujours des calculs de précision croissante en QED, dont l'accord avec l'expérience démontre de façon absolument convaincante que la TQC renormalisée est le formalisme adéquat pour décrire l'électrodynamique au niveau quantique (c'est même le domaine de la physique où l'accord entre théorie et expérience a été vérifié avec le plus de précision).

De plus, la théorie de la renormalisation a conduit au concept très important de *théories renormalisables*. Seul un nombre limité de théories des champs conduit à des résultats finis par cette procédure. Ceci contraint donc fortement la structure des théories possibles.

Notons, enfin, que pendant plus de quinze ans les progrès théoriques avaient été bloqués par le problème des divergences en TQC. Pourtant, une fois que l'expérience commença à procurer des informations décisives, en deux ans un cadre complet et cohérent pour des calculs perturbatifs fut développé.

*L'énigme de la renormalisation.* Quoiqu'il fut maintenant évident que la QED était la théorie correcte, la procédure de renormalisation permettant d'obtenir des réponses finies restait une énigme pour nombre de théoriciens. La signification de la recette de renormalisation, et donc des paramètres nus restait obscure. Beaucoup d'efforts furent alors consacrés à essayer de surmonter cette faiblesse conceptuelle fondamentale. Plusieurs types de solutions furent proposés :

- (i) Le problème était lié à la théorie des perturbations et une sommation correcte du développement en puissance de  $\alpha$  ferait disparaître le problème. Quelque peu relié à cette démarche, (i) fut le développement de ce qui fut appelé *la TQC Axiomatique* qui essayait d'extraire des résultats rigoureux et non-perturbatifs des principes généraux sur lesquels la TQC était basée.
- (ii) Le problème était de nature mathématique : la procédure qui engendrait le développement renormalisé devait être modifiée pour éviter l'introduction de divergences non-physiques et pour engendrer automatiquement des quantités finies. La théorie nue initiale avec ses paramètres (nus) infinis n'avait simplement pas de signification physique. La ligne de pensée (ii) conduisit au formalisme BPHZ (Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann), et finalement au travail d'Epstein–Glaser, où le problème des divergences dans l'espace des positions (plutôt que l'espace des impulsions) était réduit au problème mathématique d'une définition correcte de produits de distributions singulières. Les efforts correspondants furent très efficaces pour clarifier les principes de calculs perturbatifs, mais aussi pour déguiser le problème des divergences de telle manière qu'il semblait n'avoir jamais existé.
- (iii) Finalement, le cut-off avait un sens physique et était engendré par des interactions supplémentaires, non-descriptibles par la TQC. Un candidat favori, jusqu'à la fin des années soixante, fut l'Interaction Forte (le cut-off étant procuré par la portée des forces nucléaires). Il restait alors à comprendre le sens de la renormalisation, qui pouvait s'interpréter comme une certaine insensibilité des observables physiques à la structure de la théorie à courte distance.

Ce dernier point de vue est le plus proche du point de vue moderne, quoique le cut-off nécessaire ne soit bien sûr plus procuré par les Interactions Fortes.

## 1.4 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation

Au milieu des années cinquante, il fut noté par plusieurs groupes, en particulier Peterman–Stückelberg (1953), Gell-Mann–Low (1954) et Bogoliubov–

Shirkov (1955-1956), que dans la limite d'une QED réduite aux photons et à des électrons de masse nulle, le développement perturbatif renormalisé avait une propriété formelle curieuse, conséquence directe du processus de renormalisation lui-même.

Dans une théorie massive, la charge renormalisée caractérise l'interaction électrique de particules au repos (la force de Coulomb). Cette définition devient inopérante pour des particules de masse nulle qui se propagent toujours à la vitesse de la lumière. Il devient alors nécessaire d'introduire une échelle de masse (ou d'énergie, ou d'impulsion)  $\mu$  arbitraire pour définir la charge  $e$  renormalisée : elle est liée à l'intensité de la force électromagnétique mesurée dans des collisions d'une impulsion d'ordre  $c\mu$ . On peut appeler cette charge renormalisée la *charge effective* à l'échelle  $\mu$ . Toutefois, comme cette masse  $\mu$  est arbitraire, on peut trouver d'autres couples  $\{e', \mu'\}$  qui donne les mêmes résultats physiques. L'ensemble des transformations des paramètres physiques, associées à ces changements d'échelle de masse, et nécessaires pour maintenir les résultats physiques inchangés, fut appelé *groupe de renormalisation* (GR). Faisant un changement d'échelle infinitésimal, on peut décrire la variation (ou le flot) de la charge effective par une équation différentielle :

$$\mu \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} = \beta(\alpha(\mu)), \quad \beta(\alpha) = \beta_2 \alpha^2 + O(\alpha^3), \quad (1.2)$$

où la fonction  $\beta(\alpha)$  peut être obtenue à partir de développements perturbatifs en puissances de  $\alpha$ .

Même dans une théorie massive, il est possible d'introduire cette définition. La charge effective a alors l'interprétation physique suivante. À grande distance, l'intensité de la force électromagnétique ne varie pas et a une valeur qu'on peut mesurer à travers la force de Coulomb. Toutefois, à des distances plus petites que la longueur d'onde  $\hbar/mc$  associée à une particule (on explore en quelque sorte « l'intérieur » de la particule), on observe des effets d'écrantage ou d'anti-écrantage. Ce qui est remarquable c'est que ces effets, évidemment de courte distance, sont aussi liés à la renormalisation.

Comme la préoccupation principale était le problème des divergences de grande impulsion en TQC, Gell-Mann et Low essayèrent d'utiliser le GR pour étudier le comportement de la charge nue à grand cut-off. La charge nue peut en effet s'interpréter comme la charge effective à l'échelle du cut-off. Si la fonction  $\beta(\alpha)$  avait eu un zéro avec une pente négative, ce zéro aurait été la limite finie à cut-off infini de la charge nue, au-delà de la théorie des perturbations.

Malheureusement, la QED est une théorie libre à grande distance ( $\beta_2 > 0$ ), ce qui signifie que la charge effective décroît à faible impulsion, et réciproquement, croît à grande impulsion jusqu'à ce que le développement perturbatif de la fonction  $\beta$  ne soit plus valable. Cette variation est vérifiée expérimentalement puisque la valeur de  $\alpha$ , mesurée près de la masse du boson intermédiaire

des Interactions Faibles  $Z$  vers 100 GeV, est environ 4 % plus grande que la valeur mesurée à basse énergie.

Il est frappant de constater que si ces auteurs n'avaient pas insisté pour prendre la limite du cut-off infini, ils auraient été conduits à des conclusions plus intéressantes.

Notons encore quelques spéculations reliées : Landau et Pomeranchuk (1955) remarquèrent que si, dans le calcul de la propagation de l'électron dans le champ électromagnétique, on somme les termes dominants à grande impulsion à chaque ordre, on prédit l'existence d'une particule de masse  $M$  :

$$M \propto m e^{1/\beta_2 \alpha} .$$

Cette particule aurait malheureusement des propriétés physiquement inacceptables, conduisant à des violations de la conservation des probabilités, et fut donc appelée « fantôme » de Landau. Pour Landau, c'était le signe de quelque incohérence de la QED, quoique sans conséquence physique immédiate, parce que  $\alpha$  est si petit que cet état non-physique a une masse de l'ordre de  $10^{30}$  GeV. Bogoliubov et Shirkov montrèrent alors correctement que ce résultat correspondait à résoudre l'équation de GR (1.2) à l'ordre dominant, dans la limite de faible charge effective. Comme la charge effective devenait grande à grande impulsion, la théorie des perturbations n'était pas crédible dans ce régime de grande masse. Il est amusant de noter que dans le point de vue moderne, nous croyons que l'intuition de Landau était fondamentalement correcte, même si son argument était quelque peu naïf dans sa formulation initiale.

## 1.5 Le triomphe de la théorie quantique des champs : le Modèle Standard

*La théorie quantique des champs dans les années soixante.* Après le triomphe de la QED, les années soixante furent des années difficiles pour la TQC. La situation peut être décrite de la manière suivante :

Il restait trois problèmes essentiels à résoudre correspondant aux trois autres interactions connues :

- (i) Les Interactions Faibles étaient décrites par la théorie des champs non renormalisable de Fermi (Feynman–Gell-Mann). Puisque le couplage était faible, et l'interaction de type interaction entre courants, un peu comme en électrodynamique quand on ne quantifie pas le photon, il était concevable que cette théorie fût, en quelque sorte, l'approximation dominante à une théorie du genre QED, mais avec au moins deux photons chargés et très lourds (masse de l'ordre de 100 GeV), parce que l'interaction apparaissait essentiellement comme ponctuelle.

Des théories des champs classiques, appelées théories de jauge non-abéliennes, c'est-à-dire des théories où les interactions sont engendrées par un principe de symétrie généralisé appelé symétrie de jauge, avaient bien été construites. Elles généralisaient la QED au cas de « photons » chargés (Yang–Mills 1954). Mais d'une part, leur quantification posait des problèmes nouveaux et difficiles. D'autre part, une autre difficulté venait de ce que les théories de jauge ont une forte tendance à produire des particules de masse nulle, comme le photon. Ainsi, quelques théoriciens essayaient à la fois de quantifier ces théories des champs et de trouver les moyens d'engendrer des termes de masse, dans le cadre de théories renormalisables.

- (ii) Beaucoup pensaient, en revanche, que le cas de la TQC était désespéré dans la physique des Interactions Fortes : parce que les interactions étaient trop fortes, un calcul perturbatif n'avait pas de sens. Une théorie des observables physiques, appelée théorie de la matrice  $S$ , paraissait le cadre adéquat pour décrire cette physique, et la localité stricte devait sans doute être abandonnée. On peut d'ailleurs noter une première incarnation de la théorie des Cordes dans ce contexte.
- (iii) Enfin, la force gravitationnelle étant extrêmement faible à courte distance, il n'y avait pas d'urgence immédiate à s'occuper de la gravitation quantique, et la solution de ce problème d'impact expérimental incertain pouvait attendre.

*Le triomphe de la TQC renormalisable.* Vers la fin des années soixante, la situation évolua très rapidement. On trouva enfin une méthode pour quantifier les théories de jauge non-abéliennes (Faddeev–Popov, De Witt 1967). On put démontrer que ces nouvelles théories étaient renormalisables ('t Hooft, 't Hooft–Veltman, Slavnov, Taylor, Lee–Zinn-Justin, Becchi–Rouet–Stora, Zinn-Justin 1971–1975), même dans une phase de symétrie brisée spontanément qui permettait de donner des masses non nulles aux particules de jauge correspondantes (le mécanisme de Higgs, Brout–Englert, Guralnik–Hagen–Kibble 1964). Ces développements permirent de construire une version quantique d'un modèle pour les Interactions Faibles basé sur une symétrie de jauge, qui avait été proposé auparavant (Weinberg 1967, Salam 1968) et qui unifiait, dans une certaine mesure, l'électromagnétisme et l'interaction faible. Ses prédictions devaient être rapidement confirmées par l'expérience.

Dans la situation très confuse des Interactions Fortes, la solution vint comme souvent dans de tels cas de l'expérience. Les expériences de Diffusion Profondément Inélastique faites au SLAC (Stanford), qui sondaient l'intérieur des protons et neutrons, révélèrent que ces hadrons étaient composés de particules ponctuelles quasi libres, appelées initialement *partons* et finalement identifiées avec les *quarks*, ces entités mathématiques qui avaient été introduites pour décrire de façon simple le spectre des particules ayant des interactions fortes et ses symétries.

Pour comprendre ce phénomène particulier, on fit appel aux idées de GR dans une version modernisée (Callan, Symanzik 1970) valable aussi pour les théories massives. Cependant, le phénomène resta quelque temps mystérieux jusqu'à ce qu'une théorie des champs qui ait la propriété de *liberté asymptotique* puisse être trouvée, c'est-à-dire, une théorie dans laquelle les interactions effectives deviennent faibles à très courte distance (par contraste avec la QED) de façon à expliquer les résultats du SLAC. Finalement, les mêmes progrès théoriques dans la quantification des théories de jauge non-abéliennes qui avaient permis de modéliser les Interactions Faibles, permirent de construire une théorie de l'Interaction Forte : la Chromodynamique Quantique (QCD). En effet, les théories de jauge non-abéliennes, avec un nombre limité de fermions, sont *asymptotiquement libres* (Gross-Wilczek, Politzer 1973). À la différence de la QED, le premier coefficient  $\beta_2$  de la fonction  $\beta$  pour la charge forte est alors négatif. La faiblesse des interactions entre quarks à courte distance devient une conséquence par la décroissance de la charge forte effective.

Ainsi, autour de 1973-1974, un modèle complet de TQC pour toutes les interactions fondamentales sauf la gravitation fut proposé, maintenant appelé le Modèle Standard. Ce modèle a survécu avec un succès croissant à plus de vingt-cinq ans de tests expérimentaux, à part quelques modifications mineures récentes nécessitées par les masses non-nulles et les oscillations de neutrinos. Ce fut le triomphe de toutes les idées basées sur le concept de TQC renormalisable.

Comme conséquence, il devenait tentant de conclure, qu'en quelque sorte, une nouvelle loi de la nature avait été découverte : toutes les interactions peuvent être décrites par des TQC *renormalisables* et par la théorie des perturbations renormalisée. Le problème des divergences avait à cette époque été si bien camouflé, que pour beaucoup de physiciens ce n'était plus un réel souci.

Un problème potentiel restant était ce que Weinberg appelait la condition de protection asymptotique (*asymptotic safety*) : l'existence de points fixes de grande impulsion du GR, dans le formalisme de l'équation (1.2) des solutions de

$$\beta(\alpha) = 0, \quad \text{avec} \quad \beta'(\alpha) < 0,$$

semblait nécessaire pour la cohérence à toute échelle d'une TQC (l'option déjà considérée par Gell-Mann et Low). Les théories des champs asymptotiquement libres partagent bien sûr cette propriété, mais les champs scalaires (comme requis par le mécanisme de Higgs) ont tendance à détruire la liberté asymptotique.

Enfin, il restait à inscrire la gravitation quantique dans ce cadre renormalisable, et ceci devint le but de beaucoup d'études théoriques dans les années qui suivirent. L'échec, jusqu'à présent, de ce programme a conduit à l'introduction de la théorie des cordes.

## 1.6 Phénomènes critiques : d'autres infinis

La théorie de phénomènes critiques a comme objet la description des transitions de phase continues ou du second ordre dans les systèmes macroscopiques. Des exemples simples sont fournis par les transition liquide-vapeur, de séparation dans les mélanges binaires, de l'hélium superfluide, les transitions magnétiques. Le modèle sur réseau le plus simple qui exhibe une telle transition est le fameux modèle d'Ising.

Ces transitions sont caractérisées par des comportements collectifs à grande échelle à la température de transition (la température critique  $T_c$ ). Par exemple la longueur de corrélation, qui caractérise l'échelle de distance sur laquelle des comportements collectifs sont observés, devient infinie. Près de  $T_c$ , ces systèmes font donc apparaître deux échelles de longueur très différentes, une échelle microscopique liée à la taille des atomes, la maille du cristal ou la portée des forces, et une autre engendrée dynamiquement, la longueur de corrélation. À cette nouvelle échelle est associée une physique de longue distance ou macroscopique non-triviale.

On s'attend alors à ce que cette physique, près de la température critique, puisse faire l'objet d'une description macroscopique, ne faisant intervenir qu'un petit nombre de paramètres adaptés à cette échelle, sans référence explicite aux paramètres microscopiques initiaux. Cette idée conduit à la Théorie du Champ Moyen (TCM) et dans sa forme la plus générale à la théorie de Landau des Phénomènes Critiques (1937). Une telle théorie peut aussi être qualifiée de quasi-gaussienne, en ce sens qu'elle suppose implicitement que les corrélations entre variables aléatoires à l'échelle microscopique peuvent être traitées de façon perturbative, et donc les valeurs moyennes macroscopiques suivent des lois quasi-gaussiennes, comme le théorème de la limite centrale des probabilités nous l'enseigne.

Parmi les prédictions les plus simples et les plus solides d'une telle théorie, on trouve l'*universalité* des comportements singuliers des quantités thermodynamiques quand on s'approche de  $T_c$  : par exemple la longueur de corrélation  $\xi$  diverge toujours comme  $(T - T_c)^{-1/2}$ , l'aimantation spontanée s'annule comme  $(T_c - T)^{1/2}$ ..., ces propriétés étant indépendantes de la dimension de l'espace, de la symétrie du système, et bien sûr des détails de la dynamique microscopique.

Aussi, les physiciens furent-ils très surpris quand quelques expériences ainsi que des calculs de systèmes-modèle de mécanique statistique sur réseau commencèrent à mettre en doute les prédictions de la TCM. Un coup supplémentaire à la TCM fut porté par la solution exacte du modèle d'Ising à deux dimensions par Onsager (1944) qui confirma les calculs numériques sur réseau correspondant. Dans les années suivantes, les preuves empiriques s'accumulèrent, montrant que les Phénomènes Critiques en deux et trois dimensions d'espace ne pouvaient pas être décrits quantitativement par la TCM. En fait, on trouva que le comportement critique variait avec la dimension d'espace

ainsi qu'avec d'autres propriétés générales des modèles. Néanmoins, il semblait aussi qu'une certaine *universalité* survivait, mais d'une étendue plus limitée. Quelques propriétés spécifiques paraissaient importantes, mais pas tous les détails de la dynamique microscopique.

*Le non-découplage des échelles.* Pour comprendre combien le problème était profond, il faut prendre conscience que cette situation n'avait jamais été confrontée auparavant. En effet, l'ingrédient principal de la théorie de Landau est l'hypothèse que, comme d'habitude en physique, les phénomènes qui correspondent à des échelles de distance trop différentes se découplent.

Illustrons cette idée par un exemple classique très simple. À un niveau naïf, on obtient  $\tau$ , la période du pendule, à un facteur numérique près, par analyse dimensionnelle,

$$\tau \propto \sqrt{\ell/g} ,$$

où  $\ell$  est la longueur du pendule et  $g$  est l'accélération de la pesanteur. En réalité, dans cet argument se cache une hypothèse physique essentielle : à savoir qu'on peut oublier la structure atomique interne du pendule, la taille de la terre ou la distance terre soleil. Ces échelles de distance n'interviennent pas parce que beaucoup trop petites ou trop grandes par rapport à l'échelle du pendule. On s'attend à ce qu'elles donnent des corrections de l'ordre du rapport  $\lambda = (\text{petite échelle}/\text{grande échelle})$  et donc négligeables avec une bonne approximation. Bien sûr, il existe des fonctions mathématiques qui ne sont pas très petites même quand le rapport  $\lambda$  est petit telles que  $1/\ln \lambda$ . Mais ces fonctions sont singulières et, la nature étant bonne fille, elle ne met pas en général des singularités là où cela n'est pas indispensable.

De même, en mécanique Newtonienne, pour décrire le mouvement planétaire on peut oublier dans une très bonne approximation, à la fois les autres étoiles et la taille du soleil et des planètes, qui peuvent être remplacés par des objets ponctuels. De la même manière encore, en mécanique quantique non-relativiste, on peut ignorer la structure interne du proton, et obtenir les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène avec une excellente précision.

L'échec de la théorie du champ moyen démontre, au contraire, que ceci n'est plus généralement vrai pour les Phénomènes Critiques, une situation inattendue et totalement nouvelle. En fait, si l'on essaye de calculer des corrections à la théorie du champ moyen, on trouve des divergences quand la température s'approche de la température critique. Ces divergences font intervenir le rapport de la longueur de corrélation et de l'échelle microscopique, une situation réminiscente de la physique des particules, à ceci près que dans l'interprétation conventionnelle de la théorie des champs, c'est l'échelle microscopique qu'on veut faire tendre vers zéro, alors qu'ici c'est l'échelle macroscopique (la longueur de corrélation) qui tend vers l'infini.

Les divergences rencontrées dans la théorie des champs de la physique des particules et la théorie des phénomènes critiques ont, en fait, une origine commune : le non-découplage des différentes échelles de physiques. Les infinis apparaissent quand on essaye d'ignorer comme on en a l'habitude, et comme

il est généralement justifié, l'existence d'une échelle de physique où les lois de la physique sont très différentes.

On aurait pu craindre, dans ces conditions, que la physique macroscopique soit sensible à toute la structure de courte distance, que les phénomènes à grande distance dépendent de la dynamique microscopique détaillée et donc soient essentiellement imprédictibles. La survivance d'une universalité, même réduite, était encore plus surprenante. Pour comprendre toutes ces observations, un nouveau cadre conceptuel devait évidemment être inventé.

## 1.7 Le groupe de renormalisation de Kadanoff–Wilson

En 1966, Kadanoff proposa une méthode pour attaquer ce problème : calculer les observables physiques de façon récursive en sommant d'abord sur les degrés de liberté de courte distance. On obtient ainsi une suite de modèles effectifs qui ont tous les mêmes propriétés de longue distance. Comme lui, nous allons illustrer l'idée par le modèle d'Ising, mais avec un point de vue plus général.

*Un exemple : le modèle d'Ising.* Le modèle d'Ising est un modèle de mécanique statistique sur réseau. À chaque site  $i$  du réseau est associée une variable aléatoire  $S_i$  qui ne peut prendre que les valeurs  $\pm 1$ , un spin « classique ». Les quantités thermodynamiques sont obtenues en moyennant sur toutes les configurations de spins avec un poids de Boltzmann  $e^{-\mathcal{H}_a(S)/T}$ , où  $T$  est la température,  $a$  la maille du réseau, et  $\mathcal{H}_a(S)$  une énergie de configuration correspondant à une interaction de courte portée (par exemple, seuls les spins proches voisins sur le réseau sont couplés).

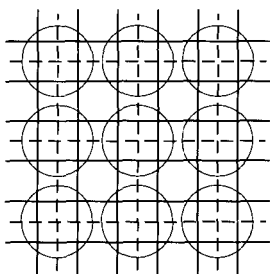


FIG. 1.2 – Réseau initial et réseau de maille double.

Les transitions de phase n'apparaissent que dans la limite de volume infini, appelée limite thermodynamique. Bien sûr, en général on ne sait pas calculer les moyennes exactement. Mais on voudrait au moins comprendre les propriétés d'universalité.

L'idée alors est de sommer sur les spins  $S_i$  à moyenne sur un sous-réseau de maille  $2a$  fixée. Par exemple, sur un réseau carré on regroupe les spins sur des carrés disjoints et fixe la moyenne sur chaque carré (figure 1.2). Après cette sommation, la fonction de partition est donnée en sommant sur des configurations de ces spins moyens (qui prennent plus de deux valeurs) sur un réseau de maille double. À ces spins correspondent une nouvelle énergie de configuration  $\mathcal{H}_{2a}(S)$  appelée interaction *effective* à l'échelle  $2a$ . On peut itérer cette transformation,

$$\mathcal{H}_{2^n a}(S) = \mathcal{T} [\mathcal{H}_{2^{n-1} a}(S)], \quad (1.3)$$

aussi longtemps que la maille du réseau reste petite comparée à la longueur de corrélation, c'est-à-dire l'échelle des phénomènes macroscopiques qu'on veut décrire. Si l'application répétée de cette transformation produit une interaction effective dont la forme asymptotique est indépendante dans une large mesure de l'interaction initiale, on peut comprendre l'universalité restante. De telles interactions apparaîtront comme *points fixes* ou *surfaces fixes* de la transformation  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{H}^*(S) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{2^n a}(S), \quad \mathcal{H}^*(S) = \mathcal{T} [\mathcal{H}^*(S)].$$

Ce fut Wilson (1971) qui transforma une idée à l'origine un peu vague, en un cadre précis et opérationnel, unifiant finalement le groupe de renormalisation de Kadanoff et celui de la théorie quantique des champs. Ceci conduisit à une compréhension de l'universalité, comme conséquence de l'existence de points fixes de longue distance du groupe de renormalisation général. Il devint possible de développer des méthodes de calcul précises des quantités universelles, avec l'aide de techniques déjà partiellement préexistantes de la théorie quantique des champs (Brézin–Le Guillou–Zinn-Justin 1973).

*Limite continue et théorie quantique des champs.* La première étape consiste à comprendre que l'itération (1.3) conduit asymptotiquement à une théorie des champs dans l'espace continu.

Il est clair que dans le modèle d'Ising, après de nombreuses itérations, la variable de spin effective, qui est une moyenne locale d'un grand nombre de spins, prend essentiellement un continuum de valeurs. De même, la taille du réseau initial devient de plus en plus petite par rapport à la maille du réseau itéré. On peut donc remplacer la variable de spin effective par un champ continu  $S(x)$  de l'espace continu. La somme sur les spins devient une intégrale sur les champs, ou intégrale fonctionnelle, (généralisation de l'intégrale de chemin) formellement analogue à celle qui permet de calculer les observables physiques en théorie quantique des champs, mais avec une interaction de forme beaucoup plus générale.

*Le point fixe gaussien.* Une propriété qui devient alors apparente est que le modèle gaussien est un point fixe du GR (ce qui est en rapport direct

avec le théorème de la limite centrale de la théorie des probabilités). À la température critique, dans la limite de grande distance, il prend la forme d'une théorie quantique de champs (scalaires) libres et sans masses au sens de la théorie des interactions fondamentales. Par ailleurs, le modèle gaussien faiblement perturbé reproduit tous les résultats connus de la TCM.

Une analyse plus fine montre cependant qu'un développement perturbatif systématique autour du modèle gaussien contient des contributions infinies, au moins en dimensions d'espace plus petites que quatre. Le modèle gaussien correspond à un point fixe instable du groupe de renormalisation. En outre, les termes les plus singuliers sont engendrés par une TQC renormalisable dont il reste à étudier les propriétés à longue distance. Ce qui est frappant dans cette approche, c'est l'apparition naturelle d'une TQC renormalisable comme théorie effective pour décrire la physique de grande distance des phénomènes critiques. Le groupe de renormalisation de la TQC apparaît alors comme une forme limite du groupe de renormalisation général à la Wilson–Kadanoff.

Il devient alors difficile de résister à la tentation d'appliquer les idées issues de la physique statistique des transitions de phase à la TQC qui décrit la physique des interactions fondamentales.

## 1.8 Théories quantiques des champs effectives

La condition que les interactions fondamentales devaient être décrites par des théories renormalisables a été un des principes de base dans la construction du Modèle Standard. Du succès de ce programme, il pouvait être conclu que le principe de renormalisabilité était une nouvelle loi de la nature. Ceci impliquait évidemment que toutes les interactions incluant la gravitation devaient être descriptibles par de telles théories. L'incapacité d'exhiber une version renormalisable de la théorie de la gravitation quantique a donc jeté un doute sur le programme lui-même. En effet, si le Modèle Standard et ses extensions naturelles possibles n'étaient que des théories approchées, il devenait difficile de comprendre pourquoi elles devaient obéir à un principe aussi abstrait.

La théorie des phénomènes critiques, et l'apparition naturelle de théories des champs renormalisables, a conduit à une interprétation beaucoup plus simple et plausible. On peut maintenant imaginer que les interactions fondamentales sont décrites à l'échelle microscopique (bien sûr microscopique, comme la longueur de Planck, par rapport aux échelles de distance actuellement accessibles), ou à très grande énergie, par une théorie finie qui n'a pas la nature locale d'une théorie quantique des champs. Bien que cette théorie ne fasse intervenir qu'une échelle microscopique, pour des raisons qui restent à comprendre, elle engendre, par l'effet coopératif d'un grand nombre de degrés de liberté, une physique de grande distance avec interactions entre particules de très faible masse. Dans les phénomènes critiques, c'est l'expérimentateur qui ajuste la température à sa valeur critique pour faire diverger la longueur de corrélation. Dans la physique des interactions fondamentales, ceci doit se

produire naturellement, sinon on est confronté au fameux problème de *l'ajustage fin*. Comme la masse de Planck est au moins de l'ordre de  $10^{13}$  fois la masse de la particule de Higgs, dont l'existence est conjecturée par le Modèle Standard, il faudrait qu'un paramètre de la théorie soit par accident proche de sa valeur critique avec une précision analogue.

Quelques mécanismes possibles sont connus, qui engendrent des particules de masse nulle, les symétries brisées spontanément avec bosons scalaires dit de Goldstone, les particules au coeur des interactions de jauge tel le photon, la symétrie chirale qui produit des fermions de masse nulle (mais aucun schéma n'est actuellement établi).

Alors, comme conséquence de l'existence d'un point fixe de longue distance, la physique de basse énergie de faible masse ou de longue distance, peut être décrite par une théorie des champs effective. Cette théorie des champs est munie naturellement d'un cut-off, réflexion de la structure microscopique initiale, et contient toutes les interactions locales permises par le contenu en champs et les symétries. Si la théorie des champs libres (c'est-à-dire la TCM) n'est pas une trop mauvaise approximation (le point fixe est suffisamment proche du point fixe gaussien), les interactions peuvent être classées par la dimension des couplages correspondants. Ainsi, les interactions de type non-renormalisables, qui apparaissent dans la présentation traditionnelle de la TQC comme très dangereuses, sont automatiquement supprimées par des puissances du cut-off (c'est sans doute le cas de la gravitation d'Einstein). Les interactions renormalisables qui sont sans dimension n'évoluent que très lentement (logarithmiquement) avec l'échelle et survivent à longue distance. Ce sont elles qui déterminent la physique à basse énergie. Les interactions super-renormalisables (ceci inclut aussi les termes de masse), qu'on juge inoffensives dans la présentation conventionnelle de la TQC car elles engendrent le moins de divergences, doivent être naturellement absentes ou très faibles car elles croissent à longue distance. La théorie nue est alors une version de la théorie effective dans laquelle toutes les interactions non-renormalisables ont déjà été négligées. Elle n'a nul besoin d'être physiquement cohérente à très courte distance où elle ne constitue plus une approximation valable, et où on peut la modifier de façon largement arbitraire pour la rendre finie.

Bien sûr, cette interprétation n'a aucune influence sur la manière dont les calculs perturbatifs sont effectués, et on pourrait donc se demander si le problème n'est pas de nature quasi philosophique. Pas tout à fait !

Nous avons mentionné ci-dessus, que prendre la théorie nue au sérieux, conduit, en particulier, à confronter le problème de l'ajustage fin des masses des particules scalaires (ceci s'applique donc au boson de Higgs) et donc force à chercher des solutions (supersymétrie, état lié de fermions plus fondamentaux?).

Cette interprétation résout le problème de la *trivialité* : des interactions renormalisées décroissant logarithmiquement avec le cut-off sont acceptables parce que le cut-off est fini. Reprenons l'exemple de la QED et utilisons

l'argument de Gell-Mann–Low en sens inverse. À charge nue maintenant fixée, la charge effective à la masse  $\mu$  tend vers zéro comme  $1/\ln(\Lambda/\mu)$ , ce qui est acceptable pour toute valeur raisonnable du cut-off  $\Lambda$  si  $\mu$  est de l'ordre de grandeur de la masse de l'électron. Ceci peut même expliquer la faible valeur de la constante de structure fine.

Elle suggère la possibilité de découverte d'interactions de type non renormalisables, bien qu'elles soient *a priori* très faibles. Un mécanisme possible est le suivant. Dans les phénomènes critiques, on peut trouver des situations dans lesquels la théorie réduite aux interactions renormalisables a plus de symétrie que la théorie complète (la symétrie cubique du réseau conduit à une symétrie de rotation à grande distance). Alors de très petites violations de symétries pourraient être le signe d'interactions non-renormalisables (et comme nous l'avons déjà mentionné la gravitation quantique est déjà peut-être un exemple).

Ainsi, ce point de vue moderne, profondément basé sur le groupe de renormalisation et la notion d'intensité des interactions effectives qui dépendent de l'échelle d'observation, non seulement procure une image plus cohérente de la théorie quantique des champs, mais également un cadre dans lequel de nouveaux phénomènes physiques peuvent être discutés.

Il implique aussi que les théories quantiques des champs sont des structures temporaires. À cause du couplage essentiel de la physique à des échelles très différentes, les théories des champs *renormalisables* ont une cohérence limitée à la physique des basses énergies (ou de longue distance). On parle de *théories des champs effectives*, approximations d'une théorie plus fondamentale de nature radicalement différente mais à ce jour inconnue.



## Chapitre 2

# Valeurs moyennes gaussiennes. Méthode du col

DANS CET OUVRAGE, nous ferons un grand usage des intégrales et valeurs moyennes gaussiennes. Elles apparaissent naturellement en théorie des probabilités parce que les moyennes d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes obéissent à des lois gaussiennes. En physique, dans la théorie des transitions de phase et phénomènes critiques, des considérations quelque peu analogues conduisent au modèle quasi-gaussien dont on vérifie qu'il reproduit tous les résultats de l'approximation de champ moyen ou de la théorie de Landau. Nous rappelons donc quelques résultats mathématiques indispensables pour la suite de l'exposé.

Pour des raisons techniques, il est commode d'introduire d'abord la notion de fonction génératrice des moments d'une distribution de probabilité. Nous calculons ensuite des intégrales gaussiennes et démontrons le théorème de Wick pour des valeurs moyennes gaussiennes, un résultat simple mais d'un grand intérêt pratique.

La méthode du col est une méthode d'évaluation asymptotique, dans certaines limites, d'intégrales réelles ou complexes. Elle conduit à des calculs de valeurs moyennes gaussiennes, ce qui explique sa place dans ce chapitre. De plus, la méthode du col nous sera directement utile par la suite.

Soulignons, enfin, que tous les résultats que nous établissons ici s'appliquent à des intégrales impliquant un nombre arbitraire de variables et se généralisent donc à la limite où ce nombre devient infini, comme dans les intégrales de chemin ou intégrales de champs.

*Notation.* Dans ce qui suit, nous utilisons des caractères gras pour indiquer des matrices ou des vecteurs, et les caractères italiques correspondants, munis d'indice, pour indiquer les éléments de matrice ou les composantes de vecteurs.

## 2.1 Fonction génératrice

Soit  $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une mesure positive ou une distribution de probabilité normalisée, définie dans tout  $\mathbb{R}^n$ . Par la suite, nous notons

$$\langle F \rangle \equiv \int d^n x F(\mathbf{x}) \Omega(\mathbf{x}),$$

où  $d^n x \equiv \prod_{i=1}^n dx_i$ , la valeur moyenne d'une fonction  $F(\mathbf{x})$ . Par définition,  $\langle 1 \rangle = 1$ .

Il est commode d'introduire la transformée de Fourier de la distribution, qui est aussi une fonction génératrice de ses moments. Ici, nous considérons une classe particulière de distributions dont les transformées de Fourier sont des fonctions analytiques qui sont définies même pour des arguments imaginaires. Nous définissons alors

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \langle e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}} \rangle = \int d^n x \Omega(\mathbf{x}) e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{où} \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n b_i x_i \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{b}$  réel. L'avantage de considérer cette fonction plutôt que la transformée de Fourier est que l'intégrant est encore une mesure positive.

La fonction  $\mathcal{Z}(\mathbf{b})$  est alors une *fonction génératrice* des moments de la distribution, c'est-à-dire des valeurs moyennes de monômes. En effet, on reconnaît, après développement de l'intégrant en puissances des variables  $b_k$ , la série

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_\ell=1}^n b_{k_1} b_{k_2} \dots b_{k_\ell} \langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle.$$

Les valeurs moyennes peuvent donc être obtenues en dérivant la fonction  $\mathcal{Z}(\mathbf{b})$  par rapport à ses arguments. Dérivant les deux membres de l'équation (2.1) par rapport à  $b_k$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial b_k} \mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \int d^n x x_k e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}} \Omega(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Dérivant de façon répétée et prenant la limite  $\mathbf{b} = 0$ , on trouve donc

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle = \left[ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \mathcal{Z}(\mathbf{b}) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.3)$$

Cette notion de fonction génératrice est très utile et sera étendue en section 5.1.1 à la limite où le nombre de variables est infini.

## 2.2 Valeurs moyennes gaussiennes. Théorème de Wick

À cause, en particulier, du théorème de la limite centrale, les distributions de probabilités gaussiennes jouent un rôle important en théorie des

probabilités comme en physique. De plus, elles ont des propriétés algébriques remarquables que nous rappelons maintenant. Même si nous ne démontrons ces propriétés que pour des intégrales réelles, la plupart des résultats se généralisent aussi à des intégrales gaussiennes complexes.

### 2.2.1 Intégrales gaussiennes paires

L'intégrale gaussienne

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \int d^n x \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j \right) \quad (2.4)$$

converge si la matrice  $\mathbf{A}$  d'éléments  $A_{ij}$  est une matrice symétrique réelle positive (et donc toutes ses valeurs propres sont strictement positives). Diverses méthodes permettent alors de démontrer

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2}. \quad (2.5)$$

Nous ne démontrons ici ce résultat que pour des matrices réelles, mais comme l'expression (2.5) est une fonction algébrique des coefficients de la matrice, elle se généralise à des intégrales complexes, avec une détermination appropriée de la racine carrée.

*Démonstration.* L'intégrale simple se calcule aisément. Pour  $a > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2/2} = \sqrt{2\pi/a}. \quad (2.6)$$

Plus généralement, la matrice symétrique réelle  $\mathbf{A}$  dans l'intégrale (2.4) peut être diagonalisée par une transformation orthogonale, et donc être écrite

$$\mathbf{A} = \mathbf{O} \mathbf{D} \mathbf{O}^T, \quad (2.7)$$

où la matrice  $\mathbf{O}$  est orthogonale et la matrice  $\mathbf{D}$  d'éléments  $D_{ij}$  diagonale :

$$\mathbf{O}^T \mathbf{O} = \mathbf{1}, \quad D_{ij} = a_i \delta_{ij}, \quad a_i > 0.$$

Changeons alors de variables,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ , dans l'intégrale (2.4) :

$$x_i = \sum_{j=1}^n O_{ij} y_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j = \sum_{i,j,k} x_i O_{ik} a_k O_{jk} x_j = \sum_i a_i y_i^2.$$

Le jacobien de la transformation est  $|\det \mathbf{O}| = 1$ . L'intégrale se factorise alors

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \int dy_i e^{-a_i y_i^2/2}.$$

Comme les valeurs propres  $a_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$  sont positives, chaque intégrale converge et se déduit du résultat (2.6). En conséquence,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = (2\pi)^{n/2} (a_1 a_2 \dots a_n)^{-1/2} = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2}.$$

### 2.2.2 Intégrale gaussienne générale

Considérons maintenant l'intégrale gaussienne générale

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \int d^n x \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right). \quad (2.8)$$

Pour calculer  $\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , on cherche le minimum de la forme quadratique :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) = \sum_{j=1}^n A_{kj} x_j - b_k = 0.$$

Introduisant la matrice inverse

$$\Delta = \mathbf{A}^{-1},$$

on peut écrire la solution

$$x_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} b_j. \quad (2.9)$$

Après le changement de variables  $x_i \mapsto y_i$  où

$$x_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} b_j + y_i, \quad (2.10)$$

l'intégrale devient

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \exp \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \int d^n y \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} y_i A_{ij} y_j \right). \quad (2.11)$$

Le changement de variables a réduit le calcul à l'intégrale (2.4). On en déduit

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2} \exp \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right]. \quad (2.12)$$

*Remarque.* L'intégrale gaussienne a une propriété remarquable : si l'on intègre l'exponentielle d'une forme quadratique sur un sous-ensemble de variables, le résultat est encore l'exponentielle d'une forme quadratique. Cette stabilité structurale explique la stabilité des distributions de probabilité gaussiennes et est reliée également à certaines propriétés de l'oscillateur harmonique qui vont être discutées en section 5.1.2.

### 2.2.3 Valeurs moyennes gaussiennes et théorème de Wick

Quand la matrice  $\mathbf{A}$  est réelle positive, la fonction gaussienne peut être considérée comme une mesure positive sur  $\mathbb{R}^n$  ou une distribution de probabilité. La valeur moyenne d'une fonction des variables  $x_i$  est donnée par

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle \equiv \mathcal{N} \int d^n x F(\mathbf{x}) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j \right), \quad (2.13)$$

où la normalisation  $\mathcal{N}$  est choisie de telle sorte que  $\langle 1 \rangle = 1$  :

$$\mathcal{N} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{A}, 0) = (2\pi)^{-n/2} (\det \mathbf{A})^{1/2}.$$

La fonction

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) / \mathcal{Z}(\mathbf{A}, 0) = \langle e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}} \rangle, \quad (2.14)$$

où  $\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  est la fonction (2.8), est alors une *fonction génératrice* des moments de la distribution, c'est-à-dire des valeurs moyennes gaussiennes de monômes (cf. section 2.1). Les valeurs moyennes peuvent donc être obtenues en dérivant l'expression (2.14) par rapport aux variables  $b_i$  :

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle = (2\pi)^{-n/2} (\det \mathbf{A})^{1/2} \left[ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0}$$

et, remplaçant  $\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  par son expression explicite (2.12),

$$\langle x_{k_1} \dots x_{k_\ell} \rangle = \left\{ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \exp \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \right\} \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.15)$$

De façon générale, si  $F(\mathbf{x})$  est une série entière dans l'ensemble des variables  $x_i$ , sa valeur moyenne est donnée par l'identité

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle = \left\{ F \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \right) \exp \left[ \sum_{i,j} \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \right\} \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.16)$$

*Théorème de Wick.* L'identité (2.15) conduit au théorème de Wick. Chaque fois qu'une dérivée agit sur l'exponentielle du membre de droite, elle engendre un facteur  $b$ . Une autre dérivée devra agir ultérieurement sur ce facteur, sinon le terme correspondant s'annulera dans la limite  $\mathbf{b} = 0$ . On en conclut que la moyenne du produit  $x_{k_1} \dots x_{k_\ell}$  avec le poids gaussien  $\exp(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j) / \mathcal{Z}(\mathbf{A}, 0)$  est obtenue de la manière suivante : on considère tous les appariements possibles des indices  $k_1, \dots, k_\ell$  ( $\ell$  doit donc être

pair). À chaque paire  $k_p k_q$ , on associe l'élément  $\Delta_{k_p k_q}$  de la matrice  $\Delta = \mathbf{A}^{-1}$ . Alors,

$$\langle x_{k_1} \dots x_{k_\ell} \rangle = \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{possibles } P \text{ de } \{k_1 \dots k_\ell\}}} \Delta_{k_{P_1} k_{P_2}} \dots \Delta_{k_{P_{\ell-1}} k_{P_\ell}}, \quad (2.17)$$

$$= \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{possibles } P \text{ de } \{k_1 \dots k_\ell\}}} \langle x_{k_{P_1}} x_{k_{P_2}} \rangle \dots \langle x_{k_{P_{\ell-1}}} x_{k_{P_\ell}} \rangle. \quad (2.18)$$

Les équations (2.17, 2.18) sont des propriétés caractéristiques de toute mesure gaussienne centrée ( $\langle x_i \rangle = 0$ ). Elles sont connues sous le nom de théorème de Wick et sont, dans une forme adaptée à la mécanique quantique ou à la théorie quantique des champs, la base de la théorie des perturbations. La simplicité du résultat ne doit cependant pas cacher sa *grande importance pratique*. Notons aussi que la démonstration est purement algébrique et s'étend donc aux matrices  $\mathbf{A}$  complexes de déterminant non-nul. Seule l'interprétation des fonctions gaussiennes comme mesure ou distribution de probabilité disparaît alors.

*Exemples.* On trouve successivement

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle &= \Delta_{i_1 i_2}, \\ \langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle &= \Delta_{i_1 i_2} \Delta_{i_3 i_4} + \Delta_{i_1 i_3} \Delta_{i_2 i_4} + \Delta_{i_1 i_4} \Delta_{i_3 i_2}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la valeur moyenne d'un produit de  $2p$  variables est la somme de  $(2p-1)(2p-3) \dots 5 \times 3 \times 1$  termes distincts.

## 2.3 Mesure gaussienne perturbée.

### Contributions connexes

Même dans les cas favorables où le théorème de la limite centrale s'applique, la mesure gaussienne n'est qu'une distribution limite. Il est donc nécessaire d'étudier l'effet de corrections à la distribution gaussienne.

#### 2.3.1 Mesure gaussienne perturbée

Nous considérons une distribution plus générale normalisée  $e^{-A(\mathbf{x}, \lambda)} / \mathcal{Z}(\lambda)$  où la fonction  $A(\mathbf{x}, \lambda)$  est la somme d'une partie quadratique et d'un polynôme  $\lambda V(\mathbf{x})$  dans les variables  $x_i$  :

$$A(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n x_i A_{ij} x_j + \lambda V(\mathbf{x}), \quad (2.19)$$

le paramètre  $\lambda > 0$  caractérisant l'amplitude de la déviation à la distribution gaussienne, le polynôme  $V$  étant choisi tel que les intégrales convergent.

La normalisation  $\mathcal{Z}(\lambda)$  est donnée par l'intégrale

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \int d^n x e^{-A(\mathbf{x}, \lambda)}. \quad (2.20)$$

Cette intégrale peut être calculée en développant l'intégrand en série formelle de  $\lambda$  et en intégrant terme à terme :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int d^n x V^k(\mathbf{x}) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j \right) \\ &= \mathcal{Z}(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle V^k(\mathbf{x}) \rangle_0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

où  $\langle \bullet \rangle_0$  signifie valeur moyenne avec la mesure gaussienne définie par l'équation (2.13). Chaque terme du développement, qui est la valeur moyenne gaussienne d'un polynôme, peut alors se calculer au moyen du théorème de Wick (2.17).

Utilisant l'équation (2.16) avec  $F = e^{-\lambda V}$ , on en déduit aussi une représentation formelle de la normalisation (2.20) :

$$\mathcal{Z}(\lambda)/\mathcal{Z}(0) = \left\{ \exp \left[ -\lambda V \left( \frac{\partial}{\partial b} \right) \right] \exp \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \right\} \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.22)$$

*Exemple.* Considérons la perturbation

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^n x_i^4. \quad (2.23)$$

À l'ordre  $\lambda^2$ , on trouve ( $\Delta \mathbf{A} = 1$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\lambda)/\mathcal{Z}(0) &= 1 - \frac{1}{4!} \lambda \sum_i \langle x_i^4 \rangle_0 + \frac{1}{2!(4!)^2} \lambda^2 \sum_i \sum_j \langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0 + O(\lambda^3) \\ &= 1 - \frac{1}{8} \lambda \sum_i \Delta_{ii}^2 + \frac{1}{128} \lambda^2 \sum_i \Delta_{ii}^2 \sum_j \Delta_{jj}^2 \\ &\quad + \lambda^2 \sum_{i,j} \left( \frac{1}{16} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \Delta_{ij}^2 + \frac{1}{48} \Delta_{ij}^4 \right) + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Une vérification simple des facteurs est obtenue en spécialisant au cas d'une seule variable. Alors,

$$\mathcal{Z}(\lambda)/\mathcal{Z}(0) = 1 - \frac{1}{8} \lambda + \frac{35}{384} \lambda^2 + O(\lambda^3).$$

### 2.3.2 Contributions connexes

On remarque que les deux premiers termes de l'expression (2.24) s'exponentient de telle sorte que  $\ln \mathcal{Z}$  n'a plus que des termes *connexes*, c'est-à-dire des termes qui ne peuvent pas se factoriser en un produit de sommes :

$$\ln \mathcal{Z}(\lambda) - \ln \mathcal{Z}(0) = -\frac{1}{8}\lambda \sum_i \Delta_{ii}^2 + \lambda^2 \sum_{i,j} \left( \frac{1}{16} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \Delta_{ij}^2 + \frac{1}{48} \Delta_{ij}^4 \right) + O(\lambda^3). \quad (2.25)$$

Discutons alors cette notion de contribution connexe plus en détail.

En particulier, la propriété de connexité des contributions à  $\ln \mathcal{Z}$  est une propriété générale. Pour le démontrer, dans le calcul de la valeur moyenne gaussienne  $\langle V^k(\mathbf{x}) \rangle$ , nous distinguons les contributions du théorème de Wick qui contiennent des appariements entre tous les  $k$  facteurs  $V(\mathbf{x})$ , de toutes les autres qui peuvent se factoriser dans des produits de valeurs moyennes de puissances de  $V(\mathbf{x})$  plus petites que  $k$ . Nous utilisons, ci-dessous, l'indice  $c$  pour indiquer la partie connexe d'une valeur moyenne. Dans ces conditions, par exemple,

$$\begin{aligned} \langle V(\mathbf{x}) \rangle &= \langle V(\mathbf{x}) \rangle_c, & \langle V^2(\mathbf{x}) \rangle &= \langle V^2(\mathbf{x}) \rangle_c + \langle V(\mathbf{x}) \rangle_c^2, \\ \langle V^3(\mathbf{x}) \rangle &= \langle V^3(\mathbf{x}) \rangle_c + 3 \langle V^2(\mathbf{x}) \rangle_c \langle V(\mathbf{x}) \rangle_c + \langle V(\mathbf{x}) \rangle_c^3, \dots \end{aligned}$$

De façon générale, à l'ordre  $k$ , on trouve

$$\frac{1}{k!} \langle V^k(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{k!} \langle V^k(\mathbf{x}) \rangle_c + \text{termes non connexes}.$$

Un terme non connexe est un produit de la forme

$$\langle V^{k_1}(\mathbf{x}) \rangle_c \langle V^{k_2}(\mathbf{x}) \rangle_c \dots \langle V^{k_p}(\mathbf{x}) \rangle_c, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_p = k,$$

avec un poids  $1/k!$  venant du développement de l'exponentielle, multiplié par un facteur combinatoire correspondant à toutes les façons de regrouper  $k$  objets en sous-ensembles de  $k_1 + k_2 + \dots + k_p$  objets, si tous les  $k_i$  sont distincts. On trouve

$$\frac{1}{k!} \times \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_p!} = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_p!}.$$

Si  $m$  puissances  $k_i$  sont égales, il faut diviser par un facteur combinatoire supplémentaire  $1/m!$  car le même terme a été compté  $m!$  fois.

On remarque alors que le développement perturbatif peut être écrit

$$\mathcal{W}(\lambda) = \ln \mathcal{Z}(\lambda) = \ln \mathcal{Z}(0) + \sum_k \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle V^k(\mathbf{x}) \rangle_c, \quad (2.26)$$

confirmant la généralité de la compensation observée dans l'expression (2.25).

## 2.4 Diagrammes de Feynman

À chaque contribution perturbative engendrée par le théorème de Wick, il est possible d'associer un graphe appelé diagramme de Feynman. Chaque monôme contribuant à une perturbation  $V(\mathbf{x})$  est représenté par un point (un vertex) d'où partent un nombre de lignes égal au degré du monôme (*cf.* figure 2.1), et chaque appariement est représenté par une ligne joignant les vertex auxquels appartiennent les variables correspondantes.



FIG. 2.1 – Diagramme de Feynman : vertex  $x^4$  de l'exemple (2.23).

Nous venons d'introduire la notion de contribution connexe. À cette notion correspond une propriété des graphes. Une contribution connexe est une contribution correspondant à un diagramme connexe. Dans l'exemple (2.23), les contributions connexes à la normalisation (2.20), c'est-à-dire les contributions à  $\ln Z(\lambda)$ , sont représentées sur les figures 2.2 et 2.3.

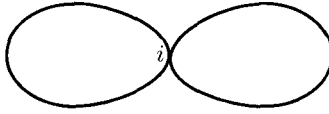


FIG. 2.2 – Diagramme de Feynman : contribution  $\langle x^4 \rangle_0$  de l'ordre  $\lambda$  dans l'exemple (2.23).

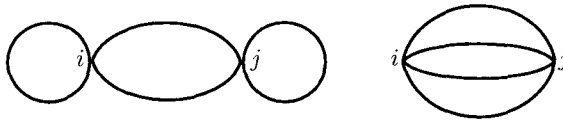


FIG. 2.3 – Diagrammes de Feynman : contributions connexes provenant de  $\langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0$  de l'ordre  $\lambda^2$  dans l'exemple (2.23).

Comme  $V(\mathbf{x})$  est un polynôme homogène de degré 4, des vertex partent quatre lignes. Le diagramme de la figure 2.2 a un vertex dont les quatre lignes qui en sortent sont reliées deux à deux. Les deux diagrammes de la figure 2.3 contiennent deux vertex. Nous avons explicité ici les indices  $i$  et  $j$  sur lesquels portent des sommations dans les expressions (2.24). Dans la suite, nous n'explicitons plus ces indices muets.

## 2.5 Valeurs moyennes. Fonction génératrice. Cumulants

Les moments de la distribution  $e^{-A(\mathbf{x}, \lambda)} / \mathcal{Z}(\lambda)$  où  $A(\mathbf{x}, \lambda)$  est le polynôme (2.19),

$$A(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \lambda V(\mathbf{x}),$$

c'est-à-dire les valeurs moyennes  $\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \rangle_\lambda$  que, en analogie avec la physique statistique, nous appellerons aussi *fonctions à  $\ell$  points*, sont données par le rapport

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \rangle_\lambda = \mathcal{Z}^{-1}(\lambda) \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_\ell}(\lambda), \quad (2.27a)$$

$$\mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_\ell}(\lambda) = \int d^n x x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \exp[-A(\mathbf{x}, \lambda)]. \quad (2.27b)$$

### 2.5.1 La fonction à deux points

La fonction à deux points  $\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda$  implique le calcul de l'intégrale

$$\mathcal{Z}_{i_1 i_2}(\lambda) = \int d^n x x_{i_1} x_{i_2} \exp[-A(\mathbf{x}, \lambda)].$$

Dans l'exemple (2.23) à l'ordre  $\lambda^2$ , on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{i_1 i_2}(\lambda) / \mathcal{Z}(0) &= \Delta_{i_1 i_2} - \frac{1}{24} \lambda \Delta_{i_1 i_2} \sum_i \langle x_i^4 \rangle_0 - \frac{1}{2} \lambda \sum_i \Delta_{ii_1} \Delta_{ii} \Delta_{ii_2} \\ &+ \frac{\lambda^2}{2!(4!)^2} \sum_{i,j} \Delta_{i_1 i_2} \langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0 + \frac{\lambda^2}{2!4!} \sum_{i,j} \Delta_{ii_1} \Delta_{ii} \Delta_{ii_2} \langle x_j^4 \rangle_0 \\ &+ \lambda^2 \sum_{i,j} \left( \frac{1}{4} \Delta_{ii_1} \Delta_{ii_2} \Delta_{ij}^2 \Delta_{jj} + \frac{1}{6} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij}^3 \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \right) + O(\lambda^3). \end{aligned}$$

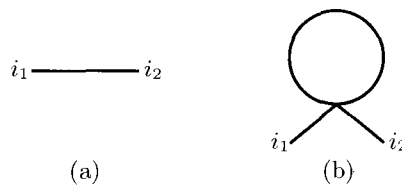
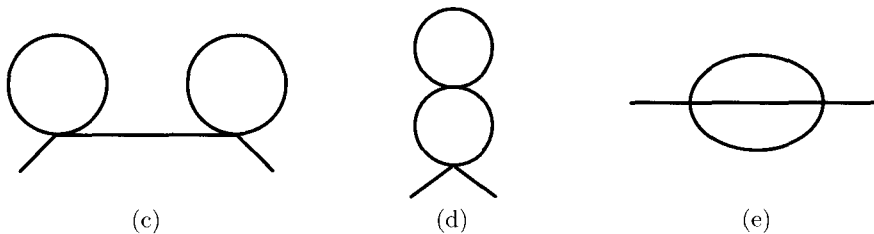
Dans le rapport des deux séries

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda = \mathcal{Z}_{i_1 i_2}(\lambda) / \mathcal{Z}(\lambda),$$

les termes non connexes disparaissent et on obtient

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda &= \Delta_{i_1 i_2} - \frac{1}{2} \lambda \sum_i \Delta_{ii_1} \Delta_{ii} \Delta_{ii_2} + \lambda^2 \sum_{i,j} \left( \frac{1}{4} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \Delta_{ii_1} \Delta_{ii_2} \Delta_{ij}^2 \Delta_{jj} + \frac{1}{6} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij}^3 \right) + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les diagrammes de Feynman correspondant aux contributions d'ordre 1 et  $\lambda$  sont représentés sur la figure 2.4.

FIG. 2.4 – La fonction à 2 points : contributions d'ordre 1 et  $\lambda$ .FIG. 2.5 – La fonction à 2 points : contributions d'ordre  $\lambda^2$ .

Les diagrammes de la figure 2.5 représentent les trois contributions successives d'ordre  $\lambda^2$ .

Justifions, par exemple, le facteur  $1/6$  devant le diagramme (e). Développant l'exponentielle au second ordre, nous devons calculer la valeur moyenne gaussienne de

$$\frac{1}{2! (4!)^2} \sum_{i,j} \langle x_{i_1} x_{i_2} x_i^4 x_j^4 \rangle_0,$$

que nous obtenons par le théorème de Wick.

D'abord,  $x_{i_1}$  peut être apparié à un facteur  $x$  dans le produit  $x_i^4 x_j^4$ ; il y a huit choix équivalents et un des deux vertex est distingué. Ensuite,  $x_{i_2}$  doit être apparié avec un facteur  $x$  du vertex restant : quatre choix. Les facteurs  $x^3$  restants dans les deux vertex peuvent être appariés de toutes les façons possibles :  $3!$  possibilités équivalentes. Prenant en compte tous les facteurs, on trouve

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(4!)^2} \times 8 \times 4 \times 3! = \frac{1}{6}.$$

Soulignons aussi que le facteur  $1/6$ , qui est attaché au diagramme, a une interprétation en termes des isomorphismes du graphe. Il s'interprète comme l'inverse du nombre  $3!$  de permutations qui échangent les trois lignes qui joignent les deux vertex. Il existe des expressions générales qui relient les facteurs qui apparaissent devant chaque diagramme aux symétries du graphe.

De même, on pourrait calculer la fonction à quatre points, c'est-à-dire les valeurs moyennes des monômes de degré quatre. On trouverait un grand nombre de contributions. Mais les résultats se simplifient notablement si l'on

calcule directement les cumulants de la distribution. Pour cela, il est commode de définir d'abord une fonction génératrice des moments ou des valeurs moyennes  $\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} \rangle_\lambda$ .

### 2.5.2 Fonctions génératrices. Cumulants

Nous introduisons maintenant la fonction

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda) = \int d^n x \exp[-A(\mathbf{x}, \lambda) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}], \quad (2.29)$$

qui généralise la fonction (2.8) de l'exemple gaussien. Elle est proportionnelle à la fonction génératrice des valeurs moyennes gaussiennes (2.27a) (*cf.* section 2.1)

$$\langle e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}} \rangle_\lambda = \mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda) / \mathcal{Z}(\lambda)$$

qui généralise la fonction (2.14). En dérivant, on trouve

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \rangle_\lambda = \mathcal{Z}^{-1}(\lambda) \left[ \frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \frac{\partial}{\partial b_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{i_\ell}} \mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.30)$$

Nous introduisons maintenant la fonction

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda) = \ln \mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda). \quad (2.31)$$

Dans l'interprétation probabiliste,  $\mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda)$  est la fonction génératrice des cumulants de la distribution. Comme conséquence de l'équation (2.26), le développement perturbatif des cumulants est beaucoup plus simple puisqu'il ne contient que des contributions connexes. En particulier, toutes les contributions à la normalisation (2.24) ne peuvent apparaître que dans  $\mathcal{W}(0, \lambda)$ . Notons, enfin, que dans le cas gaussien  $\mathcal{W}(\mathbf{b})$  se réduit à une forme quadratique en  $\mathbf{b}$ .

*Remarque.* Dans le cadre de la physique statistique, les cumulants

$$W_{i_1 i_2 \dots i_\ell}^{(\ell)} = \left[ \frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \frac{\partial}{\partial b_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{i_\ell}} \mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0},$$

sont appelés fonctions de corrélation *connexes* à  $\ell$  points.

*Exemples.* Développant la relation (2.31) en puissances de  $\mathbf{b}$ , on trouve que les fonctions à un point sont identiques

$$W_i^{(1)} = \langle x_i \rangle_\lambda.$$

Pour la fonction à deux points, on trouve

$$W_{i_1 i_2}^{(2)} = \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda - \langle x_{i_1} \rangle_\lambda \langle x_{i_2} \rangle_\lambda = \langle (x_{i_1} - \langle x_{i_1} \rangle_\lambda) (x_{i_2} - \langle x_{i_2} \rangle_\lambda) \rangle_\lambda. \quad (2.32)$$

C'est donc la fonction à deux points de variables auxquelles leur valeur moyenne a été soustraite.

Dans le cas d'une perturbation paire  $V(\mathbf{x}) = V(-\mathbf{x})$ , comme dans l'exemple (2.23),

$$\begin{aligned} W_{i_1 i_2}^{(2)} &= \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda, \\ W_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} &= \langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle_\lambda - \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda \langle x_{i_3} x_{i_4} \rangle_\lambda - \langle x_{i_1} x_{i_3} \rangle_\lambda \langle x_{i_2} x_{i_4} \rangle_\lambda \\ &\quad - \langle x_{i_1} x_{i_4} \rangle_\lambda \langle x_{i_3} x_{i_2} \rangle_\lambda. \end{aligned}$$

La fonction connexe à quatre points, qui s'annule exactement pour une mesure gaussienne, donne une première évaluation de l'écart à la mesure gaussienne.

Dans l'exemple (2.23), on trouve alors à l'ordre  $\lambda^2$  (cf. figure 2.6) :

$$\begin{aligned} W_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} &= -\lambda \sum_i \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_2 i} \Delta_{i_3 i} \Delta_{i_4 i} + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i,j} \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_2 i} \Delta_{i_3 j} \Delta_{i_4 j} \Delta_{ij}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i,j} \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_3 i} \Delta_{i_2 j} \Delta_{i_4 j} \Delta_{ij}^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i,j} \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_4 i} \Delta_{i_3 j} \Delta_{i_2 j} \Delta_{ij}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i,j} (\Delta_{ii} \Delta_{ij} \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_2 j} \Delta_{i_3 j} \Delta_{i_4 j} + 3 \text{ termes}) + O(\lambda^3). \quad (2.33) \end{aligned}$$

L'alternance de signe dans tous les développements de l'exemple (2.23) reflète l'alternance de signe dans le développement de l'exponentielle  $\exp[-\lambda x^4]$ .

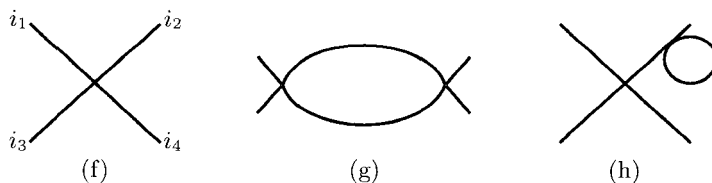


FIG. 2.6 – Diagrammes de Feynman : fonction à 4 points connexe. Contributions d'ordre  $\lambda$  et  $\lambda^2$  dans l'exemple (2.23).

## 2.6 Méthode du col

Pour évaluer certaines intégrales de contour dans le domaine complexe, on peut parfois utiliser la méthode du col, qui réduit leur évaluation à une somme (infinie) d'intégrales gaussiennes.

Nous décrivons d'abord la méthode dans le cas d'une intégrale simple réelle puis complexe. Nous généralisons ensuite à un nombre quelconque de variables.

### 2.6.1 Intégrale réelle

Considérons l'intégrale

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int_a^b dx e^{-A(x)/\lambda}, \quad (2.34)$$

où la fonction  $A(x)$  est une fonction réelle, analytique dans un voisinage du segment  $(a, b)$ , et  $\lambda$  un paramètre positif. Nous voulons évaluer cette intégrale dans la limite  $\lambda \rightarrow 0_+$ . Dans cette limite, l'intégrale est dominée par les maxima de l'intégrand et donc les minima de  $A(x)$ . Deux cas peuvent se présenter :

- (i) Le minimum de  $A(x)$  correspond à un bord du domaine d'intégration. On développe alors  $A(x)$  au voisinage du minimum et on intègre. Ce n'est pas le cas qui nous intéresse ici.
- (ii) La fonction  $A(x)$  a un, ou plusieurs minima sur l'intervalle  $(a, b)$ . Les minima correspondent à des points  $x_c$  caractérisés par

$$A'(x_c) = 0,$$

où génériquement  $A''(x_c) > 0$  (les cas où  $A''(x_c) = 0$  exigent une analyse séparée). Pour des raisons qui apparaîtront plus tard, ces points sont appelés des cols (*cf.* exemple (ii)). S'il y a plusieurs solutions, la contribution dominante est donnée par le minimum absolu de  $A(x)$ .

Par ailleurs, si nous négligeons des corrections d'ordre  $\exp[-\text{const.}/\lambda]$ , nous pouvons restreindre l'intégration à un voisinage fini  $(x_c - \varepsilon, x_c + \varepsilon)$  de  $x_c$ , mais avec  $\varepsilon$  arbitrairement petit. En effet, les contributions hors de cet intervalle sont bornées par

$$(b - a) e^{-A''(x_c)\varepsilon^2/2\lambda},$$

où nous avons utilisé la condition  $\varepsilon \ll 1$  de sorte que

$$A(x) - A(x_c) \sim \frac{1}{2} A''(x_c) (x - x_c)^2.$$

Plus précisément, le domaine qui contribue est d'ordre  $\sqrt{\lambda}$ . Il est donc commode de changer de variables :

$$x \mapsto y = (x - x_c)/\sqrt{\lambda}.$$

Le développement de la fonction  $A$  s'écrit alors

$$A(x)/\lambda = A(x_c)/\lambda + \frac{1}{2} y^2 A''(x_c) + \frac{1}{6} \sqrt{\lambda} A'''(x_c) y^3 + \frac{1}{24} \lambda A^{(4)}(x_c) y^4 + O(\lambda^{3/2}).$$

On voit, qu'à l'ordre dominant, il suffit de garder le terme quadratique. Cela ramène le calcul à une intégrale gaussienne sur un intervalle fini :

$$\mathcal{I}(\lambda) \sim \sqrt{\lambda} e^{-A(x_c)/\lambda} \int_{-\varepsilon/\sqrt{\lambda}}^{\varepsilon/\sqrt{\lambda}} dy e^{-A''(x_c)y^2/2}.$$

Dans cette intégrale, on peut alors intégrer sur  $[-\infty, +\infty]$ . En effet, les contributions pour  $|y| > \varepsilon/\sqrt{\lambda}$  sont de nouveau exponentiellement négligeables. On est ramené à une intégrale gaussienne usuelle et donc

$$\mathcal{I}(\lambda) \sim \sqrt{2\pi\lambda/A''(x_c)} e^{-A(x_c)/\lambda}. \quad (2.35)$$

Pour calculer les corrections d'ordre supérieur, on développe l'intégrant en puissances de  $\lambda$  et on intègre terme à terme. Posant

$$\mathcal{I}(\lambda) = \sqrt{2\pi\lambda/A''(x_c)} e^{-A(x_c)/\lambda} \mathcal{J}(\lambda),$$

on trouve, par exemple, à l'ordre suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\lambda) &= 1 - \frac{\lambda}{24} A^{(4)} \langle y^4 \rangle + \frac{\lambda}{2 \times 6^2} A'''^2 \langle y^6 \rangle + O(\lambda^2) \\ &= 1 + \frac{\lambda}{24} \left( 5 \frac{A'''^2}{A''^3} - 3 \frac{A^{(4)}}{A''^2} \right) + O(\lambda^2), \end{aligned}$$

où  $\langle \bullet \rangle$  signifie valeur moyenne gaussienne.

*Remarques.*

- (i) La méthode du col engendre un développement formel en puissances de  $\lambda$  :

$$\mathcal{J}(\lambda) = 1 + \sum_{k=1} J_k \lambda^k,$$

qui, en général, diverge pour toute valeur du paramètre de développement. Néanmoins, la série est utile parce que, pour  $\lambda$  assez petit, on peut démontrer que les sommes partielles satisfont

$$\exists \lambda_0 > 0, \{M_K\} : \quad \forall K \text{ et } 0_+ \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \left| \mathcal{J}(\lambda) - \sum_{k=0}^K J_k \lambda^k \right| \leq M_K \lambda^{K+1},$$

où les coefficients  $M_k$  croissent génériquement comme  $k!$ . Une telle série est appelée série asymptotique. À  $\lambda$  fixé, si  $K$  est choisi tel que la borne soit minimale, la fonction est déterminée à une erreur d'ordre  $\exp[-\text{const.}/\lambda]$  près. Notons qu'une telle borne peut être étendue à un secteur du plan complexe  $\lambda$ ,  $|\text{Arg } \lambda| < \theta$ .

La divergence de la série se comprend aisément : si l'on change le signe de  $\lambda$  dans l'intégrale, le maximum de l'intégrant devient un minimum, et le col ne peut plus donner la contribution dominante à l'intégrale.

(ii) Souvent les intégrales ont la forme plus générale

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int dx \rho(x) e^{-A(x)/\lambda}.$$

Alors, pourvu que  $\ln \rho(x)$  soit analytique au col, il n'est pas nécessaire de prendre en compte le facteur  $\rho(x)$  dans l'équation du col. En effet, ce facteur induirait une modification d'ordre  $x - x_c$  de la position du col, solution de

$$A''(x_c)(x - x_c) \sim \lambda \rho'(x_c)/\rho(x_c),$$

et, donc, d'ordre  $\lambda$  alors que la contribution à l'intégrale vient d'une région d'ordre  $\sqrt{\lambda}$  beaucoup plus grande que ce déplacement.

On peut donc développer toutes les expressions autour de la solution de  $A'(x) = 0$ . À l'ordre dominant, on trouve

$$\mathcal{I}(\lambda) \sim \sqrt{2\pi\lambda/A''(x_c)} \rho(x_c) e^{-A(x_c)/\lambda}.$$

Pour illustrer la méthode, nous l'appliquons maintenant à deux exemples classiques, une représentation de la fonction  $\Gamma$  qui généralise  $n!$  à des arguments réels et complexes, et une intégrale donnant la fonction  $B(\alpha, \beta)$  qui est un rapport de fonctions  $\Gamma$ .

*Exemples.*

(i) L'évaluation asymptotique de la fonction

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dx x^{s-1} e^{-x},$$

pour  $s \rightarrow +\infty$  est une application classique de la méthode du col. Pour  $s$  non entier, l'intégrand est singulier à  $x = 0$ , mais la contribution du voisinage de l'origine est négligeable dans cette limite et donc la méthode du col peut s'appliquer.

L'intégrale n'a pas, telle quelle, la forme canonique (2.34) mais un changement de variable linéaire la lui donne :  $x = (s-1)x'$ , et on pose  $s-1 = 1/\lambda$ . Alors,

$$\Gamma(s) = (s-1)^{s-1} \int_0^\infty dx e^{-(x-\ln x)/\lambda}$$

et donc  $A(x) = x - \ln x$ . La position du col est donnée par

$$A'(x) = 1 - 1/x = 0 \Rightarrow x_c = 1.$$

La dérivée seconde au col est  $A''(x_c) = 1$ . Le résultat à l'ordre dominant est donc

$$\Gamma(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi}(s-1)^{s-1/2} e^{1-s} \sim \sqrt{2\pi}s^{s-1/2} e^{-s}, \quad (2.36)$$

une expression aussi appelée formule de Stirling.

La méthode du col complexe, que nous expliquons plus loin, permet d'étendre ce résultat à  $s$  complexe avec  $|\arg s| < \pi$ .

(ii) Évaluons l'intégrale

$$F(n, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x)^{\alpha n}} dx, \quad \alpha > 1,$$

pour  $n \rightarrow +\infty$  par valeurs entières.

L'intégrand est une fonction holomorphe dans un voisinage du contour et a directement la forme adaptée à la méthode du col.

On peut récrire l'intégrand

$$\frac{x^n}{(1+x)^{\alpha n}} = e^{-nA(x)} \Rightarrow A(x) = \alpha \ln(1+x) - \ln x.$$

L'équation du col est donnée par

$$A'(x) = 0 = \frac{\alpha}{1+x} - \frac{1}{x} \Rightarrow x_c = \frac{1}{\alpha-1}.$$

La dérivée seconde au col est donnée par

$$A''(x_c) = -\frac{\alpha}{(1+x_c)^2} + \frac{1}{x_c^2} = \frac{(\alpha-1)^3}{\alpha}.$$

On en déduit l'évaluation asymptotique

$$F(n, \alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{2\pi\alpha}{n(\alpha-1)^3} \right)^{1/2} e^{n[(\alpha-1)\ln(\alpha-1) - \alpha \ln \alpha]}. \quad (2.37)$$

La fonction  $F(n, \alpha)$  peut s'exprimer en termes des fonctions  $\Gamma$  (cf. exercice précédent) et  $B$ , définie ci-dessous, par

$$F(n, \alpha) = B((\alpha-1)n-1, n+1) = \frac{\Gamma(\alpha-1)n-1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha n)}.$$

L'application de la formule de Stirling redonne alors l'évaluation (2.37).

## 2.6.2 Intégrale de contour complexe

Considérons l'intégrale

$$\mathcal{I}(\lambda) = \oint_C dx e^{-A(x)/\lambda}, \quad (2.38)$$

où  $A(x)$  est une fonction analytique de la variable complexe  $x$  et  $\lambda$  un paramètre réel positif. Le contour  $C$  va du point  $a$  au point  $b$  du plan complexe, et est contenu dans le domaine d'holomorphie de  $A$ . Comme cas limite, on peut considérer la situation où les points  $a$  et  $b$  s'éloignent à l'infini dans le plan complexe.

On veut évaluer l'intégrale pour  $\lambda \rightarrow 0_+$ . On pourrait penser *a priori* que l'intégrale est encore dominée par les points où le module de l'intégrand est maximum et donc la partie réelle de  $A(x)$  est minimum. Cependant, la contribution du voisinage de tels points peut se compenser parce que la phase varie rapidement (un argument qui conduit à la méthode de la phase stationnaire).

La méthode du col consiste à déformer le contour  $C$  de toutes les manières possibles dans le domaine d'holomorphie de  $A$  (sans évidemment franchir de singularité ce qui changerait la valeur de l'intégrale) de façon à ce que le module maximum de l'intégrand soit minimum, c'est à dire que le minimum de  $\operatorname{Re} A(x)$  sur le contour soit maximum.

S'il est possible de déformer le contour  $C$  en un contour équivalent sur lequel  $\operatorname{Re} A(x)$  est monotone, alors l'intégrale est dominée par une des extrémités du contour. Dans le cas contraire, la partie réelle passe par un minimum. Sur le contour optimal, le minimum ne peut être dû qu'à une singularité de la fonction ou enfin, et c'est la situation qui nous intéresse ici, à un point régulier où la dérivée de  $A$  s'annule :

$$A'(x) = 0.$$

La structure de l'intégrand se comprend mieux si l'on se souvient que les courbes  $\operatorname{Re} A$  et  $\operatorname{Im} A$  constant forment deux ensembles de courbes bi-orthogonales. Les seuls points doubles de ces courbes sont des singularités ou des cols. En effet, développons la fonction au voisinage de  $x_c$  :

$$A(x) - A(x_c) \sim \frac{1}{2} A''(x_c) (x - x_c)^2 \Rightarrow \operatorname{Re}[A(x) - A(x_c)] \sim \frac{1}{2} |A''(x_c)| (u^2 - v^2),$$

où les coordonnées réelles  $u, v$  sont définies par

$$u + iv = (x - x_c) e^{i \operatorname{Arg} A''(x_c)/2}.$$

Au voisinage du col, on peut choisir le contour déformé pour qu'il suive une courbe  $\operatorname{Im} A$  constant, localement  $v = 0$ , et donc la phase de l'intégrand reste constante : il n'y a plus de compensations. L'intégrale est dominée, à des contributions plus petites que toute puissance de  $\lambda$  près, par le voisinage du col. Le reste de l'argument et du calcul sont les mêmes que dans le cas réel précédent, l'intégrale gaussienne réelle étant remplacée par une intégrale gaussienne complexe ce qui oblige à préciser la détermination de la racine carrée dans l'expression (2.6).

*La notion de col.* Justifions ici l'appellation *méthode du col*. Pour cela, il faut examiner le module de l'intégrand ou la fonction  $\operatorname{Re}[A(x) - A(x_c)]$ , dans le plan complexe au voisinage du col  $x = x_c$ . Après une rotation, dans les coordonnées  $u, v$ , les courbes de module constant de l'intégrand sont localement

les courbes  $u^2 - v^2$  constant, c'est-à-dire des hyperboles équilatères. Celle qui passe par le col, dégénère en deux droites, et c'est le seul point où les courbes se croisent (cf. figure 2.7). Le module de l'intégrant a donc une structure de col dans un sens topographique.

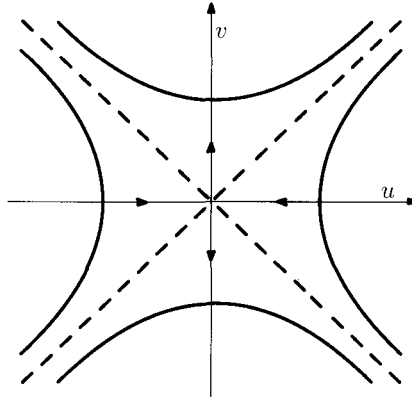


FIG. 2.7 – Courbes de niveaux du module de l'intégrant dans le voisinage du col  $x = x_c$ .

*Exemple.* Les polynômes de Hermite, qui sont liés aux fonctions propres de l'oscillateur harmonique, ont une représentation intégrale de la forme

$$\mathcal{H}_n(x) = 2^{n/2} (n!/\sqrt{\pi})^{1/2} \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{dp}{p^{n+1}} e^{px - p^2/4},$$

où  $C$  est un contour fermé simple contenant l'origine à son intérieur et parcouru dans le sens positif.

Nous nous proposons d'évaluer le polynôme  $P_n(z) = \mathcal{H}_n(z\sqrt{2n})$  pour  $n \rightarrow \infty$  et  $z$  réel fixé par la méthode du col. Les polynômes  $\mathcal{H}_n(x)$  étant pairs ou impairs,

$$\mathcal{H}_n(-x) = (-1)^n \mathcal{H}_n(x),$$

nous pouvons donc nous restreindre à  $x \geq 0$ .

L'intégrant est une fonction méromorphe avec comme seule singularité un pôle multiple à  $p = 0$ . Pour ramener l'intégrale à la forme standard de la méthode du col, il est commode de poser  $p = s\sqrt{2n}$ , ce qui conduit à

$$P_n(z) = (n! n^{-n}/\sqrt{\pi})^{1/2} \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{ds}{s^{n+1}} e^{2nsz - ns^2/2}.$$

Posons

$$A(s) = \frac{1}{2}s^2 - 2sz + \ln s.$$

Les cols sont donnés par

$$A'(s) = s - 2z + 1/s = 0 \Rightarrow s_{\pm} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Par ailleurs,

$$A''(s) = 1 - \frac{1}{s^2}.$$

Il faut alors distinguer les deux cas  $0 \leq z < 1$  et  $z > 1$  ( $z = 1$  exige un traitement spécial).

(i)  $z > 1$ . Il est commode de poser  $z = \cosh \theta$  avec  $\theta > 0$ . Alors,

$$s_{\pm} = e^{\pm\theta} \Rightarrow A(s_{\pm}) = -\frac{1}{2} e^{\pm 2\theta} \pm \theta - 1, \quad A''(s_{\pm}) = 1 - e^{\mp 2\theta}.$$

En déplaçant le contour, il est simple de se convaincre que le col pertinent est  $s_-$  car le contour au voisinage du col est parallèle à l'axe imaginaire et donc  $A''$  doit être négatif. Tenant compte du facteur supplémentaire  $1/s$  dans l'intégrant, on conclut

$$P_n(z) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n)^{-1/4}}{\sqrt{\pi(1 - e^{-2\theta})}} \exp \left[ \frac{1}{2} n (e^{-2\theta} + 1) + n\theta \right],$$

où la formule de Stirling (2.36) a été utilisée.

(ii)  $|z| < 1$ . Au contraire, dans ce cas les deux cols, qui sont complexes conjugués, contribuent. Posant  $z = \cos \theta$ , on trouve

$$s_{\pm} = e^{\pm i\theta}, \quad A(s_{\pm}) = -\frac{1}{2} e^{\pm 2i\theta} \pm i\theta - 1, \quad A''(s_{\pm}) = 1 - e^{\mp 2i\theta}.$$

On conclut

$$P_n(z) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n)^{-1/4}}{\sqrt{\pi(1 - e^{2i\theta})}} \exp \left[ \frac{1}{2} n (e^{2i\theta} + 1) - ni\theta \right] + \text{conjugué complexe}.$$

## 2.7 Méthode du col à plusieurs variables. Calcul des fonctions génératrices

Nous généralisons maintenant la méthode du col aux cas de plusieurs variables, une généralisation qui, techniquement, n'est pas complètement triviale.

### 2.7.1 Méthode du col

Considérons l'intégrale générale sur  $n$  variables

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int d^n x \exp \left[ -\frac{1}{\lambda} A(x_1, \dots, x_n) \right], \quad (2.39)$$

où, pour simplifier, nous supposons que la fonction  $A$  est entière dans toutes les variables et que l'intégration porte sur tout  $\mathbb{R}^n$ .

Dans la limite  $\lambda \rightarrow 0_+$ , l'intégrale est dominée par les cols solutions de

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i. \quad (2.40)$$

Dans le cas où il existe plusieurs cols, il faut classer les cols par la valeur de  $\text{Re } A$ . Le col dominant sera souvent celui qui correspond à  $\text{Re } A$  minimum. Toutefois, tous les cols ne contribuent pas nécessairement et il faut procéder par déformation du domaine d'intégration initial. Dans le cas de plusieurs variables, il peut ne pas être simple de reconnaître quels cols contribuent.

Pour calculer la contribution dominante du col  $\mathbf{x}^c$ , nous changeons de variables, posant

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^c + \mathbf{y}\sqrt{\lambda}.$$

Nous développons alors  $A(\mathbf{x})$  en puissances de  $\lambda$  (et donc de  $y$ ) :

$$\frac{1}{\lambda} A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\lambda} A(\mathbf{x}^c) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j + R(\mathbf{y}), \quad (2.41)$$

avec

$$R(\mathbf{y}) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^{k/2-1}}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{\partial^k A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} y_{i_1} \dots y_{i_k}. \quad (2.42)$$

Après le changement de variables, le terme quadratique en  $\mathbf{y}$  est indépendant de  $\lambda$ . L'intégrale devient

$$\mathcal{I}(\lambda) = \lambda^{n/2} e^{-A(\mathbf{x}^c)/\lambda} \int d^n y \exp \left[ -\frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j - R(\mathbf{y}) \right]. \quad (2.43)$$

Nous développons alors l'intégrand en puissances de  $\sqrt{\lambda}$  : à chaque ordre, le calcul se ramène à une valeur moyenne gaussienne de polynômes. À l'ordre dominant, on trouve

$$\mathcal{I}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} (2\pi\lambda)^{n/2} \left[ \det \mathbf{A}_c^{(2)} \right]^{-1/2} e^{-A(\mathbf{x}^c)/\lambda}, \quad (2.44)$$

où  $\mathbf{A}_c^{(2)}$  est la matrice des dérivées partielles secondes au col :

$$[\mathbf{A}_c^{(2)}]_{ij} \equiv \left. \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^c}.$$

## 2.7.2 Calcul des fonction génératrices

Nous introduisons la fonction génératrice

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda) = \int d^n x \exp \left[ -\frac{1}{\lambda} (A(\mathbf{x}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \right], \quad (2.45)$$

où  $A(\mathbf{x})$  est maintenant une fonction régulière des  $x_i$ . Définissons

$$\mathcal{N} = 1/\mathcal{Z}(0, \lambda).$$

La fonction  $\mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda)$  a la forme générale (2.29), et est proportionnelle à la fonction génératrice des moments de la distribution  $\mathcal{N} e^{-A(\mathbf{x})/\lambda}$ .

Les valeurs moyennes de polynômes avec le poids  $\mathcal{N} e^{-A(\mathbf{x})/\lambda}$ ,

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle \equiv \mathcal{N} \int d^n x x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} e^{-A(\mathbf{x})/\lambda}, \quad (2.46)$$

sont reliées aux dérivées de  $\mathcal{Z}$  par (cf. équation (2.30)) :

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle = \lambda^\ell \mathcal{N} \left[ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \mathcal{Z}(\mathbf{b}) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0}.$$

*Méthode du col.* Calculons les contributions des deux premiers ordres de la méthode du col à l'intégrale (2.45). L'équation du col est

$$b_i = \frac{\partial A}{\partial x_i} \quad \forall i. \quad (2.47)$$

Nous développons  $A(\mathbf{x})$  autour du col  $\mathbf{x}^c$ , comme expliqué en section 2.6, et utilisons le résultat (2.44) :

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} (2\pi\lambda)^{n/2} \left[ \det \mathbf{A}_c^{(2)} \right]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{\lambda} (A(\mathbf{x}^c) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}^c) \right],$$

avec

$$[\mathbf{A}_c^{(2)}]_{ij} \equiv \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^c}. \quad (2.48)$$

Introduisons maintenant  $\mathcal{W}(\mathbf{b})$ , la fonction génératrice des cumulants de la distribution qui sont aussi les fonctions de corrélation connexes (équation (2.31)), avec une normalisation commode,

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda) = \lambda \ln \mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda).$$

Utilisant le résultat (2.44) et l'identité (A.7) :  $\ln \det \mathbf{M} = \text{tr} \ln \mathbf{M}$ , valable pour toute matrice  $\mathbf{M}$ , on trouve

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda) = -A(\mathbf{x}^c) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}^c + \frac{1}{2} n \lambda \ln(2\pi\lambda) - \frac{1}{2} \lambda \text{tr} \ln \mathbf{A}_c^{(2)} + O(\lambda^2). \quad (2.49)$$

Puisque

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle_c = \lambda^{\ell-1} \left[ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0},$$

les dérivées successives du développement (2.49) par rapport à  $\mathbf{b}$  (se rappelant que  $\mathbf{x}^c$  est une fonction de  $\mathbf{b}$  à travers l'équation (2.47)), calculées à  $\mathbf{b} = 0$ ,

fournissent le développement des fonctions de corrélation connexes. À l'ordre dominant, par exemple,

$$\begin{aligned}\langle x_i \rangle &= x_i^c + O(\lambda), \\ \langle x_i x_j \rangle_c &= \lambda [\mathbf{A}_c^{(2)}]_{ij}^{-1} + O(\lambda^2),\end{aligned}$$

où  $\mathbf{A}_c^{(2)}$  est la matrice (2.48).

## Exercices

**Exercice 2.1.** Soient deux variables aléatoires  $x, y$  corrélées dont on suppose la loi de probabilité gaussienne. On trouve les cinq valeurs moyennes suivantes

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = a, \quad \langle xy \rangle = b, \quad \langle y^2 \rangle = c.$$

En déduire les valeurs moyennes  $\langle x^4 \rangle, \langle x^3 y \rangle, \langle x^2 y^2 \rangle, \langle xy^5 \rangle, \langle x^3 y^3 \rangle$ .

Quelles conditions doivent satisfaire les coefficients  $a, b, c$  pour pouvoir être les valeurs moyennes correspondantes ?

Quelle est la distribution gaussienne qui conduit à ces valeurs dans le cas particulier  $ac - b^2 = 1$  ?

*Solution.* Les valeurs moyennes sont, respectivement,

$$3a^2, \quad 3ab, \quad ac + 2b^2, \quad 15bc^2, \quad 6c^3 + 9bac.$$

Comme clairement  $a, c > 0$ , la condition pour que la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

soit positive se réduit à  $\det \mathbf{A} = ac - b^2 > 0$ .

La distribution correspondante dans le cas  $ac - b^2 = 1$  est

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(cx^2 - 2bxy + ay^2)/2}.$$

**Exercice 2.2.** Soient trois variables aléatoires  $x, y, z$  corrélées dont on suppose la loi de probabilité gaussienne. On trouve les neuf valeurs moyennes suivantes

$$\begin{aligned}\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle &= 0, \quad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = a, \\ \langle xy \rangle &= b, \quad \langle xz \rangle = \langle zy \rangle = c.\end{aligned}$$

En déduire, en fonctions de  $a, b, c$ , les valeurs moyennes  $\langle x^4 \rangle, \langle x^6 \rangle, \langle x^3 y \rangle, \langle x^2 y^2 \rangle, \langle x^2 y z \rangle$ .

Quelle est pour  $a = 2, b = 1$  et  $c = 0$ , la distribution gaussienne qui conduit à ces valeurs ?

*Solution.*

$$\begin{aligned}\langle x^4 \rangle &= 3a^2, & \langle x^6 \rangle &= 15a^3, & \langle x^3 y \rangle &= 3ab, & \langle x^2 y^2 \rangle &= a^2 + 2b^2, \\ \langle x^2 y z \rangle &= ac + 2bc.\end{aligned}$$

Pour  $a = 2, b = 1$  et  $c = 0$ , la distribution gaussienne qui conduit à ces valeurs est

$$\exp \left[ -\frac{1}{12} (4x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 4xy) \right].$$

**Exercice 2.3.** *Démonstration du résultat (2.5) par méthode itérative.* Le déterminant d'une matrice complexe quelconque  $\mathbf{A}^{(n)}$   $n \times n$ , d'éléments  $A_{ij}^{(n)}$  peut être calculé de façon récursive en soustrayant à toutes les lignes un multiple de la dernière ligne de façon à annuler la dernière colonne (supposant  $A_{nn}^{(n)} \neq 0$ , sinon il faut prendre une autre ligne et colonne). Cette méthode conduit à la relation entre déterminants

$$\det \mathbf{A}^{(n)} = A_{nn}^{(n)} \det \mathbf{A}^{(n-1)},$$

où  $\mathbf{A}^{(n-1)}$  est une matrice  $(n-1) \times (n-1)$  d'éléments

$$A_{ij}^{(n-1)} = A_{ij}^{(n)} - A_{in}^{(n)} A_{nj}^{(n)} / A_{nn}^{(n)}, \quad i, j = 1 \dots n-1. \quad (2.50)$$

Utiliser le résultat de l'intégrale simple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2/2+bx} = \sqrt{2\pi/a} e^{b^2/2a}$$

pour retrouver l'expression (2.5).

*Solution.* Nous considérons maintenant l'intégrale (2.4). Nous intégrons sur la variable  $x_n$  (supposant  $\text{Re } A_{nn} > 0$ ), utilisant le résultat (2.6) :

$$\int dx_n \exp \left( -\frac{1}{2} A_{nn} x_n^2 - x_n \sum_{i=1}^{n-1} A_{ni} x_i \right) = \sqrt{\frac{2\pi}{A_{nn}}} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{A_{in} A_{nj}}{A_{nn}} x_i x_j \right).$$

L'intégrale gaussienne restante devient une intégrale sur  $n-1$  variables :

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{2\pi}{A_{nn}}} \int \left( \prod_{i=1}^{n-1} dx_i \right) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{2} x_i (A_{ij} - A_{in} A_{nn}^{-1} A_{nj}) x_j \right).$$

Comparant avec l'identité (2.50), nous remarquons que nous sommes en train de calculer  $1/\sqrt{\det \mathbf{A}}$ . Nous concluons

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2}. \quad (2.51)$$

**Exercice 2.4.** Évaluer par la méthode du col la fonction de Bessel modifiée

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, e^{i\nu\theta} e^{x \cos \theta},$$

( $= J_\nu(ix)$ ) avec  $\nu \geq 0$  entier, pour  $x \rightarrow +\infty$ .

*Solution.* L'intégrale a la forme canonique pour l'application de la méthode du col ( $x = 1/\lambda$ ), et l'intégrand est une fonction entière. Pour trouver la position du col, on peut omettre le facteur  $e^{i\nu\theta}$ .

Les cols sont alors donnés par

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \pmod{\pi}.$$

Pour  $x \rightarrow +\infty$ , le col dominant est  $\theta = 0$ . Nous développons au voisinage du col

$$x \cos \theta = x - \frac{1}{2}x\theta^2 + \frac{1}{24}x\theta^4 + O(\theta^6).$$

La région contribuant à l'intégrale est d'ordre  $\theta = O(1/\sqrt{x})$ . Donc

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi} e^x \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{i\nu\theta} e^{-x\theta^2/2} \left(1 + \frac{1}{24}x\theta^4\right) + O(e^x/x^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left(1 + \frac{1-4\nu^2}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right). \end{aligned}$$

**Exercice 2.5.** Évaluer par la méthode du col la fonction de Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, e^{ix \cos \theta},$$

pour  $x$  réel tendant vers  $+\infty$ .

*Solution.* Les cols sont les mêmes que dans l'exercice précédent :

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \pmod{\pi}.$$

Tous les cols contribuent,  $\theta = 0$  et les moitiés de  $\theta = \pm\pi$ , qui par périodicité reconstitue un col complet.

Nous développons l'intégrand au voisinage du col  $\theta = 0$  :

$$\frac{1}{2\pi} e^{ix} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\theta \, e^{-ix\theta^2/2}.$$

Pour prendre le col suivant la ligne de phase constante, il faut poser

$$\theta = e^{-i\pi/4} s.$$

La contribution du col devient

$$\frac{1}{2\pi} e^{ix-i\pi/4} \int ds \, e^{-xs^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{ix-i\pi/4}.$$

Le deuxième col donne la contribution complexe conjuguée. On trouve donc

$$J_0(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4).$$

**Exercice 2.6.** Évaluer par la méthode du col, pour  $z \rightarrow +\infty$ , la fonction de Bessel de troisième espèce

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-z(t+1/t)/2}. \quad (2.52)$$

*Solution.* Posons

$$A(t) = \frac{1}{2}(t + 1/t).$$

Le col  $t_c$  est donné par

$$A'(t_c) = \frac{1}{2}(1 - 1/t_c^2) = 0 \Rightarrow t_c = 1.$$

Alors,

$$A''(t_c) = 1/t_c^3 = 1.$$

On en conclut

$$K_\nu(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} (\pi/2z)^{1/2} e^{-z}.$$

**Exercice 2.7.** Évaluer par la méthode du col l'intégrale

$$I_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta (\cos \theta)^n e^{in\theta \tanh s}$$

en fonction du paramètre réel  $s$  dans la limite  $n \rightarrow \infty$ . On remarquera que la fonction est réelle.

*Solution.* Introduisons la fonction

$$A(\theta) = -i\theta \tanh s - \ln \cos \theta.$$

La fonction est holomorphe sauf aux points  $\theta = \pi/2 \bmod (\pi)$ . La position des cols est donnée par

$$A'(\theta) = -i \tanh s + \tan \theta = 0.$$

et au col

$$A''(\theta) = 1 + \tan^2 \theta = 1 - \tan^2 s = \frac{1}{\cosh^2 s}.$$

L'équation a comme solution

$$\theta = is + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit

$$A(\theta) = -i(is + m\pi) \tanh s - \ln \cosh s - im\pi \Rightarrow \operatorname{Re} A(\theta) = s \tanh s - \ln \cosh s.$$

Pour tous les cols, l'intégrand a donc le même module, mais par déformation de contour, on vérifie que seul le col  $m = 0$  contribue. Donc,

$$I_n(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} (\cosh s)^{n+1} e^{-ns \tanh s}.$$

**Exercice 2.8.** Adapter la méthode du col au calcul de l'intégrale

$$I_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{2\nu} e^{x \cos \theta}$$

pour  $x \rightarrow +\infty$ , où cette expression généralise la fonction de Bessel modifiée définie dans l'exercice (2.4) à des valeurs complexes  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ .

*Solution.* Pour  $x \rightarrow +\infty$ , l'intégrale est dominée par le voisinage de  $\theta = 0$ . On peut donc développer l'intégrand :

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{2\nu} e^{x \cos \theta} \\ &= e^x \int_0^\infty d\theta \theta^{2\nu} \left(1 - \frac{1}{3}\nu\theta^2 + \frac{1}{24}x\theta^4\right) e^{-x\theta^2/2} + O(e^x/x^{\nu+5/2}) \\ &= e^x \int_0^\infty ds (2s)^{\nu-1/2} \left(1 - \frac{2}{3}\nu s + \frac{1}{6}xs^2\right) e^{-xs} + O(e^x/x^{\nu+5/2}) \\ &= 2^{\nu-1/2}\Gamma(\nu + 1/2)x^{-\nu-1/2} e^x \left[1 + \frac{1-4\nu^2}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

On vérifie que ce résultat conduit à une estimation de la fonction  $I_\nu$  qui est le prolongement de l'expression obtenue dans l'exercice 2.4.



# Chapitre 3

## Universalité et limite continue

NOUS ABORDONS MAINTENANT deux des sujets principaux de cet ouvrage, les questions liées d'*universalité* et de *limite continue* macroscopique dans des systèmes aléatoires.

Nous allons d'abord expliquer les notions d'universalité et de limite continue à l'aide d'exemples classiques simples, le théorème de la limite centrale de la théorie des probabilités et les propriétés de la marche au hasard sur réseau. Dans les deux cas, nous nous intéressons à des propriétés collectives impliquant un nombre infini de variables aléatoires.

Ces exemples ont en commun la caractéristique suivante : ce sont des processus aléatoires déterminés par des lois de probabilité dont les déviations par rapport à la valeur moyenne décroissent rapidement avec l'écart.

Ils diffèrent en ce sens que la marche au hasard est basée sur une structure spatiale qui n'existe pas dans le théorème de la limite centrale.

De l'étude de ces premiers exemples émergera l'importance des distributions gaussiennes, ce qui justifiera les développements du chapitre 2. Nous montrerons, par ailleurs, que ces lois gaussiennes sont des points fixes attracteurs de certaines transformations sur les distributions qui ont pour effet de diminuer le nombre de variables aléatoires. Ce sont là de premières applications, particulièrement simples, de l'idée de groupe de renormalisation.

Enfin, dans le contexte de la marche au hasard, à l'existence d'une limite continue est associée l'apparition d'intégrales de chemin.

### 3.1 Théorème de la limite centrale des probabilités

La théorie élémentaire des probabilités nous fournit un premier exemple d'*universalité* : le théorème de la limite centrale, dont nous démontrons ici une version forte avec des hypothèses assez restrictives, mais bien adaptées aux problèmes que nous voulons étudier par la suite.

Considérons une variable aléatoire réelle  $q$  caractérisée par une distribution de probabilité  $\rho(q) \geq 0$ .

Nous choisissons, pour des raisons de simplicité technique,  $\rho(q)$  d'une des deux classes qui seront utiles par la suite :

- (i)  $\rho(q)$  est une fonction (et non une distribution) positive, dérivable par morceaux à dérivée sommable.
- (ii)  $\rho(q)$  est une distribution discrète,  $q$  ne prenant que des valeurs entières.

De plus, dans les deux cas, nous supposons  $\rho(q)$  bornée à décroissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives  $M$  et  $\mu$  telles que

$$\rho(q) \leq M e^{-\mu|q|}, \quad \mu > 0. \quad (3.1)$$

Dans ces conditions, les grandes valeurs de  $|q|$  sont très peu probables.

Avec ces hypothèses (très restrictives du seul point de vue du théorème de la limite centrale), on démontre que *la distribution asymptotique de la valeur moyenne de  $n$  variables aléatoires indépendantes de même distribution  $\rho$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , est une distribution gaussienne.*

### 3.1.1 Transformation de Fourier

Nous considérons d'abord la situation où la distribution  $\rho(q)$  est une fonction positive, dérivable par morceaux à dérivée sommable,

$$\int dq |\rho'(q)| < \infty, \quad (3.2)$$

et à variation bornée à cause de la positivité et de la condition de normalisation  $\int dq \rho(q) = 1$ .

Nous notons  $\langle f \rangle$  la valeur moyenne d'une fonction  $f(q)$  :

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \rho(q) f(q), \quad \langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \rho(q) = 1. \quad (3.3)$$

Pour démontrer le théorème, il est commode d'introduire la transformée de Fourier  $\tilde{\rho}(k)$  de la fonction  $\rho(q)$ , qui est aussi une fonction génératrice des moments de la distribution, ainsi que la fonction  $w(k) = \ln \tilde{\rho}(k)$  qui est la fonction génératrice des cumulants.

*Transformée de Fourier.* La transformée de Fourier

$$\tilde{\rho}(k) = \int dq e^{-ikq} \rho(q) \Rightarrow \rho(q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq} \tilde{\rho}(k) \quad (3.4)$$

de la distribution  $\rho(q)$  satisfait (\* note ici la conjugaison complexe)

$$\tilde{\rho}^*(k) = \tilde{\rho}(-k), \quad \tilde{\rho}(k=0) = 1, \quad |\tilde{\rho}(k)| \leq 1,$$

et de plus, avec nos hypothèses,  $|\tilde{\rho}(k)| = 1$  n'est possible que pour  $k = 0$ .

Avec la borne (3.1), l'intégrale définissant  $\tilde{\rho}(k)$  converge aussi pour  $k$  complexe dans le domaine

$$|\operatorname{Im} k| < \mu.$$

De plus, la fonction  $\tilde{\rho}(k)$  est dérivable dans cette bande et est donc holomorphe.

Les transformées de Fourier analytiques dans une bande de cette forme correspondent aux distributions à décroissance exponentielle. Cette propriété illustre la dualité entre décroissance asymptotique d'une fonction et régularité de sa transformée de Fourier. Elle jouera un rôle très important dans notre étude de l'universalité et de la limite continue.

En particulier,  $\tilde{\rho}(k)$  admet un développement en série de Taylor convergent pour  $|k| < \mu$ . Elle est également la fonction génératrice des moments de la distribution  $\rho(q)$  puisque

$$\tilde{\rho}(k) = 1 + \sum_{p=1} \frac{(-i)^p}{p!} \langle q^p \rangle k^p$$

avec

$$\langle q^p \rangle = \int dq q^p \rho(q), \quad |\langle q^p \rangle| < \frac{2M}{\mu^{p+1}} p!.$$

Enfin, les propriétés de dérivabilité de  $\rho(q)$  et les hypothèses (3.2) entraînent que  $\tilde{\rho}(k)$  décroît comme  $1/k$  pour  $|k| \rightarrow \infty$ .

Il est également commode d'introduire la fonction

$$w(k) = \ln \tilde{\rho}(k) = \sum_{p=1} \frac{(-i)^p}{p!} w_p k^p, \quad (3.5)$$

(notons  $w^*(k) = w(-k)$ ) qui est une fonction génératrice des cumulants de la distribution :

$$w_1 = \langle q \rangle, \quad w_2 = \langle q^2 \rangle - (\langle q \rangle)^2, \quad w_3 = \langle q^3 \rangle - 3 \langle q^2 \rangle \langle q \rangle + 2 (\langle q \rangle)^3 \dots$$

La fonction  $w$  satisfait

$$w(0) = 0, \quad \operatorname{Re} w(k) < 0 \text{ pour } k \neq 0.$$

Notons que le coefficient  $w_2$ , qui peut aussi s'écrire

$$w_2 = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle \geq 0,$$

(le carré de l'écart quadratique moyen) est positif, sauf pour une distribution certaine que nous avons exclu ; que dans le cas d'une distribution gaussienne

tous les cumulants  $w_p$  avec  $p > 2$  sont nuls puisque  $\tilde{\rho}(k)$  est aussi une fonction gaussienne.

La fonction analytique  $w(k)$  a comme singularités les singularités de  $\tilde{\rho}(k)$  et ses zéros. Comme  $\tilde{\rho}(0) = 1$ , il existe un cercle centré à l'origine, sans zéro, dans lequel  $w(k)$  est analytique.

### 3.1.2 Théorème de la limite centrale et conséquences

On considère maintenant  $n$  variables aléatoires indépendantes  $q_i$  avec la même distribution  $\rho(q)$ , ou  $n$  tirages de la même variable (mais physiquement c'est la première situation qui nous intéresse).

*Distribution de la somme de  $n$  variables.* Nous partons de la remarque suivante : si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes de distributions  $\rho_1$  et  $\rho_2$  respectivement, la somme  $Q = Q_1 + Q_2$  a comme distribution

$$R(Q) = \int dQ' \rho_1(Q') \rho_2(Q - Q').$$

La distribution de la somme de  $n$  variables est donnée par

$$P_n(Q) = \langle q_1 + q_2 + \cdots + q_n \rangle \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n q_i = Q.$$

La distribution  $P_{n+1}$  de  $n+1$  variables peut être déduite de la distribution  $P_n$  de  $n$  variables et de la distribution  $\rho$  de la dernière variable. Elle satisfait donc l'équation de récurrence

$$\begin{aligned} P_{n+1}(Q) &= \langle q_1 + q_2 + \cdots + q_n + q_{n+1} \rangle \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n+1} q_i = Q \\ &= \int dQ' \rho(Q') P_n(Q - Q'). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Cette équation de convolution prend une forme algébrique après transformation de Fourier. Posant

$$\tilde{P}_n(k) = \int dQ e^{ikQ} P_n(Q),$$

on trouve

$$\tilde{P}_{n+1}(k) = \tilde{\rho}(k) \tilde{P}_n(k)$$

et donc

$$\tilde{P}_n(k) = \tilde{\rho}^n(k) = e^{nw(k)}. \tag{3.7}$$

On en déduit

$$P_n(Q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikQ} \tilde{P}_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikQ + nw(k)}. \tag{3.8}$$

La fonction  $\tilde{P}_n(k)$  décroît donc comme  $1/|k|^n$  pour  $|k| \rightarrow \infty$ , de sorte que  $P_n(Q)$  est  $n - 1$  fois dérivable.

*Distribution asymptotique.* Comme  $\operatorname{Re} w(k) < 0$  pour  $k \neq 0$ , la contribution du voisinage de  $k = 0$  domine l'intégrale (3.8). Dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , on peut donc restreindre l'intégrale à un voisinage  $|k| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  mais arbitrairement petit, négligeant des corrections décroissant exponentiellement en  $n$ . Comme dans la méthode du col, on peut donc remplacer la fonction analytique  $w(k)$  par les premiers termes de son développement en série de Taylor (3.5) :

$$P_n(Q) = \frac{1}{2\pi} \int dk \exp \left( iQk - inw_1k - \frac{1}{2}nw_2k^2 + O(k^3) \right). \quad (3.9)$$

L'intégrale gaussienne donne

$$P_n(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nw_2}} e^{-n(Q/n-w_1)^2/2w_2} (1 + O(1/n)), \quad (3.10)$$

où nous avons négligé des termes décroissant exponentiellement en  $n$ .

À  $Q$  fixé, la probabilité tend exponentiellement vers zéro pour tout  $w_1 \neq 0$ .

En revanche, la variable aléatoire  $Q = (q_1 + q_2 + \dots + q_n)/n$ , valeur moyenne des  $n$  variables, a comme distribution asymptotique

$$R_n(Q) = nP_n(nQ) \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi w_2}} e^{-n(Q-w_1)^2/2w_2}. \quad (3.11)$$

La moyenne de  $n$  variables est donc une variable aléatoire qui tend vers une valeur certaine qui est la valeur moyenne

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle q_i \rangle = \langle q \rangle = w_1. \quad (3.12)$$

Enfin, la variable aléatoire

$$X = \left( \frac{1}{n} \sum_i q_i - w_1 \right) \sqrt{n}, \quad (3.13)$$

et donc  $\langle X \rangle = 0$ , a comme distribution limite la distribution gaussienne

$$L_n(X) = \sqrt{n}P_n(nw_1 + X\sqrt{n}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi w_2}} e^{-X^2/2w_2}.$$

*Universalité.* La distribution asymptotique de la moyenne de  $n$  variables indépendantes de valeur moyenne nulle est une distribution gaussienne, indépendamment de la distribution initiale (dans une certaine classe); en

particulier, elle ne dépend que du seul paramètre  $w_2 = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle$ . Cette indépendance dans la distribution initiale est un premier exemple d'*universalité*. Elle traduit une propriété collective d'un nombre infini de variables aléatoires non corrélées.

Il est facile de calculer les corrections à ce résultat asymptotique. Si  $w_3 \neq 0$ , la correction principale est d'ordre  $n^{-1/2}$  et on trouve

$$L_n(X) = \frac{e^{-X^2/2w_2}}{\sqrt{2\pi w_2}} \left[ 1 + (X^3/6 - w_2 X/2) \frac{w_3}{w_2^3 \sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Les cumulants  $w_p$ ,  $p > 2$  caractérisent alors l'approche à la distribution gaussienne limite, le premier cumulant non-nul donnant la correction dominante. Ils modifient la gaussienne par des corrections relatives polynomiales.

*Remarques.*

- (i) Comme des termes décroissants exponentiellement avec  $n$  ont été négligés, numériquement la forme asymptotique gaussienne n'est une bonne approximation pour  $n$  grand mais fini que si

$$|X| \ll \sqrt{n} \quad \text{pour } n \gg 1.$$

- (ii) Seule une fonction affine, avec des coefficients dépendant explicitement de  $n$ , de la somme des  $n$  variables aléatoires initiales admet une distribution asymptotique. La transformation affine (3.13) est un premier exemple de *renormalisation*.

### 3.1.3 Remarques diverses

*Méthode du col.* De la représentation (3.8), on déduit la représentation de la distribution de la valeur moyenne  $Q = \sum q_i/n$  :

$$R_n(Q) = \frac{n}{2\pi} \int dk e^{inQk + nw(k)}. \quad (3.14)$$

Comme  $w(k)$  est une fonction analytique, cette intégrale peut se calculer, pour  $n \rightarrow \infty$ , par la méthode du col. L'équation du col est

$$w'(k) + iQ = 0.$$

La méthode du col ne peut être justifiée que si le col est dans un voisinage de l'origine. Dans ce cas, on obtient

$$R_n(Q) \sim \sqrt{\frac{n}{-2\pi w''(k)}} e^{inQk + nw(k)}. \quad (3.15)$$

La combinaison  $iQk + w(k)$ , où  $k$  est solution de l'équation de col, est proportionnelle à la transformée de Legendre de  $w$  (cf. section 6.1.2).

Si le col est asymptotiquement proche de l'origine, on peut développer  $w$ . L'équation de col devient

$$-iw_1 - w_2k + iQ = O(k^2) \Rightarrow k = i(Q - w_1)/w_2 + O((Q - w_1)^2).$$

Substituant dans l'expression (3.15), on retrouve l'évaluation (3.11).

*Cumulants de la distribution.* La transformée  $\tilde{R}_n(k)$  de la distribution  $R_n(Q)$  se déduit de l'expression (3.14) en changeant  $k$  en  $k/n$ . On obtient

$$\tilde{R}_n(k) = e^{nw(k/n)}. \quad (3.16)$$

Les cumulants de la distribution  $R_n(Q)$  se déduisent donc simplement des cumulants (3.5) de la distribution  $\rho(q)$ ,

$$\ln \tilde{R}_n(k) = \sum_{p=1} \frac{(-i)^p}{p!} \Omega_p k^p, \quad \Omega_p = n^{1-p} w_p.$$

Cette expression montre que, pour  $n \rightarrow \infty$ , tous les cumulants de  $R_n(Q)$  avec  $p > 1$  tendent vers zéro, ce qui correspond à la propriété que la valeur moyenne  $Q = \langle Q \rangle$  devient certaine. Notons que le comportement des moments de la distribution  $R_n$  est beaucoup moins simple.

De même, la représentation de Fourier de la distribution  $L_n(X)$  peut s'écrire

$$L_n(X) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int dk e^{ik(X\sqrt{n} + nw_1)} e^{nw(k)}.$$

Après le changement de variable  $\kappa = k\sqrt{n}$ , on reconnaît la transformée de Fourier  $\tilde{L}_n(\kappa)$  de  $L_n(X)$  :

$$\begin{aligned} \ln \tilde{L}_n(\kappa) &= nw(\kappa/\sqrt{n}) + iw_1\kappa\sqrt{n} = -\frac{1}{2}w_2\kappa^2 + \frac{(-i)^3}{3!} \frac{w_3}{n^{1/2}} \kappa^3 \\ &\quad + \frac{(-i)^4}{4!} \frac{w_4}{n} \kappa^4 + \dots, \end{aligned}$$

et donc la fonction génératrice des cumulants de la distribution de  $X$ . Les cumulants convergent vers les cumulants d'une distribution gaussienne universelle. Les moments se déduisant des cumulants de façon algébrique, la même propriété s'applique aux moments. Soulignons que cette convergence se déduit d'hypothèses plus faibles.

*Exemples et contre-exemples.*

- (i) La distribution uniforme sur le segment  $[-1, +1]$  et nulle en dehors du segment,

$$\rho(q) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(q+1) - \text{sgn}(q-1)), \quad \Rightarrow \quad \langle q \rangle = 0, \quad \langle q^2 \rangle = \frac{1}{3},$$

(sgn est la fonction signe) est centrée en zéro, et satisfait aux hypothèses du théorème de la limite centrale. Sa transformée de Fourier est

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dq e^{iqk} = \frac{\sin k}{k}.$$

Développons la fonction génératrice des cumulants

$$w(k) = \ln(\sin k/k) = -\frac{1}{6}k^2 - \frac{1}{180}k^4 + O(k^6).$$

Le coefficient de  $k^4$  caractérise la déviation principale à la distribution gaussienne asymptotique. Cet exemple montre bien que la forme gaussienne n'est pas une bonne approximation pour  $|X| > \sqrt{n}$  où la distribution exacte s'annule.

(ii) La distribution

$$\rho(q) = \frac{1}{2}\mu e^{-\mu|q|}, \quad q \in \mathbb{R},$$

satisfait également aux hypothèses. Sa transformée de Fourier est

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{\mu^2}{k^2 + \mu^2} \Rightarrow w(k) = -k^2/\mu^2 + k^4/2\mu^4 + O(k^6).$$

(iii) En revanche, la distribution

$$\rho(q) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+q^2} \quad q \in \mathbb{R},$$

fournit un exemple d'une distribution qui ne satisfait pas aux conditions du théorème de la limite centrale, même dans sa forme la plus faible. Elle n'a pas de second moment puisque l'intégrale  $\int q^2 \rho(q) dq$  diverge. Sa transformée de Fourier

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{1}{2} e^{-|k|},$$

n'est pas dérivable à  $k = 0$ . Nous remarquons

$$[\tilde{\rho}(k/n)]^n = \frac{1}{2} e^{-|k|},$$

et donc  $R(Q) = \rho(Q)$ . Cette distribution est la distribution asymptotique d'une autre classe d'universalité.

### 3.1.4 Variables aléatoires à valeurs entières

Le théorème de la limite centrale se généralise au cas d'une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs entières. Les intégrales sont remplacées par des sommes et les transformées de Fourier deviennent des séries de Fourier.

Soit  $q$  une variable aléatoire entière dont la loi de probabilité  $\rho(q) \geq 0$  satisfait de nouveau la borne exponentielle (3.1).

On introduit alors la série de Fourier convergente

$$\tilde{\rho}(k) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} e^{-ikq} \rho(q), \quad \rho(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk e^{ikq} \tilde{\rho}(k),$$

et la fonction  $w(k) = \ln \tilde{\rho}(k)$ .

Avec la borne (3.1), la fonction  $\tilde{\rho}(k)$  périodique, de période  $2\pi$ , est aussi holomorphe dans la bande  $|\operatorname{Im} k| < \mu$ .

Par ailleurs,

$$|\tilde{\rho}(k)| \leq 1.$$

En général, dans l'intervalle  $-\pi \leq k \leq \pi$ , le maximum  $\tilde{\rho}(k) = 1$  n'est atteint que pour  $k = 0$  sauf si  $\rho(q)$  n'est différent de zéro que sur un sous-ensemble de la forme

$$q = a + mb \quad \text{avec} \quad a, b \text{ fixés et } b > 1, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Un exemple très simple de cette situation avec  $a = 1$ ,  $b = 2$  est

$$\rho(q) = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad q = \pm 1.$$

Nous excluons cette situation dans un premier temps, et la commenterons plus loin.

Dans ces conditions, la série de Fourier a les propriétés qui permettent de démontrer le théorème de la limite centrale.

La distribution de la somme de  $n$  variables indépendantes,

$$P_n(Q) = \sum_{q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Z}} \prod_i \rho(q_i) \quad \text{avec} \quad \sum_i q_i = Q,$$

satisfait la forme discrète de l'équation de récurrence (3.6) :

$$P_{n+1}(Q) = \sum_{Q' \in \mathbb{Z}} \rho(Q') P_n(Q - Q'). \quad (3.17)$$

La série de Fourier correspondante

$$\tilde{P}_n(k) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} e^{-ikq} P_n(q), \quad P_n(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk e^{ikq} \tilde{P}_n(k),$$

satisfait à l'équation de récurrence

$$\tilde{P}_{n+1}(k) = \tilde{\rho}(k) \tilde{P}_n(k),$$

et donc

$$\tilde{P}_n(k) = \tilde{\rho}^n(k) = e^{nw(k)}.$$

En représentation de Fourier, on est ramené à la situation analogue à celle considérée en section 3.1.2. La variable aléatoire  $(q_1 + q_2 + \dots + q_n)/n$  tend vers une valeur certaine, la moyenne  $w_1 = \langle q \rangle$ .

Les cumulants de la distribution de la variable aléatoire

$$X = \left( \frac{1}{n} \sum_i q_i - w_1 \right) \sqrt{n}, \quad (3.18)$$

tendent vers les cumulants d'une distribution gaussienne universelle caractérisée par le paramètre  $w_2$ .

Soulignons, cependant, que la distribution  $L_n(X)$  n'a pas de limite au sens des fonctions, puisqu'elle n'est non nulle que sur un ensemble discret. En revanche, au sens des mesures, le caractère discret initial n'est pas important et dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , on trouve la même limite gaussienne.

Du point de vue physique, on peut interpréter  $X$  comme une variable macroscopique, moyenne d'un grand nombre de variables microscopiques, qui n'est mesurée qu'avec une précision finie  $\Delta X$ . D'une part, le concept de convergence au sens des mesures est alors approprié. Par ailleurs, dès que  $1/\sqrt{n} \gg \Delta X$ , le caractère discret des variables  $q$  ne joue plus de rôle. Nous pouvons alors considérer  $X$  comme une variable continue. Nous introduisons donc la notion de *limite continue*, la fonction continue vers laquelle les points de  $L_n(X)$  convergent. La distribution gaussienne, considérée comme une fonction continue, est la *limite continue* de  $L_n(X)$ .

*Exemple.*

$$\rho(q) = \begin{cases} s/2 & \text{pour } q = \pm 1 \\ 1 - s & \text{pour } q = 0 \end{cases}$$

avec  $0 < s < 1$ . Alors,

$$\tilde{\rho}(k) = 1 - s + s \cos k$$

varie entre 1 et  $1 - 2s$  et n'a module 1 que pour  $k = 0$ . On en déduit

$$w(k) = \ln(1 - s + s \cos k) = -\frac{1}{2}sk^2 + \frac{1}{24}s(s-3)k^4 + O(k^6).$$

La distribution gaussienne limite est alors

$$L_\infty(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-X^2/2s}.$$

*Autres maxima.* Reprenons l'exemple précédent dans la limite  $s = 1$ . Dans ce cas,  $\tilde{\rho}(k) = \cos k$  atteint son module maximum pour les deux valeurs de  $k = 0$  et  $k = \pi$ . Ceci reflète la propriété que, suivant la parité de  $n$ , seules les valeurs paires ou impaires de  $n$  ont une probabilité non nulle. Cependant, en calculant des moyennes de fonctions continues avec la mesure  $L_\infty(X)$ , on

vérifie que les autres maxima qui engendrent des contributions oscillatoires, ne contribuent pas. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
L_n(X) &= \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dk (\cos k)^n e^{ikX\sqrt{n}} \\
&\sim \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-nk^2/2 + ikX\sqrt{n}} \\
&\times \left[ 1 + (-1)^n \left( e^{-i\pi X\sqrt{n}} \theta(k) + e^{i\pi X\sqrt{n}} \theta(-k) \right) \right] \\
&\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-k^2/2 + ikX} \left[ 1 + (-1)^n \left( e^{-i\pi X\sqrt{n}} \theta(k) + e^{i\pi X\sqrt{n}} \theta(-k) \right) \right],
\end{aligned}$$

où  $\theta(t)$  est la fonction saut :  $\theta(t) = 1$  pour  $t > 0$ ,  $\theta(t) = 0$  pour  $t < 0$ . On observe que les deux contributions supplémentaires oscillent avec  $X$  avec une période  $2/\sqrt{n}$  et ont donc, pour  $n \rightarrow \infty$ , une valeur moyenne nulle sur un intervalle fini.

Cette analyse se généralise à tout autre maximum.

## 3.2 Universalité et points fixes de transformations

Nous démontrons maintenant la propriété d'universalité, à savoir l'existence d'une distribution gaussienne limite indépendante de la distribution initiale, de façon très différente. Il va être simple de supposer que nous partons de  $n = 2^m$  variables indépendantes. Nous moyennons alors ces variables deux par deux de façon itérative, diminuant le nombre de variables d'un facteur deux à chaque itération.

Ceci constitue un premier exemple très simple de l'application des méthodes de groupe de renormalisation à la démonstration de propriétés d'universalité. Par ailleurs, cet exemple va nous permettre de définir un langage adapté.

La distribution de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de même distribution  $\rho$  est obtenue par la transformation

$$[\mathcal{T}\rho](q) = \int dq' \rho(q') \rho(q - q').$$

Nous combinons cette transformation avec une *renormalisation* de la somme de paramètre  $1/\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , ce qui conduit à la transformation

$$[\mathcal{T}_\lambda \rho](q) = \lambda \int dq' \rho(q') \rho(\lambda q - q').$$

Par exemple,  $\lambda = 1$  correspond à la somme et  $\lambda = 2$  à la moyenne des deux variables initiales.

Sur la distribution  $\rho(q)$ , cette transformation a une forme un peu compliquée mais sur la fonction  $w(k)$  (définie par l'équation (3.5)) elle devient une application linéaire. En effet, introduisant la représentation de Fourier (3.4), on obtient

$$[\mathcal{T}_\lambda \rho](q) = \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \int dq' dk_1 dk_2 e^{ik_1 q' + ik_2 (\lambda q - q')} \tilde{\rho}(k_1) \tilde{\rho}(k_2).$$

L'intégrale sur  $q'$  donne  $2\pi\delta(k_1 - k_2)$ . Intégrant sur  $k_2$ , changeant  $k_1 = k/\lambda$ , on trouve

$$[\mathcal{T}_\lambda \rho](q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq} \tilde{\rho}^2(k/\lambda) \Rightarrow [\mathcal{T}_\lambda \tilde{\rho}](k) = \tilde{\rho}^2(k/\lambda).$$

En termes de  $w(k) = \ln \tilde{\rho}(k)$ , la transformation s'écrit simplement

$$[\mathcal{T}_\lambda w](k) \equiv 2w(k/\lambda).$$

Cette transformation linéaire a une propriété importante pour ce qui suit : elle est indépendante de  $m$ . Dans le langage des systèmes dynamiques, son application répétée engendre une dynamique de type *markovienne stationnaire ou invariante par translation du temps*. Notre but est d'étudier les propriétés de la transformation itérée  $\mathcal{T}_\lambda^m$  pour  $m \rightarrow \infty$  en fonction de la valeur de  $\lambda$ .

### 3.2.1 Situation générique

Une distribution asymptotique est nécessairement un point fixe de cette transformation. Elle correspond donc à une fonction  $w_*(k)$  (où la notation  $*$  n'est pas reliée à la conjugaison complexe) qui satisfait

$$[\mathcal{T}_\lambda w_*](k) \equiv 2w_*(k/\lambda) = w_*(k).$$

Pour la classe de distributions étudiées dans ce chapitre, les fonctions  $w(k)$  sont régulières à  $k = 0$ . On développe donc  $w_*(k)$  en puissances de  $k$ , posant ( $w(0) = 0$ )

$$w_*(k) = -iw_1 k - \frac{1}{2}w_2 k^2 + \sum_{\ell=3} \frac{(-ik)^\ell}{\ell!} w_\ell.$$

À l'ordre  $k$ , on trouve l'équation

$$2w_1/\lambda = w_1.$$

Dans la situation générique  $w_1 \neq 0$ , cette équation implique  $\lambda = 2$  et donc, identifiant les termes de degré plus élevés,

$$2^{1-\ell} w_\ell = w_\ell \Rightarrow w_\ell = 0 \text{ pour } \ell > 1.$$

Donc,

$$w_*(k) = -iw_1 k.$$

Les points fixes forment une famille à un paramètre  $w_1$ , qui peut être absorbé (si  $w_1 \neq 0$ ) dans une normalisation de la variable aléatoire  $q$ .

Le choix  $\lambda = 2$  correspond à calculer la distribution asymptotique de la moyenne. Comme attendu, les points fixes correspondent alors à des distributions certaines  $q = \langle q \rangle = w_1$ . En effet,

$$\rho_*(q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq - iw_1 k} = \delta(q - w_1),$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac.

*Convergence et stabilité du point fixe.* On peut maintenant étudier la convergence d'une distribution initiale quelconque vers ce point fixe.

Pour une transformation non linéaire générale, il est souvent impossible de faire une analyse globale. On ne peut alors que linéariser la transformation au voisinage du point fixe et faire une étude locale.

Ici, cela n'est pas nécessaire puisque la transformation est linéaire. Posons

$$w(k) = w_*(k) + \delta w(k).$$

Alors,

$$\mathcal{T}_\lambda w = \mathcal{T}_\lambda w_* + \mathcal{T}_\lambda \delta w = w_* + \mathcal{T}_\lambda \delta w.$$

Puisque  $\delta w$  est une fonction régulière, on peut la développer en série de Taylor :

$$\delta w(k) = \sum_{\ell=1} \frac{(-ik)^\ell}{\ell!} \delta w_\ell.$$

Alors,

$$[\mathcal{T}_\lambda \delta w](k) = 2\delta w(k/\lambda) = 2 \sum_{\ell=1} \frac{(-ik)^\ell}{\ell!} \lambda^{-\ell} \delta w_\ell.$$

Sur cette expression, on observe que les fonctions  $k^\ell$ , où  $\ell$  est un entier positif, sont les vecteurs propres de la transformation  $\mathcal{T}_\lambda$  et les valeurs propres correspondantes sont

$$\tau_\ell = 2\lambda^{-\ell} = 2^{1-\ell}. \quad (3.19)$$

Dans la mesure où à chaque itération le nombre de variables est divisé par deux, on peut relier les valeurs propres au comportement en fonction du nombre initial  $n$  de variables. On définit l'*exposant* associé

$$l_\ell = \ln \tau_\ell / \ln 2 = 1 - \ell.$$

Après  $m$  itérations, la composante  $\delta w_\ell$  est multipliée par  $n^{1-\ell}$ . En effet,

$$\mathcal{T}_\lambda^m k^\ell = 2^{m(1-\ell)} k^\ell = n^{1-\ell} k^\ell.$$

Le comportement pour  $n \rightarrow \infty$  des composantes de  $\delta w$  sur les vecteurs propres dépend donc du signe de  $1 - \ell$ .

Examinons les différentes valeurs de  $\ell$  :

- (i)  $\ell = 1 \Rightarrow \tau_1 = 1, l_\ell = 0$ . Si on ajoute un terme  $\delta w$  proportionnel au vecteur propre  $k$  à  $w_*(k)$ ,  $\delta w(k) = -i\delta w_1 k$ , on change

$$w_1 \mapsto w_1 + \delta w_1 .$$

et donc de point fixe. Remarquons que ce changement peut s'interpréter comme une simple transformation linéaire sur  $k$  et donc sur la variable aléatoire  $q$ .

De façon générale, l'existence d'un vecteur propre associé à la valeur propre  $\tau = 1$ , et donc  $l = 0$ , est la conséquence de l'existence d'une famille à un paramètre de points fixes. En effet, soit  $\alpha$  un tel paramètre et supposons que, quel que soit  $\alpha$ ,

$$\mathcal{T}w(\alpha) = w(\alpha) ,$$

et que  $w(\alpha)$  soit une fonction dérivable de  $\alpha$ . Alors,

$$\mathcal{T} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} .$$

Dans le langage du *groupe de renormalisation*, que nous discuterons de façon plus générale au chapitre 9 dans le cadre de la physique statistique, une perturbation propre correspondant à la valeur propre 1, et donc à un exposant nul, est appelé *marginale*.

- (ii)  $\ell > 2 \Rightarrow \tau_\ell = 2^{1-\ell} < 1, l_\ell < 0$ . La composante de  $\delta w$  sur un tel vecteur propre tend vers zéro quand  $n$  ou  $m \rightarrow \infty$ .

Dans le langage du groupe de renormalisation, de tels vecteurs, qui correspondent à des valeurs propres plus petites en module que 1, et donc à des exposants négatifs (ou plus généralement à partie réelle négative), sont appelés *inessentiels* (*irrelevant* en anglais).

*L'universalité dans ce formalisme est liée à la propriété que tous les vecteurs propres, sauf un nombre fini, sont inessentiels.*

*Dimension de la variable aléatoire.* À la variable aléatoire qui a une distribution limite, on peut attacher une dimension  $d_q$  définie par

$$d_q = \ln \lambda / \ln 2 . \quad (3.20)$$

Ici on trouve  $d_q = 1$ .

### 3.2.2 Distribution centrée

Pour une distribution centrée,  $w_1 = 0$ , la première équation est trivialement satisfaite, et on peut développer à l'ordre suivant. À l'ordre  $k^2$ , on trouve alors l'équation

$$w_2 = 2w_2/\lambda^2 .$$

Puisque  $w_2$  est strictement positif, sauf pour une distribution certaine qui est un cas particulier de la situation précédente et que nous excluons maintenant, l'équation implique  $\lambda = \sqrt{2}$ . De nouveau, les coefficients  $w_\ell$  s'annulent pour  $\ell > 2$  et les points fixes sont de la forme

$$w_*(k) = -\frac{1}{2}w_2k^2.$$

On trouve donc la distribution gaussienne

$$\rho_*(q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq - w_2k^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi w_2}} e^{-q^2/2w_2}.$$

Comme dans la transformation  $\mathcal{T}$ , le nombre  $n$  de variables est divisé par deux, cette valeur de la renormalisation  $\lambda$  correspond au facteur  $\sqrt{n}$  dans la transformation (3.13). On peut attribuer à la variable aléatoire la dimension (définie en (3.20))

$$d_q = \ln \lambda / \ln 2 = \frac{1}{2}.$$

*Stabilité du point fixe.* La valeur de  $\lambda$  et donc la transformation  $\mathcal{T}_\lambda$  étant déterminées, il est facile d'étudier de nouveau la stabilité du point fixe. Posons

$$w(k) = w_*(k) + \delta w(k),$$

et cherchons les vecteurs et valeurs propres de la transformation

$$[\mathcal{T}_\lambda \delta w](k) \equiv 2\delta w(k/\sqrt{2}) = \tau \delta w(k).$$

Les vecteurs propres sont évidemment toujours de la forme

$$\delta w(k) = k^\ell \Rightarrow \tau_\ell = 2^{1-\ell/2}.$$

En termes du nombre  $n$  de variables, cette valeur correspond à des exposants

$$l_\ell = \ln \tau_\ell / \ln 2 = 1 - \ell/2.$$

Examinons les différents cas :

- (i)  $\ell = 1 \Rightarrow \tau_1 = \sqrt{2}$ ,  $l_\ell = \frac{1}{2}$ . Ceci correspond à une direction d'instabilité, une composante sur tel vecteur tend vers l'infini quand  $m \rightarrow \infty$ .

Dans le langage du groupe de renormalisation, une perturbation correspondant à un exposant  $l$  positif est appelée *essentielle* (*relevant* en anglais). Chaque itération augmente son amplitude et donc une telle perturbation éloigne du point fixe.

Ce résultat a ici une interprétation simple : une perturbation linéaire en  $k$  viole la condition  $w_1 = 0$  et les transformations et points fixes pertinents sont ceux étudiés en section 3.2.1.

- (ii)  $\ell = 2 \Rightarrow \tau_2 = 1, \quad l_2 = 0$ . Une valeur propre nulle caractérise une perturbation *marginale*. Ici, cette perturbation ne fait que modifier la valeur de  $w_2$ . Ceci peut de nouveau s'interpréter comme une transformation linéaire sur la variable aléatoire.
- (iii)  $\ell > 2 \Rightarrow \tau_\ell = 2^{1-\ell/2} < 1, \quad l_\ell = 1 - \ell/2 < 0$ . Enfin, toutes les perturbations  $\ell > 2$  correspondent à des directions stables en ce sens que leur amplitude tend vers zéro quand  $m \rightarrow \infty$  et sont *inessentielles*.

*Remarques.*

- (i) Dans les cas ci-dessus, les perturbations marginales correspondent à de simples changements de normalisation de la variable aléatoire. Dans nombre de problèmes, cette normalisation ne joue aucun rôle. On peut alors considérer que tous les points fixes correspondant à des normalisations différentes ne doivent pas être distingués. Dans ce cas, il n'y a qu'un point fixe, et la perturbation correspondant à la valeur propre nulle n'est plus appelée *marginale* mais *redondante*, en ce sens qu'elle ne change qu'une normalisation de toute façon arbitraire.
- (ii) En changeant la valeur de  $\lambda$ , il est facile de trouver aussi des points fixes de la forme  $|k|^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$  ( $\alpha > 2$  est exclu car le coefficient de  $k^2$  est strictement positif). Mais ces points fixes ne sont plus des fonctions régulières de  $k$  et correspondent à des distributions moins concentrées autour de la valeur moyenne. En particulier, ces distributions n'ont pas de second moment  $\langle q^2 \rangle$ .

Dans le langage du groupe de renormalisation, elles correspondent à d'autres *classes d'universalité*, c'est-à-dire d'ensembles de distributions qui convergent vers ces points fixes.

*Variables aléatoires entières.* Dans ce cas, la fonction initiale  $w(k)$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ . À chaque itération, la période est multipliée par  $\lambda$ , et les valeurs possibles de la variable aléatoire  $q$  sont divisées par  $\lambda$ . Le point fixe  $w_*(k)$  correspond à une fonction qui n'est plus périodique et donc une variable aléatoire  $q$  prenant des valeurs réelles. Cela reflète la propriété qu'il n'y a convergence qu'en mesure.

### 3.3 Marche au hasard et mouvement brownien

Nous considérons maintenant un processus stochastique, une marche au hasard, en temps discrets. d'abord dans  $\mathbb{R}^d$ , ensuite sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$  des points de coordonnées entières.

Un tel processus est spécifié par une distribution de probabilité  $P_0$  au temps initial  $n = 0$  et une densité de probabilité de transition  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  du point  $\mathbf{q}'$  vers le point  $\mathbf{q}$  que nous supposons indépendante du temps  $n$ .

Ces conditions définissent une chaîne de Markov, un processus markovien, en ce sens que le déplacement au temps  $n$  ne dépend que de la position au temps  $n$  mais pas des positions aux temps antérieurs, et homogène ou stationnaire, c'est-à-dire invariant par translation du temps.

Notre but est de montrer, d'abord dans le continu, ensuite sur le réseau, qu'asymptotiquement dans le temps, pour la classe des marches au hasard *locales*, une notion que nous définirons plus loin, on retrouve de nouveau des lois asymptotiques gaussiennes universelles.

Cela nous permettra d'introduire aussi les notions de *limite continue* et d'*intégrale de chemin*.

### 3.3.1 Marche dans l'espace continu

*Terminologie.* Dans ce qui suit, pour ne pas alourdir le langage, nous parlerons souvent de probabilités alors qu'il s'agit de densités de probabilité.

Soit  $P_n(\mathbf{q})$  la probabilité pour un marcheur d'être au point  $\mathbf{q}$  au temps  $n$ . Pour une chaîne de Markov stationnaire, la distribution de probabilité  $P_n(\mathbf{q})$  satisfait à l'équation d'évolution ou de récurrence

$$P_{n+1}(\mathbf{q}) = \int d^d q' \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') P_n(\mathbf{q}'), \quad \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \geq 0, \quad (3.21)$$

(appelée aussi équation maîtresse) du type Chapman–Kolmogorov. La conservation des probabilités implique la condition

$$\int d^d q \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 1. \quad (3.22)$$

On vérifie alors, en intégrant l'équation (3.21) sur  $\mathbf{q}$ ,

$$\int d^d q P_{n+1}(\mathbf{q}) = \int d^d q P_n(\mathbf{q}) = \int d^d q P_0(\mathbf{q}) = 1. \quad (3.23)$$

De façon générale, l'itération de l'équation (3.21) conduit à

$$P_n(\mathbf{q}) = \int d^d q_0 d^d q_1 \dots d^d q_{n-1} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{n-1}) \dots \rho(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \rho(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0) P_0(\mathbf{q}_0). \quad (3.24)$$

### 3.3.2 Invariance par translation et localité

*Symétries de translation.* Nous avons déjà supposé que la marche est invariante par translation du temps en choisissant  $\rho$  indépendant de  $n$ . Nous supposons maintenant, de plus, que la probabilité de transition est invariante

par translation d'espace et donc

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (3.25)$$

Dans ces conditions, l'équation de récurrence prend la forme d'une équation de convolution :

$$P_{n+1}(\mathbf{q}) = \int d^d q' \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}') P_n(\mathbf{q}'), \quad (3.26)$$

généralisation de l'équation (3.6).

*Localité.* Nous ne considérons que des fonctions de transition qui généralisent les distributions de la section 3.1, c'est-à-dire dérivables par morceaux et à variation bornée pour chaque variable, et satisfaisant une propriété de décroissance exponentielle appelée ici *localité*, à cause de l'interprétation de marche au hasard : qualitativement, les grands déplacements ont une probabilité très faible. Plus précisément, nous supposons donc que les probabilités de transition  $\rho(\mathbf{q})$  satisfont une borne du type (3.1),

$$\rho(\mathbf{q}) \leq M e^{-\mu|\mathbf{q}|}, \quad M, \mu > 0. \quad (3.27)$$

De plus, nous supposons que la distribution initiale  $P_0(\mathbf{q})$  est aussi locale, c'est-à-dire satisfait la même borne exponentielle, du moins pour  $|q|$  assez grand :

$$P_0(\mathbf{q}) \leq M e^{-\mu|\mathbf{q}|} \quad \text{pour } |q| > R. \quad (3.28)$$

Comme cas limite, nous admettrons des distributions certaines de la forme

$$P_0(\mathbf{q}) = \delta^{(d)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

où  $\delta^{(d)}$  est la distribution de Dirac à  $d$  dimensions.

*Représentation de Fourier.* L'équation (3.26) est une équation de convolution qui se simplifie après transformation de Fourier. Nous introduisons donc

$$\tilde{P}_n(\mathbf{k}) = \int d^d q e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}), \quad (3.29)$$

qui est aussi une fonction génératrice des moments de la distribution  $P_n(\mathbf{q})$ .

La réalité de  $P_n(\mathbf{q})$  et la condition (3.23) entraînent

$$\tilde{P}_n^*(\mathbf{k}) = \tilde{P}_n(-\mathbf{k}), \quad \tilde{P}_n(\mathbf{k} = 0) = 1.$$

De même, nous introduisons

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \int d^d q e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \rho(\mathbf{q}) \quad (3.30)$$

qui est aussi une fonction génératrice des moments de la distribution  $\rho(\mathbf{q})$ . Avec la notation

$$\langle f(\mathbf{q}) \rangle \equiv \int d^d q f(\mathbf{q}) \rho(\mathbf{q}), \quad (3.31)$$

le développement en puissances de  $\mathbf{k}$  peut s'écrire

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-i)^\ell}{\ell!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\ell} k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_\ell} \langle q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_\ell} \rangle. \quad (3.32)$$

La réalité de  $\rho(\mathbf{q})$  et la condition (3.22) entraînent

$$\tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(-\mathbf{k}), \quad \tilde{\rho}(0) = 1.$$

Prenant le module de l'équation (3.30), on trouve la borne

$$|\tilde{\rho}(\mathbf{k})| \leq 1. \quad (3.33)$$

De plus, la borne n'est atteinte qu'à l'origine  $\mathbf{k} = 0$ . Enfin, la condition de décroissance (3.27) implique que la fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  est une fonction analytique holomorphe dans  $|\operatorname{Im} \mathbf{k}| < \mu$ .

*Vecteurs et valeurs propres.* Notons que la représentation de Fourier (3.30) peut se récrire

$$\int d^d q' \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}'} = \tilde{\rho}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}, \quad (3.34)$$

et donc les fonctions  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}$  et  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  peuvent être considérées comme les vecteurs propres et valeurs propres, respectivement, de  $\rho$  considéré comme un opérateur intégral. L'opérateur a un spectre continu et la condition (3.33) est en accord avec l'analyse plus générale de la section 3.4.1, mais pour des raisons un peu différentes : les modules des vecteurs propres ne sont pas intégrables. En particulier, le vecteur propre correspondant à la valeur la plus grande  $\tilde{\rho}(\mathbf{k} = 0) = 1$  est  $P(\mathbf{q}) = 1$  dont l'intégrale sur  $\mathbf{q}$  n'existe pas. Avec l'hypothèse d'invariance par translation, la distribution  $P_n(\mathbf{q})$  ne converge pas vers une distribution asymptotique.

### 3.3.3 Fonction génératrice des cumulants

Il est aussi commode d'introduire la fonction

$$w(\mathbf{k}) = \ln \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \Rightarrow w^*(\mathbf{k}) = w(-\mathbf{k}), \quad w(0) = 0, \quad (3.35)$$

fonction génératrice des cumulants de  $\rho(\mathbf{q})$ . La régularité de  $\tilde{\rho}$  et la condition  $\tilde{\rho}(0) = 1$  impliquent que  $w(\mathbf{k})$  a un développement régulier à  $\mathbf{k} = 0$ . Posant

$$w(\mathbf{k}) = -i\mathbf{w}^{(1)} \cdot \mathbf{k} - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^d w_{ab}^{(2)} k_a k_b + O(|k|^3)$$

et identifiant les coefficients du développement de  $w$  avec les moments de la distribution  $\rho(\mathbf{q})$ , on obtient la relation (2.32) :

$$w_{ab}^{(2)} = \langle (q_a - \langle q_a \rangle) (q_b - \langle q_b \rangle) \rangle.$$

La matrice  $\mathbf{w}^{(2)}$  est définie positive, sauf pour une distribution certaine que nous excluons. En effet, pour tout vecteur  $|\mathbf{X}| = 1$ ,

$$\sum_{a,b} X_a w_{ab}^{(2)} X_b = \left\langle \left[ \sum_a X_a (q_a - \langle q_a \rangle) \right]^2 \right\rangle > 0,$$

comme valeur moyenne d'une quantité strictement positive.

La décroissance de  $P_0$  et  $\tilde{P}_0(0) = 1$  implique que  $\ln \tilde{P}_0(\mathbf{k})$  est holomorphe à  $\mathbf{k} = 0$ . Nous posons aussi

$$\ln \tilde{P}_0(\mathbf{k}) = -i\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{k} + O(|\mathbf{k}|^2),$$

où  $\mathbf{q}_0$  est la position moyenne initiale.

### 3.3.4 Marche au hasard : comportement asymptotique

En termes des composantes de Fourier, l'équation (3.26) prend la forme

$$\tilde{P}_{n+1}(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \tilde{P}_n(\mathbf{k}) \Rightarrow \tilde{P}_n(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}^n(\mathbf{k}) \tilde{P}_0(\mathbf{k}).$$

Par conséquent,

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \tilde{\rho}^n(\mathbf{k}) \tilde{P}_0(\mathbf{k}). \quad (3.36)$$

Nous cherchons maintenant à déterminer le comportement asymptotique de la distribution  $P_n(\mathbf{q})$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

Avec les hypothèses satisfaites par  $P_0$  et  $\rho$ , le comportement asymptotique se déduit d'arguments très proches de ceux qui conduisent au théorème de la limite centrale. Pour  $n \rightarrow \infty$ , l'intégrale (3.36) est dominée par un voisinage d'ordre  $1/\sqrt{n}$  de  $\mathbf{k} = 0$  et donc

$$\begin{aligned} P_n(\mathbf{q}) &\sim \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \exp \left[ i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - i\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{k} - in\mathbf{w}^{(1)} \cdot \mathbf{k} - \frac{n}{2} \sum_{a,b=1}^d w_{ab}^{(2)} k_a k_b \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} \sqrt{\det \mathbf{w}^{(2)}}} \exp \left[ -\frac{1}{2n} \sum_{a,b} Q_a [\mathbf{w}^{(2)}]_{ab}^{-1} Q_b \right] \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 - n\mathbf{w}^{(1)}.$$

La distribution n'a pas de limite puisque elle tend vers zéro en tout point, mais seulement un comportement asymptotique.

De nouveau, les termes négligés sont de deux types, des corrections multiplicatives d'ordre  $1/\sqrt{n}$  et des corrections additives décroissant exponentiellement avec  $n$ .

La probabilité de trouver le marcheur est centrée autour de la trajectoire rectiligne uniforme

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_0 + n\mathbf{w}^{(1)},$$

et  $\mathbf{w}^{(1)}$  a donc une interprétation de vitesse moyenne.

La variable aléatoire qui caractérise la déviation par rapport à la trajectoire moyenne,

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}\sqrt{n},$$

a une distribution gaussienne asymptotique universelle :

$$L_n(\mathbf{X}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{w}^{(2)}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{a,b} X_a [\mathbf{w}^{(2)}]_{ab}^{-1} X_b \right]. \quad (3.37)$$

Seule l'interprétation est ici un peu différente de celle du théorème de la limite centrale, car  $n$  est une variable de temps. Ce résultat implique que la déviation moyenne par rapport à la trajectoire moyenne augmente comme la racine carrée du temps. C'est une propriété caractéristique du *mouvement brownien*.

### 3.3.5 Limite du temps continu

Pour simplifier la discussion, nous supposons maintenant  $\rho(\mathbf{q}) = \rho(-\mathbf{q})$  et donc  $\mathbf{w}_1 = 0$ , et nous faisons un changement affine de coordonnées tel que

$$\sum_{a,b} Q_a [\mathbf{w}^{(2)}]_{ab}^{-1} Q_b \mapsto \frac{1}{w_2} \mathbf{q}^2,$$

où  $w_2$  est un nombre positif.

La distribution gaussienne limite prend la forme

$$P_n(\mathbf{q}) \sim \frac{1}{(2\pi n w_2)^{d/2}} e^{-\mathbf{q}^2/2n w_2}.$$

En faisant un changement d'échelle de temps, on peut définir par continuité un processus de diffusion ou mouvement brownien associé en temps continu.

Soit  $t$  et  $\varepsilon$  deux réels positifs et  $n$  entier tel que

$$n = [t/\varepsilon], \quad (3.38)$$

où  $[\bullet]$  dénote la partie entière. On prend alors la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $t$  fixé et donc  $n \rightarrow \infty$ .

Si le temps  $t$  est mesuré avec une précision finie  $\Delta t$ , dès que  $\Delta t \gg \varepsilon$ , le temps peut être considéré comme une variable continue pour toutes les fonctions continues du temps.

On fait aussi un changement d'échelle de distance

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}/\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.39)$$

Comme la fonction gaussienne est continue, la distribution asymptotique prend la forme

$$\varepsilon^{-d/2} P_n(\mathbf{q}) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi t w_2)^{d/2}} e^{-\mathbf{x}^2/2t w_2}. \quad (3.40)$$

(Le changement de variables sur  $\mathbf{q}$  entraîne un changement de normalisation.) Cette distribution est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} w_2 \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Pi(t, \mathbf{x}), \quad (3.41)$$

qui a la forme d'une équation de diffusion ou équation de la chaleur. Dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , et dans des variables macroscopiques adaptées, on obtient donc un processus aléatoire qui peut entièrement être décrit dans un temps continu.

La distribution asymptotique  $\Pi(t, \mathbf{x})$  conduit à la *loi d'échelle* caractéristique du mouvement brownien. Les moments de la distribution satisfont

$$\langle \mathbf{x}^{2m} \rangle = \int d^d x \mathbf{x}^{2m} \Pi(t, \mathbf{x}) \propto t^m. \quad (3.42)$$

La variable  $\mathbf{x}/\sqrt{t}$  a donc des moments indépendants du temps. Comme l'indique aussi le changement (3.39), on peut donc attribuer au vecteur  $\mathbf{x}$  une *dimension* 1/2 en unité de temps (ce qui correspond aussi à attribuer au chemin brownien une dimension de Hausdorff deux).

### 3.3.6 Corrections à la limite continue

Il est simple d'étudier comment des perturbations à la distribution gaussienne limite décroissent avec  $\varepsilon$ .

Nous choisissons une condition aux limites certaine,

$$P_0(\mathbf{q}) = \delta^{(d)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

où  $\delta^{(d)}(\mathbf{q})$  est la distribution de Dirac. Alors, (équation (3.36))

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} e^{n w(\mathbf{k})}.$$

Nous supposons toujours que  $\rho(\mathbf{q})$  est pair et que nous avons choisi un système de coordonnées tel que le développement de la fonction régulière  $w(\mathbf{k})$ , définie en (3.35), en puissances de  $\mathbf{k}$  s'écrive

$$w(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} w_2 \mathbf{k}^2 + \sum_{r=3} \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{i^r}{r!} w_{i_1, \dots, i_r}^{(r)} k_{i_1} \dots k_{i_r}.$$

Après le changement d'échelle (3.38, 3.39), ce qui sur les variables de Fourier correspond à  $\mathbf{k} = \kappa\sqrt{\varepsilon}$ , on trouve

$$nw(\mathbf{k}) = t\omega(\kappa),$$

$$\omega(\kappa) = -\frac{w_2}{2!}\kappa^2 + \sum_{r=3} \varepsilon^{r/2-1} \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{i^r}{r!} w_{i_1, \dots, i_r}^{(r)} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_r}.$$

On voit que les contributions décroissent d'autant plus vite que les puissances de  $\mathbf{k}$  sont élevées quand  $\varepsilon = t/n$  tend vers zéro.

Dans la limite continue, la distribution prend la forme

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \kappa e^{-i\kappa \cdot \mathbf{x}} e^{t\omega(\kappa)}.$$

Dérivant par rapport au temps  $t$ , on vérifie que  $\Pi(t, \mathbf{x})$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, \mathbf{x}) = \left[ \frac{w_2}{2!} \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{r=3} \varepsilon^{r/2-1} \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{i^r}{r!} w_{i_1, \dots, i_r}^{(r)} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \right] \Pi(t, \mathbf{x}),$$

utilisant la propriété que la multiplication par  $\kappa$  de la transformée de Fourier correspond à la dérivation de la fonction par rapport à  $x$ .

Dans ce développement, les contributions qui contiennent le plus de dérivées, tendent le plus vite vers zéro, puisque chaque dérivée supplémentaire est affectée d'un facteur  $\sqrt{\varepsilon}$ .

### 3.3.7 Marche au hasard sur réseau

Le plus souvent les marches au hasard sont formulées sur un réseau. Nous considérons donc le réseau à  $d$  dimensions formé par les points de coordonnées entières  $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_d)$ .

Soit alors  $P_n(\mathbf{q})$  la probabilité pour le marcheur d'être au point  $\mathbf{q}$  au temps  $n$ . La probabilité  $P_n(\mathbf{q})$  satisfait l'équation de récurrence (3.21) où les intégrales sont remplacées par des sommes :

$$P_{n+1}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbb{Z}^d} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') P_n(\mathbf{q}'). \quad (3.43)$$

La conservation des probabilités implique les conditions

$$\sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} P_0(\mathbf{q}) = 1, \quad \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 1 \Rightarrow \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} P_n(\mathbf{q}) = 1. \quad (3.44)$$

De plus, nous supposons que le processus est ergodique, c'est-à-dire qu'il existe une probabilité non nulle de relier deux points arbitraires du réseau.

*Symétries.* Nous nous limitons de nouveau aux probabilités de transition invariantes par translation d'espace, et donc

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (3.45)$$

Alors, l'équation de récurrence prend la forme d'une équation de convolution

$$P_{n+1}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbb{Z}^d} \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}') P_n(\mathbf{q}'),$$

généralisation de l'équation (3.17).

De plus, nous supposons que les probabilités de transition  $\rho(\mathbf{q})$  possèdent les symétries du réseau correspondant à des transformations linéaires de type isométrie, c'est-à-dire qu'elles sont invariantes par le groupe cubique, un groupe fini à  $2^d d!$  éléments engendré par les transpositions et la réflexion

$$\begin{cases} \rho(q_1, \dots, q_{i+1}, q_i, \dots, q_d) = \rho(q_1, \dots, q_i, q_{i+1}, \dots, q_d) & \forall i, \\ \rho(-q_1, \dots, q_d) = \rho(q_1, \dots, q_d). \end{cases} \quad (3.46)$$

Le groupe cubique est un sous-groupe du groupe orthogonal  $O(d)$  (rotations-réflexions dans  $\mathbb{R}^d$ ). Il admet le groupe symétrique ou groupe des permutations  $q_i \mapsto q_{P(i)}$  engendré par les transpositions, ainsi que toutes les réflexions  $q_i \mapsto -q_i$  comme sous-groupes. Par exemple, pour le réseau carré, son action sur un point  $(q_1, q_2)$  engendre les huit éléments

$$(\epsilon_1 q_1, \epsilon_2 q_2) \quad \text{et} \quad (\epsilon_2 q_2, \epsilon_1 q_1),$$

avec  $\epsilon_1 = \pm 1$ ,  $\epsilon_2 = \pm 1$ .

Toutes les directions sur le réseau sont donc équivalentes.

*Localité.* Nous nous restreignons aux probabilités de transition  $\rho(\mathbf{q})$  ayant une propriété de localité, c'est-à-dire satisfaisant une borne du type (3.27) :

$$\rho(\mathbf{q}) \leq M e^{-\mu|\mathbf{q}|}, \quad M, \mu > 0.$$

Ceci comprend l'exemple classique où les seuls déplacements possibles correspondent aux voisins sur le réseau.

De plus, nous supposons aussi que la distribution initiale  $P_0(\mathbf{q})$  est locale, c'est-à-dire satisfait à la même borne exponentielle :

$$P_0(\mathbf{q}) \leq M e^{-\mu|\mathbf{q}|}.$$

Un cas particulier est une position de départ certaine  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ , et donc

$$P_0(\mathbf{q}) = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}.$$

Avec ces hypothèses, on démontre que dans la limite asymptotique  $n \rightarrow \infty$ , la variable aléatoire  $\mathbf{X} = (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)/\sqrt{n}$ , où  $\mathbf{q}_0$  dépend de la distribution initiale au temps  $n = 0$ , a de nouveau une distribution asymptotique gaussienne donnée par

$$L(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi w_2)^{d/2}} e^{-\mathbf{X}^2/2w_2}, \quad (3.47)$$

où  $w_2$  dépend de la probabilité de transition. La démonstration du résultat découle d'une généralisation simple de la méthode utilisée en section 3.3.4.

### 3.3.8 Séries de Fourier

Dans le cas d'une probabilité de transition invariante par translation, la distribution  $P_n(\mathbf{q})$  peut se calculer par transformation de Fourier. Nous posons

$$\tilde{P}_n(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) \Rightarrow \tilde{P}_n^*(\mathbf{k}) = \tilde{P}_n(-\mathbf{k}), \quad \tilde{P}_n(\mathbf{k} = 0) = 1, \quad (3.48)$$

ainsi que

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \rho(\mathbf{q}) \Rightarrow \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(-\mathbf{k}), \quad \tilde{\rho}(0) = 1, \quad (3.49)$$

où les propriétés (3.44, 3.45) ont été utilisées. Les fonctions  $\tilde{P}_n$  et  $\tilde{\rho}$  sont des fonctions périodiques des composantes  $k_i$  du vecteur  $\mathbf{k}$ , et ces composantes peuvent donc être restreintes à  $-\pi \leq k_i < \pi$  (un domaine appelé en physique une *zone de Brillouin*).

Prenant le module de l'équation de définition, on trouve la borne

$$|\tilde{\rho}(\mathbf{k})| \leq 1. \quad (3.50)$$

Si dans la zone de Brillouin, la borne est atteinte pour  $\mathbf{k} \neq 0$ , les contributions asymptotiques dues à ces autres maxima ont un comportement oscillatoire et s'annulent en moyenne (*cf.* la discussion en fin de section 3.1.4). Nous ne considérons dans la suite que le maximum à  $\mathbf{k} = 0$ .

La borne exponentielle (3.27) implique de nouveau que la fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  est une fonction analytique holomorphe dans  $|\operatorname{Im} \mathbf{k}| < \mu$ . Posons

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = e^{w(\mathbf{k})} \Rightarrow w^*(\mathbf{k}) = w(-\mathbf{k}), \quad w(0) = 0. \quad (3.51)$$

La régularité de  $\tilde{\rho}$  et la condition  $\tilde{\rho}(0) = 1$  impliquent alors que  $w(\mathbf{k})$  a un développement convergent à  $\mathbf{k} = 0$ .

On vérifie que, parce que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}$  a la forme d'un produit scalaire, la fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  est invariante par le groupe des transformations (3.46) appliquées au vecteur  $\mathbf{k}$ . La symétrie (3.46) entraîne que la fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  est symétrique et paire dans toutes les composantes du vecteur  $\mathbf{k}$  et, en particulier, réelle. Aucun terme impair en  $\mathbf{k}$  ne peut être pair dans toutes les composantes du vecteur. Un seul terme quadratique est symétrique, le carré scalaire du vecteur. La fonction  $w(\mathbf{k})$  admet un développement en série de Taylor à  $\mathbf{k} = 0$ , que nous paramétrons comme

$$w(\mathbf{k}) = -w_2 \mathbf{k}^2 / 2 + O(k^4), \quad w_2 > 0, \quad (3.52)$$

la positivité de  $w_2$  résultant de l'inégalité (3.50).

### 3.3.9 Comportement asymptotique. Limite continue

Après transformation de Fourier, l'équation (3.43) s'écrit

$$\tilde{P}_{n+1}(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \tilde{P}_n(\mathbf{k}) \Rightarrow \tilde{P}_n(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}^n(\mathbf{k}) \tilde{P}_0(\mathbf{k}).$$

Par conséquent,

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \tilde{\rho}^n(\mathbf{k}) \tilde{P}_0(\mathbf{k}). \quad (3.53)$$

Pour  $n \rightarrow \infty$ , l'intégrale (3.53) est dominée par les valeurs maximales de  $|\tilde{\rho}(\mathbf{k})|$  et, comme expliqué en section 3.1.4, seul le voisinage du maximum à  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  contribue au sens des mesures. À cause de la forme (3.52) de  $w(\mathbf{k})$ , pour  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$ , seules les valeurs de  $\mathbf{k}$  d'ordre  $1/\sqrt{n}$  contribuent à l'intégrale (3.53). Nous pouvons donc négliger les termes d'ordre  $k^4$  dans  $w(\mathbf{k})$ .

De plus, avec l'hypothèse (3.28)  $\ln \tilde{P}_0(\mathbf{k})$ , où  $\tilde{P}_0(\mathbf{k})$  est la série de Fourier associée à la distribution initiale, est régulière et nous posons

$$\tilde{P}_0(\mathbf{k}) = \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_0 + O(k^2)],$$

où  $\mathbf{q}_0$  est la position initiale moyenne. Les termes d'ordre  $k^2$  ou plus sont négligeables.

Pour les mêmes raisons que dans la méthode du col, dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , on peut intégrer dans (3.53), dans l'approximation gaussienne, sur toutes les valeurs de  $\mathbf{k}$  réelles sans restriction à une période (la zone de Brillouin). On en déduit la forme asymptotique

$$P_n(\mathbf{q}) \sim \frac{1}{(2\pi w_2 n)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2}{2w_2 n}\right]. \quad (3.54)$$

Nous sommes ramenés à une situation très semblable à celle de la section 3.3.2. Pour  $n \rightarrow \infty$ , la probabilité  $P_n(\mathbf{q})$  prend une forme gaussienne universelle qui, de nouveau, ne dépend que de propriétés générales de la fonction de transition  $\rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ .

*Remarques.*

- (i) De même que dans le cas du théorème de la limite centrale des probabilités discuté en section 3.1.4, la convergence vers la loi gaussienne n'est valable qu'au sens des mesures.
- (ii) La distribution asymptotique a une symétrie de rotation — elle ne dépend que du module du vecteur  $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  — et admet donc un groupe de symétrie plus grand que la fonction de transition  $\rho(\mathbf{q})$  qui n'a que la symétrie du réseau.
- (iii) Cette forme gaussienne asymptotique est valable pour des temps grands et pour des distances  $|\mathbf{q}| \ll n$ .

*Limite continue.* Nous changeons maintenant d'échelles de temps et de distance,

$$t = n\varepsilon, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)\sqrt{\varepsilon}, \quad (3.55)$$

et prenons une limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $t$  et  $\mathbf{x}$  fixés, et donc  $n = O(1/\varepsilon)$  (plus précisément,  $n$  et les composantes de  $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  sont les parties entières des expressions correspondantes).

Comme nous l'avons déjà noté, si les variables *macroscopiques*  $t$  et  $\mathbf{x}$  sont mesurées avec une précision finie, du point de vue de toute fonction continue, elles peuvent être considérées comme des variables continues. La distribution asymptotique, définie pour toute variable réelle par continuité, prend la forme (3.40) :

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi w_2 t)^{d/2}} e^{-\mathbf{x}^2/2w_2 t}. \quad (3.56)$$

Le temps  $t$  et les coordonnées  $\mathbf{x}$  sont les variables qui décrivent, à l'échelle macroscopique, le mouvement brownien engendré par la dynamique microscopique sur réseau (3.43). L'universalité a permis de définir une *limite continue*, dans la mesure où la structure de réseau et les détails du processus élémentaire ont disparu.

Enfin, la distribution (3.56) est solution de l'équation (3.41), une équation du type diffusion ou de la chaleur isotrope dans l'espace continu  $\mathbb{R}^d$ ,

$$\frac{\partial \Pi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \frac{1}{2} w_2 \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Pi(t, \mathbf{x}).$$

*Exemple.* On peut vérifier les propriétés démontrées dans cette section sur l'exemple de la marche au hasard avec déplacements limités aux proches voisins sur le réseau. Dans cet exemple,  $\rho(\mathbf{q})$  s'annule sauf si  $\mathbf{q} = \pm \mathbf{e}_\mu$ , où  $\mathbf{e}_\mu$  est le vecteur unitaire dans la direction  $\mu = 1, \dots, d$ . Dans ce dernier cas,  $\rho(\mathbf{q})$  vaut  $1/2d$ . Alors,

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d (e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\mu} + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\mu}) = \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos k_\mu \Rightarrow w(\mathbf{k}) = -\mathbf{k}^2/2d + O(k^4),$$

où  $k_\mu$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{k}$ . Prenons comme condition initiale un point de départ certain  $\mathbf{q} = 0$  et donc

$$P_0(\mathbf{q}) = \delta_{\mathbf{q},0} \Rightarrow \tilde{P}_0(\mathbf{k}) = 1.$$

De nouveau,  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  a un autre maximum dans la zone de Brillouin, correspondant à  $k_1 = k_2 = \dots = k_d = \pi$ . Mais ce maximum ne contribue pas au sens de la convergence en mesure. Dans ces conditions, la distribution asymptotique est

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \left( \frac{d}{2\pi t} \right)^{d/2} e^{-d\mathbf{x}^2/2t}.$$

### 3.3.10 Dilatation de l'échelle des temps et points fixes

Si l'on ne s'intéresse qu'aux propriétés asymptotiques de  $P_n(\mathbf{q})$  pour  $n \rightarrow \infty$ , on peut généraliser la stratégie utilisée en section 3.2 dans le cadre du théorème de la limite centrale pour justifier directement les propriétés d'universalité.

Ici, l'idée naturelle est de faire un changement d'échelle de temps d'un facteur deux. Autrement dit, on part de  $n = 2^m$ , et on remplace à chaque itération  $p$  par  $\mathcal{T}p$  :

$$(\mathcal{T}\rho)(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \equiv \sum_{\mathbf{q}'' \in \mathbb{Z}^d} \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}'') \rho(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}').$$

Ceci correspond en transformée de Fourier à la transformation

$$(\mathcal{T}w)(\mathbf{k}) \equiv 2w(\mathbf{k}).$$

Développant en puissances de  $\mathbf{k}$ , on vérifie qu'une telle transformation n'a, avec nos hypothèses, qu'un point fixe trivial  $w(\mathbf{k}) \equiv 0$ . Mais l'étude 3.2 a montré qu'une plus grande classe de points fixes devient accessible si la transformation est combinée avec une renormalisation de l'échelle de distances,  $\mathbf{q} \mapsto \lambda \mathbf{q}$ , avec  $\lambda > 0$ . Nous considérons donc la transformation

$$(\mathcal{T}_\lambda w)(\mathbf{k}) \equiv 2w(\mathbf{k}/\lambda).$$

Remarquons, à nouveau, qu'à chaque itération, les périodes des fonctions  $w(k)$  dans chaque composante  $k_i$  sont multipliées par  $\lambda$ , ce qui du point de vue de l'ensemble des valeurs des variables  $\mathbf{q}$ , correspond à un réseau dont le pas a été divisé par  $\lambda$ .

Les points fixes  $w_*$  de cette transformation sont solutions de

$$2w_*(\mathbf{k}/\lambda) = w_*(\mathbf{k}).$$

Avec la condition de symétrie cubique (équation (3.52))

$$w_*(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2}w_2\mathbf{k}^2 + O(\mathbf{k}^3).$$

Pour  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ , l'équation de point fixe entraîne

$$2w_2/\lambda^2 = w_2,$$

qui n'a de solution non-triviale que pour  $\lambda = \sqrt{2}$ . Alors, les coefficients des termes de degré plus élevés s'annulent. On trouve les points fixes

$$w_*(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2}w_2k^2,$$

qui correspondent à des probabilités de transition gaussienne.

Suivant l'exemple de la section 3.2 dans le cas des distributions à valeurs moyennes nulles, on peut alors étudier la stabilité du point fixe, et le taux de décroissance des perturbations dans le temps. La discussion est très semblable, la seule différence notable étant que les vecteurs propres sont des polynômes homogènes pairs de  $d$  variables, invariants par le groupe cubique. Par exemple, en dehors du terme marginal associé à un changement de  $w_2$ , les termes inessentiels les plus importants sont des polynômes de degré quatre

$$\sum k_i^4, \quad (\mathbf{k}^2)^2.$$

Enfin, comme à une transformation d'échelle d'un facteur 2 du temps correspond une transformation d'échelle d'un facteur  $\sqrt{2}$  des distances, on en déduit la *loi d'échelle* (3.42),  $|x| \propto \sqrt{t}$ , qui peut être interprétée comme attribuant une dimension 1/2 en unité de temps à la variable de position.

Les deux propriétés asymptotiques essentielles de la marche au hasard, convergence vers une distribution gaussienne et loi d'échelle sont donc reproduites par cette analyse de type groupe de renormalisation.

## 3.4 Marche au hasard : remarques complémentaires

Pour compléter cette étude, nous faisons des remarques générales sur les chaînes de Markov stationnaires, dans l'esprit du théorème de Perron–Frobenius. Dans cette section, nous supposons que le processus est ergodique et apériodique, ce qui est réalisé, par exemple par la condition  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') > 0$  pour toute paire  $\mathbf{q}, \mathbf{q}'$ .

### 3.4.1 Distribution asymptotique

Asymptotiquement pour  $n \rightarrow \infty$ , le comportement de  $P_n(\mathbf{q})$  solution des équations (3.21) ou (3.43) dépend des valeurs propres de module le plus grand de  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  considéré comme opérateur. Nous nous plaçons dans le cas du réseau, et donc de l'équation (3.43), mais la généralisation à l'espace continu est simple.

Les vecteurs propres  $V$  et valeurs propres  $r$  de  $\rho$  satisfont l'équation

$$\sum_{\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') V(\mathbf{q}') = r V(\mathbf{q}). \quad (3.57)$$

Sommant sur  $\mathbf{q}$  et utilisant la condition (3.44), on en déduit

$$\sum_{\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^d} V(\mathbf{q}') = r \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d} V(\mathbf{q}),$$

pourvu que la somme converge. Si, de plus, la somme ne s'annule pas, la valeur propre  $r = 1$ . Passant aux valeurs absolues, on trouve l'inégalité

$$\sum_{q' \in \mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') |V(\mathbf{q}')| \geq |r| |V(\mathbf{q})|$$

et, donc, sommant sur  $\mathbf{q}$ , si la somme converge,

$$\sum_{q \in \mathbb{R}^d} |V(\mathbf{q})| \geq |r| \sum_{q \in \mathbb{R}^d} |V(\mathbf{q})|,$$

ce qui entraîne  $|r| \leq 1$ . Si  $|r| = 1$ ,  $|V(\mathbf{q})|$  est une distribution stationnaire. De plus,  $V(\mathbf{q})$  doit avoir une phase constante et peut donc être choisi positif. Donc, seule la valeur propre  $r = 1$  a module 1 et la solution stationnaire de l'équation est la limite asymptotique de  $P_n$  pour  $n \rightarrow \infty$ , avec une convergence exponentielle.

Dans le cas des fonctions de transition invariantes par translation, la condition de sommabilité n'est pas satisfaite, ce qui explique les différences de comportement.

### 3.4.2 Équilibre détaillé

Bien que cela ne soit pas utile dans ce chapitre, mais dans le but d'un rapprochement avec le chapitre 4, nous présentons brièvement une classe de processus aléatoires qui satisfont une condition d'équilibre détaillé. Cette condition s'exprime en termes de la probabilité de transition  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  par une relation entre un processus et le processus inverse :

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') P_\infty(\mathbf{q}') = \rho(\mathbf{q}', \mathbf{q}) P_\infty(\mathbf{q}), \quad (3.58)$$

où  $P_\infty$  est une distribution de probabilité

$$P_\infty(\mathbf{q}) \geq 0, \quad \int d^d q P_\infty(\mathbf{q}) = 1.$$

Intégrant l'équation (3.58) sur  $\mathbf{q}'$  et utilisant la condition (3.22), on obtient

$$P_\infty(\mathbf{q}) = \int d^d q' \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') P_\infty(\mathbf{q}').$$

La distribution  $P_\infty(\mathbf{q})$  est donc la distribution asymptotique du processus (3.21) quand  $n \rightarrow \infty$ .

Si  $P_\infty(\mathbf{q})$  est strictement positif, ce qui par exemple est impliqué par la condition  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') > 0$ , on peut définir

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = P_\infty^{-1/2}(\mathbf{q}) \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') P_\infty^{1/2}(\mathbf{q}') = T(\mathbf{q}', \mathbf{q}),$$

qui correspond à un opérateur symétrique réel. Avec quelques conditions techniques faibles supplémentaires, cet opérateur a un spectre discret réel et joue

le rôle de la matrice de transfert de la section 4.1.2, le temps du processus aléatoire devenant l'espace du modèle statistique sur réseau.

Dans l'exemple invariant par translation de la section 3.3.2, la condition d'équilibre détaillé est formellement satisfaite si  $\rho(q) = \rho(-q)$ , mais alors la fonction  $P_\infty = 1$  n'est pas normalisable. Cependant, le spectre de  $\rho$  reste réel.

### 3.5 Mouvement brownien et intégrale de chemin

Si nous ne nous intéressons qu'à la distribution asymptotique, dont nous avons montré qu'elle est indépendante de la probabilité de transition initiale, nous pouvons l'obtenir, dans la limite continue, à partir de probabilités de transition gaussiennes de la forme (nous supposons l'invariance par rotation)

$$\rho(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi w_2)^{d/2}} e^{-\mathbf{q}^2/2w_2}.$$

Dans le cas d'une position initiale certaine  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = 0$ , l'itération de l'équation de récurrence (3.43) conduit alors à (équation (3.24))

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi w_2)^{nd/2}} \int d^d q_1 d^d q_2 \dots d^d q_{n-1} e^{-\mathcal{S}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)}, \quad (3.59)$$

avec  $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}$  et

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{\ell=1}^n \frac{(\mathbf{q}_\ell - \mathbf{q}_{\ell-1})^2}{2w_2}.$$

Introduisons les variables de temps macroscopiques

$$\tau_\ell = \ell\varepsilon, \quad \tau_n = n\varepsilon = t,$$

et un chemin  $\mathbf{x}(\tau)$  continu, linéaire par morceaux, (figure 3.1)

$$\mathbf{x}(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \left[ \mathbf{q}_{\ell-1} + \frac{\tau - \tau_{\ell-1}}{\tau_\ell - \tau_{\ell-1}} (\mathbf{q}_\ell - \mathbf{q}_{\ell-1}) \right] \quad \text{pour } \tau_{\ell-1} \leq \tau \leq \tau_\ell.$$

On vérifie que  $\mathcal{S}$  peut alors s'écrire (avec la notation  $\dot{\mathbf{x}}(\tau) \equiv d\mathbf{x}/d\tau$ )

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}(\tau)) = \frac{1}{2w_2} \int_0^t (\dot{\mathbf{x}}(\tau))^2 d\tau, \quad (3.60)$$

avec les conditions aux limites

$$\mathbf{x}(0) = 0, \quad \mathbf{x}(t) = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{q} = \mathbf{x}.$$

De plus,

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi w_2)^{d/2}} \int \left( \prod_{\ell=1}^{n-1} \frac{d^d x(\tau_\ell)}{(2\pi w_2 \varepsilon)^{d/2}} \right) e^{-\mathcal{S}(\mathbf{x})}. \quad (3.61)$$

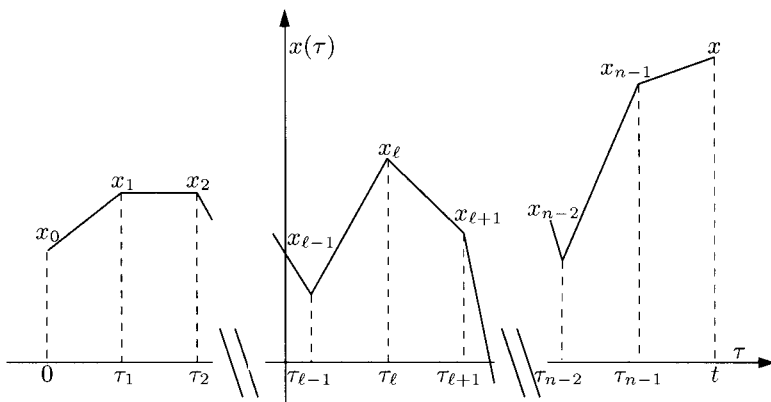


FIG. 3.1 – Un chemin contribuant à l'intégrale (3.59) ( $d = 1$ ) avec  $x_\ell \equiv x(\tau_\ell)$ .

Dans la limite continue  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  avec  $t$  fixé, l'expression (3.61) devient une représentation de la distribution de la limite continue

$$\Pi(t, \mathbf{x}) \sim \varepsilon^{-d/2} P_n(\mathbf{q})$$

sous forme d'une *intégrale de chemin*, que nous notons symboliquement

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \int [d\mathbf{x}(\tau)] e^{-S(\mathbf{x}(\tau))}, \quad (3.62)$$

où  $\int [d\mathbf{x}(\tau)]$  veut dire somme sur tous les chemins continus qui vont de l'origine au temps  $\tau = 0$  à  $\mathbf{x}$  au temps  $t$ . Les trajectoires qui contribuent à l'intégrale de chemin correspondent au mouvement brownien, une marche au hasard en temps et espace continus. Cette représentation du mouvement brownien par intégrale de chemin, initialement introduite par Wiener, est donc aussi appelée intégrale de Wiener.

*Calcul de l'intégrale de chemin.* Nous avons introduit la notion formelle d'intégrale de chemin. On pourrait craindre que son calcul nécessite un retour à sa définition comme limite d'intégrales avec des temps discrets. Heureusement ce n'est pas le cas. L'intégrale de chemin peut être calculée sans faire référence au processus limite, à une *normalisation globale près*. C'est ce que nous montrons maintenant.

Pour calculer l'intégrale, nous changeons de variables (une translation pour chaque temps  $\tau$  qui doit être considéré comme un index à valeurs continues) :

$$\mathbf{x}(\tau) \mapsto \mathbf{r}(\tau) = \mathbf{x}(\tau) - \mathbf{f}(\tau),$$

où  $\mathbf{f}(\tau)$  est la solution de l'équation variationnelle

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\mathbf{x}}(\tau) = 0$$

satisfaisant aux conditions aux limites  $\mathbf{x}(0) = 0$ ,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$ . Elle correspond au mouvement rectiligne uniforme qui joint l'origine au point  $\mathbf{x}$ , dans le temps  $t$  :

$$\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{x} \tau / t.$$

Au sens du changement de variables,  $\mathbf{f}(\tau)$  doit être considéré comme un ensemble de constantes paramétré par la variable  $\tau$ . Comme le changement de variables est une translation, le jacobien est égal à 1.

Le chemin  $\mathbf{r}(\tau)$  satisfait alors aux conditions aux limites

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}.$$

La translation conduit à

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2w_2} \left[ \frac{\mathbf{x}^2}{t} + 2 \int_0^t d\tau \dot{\mathbf{r}}(\tau) \cdot \mathbf{x}/t + \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}(\tau))^2 d\tau \right].$$

Le terme linéaire en  $\mathbf{r}$  s'intègre explicitement et s'annule à cause des conditions aux limites. On en déduit

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \mathcal{N} e^{-\mathbf{x}^2/2w_2 t},$$

où la normalisation  $\mathcal{N}$  est donnée par l'intégrale de chemin

$$\mathcal{N} = \int [d\mathbf{r}(\tau)] e^{-\mathcal{S}(\mathbf{r})},$$

avec  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ . Cette normalisation ne peut pas être calculée dans le continu, mais ne dépend plus de  $\mathbf{x}$  et est donc une fonction de  $t$  qui est déterminée par la conservation des probabilités.

L'intégrale de chemin permet donc de calculer la distribution de probabilité dans la limite du continu, par des méthodes du continu.

*Remarque importante.*

- (i) La notation  $\dot{\mathbf{x}}$  semble suggérer que les chemins contribuant à l'intégrale de chemin sont dérivables. Il n'en est rien. Dans la limite du continu, nous savons que

$$\langle [\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\tau')]^2 \rangle = \int dx' (x - x')^2 \Pi(|\tau - \tau'|, \mathbf{x} - \mathbf{x}') = w_2 |\tau - \tau'|.$$

Nous voyons que les chemins typiques sont continus puisque le membre de gauche s'annule pour  $\tau \rightarrow \tau'$ . En revanche, pour calculer la moyenne de la dérivée au carré, il faut diviser par  $(\tau - \tau')^2$  et faire tendre  $\tau$  vers  $\tau'$ . Le membre de droite diverge alors. Les chemins typiques du mouvement brownien sont continus mais pas dérivables ; ils ne satisfont qu'une condition de Hölder d'ordre  $1/2$  :

$$|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\tau')| = O(|\tau - \tau'|^{1/2}).$$

Néanmoins, la notation  $\dot{\mathbf{x}}$  est utile car les chemins qui donnent les contributions dominantes à l'intégrale de chemin sont dans un voisinage des chemins dérivables.

- (ii) Comme l'expression (3.61) le montre, dans le symbole  $[dx(\tau)]$  est cachée une normalisation indépendante de la trajectoire, mais dont il est difficile de tenir compte dans la limite continue. C'est pourquoi on calcule, en général, le rapport de l'intégrale de chemin et d'une intégrale de chemin de référence dont le résultat est connu.

## Exercices

**Exercice 3.1.** On considère une marche au hasard markovienne sur un réseau carré bidimensionnel. À chaque pas de temps, le marcheur, soit reste immobile avec probabilité  $1 - s$ , soit se déplace d'une maille de réseau dans une des quatre directions possibles avec la même probabilité  $s/4$ , où  $0 < s < 1$ . Enfin, au temps  $n = 0$  le marcheur est au point  $\mathbf{q} = 0$ .

Trouver la distribution asymptotique de la position du marcheur après  $n$  pas quand  $n \rightarrow \infty$ .

*Solution.* L'étude générale a montré que la distribution asymptotique est simplement reliée à la série de Fourier associée à la probabilité de transition

$$\tilde{\rho}(k) = 1 - s + \frac{1}{2}s \cos k_1 + \frac{1}{2}s \cos k_2.$$

Alors,

$$w(k) = \ln \tilde{\rho}(k) = -\frac{1}{4}s (k_1^2 + k_2^2) + O(k^4).$$

On en déduit la distribution gaussienne asymptotique ( $q \equiv |\mathbf{q}|$ )

$$R_n(q) \sim \frac{1}{\pi n s} e^{-q^2/ns}.$$

**Exercice 3.2.** On considère une marche au hasard markovienne sur un réseau cubique, c'est-à-dire dans  $\mathbb{Z}^3$ . À chaque pas le marcheur, soit reste immobile avec probabilité  $1 - s$ , soit se déplace d'une maille de réseau dans une des six directions possibles avec la même probabilité  $s/6$ , où  $0 < s < 1$ . Enfin, au temps  $n = 0$  le marcheur est au point  $\mathbf{q} = 0$ .

Trouver la distribution asymptotique de la position du marcheur après  $n$  pas quand  $n \rightarrow \infty$ .

*Solution.* La série de Fourier associée à la probabilité de transition est maintenant

$$\tilde{\rho}(k) = 1 - s + \frac{1}{3}s \cos k_1 + \frac{1}{3}s \cos k_2 + \frac{1}{3}s \cos k_3.$$

Alors,

$$w(k) = \ln \tilde{\rho}(k) = -\frac{1}{6}s (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + O(k^4).$$

On en déduit la distribution gaussienne asymptotique

$$R_n(q) \sim \left( \frac{3}{2\pi ns} \right)^{3/2} e^{-3q^2/2ns}.$$

**Exercice 3.3.** Étudier la stabilité *locale* du point fixe gaussien, correspondant à la loi de probabilité

$$\rho_G(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-q^2/2}$$

par la méthode de la section 3.2, mais appliquée directement à l'équation

$$[\mathcal{T}_\lambda \rho](q) = \lambda \int dq' \rho(q') \rho(\lambda q - q'). \quad (3.63)$$

On déterminera d'abord la valeur de  $\lambda$  pour laquelle la loi de probabilité gaussienne  $\rho_G$  est un point fixe de  $\mathcal{T}_\lambda$ .

Posant  $\rho = \rho_G + \delta\rho$ , on développera l'équation (3.63) au premier ordre en  $\delta\rho$ . On montrera que les vecteurs propres de l'opérateur linéaire agissant sur  $\delta\rho$  sont de la forme

$$\delta\rho_p(q) = \left( \frac{d}{dq} \right)^p \rho_G(q), \quad p > 0.$$

On en déduira les valeurs propres associées.

*Solution : quelques éléments.* On retrouve  $\lambda = \sqrt{2}$ . On linéarise l'équation. On note que la conservation des probabilités entraîne

$$1 = \int dq \rho(q) = \int dq [\rho_G + \delta\rho(q)] = 1 + \int dq \delta\rho(q) \Rightarrow \int dq \delta\rho(q) = 0.$$

Posant

$$[\mathcal{T}_\lambda(\rho_G + \delta\rho)] = \rho_G + \mathcal{L}\delta\rho + O(\|\delta\rho\|^2),$$

où l'action de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  sur une fonction  $\delta\rho$  est donnée par

$$[\mathcal{L}\delta\rho](q) = 2\lambda \int dq' \rho_G(q') \delta\rho(\lambda q - q'),$$

on vérifie que les vecteurs propres de  $\mathcal{L}$  ont la forme proposée en intégrant un certain nombre de fois par parties.

**Exercice 3.4.** *Marche au hasard sur le cercle.* Pour exhiber les propriétés asymptotiques quelques peu différentes de la marche au hasard sur des variétés compactes, on se propose d'étudier la marche au hasard sur le cercle. On suppose toujours l'invariance par translation. La marche au hasard est alors spécifiée par une fonction de transition  $\rho(q - q')$  où  $q$  et  $q'$  sont deux angles correspondant aux positions sur le cercle. La fonction  $\rho(q)$  est, de plus, supposée périodique et continue. Déterminer la distribution asymptotique de la position du marcheur partant de  $q = 0$  au temps  $n = 0$ .

*Solution.* À cause de l'invariance par translation, l'équation d'évolution est encore une convolution, qui se simplifie en transformée de Fourier. Mais, comme la fonction  $\rho(q)$  est périodique et continue, elle admet un développement en séries de Fourier :

$$\rho(q) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{iq\ell} \tilde{\rho}_\ell$$

avec

$$\tilde{\rho}_\ell = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dq e^{-iq\ell} \rho(q),$$

et donc

$$\tilde{\rho}_0 = 1/2\pi, \quad |\tilde{\rho}_\ell| < 1/2\pi \quad \text{pour } \ell \neq 0.$$

Donc au temps  $n$ , la distribution de la position du marcheur s'écrit

$$P_n(q) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{iq\ell} \tilde{\rho}_\ell^n.$$

Pour  $n \rightarrow \infty$ , la somme converge exponentiellement vers la contribution  $\ell = 0$  et donc

$$P_n(q) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2\pi},$$

ce qui est la distribution uniforme sur le cercle.

La valeur maximum de  $|\tilde{\rho}_\ell|$  pour  $\ell \neq 0$ , qui donne la correction dominante, définit un temps

$$\tau = \max_{\ell \neq 0} -\frac{1}{\ln |\tilde{\rho}_\ell|},$$

caractérisant la décroissance exponentielle des corrections, appelé *temps de relaxation*.

**Exercice 3.5.** On considère un processus markovien avec, comme fonction de transition dans l'espace continu, la fonction gaussienne

$$\rho(q, q') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (q - \lambda q')^2 \right],$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel avec  $|\lambda| < 1$ .

Montrer que  $\rho(q, q')$  satisfait à la condition d'équilibre détaillée (3.58). En déduire la distribution asymptotique au temps  $n$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Associer à  $\rho(q, q')$  un opérateur symétrique réel comme expliqué en section 3.4.2. Pour déterminer les valeurs propres de l'opérateur  $\rho$  de module inférieur à 1, on pourra alors utiliser les résultats de la section 4.6.1.

*Solution.* Le rapport  $\rho(q, q')/\rho(q', q)$  se factorise en un rapport de deux fonctions de  $q$  et  $q'$  qui correspondent à des distributions normalisables. On en déduit (équation (3.58)) la distribution asymptotique

$$P_\infty(q) = \sqrt{(1 - \lambda^2)/2\pi} e^{-(1 - \lambda^2)q^2/2}.$$

On introduit alors l'opérateur symétrique réel qui a le même spectre que  $\rho$  (cf. section 3.4.2) :

$$\mathcal{T}(q, q') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{4}(1 + \lambda^2)(q^2 + q'^2) + \lambda q q' \right].$$

Pour  $\lambda > 0$ , on peut poser  $\lambda = e^{-\theta}$ ,  $\theta > 0$ , et après une transformation linéaire sur  $q, q'$  on retrouve l'expression (4.32) et donc les valeurs propres sont

$$\tau_k = e^{-k\theta}, \quad k \geq 0.$$

Le cas  $\lambda < 0$  s'obtient par exemple en posant  $\lambda = -e^{-\theta}$  et le spectre est

$$\tau_k = (-1)^k e^{-k\theta}, \quad k \geq 0.$$

Plus directement, on pourra étudier l'action de  $\rho$  sur les fonctions

$$\psi_k(q) = \frac{d^k}{(dq)^k} P_\infty(q).$$

Le résultat est alors obtenu par des intégrations par parties successives.



# Chapitre 4

## Mécanique statistique classique : une dimension

DANS CE CHAPITRE, nous plaçant dans le cadre de la mécanique statistique classique, nous discutons des modèles sur réseau unidimensionnel. Bien que du point de vue de la physique, certains des modèles que nous allons décrire soient quelque peu artificiels, ils ont une utilité pratique en tant que versions simplifiées de modèles à plusieurs dimensions d'espace et nous rapprochent donc peu à peu de la physique que nous voulons étudier. Par ailleurs, leur étude va nous permettre d'introduire un certain nombre de définitions et concepts nécessaires pour la suite.

Ces modèles sont définis de la manière suivante. À chaque site du réseau, nous associons une ou plusieurs variables aléatoires à valeurs réelles. Les modèles sont alors spécifiés par un poids de Boltzmann, c'est-à-dire une mesure de probabilité fonction de l'ensemble de ces variables aléatoires.

Les quantités qui nous intéressent sont la fonction de partition et surtout les fonctions de corrélation qui sont les valeurs moyennes de produits de variables aléatoires en des sites différents.

De nouveau, la notion de *localité*, dont nous donnerons une définition plus précise dans les chapitres suivants, joue un rôle essentiel : les corrélations directes entre sites différents induites par le poids de Boltzmann doivent décroître suffisamment vite avec la distance.

Dans ce chapitre, nous étudions l'exemple local le plus simple : celui de modèles qui ne comportent que des interactions de proches voisins sur le réseau. Pour de tels modèles, les fonctions de corrélation peuvent être calculées par un formalisme de matrice de transfert.

Nous présentons donc d'abord quelques propriétés générales des matrices de transfert dans le cadre de modèles unidimensionnels. Nous nous servons de ce formalisme pour établir certaines propriétés des fonctions de corrélation, comme la limite thermodynamique ou limite de volume infini, le

comportement à grande distance de la fonction à deux points, et introduisons la notion très importante de *longueur de corrélation*.

Les fonctions de corrélation connexes, cumulants de la distribution, jouent un rôle particulièrement important. En effet, ces fonctions décroissent à grande distance, une propriété appelée *propriété d'amas*.

Nous appliquons le formalisme de matrice de transfert à l'exemple d'un poids de Boltzmann gaussien, que nous étudions en détail. Nous calculons la fonction de partition et les fonctions de corrélation explicitement. Nous observons que, dans *la limite de basse température, la longueur de corrélation tend vers l'infini, ce qui permet de définir à nouveau une limite continue*.

Nous montrons que les résultats de la limite continue peuvent être reproduits directement en résolvant une équation aux dérivées partielles dans laquelle toute trace de la structure initiale de réseau a disparu.

Enfin, nous exhibons une classe un peu plus générale de modèles qui ont la même propriété : longueur de corrélation qui diverge et limite continue.

## 4.1 Interactions de proches voisins. Matrice de transfert

Nous considérons le réseau unidimensionnel des points de coordonnées entières de la droite réelle. À chaque point  $k \in \mathbb{Z}$  du réseau sont attachées une ou plusieurs variables réelles  $q_k$  (par exemple, la déviation d'une particule de sa position d'équilibre). Dans ce qui suit, nous nous limitons à une variable réelle par site, mais la généralisation à plusieurs variables est simple.

Nous définissons d'abord un système sur un réseau fini de taille  $n$ ,  $k \in [0, n]$ , imposant par commodité des conditions aux limites périodiques :  $q_n = q_0$ , ce qui donne au réseau une structure de cercle et permet de construire une suite de modèles invariants par translation. Mais notre but est d'étudier la limite de taille infinie  $n \rightarrow \infty$ , appelée aussi dans ce contexte *limite thermodynamique*.

Le modèle statistique est alors spécifié par un poids statistique (une distribution de probabilité) que nous écrivons sous la forme particulière

$$\rho_n(\mathbf{q}) = e^{-S_n(\mathbf{q})} / \mathcal{Z}_n, \quad \mathbf{q} \equiv \{q_k\} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{Z}_n$  est une normalisation, appelée *fonction de partition*, qui est déterminée par la condition

$$\int \left( \prod_{k=1}^n dq_k \right) \rho_n(\mathbf{q}) = 1,$$

et donc

$$\mathcal{Z}_n = \int \left( \prod_{k=1}^n dq_k \right) e^{-S_n(\mathbf{q})}. \quad (4.2)$$

On peut se demander pourquoi singulariser une normalisation qui n'est pas une quantité physique. La raison de son utilité est la suivante : les dérivées logarithmiques de la fonction de partition par rapport aux différents paramètres dont elle dépend (comme la température) sont elles des valeurs moyennes et donc des quantités physiques.

### 4.1.1 Interactions de proches voisins

La fonction  $\mathcal{S}_n(\mathbf{q})$  peut souvent être écrite comme la somme de termes à un site  $\omega(q)$  qui spécifient la distribution des variables  $q_k$  en l'absence d'interaction, et d'une énergie d'interaction  $\mathcal{E}_n(\mathbf{q})$  qui corrélient les sites :

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n \omega(q_k) + \frac{\mathcal{E}_n(\mathbf{q})}{T}, \quad (4.3)$$

le paramètre  $T$  étant physiquement la température.

Pour un système invariant par translation sur le réseau,  $\mathcal{E}_n(\mathbf{q})$  est invariant dans la substitution  $q_i \mapsto q_{i+1}$ . Par ailleurs, l'interaction est *locale* si la corrélation directe entre deux sites décroît suffisamment vite avec la distance. Les interactions de la forme

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n E(q_k, q_{k+1}, \dots, q_{k+m}), \quad m > 0,$$

avec la convention  $q_k \equiv q_{k'}$  si  $k = k' \pmod{n}$ , sont appelées interactions de portée finie et fournissent un exemple d'interactions locales. C'est d'ailleurs une telle forme particulière de l'interaction qui donne son sens à la notion de réseau et distingue la position  $k$  d'un simple index décrivant un ensemble de  $n$  variables.

L'exemple particulier que nous étudions ici en détail est l'interaction de proches voisins  $m = 1$  où chaque variable  $q_k$  n'est directement corrélée qu'aux variables attachées aux sites voisins sur le réseau. Dans ce cas, la fonction  $\mathcal{S}_n(\mathbf{q})$  prend la forme particulière

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n S(q_{k-1}, q_k), \quad (4.4)$$

avec  $S(q'', q') = S(q', q'')$ .

Nous supposons, de plus,  $S(q, q')$  continue par morceaux et, pour assurer la convergence des intégrales, nous imposons

$$S(q, q') \geq \mu(|q| + |q'|), \quad \mu > 0. \quad (4.5)$$

Cette restriction est un peu forte, mais commode pour les systèmes que nous voulons étudier.

*Remarque.* Avec l'hypothèse (4.4), la fonction de partition est donnée par une expression assez semblable à la distribution de probabilité (3.24), aux conditions aux limites périodiques près.

### 4.1.2 Matrice de transfert et fonction de partition

Pour discuter la physique des modèles statistiques classiques sur réseau dans le cas d'interactions de proches voisins, un outil se révèle particulièrement utile : la *matrice de transfert*.

Notons que le formalisme de la matrice de transfert, que nous allons introduire, se généralise à des systèmes statistiques classiques sur réseau en dimension d'espace arbitraire, avec interaction de portée finie (avec un nombre fini de sites directement corrélés).

Nous introduisons l'opérateur  $\mathbf{T}$  associé au noyau symétrique réel

$$[\mathbf{T}](q'', q') = e^{-S(q'', q')}. \quad (4.6)$$

L'opérateur  $\mathbf{T}$  est appelé la *matrice de transfert* du modèle statistique. Cette dénomination provient des exemples où la variable  $q$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs et donc  $\mathbf{T}$  est une matrice.

Dans cette représentation, le produit de deux opérateurs  $\mathbf{O}_1$  et  $\mathbf{O}_2$  représentés par les noyaux  $\mathcal{O}_1(q', q)$  et  $\mathcal{O}_2(q', q)$  prend la forme

$$[\mathbf{O}_2 \mathbf{O}_1](q', q) = \int dq'' \mathcal{O}_2(q', q'') \mathcal{O}_1(q'', q). \quad (4.7)$$

La trace est définie par

$$\text{tr } \mathbf{O} \equiv \int dq \mathcal{O}(q, q), \quad (4.8)$$

une définition dont on vérifie en la combinant avec la règle de produit (4.7), qu'elle satisfait bien la condition cyclique  $\text{tr } \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_1 = \text{tr } \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2$ .

On vérifie alors qu'avec la borne (4.5), les traces de toutes les puissances de  $\mathbf{T}$  existent.

*Fonction de partition.* Avec ces définitions, la fonction de partition (4.2) peut s'exprimer en terme de la matrice de transfert par ( $q_0 = q_n$ )

$$\mathcal{Z}_n = \int \prod_{k=1}^n dq_k [\mathbf{T}](q_{k-1}, q_k) = \text{tr } \mathbf{T}^n. \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Espace de Hilbert et matrice de transfert

Pour la suite, il est commode d'introduire un espace de Hilbert auxiliaire  $\mathcal{H}$  : il s'agit ici de l'espace vectoriel réel normé des fonctions de carré sommable d'une variable réelle  $q$ . Le produit scalaire de deux fonctions  $f, g$  est défini par

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} dq f(q)g(q).$$

Le formalisme d'espaces de Hilbert (mais en général complexes) joue un rôle central dans la construction de la mécanique quantique. L'étude de la matrice

de transfert qui suit, s'inspire directement des méthodes de la mécanique quantique.

La matrice de transfert agit alors sur les fonctions par

$$[\mathbf{T}\psi](q) = \int dq' [\mathbf{T}](q, q') \psi(q').$$

De l'existence de  $\text{tr } \mathbf{T}^4$  on déduit que, si  $f$  appartient à  $\mathcal{H}$ ,

$$\|\mathbf{T}f\|^2 \leq \|f\|^2 (\text{tr } \mathbf{T}^4)^{1/2},$$

et donc  $\mathbf{T}f$  est de carré sommable et, de plus, l'opérateur  $\mathbf{T}$  est borné dans  $\mathcal{H}$ .

L'opérateur  $\mathbf{T}$  est symétrique réel. Il est diagonalisable dans  $\mathcal{H}$ , son spectre est réel et ses vecteurs propres réels et orthogonaux. Comme la trace de  $\mathbf{T}^2$  est fini, le spectre est, de plus, discret et les valeurs propres ont zéro comme seul point d'accumulation.

Dans la suite, nous notons  $\psi_\nu(q)$  les vecteurs propres réels, normalisés de  $\mathbf{T}$ , associés aux valeurs propres (toutes réelles)  $\tau_0 \geq |\tau_1| \geq |\tau_2| \dots$  :

$$\int dq' [\mathbf{T}](q, q') \psi_\nu(q') = \tau_\nu \psi_\nu(q), \quad \int dq \psi_\nu^2(q) = 1.$$

Enfin,  $[\mathbf{T}](q, q')$  peut alors s'exprimer comme une combinaison linéaire de projecteurs sur les valeurs propres sous la forme

$$[\mathbf{T}](q, q') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu \psi_\nu(q) \psi_\nu(q'). \quad (4.10)$$

La fonction de partition peut aussi s'exprimer en terme des valeurs propres (équation (4.9)) :

$$\mathcal{Z}_n = \text{tr } \mathbf{T}^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu^n. \quad (4.11)$$

*Opérateur position.* Pour l'étude des fonctions de corrélation, il est utile d'introduire également l'opérateur (non borné)  $\hat{\mathbf{Q}}$ , analogue de l'opérateur position en mécanique quantique, qui agit par multiplication :

$$[\hat{\mathbf{Q}}\psi](q) = q\psi(q) \quad \Rightarrow \quad [\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{T}](q, q') = q[\mathbf{T}](q, q'). \quad (4.12)$$

Introduisant le noyau de l'identité  $\delta(q - q')$ ,

$$\int dq \delta(q'' - q) \mathcal{O}(q, q') = \mathcal{O}(q'', q'),$$

où  $\delta(q)$  est la distribution de Dirac, on peut écrire le noyau correspondant à  $\hat{\mathbf{Q}}$  sous la forme

$$[\hat{\mathbf{Q}}](q, q') = q \delta(q - q').$$

## 4.2 Fonctions de corrélation

*Fonctions de corrélation : définition.* Nous définissons maintenant les fonctions de corrélation des variables  $q_k$ . Dans la suite, la notation  $\langle \bullet \rangle_n$  signifiera valeur moyenne de  $\bullet$  par rapport au poids statistique  $e^{-S_n} / \mathcal{Z}_n$ . Avec cette notation, nous définissons la fonction de corrélation à  $p$  points comme le moment de la distribution ( $q_0 = q_n$ ),

$$\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_n \equiv \mathcal{Z}_n^{-1} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} e^{-S_n(q)}. \quad (4.13)$$

### 4.2.1 Fonction à un point

La fonction à un point, qui est la valeur moyenne de  $q_\ell$ , est donnée par

$$\langle q_\ell \rangle_n = \mathcal{Z}_n^{-1} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_\ell e^{-S_n(q)}.$$

L'intégrale peut se récrire

$$\begin{aligned} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_\ell e^{-S_n(q)} &= \int dq_\ell q_\ell \int dq_n \prod_{s=\ell+1}^{n-1} dq_s \prod_{s=\ell}^{n-1} [\mathbf{T}](q_s, q_{s+1}) \\ &\quad \times \int \prod_{s=1}^{\ell-1} dq_s \prod_{s=1}^{\ell} [\mathbf{T}](q_{s-1}, q_s). \end{aligned}$$

Intégrant sur toutes les variables sauf  $q_\ell$ , on trouve

$$\mathcal{Z}_n \langle q_\ell \rangle_n = \int dq_\ell q_\ell [\mathbf{T}^n](q_\ell, q_\ell).$$

Introduisant maintenant l'opérateur (4.12), on remarque

$$[\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{T}](q_\ell, q_\ell) = q_\ell [\mathbf{T}](q_\ell, q_\ell),$$

et donc

$$\mathcal{Z}_n \langle q_\ell \rangle_n = \int dq_\ell [\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{T}^n](q_\ell, q_\ell).$$

L'intégrale restante donne la trace du produit d'opérateurs (équation (4.8)). La fonction à un point s'écrit donc

$$\langle q_\ell \rangle_n = \text{tr } \mathbf{T}^n \hat{\mathbf{Q}} / \text{tr } \mathbf{T}^n. \quad (4.14)$$

*Invariance par translation.* L'expression (4.14) montre que la valeur moyenne est indépendante du point  $\ell$ . C'est en fait une conséquence directe de deux propriétés : la matrice de transfert est indépendante des points sur le réseau ; nous avons choisi des conditions aux limites périodiques qui ont donné au réseau une structure de cercle. Ceci induit une invariance par translation sur le réseau.

### 4.2.2 Fonction de corrélation à $p$ points

La fonction de corrélation à deux points, valeur moyenne du produit des valeurs de  $q$  en deux points  $\ell_1, \ell_2$  du réseau, est définie par

$$\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle_n \equiv Z_n^{-1} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_{\ell_1} q_{\ell_2} e^{-S_n(q)}.$$

La fonction  $Z_n^{(2)}(\ell_1, \ell_2)$  est symétrique dans l'échange  $\ell_1 \leftrightarrow \ell_2$ . Supposons par exemple  $\ell_2 \geq \ell_1$ . La méthode utilisée pour la fonction à un point permet alors d'établir la relation

$$\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle_n = \text{tr } \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{\ell_2 - \ell_1} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{n - \ell_2 + \ell_1} / \text{tr } \mathbf{T}^n. \quad (4.15)$$

De nouveau, comme conséquence de l'invariance par translation, la fonction à deux points ne dépend que de la distance entre les deux points sur le réseau.

Plus généralement, si nous supposons les points ordonnés  $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_p$ ,

$$\begin{aligned} \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_n &= Z_n^{-1} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} e^{-S_n(q)} \\ &= \text{tr } \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{\ell_p - \ell_{p-1}} \hat{\mathbf{Q}} \dots \mathbf{T}^{\ell_3 - \ell_2} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{\ell_2 - \ell_1} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{n - \ell_p + \ell_1} / \text{tr } \mathbf{T}^n. \end{aligned} \quad (4.16)$$

*Fonction génératrice.* Comme nous l'avons fait dans le chapitre 2, il est utile d'introduire la fonction génératrice des fonctions de corrélation

$$Z_n(\mathbf{b}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p} b_{\ell_1} b_{\ell_2} \dots b_{\ell_p} \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_n = \left\langle \exp \sum_{\ell} b_{\ell} q_{\ell} \right\rangle_n. \quad (4.17)$$

Elle est proportionnelle à la fonction de partition d'un système où un terme linéaire en  $q$ , différent en chaque site, a été rajouté.

## 4.3 Limite thermodynamique

Nous évaluons maintenant la fonction de partition et les fonctions de corrélation dans la limite de volume infini, appelée, dans ce contexte, limite thermodynamique. À une dimension d'espace, le volume se réduit à la taille  $n$  du réseau.

### 4.3.1 La fonction de partition

La limite thermodynamique fait intervenir directement le spectre et les vecteurs propres de l'opérateur  $\mathbf{T}$  dans l'espace  $\mathcal{H}$  des fonctions de carré sommable.

*Valeur propre dominante de la matrice de transfert.* Pour les systèmes unidimensionnels que nous étudions ici, on démontre que  $\tau_0$ , la valeur propre de module maximum de  $\mathbf{T}$ , est *positive et non dégénérée* ou simple, et que  $\psi_0(q)$  est une fonction de signe constant, qu'on peut donc choisir positive (cf. appendice B.1).

*Limite thermodynamique.* Pour  $n \rightarrow \infty$ , la fonction de partition, exprimée en termes des valeurs propres de la matrice de transfert (équation (4.11)), est dominée par la valeur propre de module maximum  $\tau_0$  et donc

$$\mathcal{Z}_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tau_0^n.$$

La quantité

$$\mathcal{W}_n = T \ln \mathcal{Z}_n, \quad (4.18)$$

où, dans le contexte de la physique statistique,  $T$  est la température et  $\mathcal{W}_n$  l'énergie libre, est donc asymptotiquement proportionnelle à la longueur  $n$  et  $\mathcal{W}_n/n$ , la densité d'énergie libre, a une limite finie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{W}_n = T \ln \tau_0. \quad (4.19)$$

Pour une grande classe de systèmes de physique statistique à plusieurs dimensions d'espace qui satisfont à la propriété d'amas (cf. section 4.4), cette propriété se généralise : dans la limite thermodynamique, l'énergie libre est proportionnelle au volume. De façon plus directe, cette propriété est une conséquence de la portée finie des interactions.

Dans ce qui suit, nous omettrons en général le facteur de proportionnalité  $T$ , nécessaire à l'interprétation physique, mais qui ne joue le plus souvent aucun rôle pour les questions que nous voulons étudier.

### 4.3.2 Fonction à un point

Nous utilisons maintenant l'expression (4.14) pour évaluer la valeur moyenne de  $q$ . Dans la limite thermodynamique  $n \rightarrow \infty$ , la matrice  $\mathbf{T}^n$  est dominée par ses valeurs propres les plus grandes. Alors, du développement (4.10) on déduit

$$[\mathbf{T}^n](q, q') \underset{n \rightarrow \infty}{=} \tau_0^n \psi_0(q) \psi_0(q') + O(\tau_1^n)$$

et donc

$$\text{tr } \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tau_0^n \int dq q \psi_0^2(q).$$

La valeur moyenne de  $q_\ell$  a une limite finie donnée par

$$\langle q_\ell \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr } \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^n / \text{tr } \mathbf{T}^n = \int dq q \psi_0^2(q).$$

*Brisure spontanée de symétrie.* En général, la valeur moyenne  $\langle q_\ell \rangle$  ne joue pas de rôle particulier puisqu'il suffit de faire la translation

$$q_\ell \mapsto q'_\ell = q_\ell - \langle q_\ell \rangle$$

pour la supprimer. Ce n'est que si une valeur de  $q$  est privilégiée que la situation est différente. Par exemple, si le système est invariant dans la réflexion  $q \mapsto -q$ , une valeur moyenne non-nulle a un sens de *brisure spontanée de symétrie* (cf. chapitre 7).

Cette situation se rencontre si l'interaction satisfait

$$S(q'', q') = S(-q'', -q') \Rightarrow [\mathbf{T}](q'', q') = [\mathbf{T}](-q'', -q').$$

À une dimension, avec interaction de proches voisins (ou de courte portée), une telle brisure spontanée de symétrie est impossible. L'argument est le suivant : pour que

$$\langle q_\ell \rangle = \int dq q \psi_0^2(q)$$

soit différent de zéro, il faut que la fonction  $\psi_0(q)$  ne soit pas symétrique, c'est-à-dire ne soit ni paire ni impaire. La valeur propre  $\tau_0$  est alors dégénérée (ici double) car l'état symétrique  $\psi_0(-q)$  est un vecteur propre indépendant :

$$\tau_0 = \int dq dq' \psi_0(q') [\mathbf{T}](q', q) \psi_0(q) = \int dq dq' \psi_0(-q') [\mathbf{T}](q', q) \psi_0(-q).$$

Or, avec les hypothèses de ce chapitre, on peut démontrer qu'à une dimension, la valeur propre  $\tau_0$  est non dégénérée (cf. appendice B.1).

Comme la symétrie de réflexion ne peut pas être brisée spontanément, une transition de phase avec ordre est impossible.

### 4.3.3 Fonction à deux points et longueur de corrélation

*Limite thermodynamique.* Pour la fonction à deux points, avec le même argument on trouve

$$\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle = \frac{1}{\tau_0^{|\ell_2 - \ell_1|}} \int dq dq' \psi_0(q) [\hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{|\ell_2 - \ell_1|} \hat{\mathbf{Q}}](q, q') \psi_0(q'). \quad (4.20)$$

*Comportement à longue distance.* Examinons maintenant le comportement de la fonction à deux points à grande distance  $\ell = |\ell_1 - \ell_2| \rightarrow \infty$  (supposant pour simplicité  $|\tau_2| < |\tau_1|$ ). Utilisant le développement (4.10),

$$[\mathbf{T}^n](q, q') \underset{n \rightarrow \infty}{=} \tau_0^n \psi_0(q) \psi_0(q') + \tau_1^n \psi_1(q) \psi_1(q') + O(\tau_2^n),$$

on obtient

$$\langle q_\ell q_0 \rangle = \langle q \rangle^2 + A_1^2 (\tau_1 / \tau_0)^\ell + O((\tau_2 / \tau_0)^\ell),$$

avec

$$A_1 = \int dq q \psi_1(q) \psi_0(q).$$

Le terme dominant est une constante, le carré de la valeur moyenne de  $q$ . Comme noté plus haut, il peut être éliminé en redéfinissant les variables  $q_k$  :

$$q_k \mapsto q'_k = q_k - \langle q \rangle$$

ainsi que

$$\hat{\mathbf{Q}}' = \hat{\mathbf{Q}} - \langle q \rangle.$$

La fonction à deux points de  $q'$  décroît alors exponentiellement pour  $\ell \rightarrow \infty$  (supposant  $A_1 \neq 0$ , sinon il faut prendre le terme suivant) :

$$\langle q'_\ell q'_0 \rangle = \langle (q_\ell - \langle q \rangle)(q_0 - \langle q \rangle) \rangle = A_1^2 (\tau_1/\tau_0)^\ell + O((\tau_2/\tau_0)^\ell).$$

De façon générale, on caractérise cette décroissance par la *longueur de corrélation*

$$\xi = \lim_{\ell \rightarrow \infty} -\frac{\ell}{\ln(|\langle q'_0 q'_\ell \rangle|)}. \quad (4.21)$$

On trouve ici

$$\xi^{-1} = \ln(\tau_0/\tau_1). \quad (4.22)$$

*Limite continue.* Supposons que la matrice de transfert dépende d'un paramètre tel que, pour une certaine valeur de ce paramètre, la longueur de corrélation tende vers l'infini. Alors, comme nous le montrons explicitement dans l'exemple gaussien, il est possible de définir une limite continue, et les fonctions de corrélation de la limite continue peuvent être calculées à partir d'une équation aux dérivées partielles ou d'une intégrale de chemin (*cf.* chapitre 5).

## 4.4 Fonctions connexes et propriété d'amas

De façon générale, l'expression (4.16) montre que la fonction à  $p$  points a comme limite thermodynamique (pour  $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_p$ )

$$\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle = \frac{1}{\tau_0^{\ell_p - \ell_1}} \int dq dq' \psi_0(q) [\mathbf{O}](q, q') \psi_0(q'), \quad (4.23)$$

avec

$$\mathbf{O} = \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{\ell_p - \ell_{p-1}} \hat{\mathbf{Q}} \dots \mathbf{T}^{\ell_3 - \ell_2} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{\ell_2 - \ell_1} \hat{\mathbf{Q}}.$$

La question que nous avons examinée dans le cas de la fonction à deux points se pose de façon plus générale : identifier la combinaison qui décroît à grande distance et caractériser la décroissance des corrélations quand la longueur de corrélation est finie.

Nous avons montré en section 4.3.3 que c'est la fonction à deux points des variables auxquelles leur valeur moyenne a été soustraite,

$$\langle (q_{\ell_1} - \langle q_{\ell_1} \rangle) (q_{\ell_2} - \langle q_{\ell_2} \rangle) \rangle = \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle - \langle q_{\ell_1} \rangle \langle q_{\ell_2} \rangle ,$$

qui décroît à grande distance. La combinaison ainsi obtenue, qui est le deuxième cumulant de la distribution, est aussi appelée *fonction à deux points connexe* et sera notée

$$\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle_c \equiv \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle - \langle q_{\ell_1} \rangle \langle q_{\ell_2} \rangle .$$

Cette propriété se généralise aux cumulants de degré plus élevé. Par exemple, il est simple de le vérifier pour la fonction à trois points. Le cumulant de degré trois ou fonction de corrélation connexe à trois points, est donné par

$$\begin{aligned} \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} q_{\ell_3} \rangle &= \langle q_{\ell_1} \rangle \langle q_{\ell_2} \rangle \langle q_{\ell_3} \rangle + \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle_c \langle q_{\ell_3} \rangle + \langle q_{\ell_2} q_{\ell_3} \rangle_c \langle q_{\ell_1} \rangle + \langle q_{\ell_3} q_{\ell_1} \rangle_c \langle q_{\ell_2} \rangle \\ &\quad + \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} q_{\ell_3} \rangle_c . \end{aligned}$$

Utilisant les expressions explicites (4.23), on vérifie que  $\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} q_{\ell_3} \rangle_c$  décroît exponentiellement quand  $|\ell_2 - \ell_1|$  ou  $|\ell_3 - \ell_2|$  tendent vers l'infini.

Plus généralement, utilisant les techniques de la section 2.5.2, on introduit une fonction génératrice des cumulants,

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}) = \ln \mathcal{Z}(\mathbf{b}), \quad (4.24)$$

où  $\mathcal{Z}(\mathbf{b})$  est la limite thermodynamique de la fonction génératrice (4.17). Elle est par définition la fonction génératrice des fonctions de corrélation connexes :

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p} b_{\ell_1} b_{\ell_2} \dots b_{\ell_p} \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_c .$$

Notons qu'elle est aussi l'énergie libre d'un système où un terme couplé linéairement à  $q$ , différent en chaque site, a été ajouté à l'énergie de configuration.

*Propriété d'amas.* Ce sont les fonctions de corrélation connexes qui ont des propriétés de décroissance à grande distance. Elles s'expriment sous forme d'une propriété dite d'*amas* (*cluster* en anglais).

Notons  $\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_c$  la fonction à  $p$  points connexe. Séparons alors les  $p$  points  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$  en deux sous-ensembles non vides disjoints  $I$  et  $J$ . Appelons distance entre ces deux sous-ensembles de points la quantité

$$D = \min_{\ell_i \in I, \ell_j \in J} |\ell_i - \ell_j| .$$

Alors,

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_c = 0 . \quad (4.25)$$

Avec les hypothèses de ce chapitre, on peut montrer plus précisément que la fonction de corrélation décroît au moins comme  $e^{-D/\xi}$ , où  $\xi$  est la longueur de corrélation (4.22).

Ce résultat est valable pour des systèmes statistiques plus généraux que ceux étudiés ici. La démonstration à partir de la forme explicite (4.23) est assez semblable à l'argument combinatoire 2.3.2.

#### 4.4.1 Variable moyenne et limite thermodynamique

Il est instructif d'étudier le comportement des moments de la variable aléatoire moyenne

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n q_{\ell}$$

dans la limite thermodynamique  $n \rightarrow \infty$ .

D'abord, par invariance par translation,

$$\langle Q \rangle_n = \langle q \rangle_n.$$

Le second moment est lié à la fonction à deux points, et donc à deux points connexe, en effet,

$$\langle Q^2 \rangle_n = \frac{1}{n^2} \sum_{\ell_1, \ell_2} \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{\ell=\ell_1-\ell_2} \langle q_0 q_{\ell} \rangle_n = \langle q \rangle_n^2 + \frac{1}{n} \sum_{\ell} (\langle q_0 q_{\ell} \rangle_n)_c.$$

Dans la limite thermodynamique, la fonction à deux points connexe décroît exponentiellement pour  $|\ell| \rightarrow \infty$  d'une façon déterminée par la longueur de corrélation. Si la longueur de corrélation est finie, la somme sur  $\ell$  converge. Le second cumulante de la distribution de  $Q$  tend alors vers zéro :

$$\langle (Q - \langle Q \rangle_n)^2 \rangle_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \sum_{\ell} \langle q_0 q_{\ell} \rangle_c.$$

De façon plus générale, considérons la fonction génératrice des sommes

$$Z_n(b) = \langle e^{nbQ} \rangle_n.$$

Comparant aux expressions (4.1), (4.2), (4.4), on vérifie que  $Z_n(b)$  s'exprime en terme de la fonction de partition  $\mathcal{Z}_n(b)$  associée à la fonction

$$S(q, q'; b) = S(q, q') - \frac{1}{2}b(q + q')$$

par

$$Z_n(b) = \mathcal{Z}_n(b) / \mathcal{Z}_n(0).$$

Pour  $|b|$  assez petit toute l'analyse de la limite thermodynamique est valable, et donc asymptotiquement

$$\ln Z_n(b) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} nW(b),$$

où la fonction  $W(b)$  est reliée à la fonction génératrice des fonctions de corrélation connexes (4.24) par

$$W(b) = \mathcal{W}(b_\ell = b)/n.$$

De plus, cette équation relie les coefficients du développement en puissances de  $b$  à des sommes de fonctions de corrélation connexes. La propriété d'amas entraîne, au moins si la longueur de corrélation est finie, que toutes les sommes convergent sauf une qui correspond à l'invariance par translation et donne le facteur  $n$ . La fonction  $W(b)$  est donc développable à  $b = 0$ . On trouve des résultats tout à fait analogues à ceux du théorème de la limite centrale (*cf.* équation (3.8) avec la correspondance  $b = ik$ ). Quand la longueur de corrélation est finie, les moments de la moyenne des variables  $q_\ell$ , ont le comportement prédit par le théorème de la limite centrale, bien que les variables  $q_\ell$  ne soient pas indépendantes. Ce résultat indique que des comportements collectifs impliquant de fortes corrélations ne peuvent se produire que quand la longueur de corrélation tend vers l'infini.

## 4.5 Modèles statistiques : exemples simples

Avant d'aborder le cas gaussien, que nous étudions en détail, nous illustrons l'analyse précédente par quelques exemples simples.

- (i) *Température infinie ou variables indépendantes.* Considérons l'expression (4.3). Quand l'énergie de configuration  $\mathcal{E}$  est nulle ou la température  $T$  infinie, les variables en des sites différents sont indépendantes. La matrice de transfert se factorise :

$$[\mathbf{T}](q, q') = e^{-\omega(q)/2} e^{-\omega(q')/2},$$

et prend la forme d'un projecteur sur le vecteur  $e^{-\omega(q)/2}$ . Donc la valeur propre correspondant à ce vecteur est positive et toutes les autres valeurs propres s'annulent. De façon peu surprenante, la longueur de corrélation est nulle.

- (ii) *Systèmes invariants par translation.* La limite opposée correspond à prendre  $S(q, q')$  de la forme

$$S(q, q') = E(q - q')/T,$$

où  $E(q)$  est une fonction paire.

Nous reconnaissons alors une version de la marche au hasard étudiée en section 3.3, à une dimension dans l'espace continu, la matrice de transfert jouant le rôle de la probabilité de transition. Dans cet exemple, la borne (4.5) n'est pas satisfaite et nous la remplaçons par

$$E(q) \geq \mu|q|.$$

La matrice de transfert se diagonalise par transformée de Fourier :

$$[\mathbf{T}](q, q') = \int dk e^{ik(q-q')} \tau(k),$$

avec

$$\tau(k) = \frac{1}{2\pi} \int dq e^{-iqk - E(q)/T}.$$

La matrice de transfert a donc un spectre continu avec valeurs propres  $\tau(k)$ . La limite thermodynamique est dominée par le voisinage de  $k = 0$ . La longueur de corrélation est infinie. On peut alors définir une limite continue qui est directement reliée au mouvement brownien de la section 3.3.1. Dans ce problème, le temps est remplacé par la position sur le réseau et la probabilité de saut par la matrice de transfert.

(iii) *Limite de basse température.* Considérons maintenant l'exemple

$$S(q, q') = \frac{1}{2}(q - q')^2/T + \frac{1}{2}(\omega(q) + \omega(q')),$$

où  $T$  est physiquement proportionnel à la température et la fonction  $\omega(q)$  est une fonction régulière (par exemple un polynôme) positive avec un minimum unique à  $q = q_0$  :

$$\omega(q) = \frac{1}{2}\omega_2(q - q_0)^2 + O((q - q_0)^3).$$

Pour  $T \rightarrow 0$ , la configuration dominante à la fonction de partition correspond à tous les  $q_k$  égaux. La fonction à  $p$  points se réduit à

$$\langle q^p \rangle_n = \int dq q^p e^{-n\omega(q)} / \int dq e^{-n\omega(q)}.$$

Alors, pour  $n \rightarrow \infty$ , seul le voisinage de la configuration  $q = q_0$  contribue et  $\langle q^p \rangle_n \rightarrow q_0^p$ . Pour le calcul des fonctions connexes, on peut introduire la fonction génératrice

$$\mathcal{Z}_n(b) = \langle e^{bq} \rangle_n.$$

La limite  $n \rightarrow \infty$  relève de la méthode du col. On peut donc approximer  $\omega(q)$  par  $\frac{1}{2}\omega_2(q - q_0)^2$ . La fonction génératrice est donnée par

$$\mathcal{Z}_n(b) \propto \int dq e^{-n\omega_2(q-q_0)^2/2 + bq} \propto e^{bq_0 + b^2/2n\omega_2},$$

et donc la fonction génératrice des fonctions connexes par

$$\mathcal{W}_n(b) = bq_0 + b^2/2n\omega_2,$$

un résultat analogue au théorème de la limite centrale. En particulier, puisque la fonction à deux points est constante, la longueur de corrélation est infinie ce qui se comprend puisque l'énergie de configuration est dominée par le terme invariant par translation.

Enfin, pour étudier le voisinage de  $T = 0$ , on peut aussi remplacer  $\omega(q)$  par l'approximation quadratique. On est alors conduit à une distribution gaussienne que nous discutons maintenant.

## 4.6 Le modèle gaussien

Nous étudions maintenant de façon détaillée l'exemple d'un poids de Boltzmann gaussien correspondant à une fonction (4.3) quadratique.

À chaque point  $k \in \mathbb{Z}$  du réseau est attachée une variable réelle  $x_k$  (par exemple, la déviation d'une particule de son point d'équilibre) et un poids statistique

$$\rho_n(x) = e^{-\mathcal{S}_n(x)} / Z_n,$$

où nous choisissons la fonction  $\mathcal{S}_n(x)$  de la forme particulière

$$\mathcal{S}_n(x) = \sum_k \left[ \frac{J}{2T} (x_k - x_{k-1})^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_k^2 \right], \quad \omega, J > 0. \quad (4.26)$$

Dans l'interprétation physique, le paramètre positif  $T$  est la température, la constante  $J$  caractérise l'intensité de l'interaction entre proches voisins et  $\omega$  caractérise la distribution pour  $T = +\infty$ , qui peut être engendrée par un potentiel harmonique  $V(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2$  correspondant à une force de rappel à l'équilibre.

D'après l'analyse de la section 4.5, on s'attend à ce que les comportements collectifs apparaissent à basse température, où la corrélation entre points voisins est la plus forte. En effet, pour  $T \rightarrow 0$ , la configuration dominante est obtenue en minimisant l'énergie et correspond à tous les  $x_k$  égaux.

Il est commode de changer de normalisation, posant

$$x_k = \lambda q_k \quad \text{avec} \quad \lambda^2 = \frac{2}{\omega \sqrt{\omega^2 + 4T/J}},$$

et d'introduire le paramètre  $\theta > 0$  défini par

$$\cosh \theta = 1 + \omega^2 T / 2J, \quad (4.27)$$

qui est proportionnel à  $\sqrt{T}$  pour  $T \rightarrow 0$  :

$$\theta \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \omega \sqrt{T/J}.$$

Dans ces nouvelles variables, la fonction  $\mathcal{S}_n$  (équation (4.3)) devient

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n S(q_k, q_{k-1}) \quad (4.28)$$

avec, dans la notation (4.4),

$$S(q, q') = \frac{1}{2 \sinh \theta} [(q^2 + q'^2) \cosh \theta - 2qq']. \quad (4.29)$$

Nous calculons d'abord les quantités qui nous intéressent pour un réseau fini  $k \in [0, n]$ , imposant des conditions aux limites périodiques :  $q_n = q_0$ , et étudions ensuite la limite du système infini,  $n \rightarrow \infty$ .

Pour simplifier les expressions, il est aussi commode de changer la normalisation de la fonction de partition et d'écrire la densité de probabilité

$$\rho_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathcal{Z}(n, \theta)} \frac{1}{(2\pi \sinh \theta)^{n/2}} e^{-\mathcal{S}_n(\mathbf{q})}, \quad (4.30)$$

où la fonction de partition est alors donnée par

$$\mathcal{Z}(n, \theta) = \int \left( \prod_{k=1}^n \frac{dq_k}{\sqrt{2\pi \sinh \theta}} \right) \exp[-\mathcal{S}_n(\mathbf{q})]. \quad (4.31)$$

#### 4.6.1 Matrice de transfert gaussienne : propriétés algébriques

La matrice de transfert  $\mathbf{T}$  est maintenant associée au noyau (pour plus de détails *cf.* section 4.1.2) :

$$[\mathbf{T}](q, q') = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sinh \theta}} \exp \left[ -\frac{1}{2 \sinh \theta} ((q^2 + q'^2) \cosh \theta - 2qq') \right]. \quad (4.32)$$

L'opérateur  $\mathbf{T}$  est symétrique réel. Le noyau  $[\mathbf{T}](q, q')$  satisfait la borne (4.5) et donc toutes les traces des puissances de  $\mathbf{T}$  existent. Son spectre est discret, réel et borné, et ses vecteurs propres sont orthogonaux.

De plus, on vérifie que  $\mathbf{T}$  est positif (*cf.* aussi section 4.8). En effet, utilisant l'identité

$$\frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip(q-q')} e^{-p^2 \sinh \theta/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sinh \theta}} e^{-(q-q')^2/2 \sinh \theta}, \quad (4.33)$$

on trouve, pour toute fonction  $f$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,

$$(f, \mathbf{T}f) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-p^2 \sinh \theta/2} \left| \int dq e^{ipq} e^{-\tanh(\theta/2)q^2/2} f(q) \right|^2 > 0.$$

Ses valeurs propres sont donc positives.

Dans ce qui suit, nous utilisons directement les notations et résultats de la section 4.3. En particulier, nous notons  $\psi_\nu$  les vecteurs propres de  $\mathbf{T}$  correspondant aux valeurs propres  $\tau_\nu$ . Nous introduisons aussi l'opérateur position  $\hat{\mathbf{Q}}$ , défini par l'équation (4.12), et qui agit de façon multiplicative sur les fonctions de l'espace de Hilbert :

$$[\hat{\mathbf{Q}}\psi](q) = q\psi(q).$$

Pour des raisons qui seront explicitées plus loin, les vecteurs et valeurs propres de  $\mathbf{T}$  peuvent être déterminés par une méthode algébrique inspirée de la solution de l'oscillateur harmonique quantique.

*Opérateurs d'annihilation et de création.* Dans le langage de la mécanique quantique, l'opérateur  $\hat{\mathbf{Q}}$  est l'opérateur *position*. Il est utile d'introduire aussi l'opérateur  $\hat{\mathbf{D}}$ , proportionnel à l'opérateur *impulsion*  $\hat{\mathbf{P}}$  de la mécanique quantique, qui agit sur le sous-ensemble dense des vecteurs différentiables de l'espace de Hilbert par

$$[\hat{\mathbf{D}}\psi](q) = \frac{d\psi}{dq}. \quad (4.34)$$

On vérifie la relation de commutation (avec la notation  $[\mathbf{U}, \mathbf{V}] \equiv \mathbf{UV} - \mathbf{VU}$ )

$$[\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{Q}}] = \mathbf{1},$$

où  $\mathbf{1}$  est l'opérateur identité. Utilisant la notation  $^\dagger$  pour indiquer la conjugaison hermitienne avec la définition pour tout opérateur  $\hat{\mathbf{O}}$  :

$$(f, \hat{\mathbf{O}}g) = (\hat{\mathbf{O}}^\dagger f, g),$$

on remarque que

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}}^\dagger, \quad \hat{\mathbf{D}} = -\hat{\mathbf{D}}^\dagger, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^\dagger.$$

Par exemple,

$$(f, \hat{\mathbf{D}}g) = \int dq f(q)g'(q) = - \int dq f'(q)g(q) = -(\hat{\mathbf{D}}f, g).$$

On définit alors deux opérateurs

$$\mathbf{A} = (\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{Q}})/\sqrt{2}, \quad \mathbf{A}^\dagger = (-\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{Q}})/\sqrt{2}, \quad (4.35)$$

appelés respectivement, dans le langage quantique, opérateurs d'*annihilation* et de *création*. Réciproquement,

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger)\sqrt{2}. \quad (4.36)$$

Le commutateur de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}^\dagger$  est

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = \mathbf{1}. \quad (4.37)$$

*Matrice de transfert et opérateurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^\dagger$ .* Utilisant la forme explicite (4.32), on vérifie d'abord l'équation

$$\left[ \frac{\partial}{\partial q} + q + e^{-\theta} \left( \frac{\partial}{\partial q'} - q' \right) \right] [\mathbf{T}](q, q') = 0.$$

Faisant alors agir les opérateurs  $\mathbf{AT}$  et  $\mathbf{TA}$  sur un vecteur  $\psi$  arbitraire, on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\mathbf{AT}\psi(q) &\equiv \int dq' \left( \frac{\partial}{\partial q} + q \right) [\mathbf{T}](q, q') \psi(q') \\ &= e^{-\theta} \int dq' \psi(q') \left( q' - \frac{\partial}{\partial q'} \right) [\mathbf{T}](q, q') \\ &= e^{-\theta} \int dq' [\mathbf{T}](q, q') \left( \frac{\partial}{\partial q'} + q' \right) \psi(q') \equiv \sqrt{2}e^{-\theta} [\mathbf{TA}\psi](q), \end{aligned}$$

après une intégration par parties. On en déduit les relations de commutation

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = e^{-\theta} \mathbf{T}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^\dagger \mathbf{T} = e^\theta \mathbf{T}\mathbf{A}^\dagger. \quad (4.38)$$

#### 4.6.2 Matrice de transfert. Vecteurs et valeurs propres

Les relations de commutation (4.38) permettent de déterminer le spectre et les vecteurs propres de la matrice de transfert.

Si  $\psi_\nu$  est le vecteur propre de  $\mathbf{T}$  associé à la valeur propre  $\tau_\nu$ ,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{T} \psi_\nu = \tau_\nu \mathbf{A}^\dagger \psi_\nu = e^\theta \mathbf{T} \mathbf{A}^\dagger \psi_\nu.$$

Donc, si  $\mathbf{A}^\dagger \psi_\nu$  ne s'annule pas et est de carré sommable,  $\mathbf{A}^\dagger \psi_\nu$  est aussi un vecteur propre, associé à la valeur propre  $e^{-\theta} \tau_\nu < \tau_\nu$ .

Montrons que la première condition est toujours satisfaite. L'équation  $\mathbf{A}^\dagger \psi = 0$  s'écrit explicitement

$$-\psi'(q) + q\psi(q) = 0.$$

La solution est

$$\psi(q) \propto e^{q^2/2},$$

qui n'est pas de carré sommable. Il n'existe donc pas de vecteur  $\psi$  dans  $\mathcal{H}$  tel que  $\mathbf{A}^\dagger \psi = 0$ .

Le même raisonnement, appliqué à  $\mathbf{A}$ , donne

$$\mathbf{A}\mathbf{T}\psi_\nu = \tau_\nu \mathbf{A}\psi_\nu = e^{-\theta} \mathbf{T}\mathbf{A}\psi_\nu.$$

Donc, si  $\mathbf{A}\psi_\nu$  est de carré sommable et ne s'annule pas,  $\mathbf{A}\psi_\nu$  est aussi un vecteur propre, associé à la valeur propre  $e^\theta \tau_\nu > \tau_\nu$ .

Mais comme l'opérateur  $\mathbf{T}$  est borné, il existe nécessairement une valeur propre maximum  $\tau_0$ . Le vecteur propre correspondant  $\psi_0$  est donc tel que

$$\mathbf{A}\psi_0 = 0. \quad (4.39)$$

Explicitant l'équation (4.39), on trouve l'équation différentielle

$$\psi_0'(q) + q\psi_0(q) = 0,$$

dont la solution

$$\psi_0(q) \propto e^{-q^2/2}$$

est bien de carré sommable.

On en déduit que les vecteurs

$$\psi_\nu \propto (\mathbf{A}^\dagger)^\nu \psi_0,$$

dont on vérifie qu'ils sont bien normalisables, sont les vecteurs propres de  $\mathbf{T}$  associés aux valeurs propres

$$\tau_\nu = e^{-\nu\theta} \tau_0.$$

Calculant la trace de  $\mathbf{T}$  de deux façons différentes, on trouve enfin

$$\mathrm{tr} \mathbf{T} = \int dq [\mathbf{T}](q, q) = \frac{1}{2 \sinh(\theta/2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{\nu} = \frac{\tau_0}{1 - e^{-\theta}}.$$

On en déduit les valeurs propres

$$\tau_{\nu} = e^{-(\nu+1/2)\theta}, \quad \nu \geq 0. \quad (4.40)$$

*Opérateur hamiltonien.* L'opérateur

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A} + \frac{1}{2} \quad (4.41)$$

est analogue à l'opérateur hamiltonien de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique (dans un système d'unité où la constante de Planck  $\hbar = 1$  et avec fréquence unité). Il commute avec la matrice de transfert puisque (relations (4.38))

$$\mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A} \mathbf{T} = e^{-\theta} \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A},$$

et a donc les mêmes vecteurs propres. Pour déterminer les valeurs propres correspondantes, on fait agir  $\mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A}$  sur un vecteur propre :

$$\mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A} (\mathbf{A}^{\dagger})^{\nu} \psi_0.$$

Commutant l'opérateur  $\mathbf{A}$  systématiquement avec les opérateurs  $\mathbf{A}^{\dagger}$  placés à sa droite au moyen de la relation (4.37), et utilisant finalement l'équation (4.39), on en déduit

$$\mathbf{H} \psi_{\nu} = (\nu + \frac{1}{2}) \psi_{\nu}. \quad (4.42)$$

De ces valeurs propres, on déduit alors la relation entre matrice de transfert et hamiltonien quantique

$$\mathbf{T} = \exp(-\theta \mathbf{H}). \quad (4.43)$$

Enfin, notons que  $\mathbf{H}$ , exprimé en termes des opérateurs  $\hat{\mathbf{Q}}$  et  $\hat{\mathbf{D}}$ , s'écrit

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{D}}^2 + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{Q}}^2. \quad (4.44)$$

### 4.6.3 Fonction de partition. Fonctions de corrélation

*Fonction de partition.* La fonction de partition peut s'écrire (section 4.1.2) :

$$\mathcal{Z}(n, \theta) = \mathrm{tr} \mathbf{T}^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-n\theta(\nu+1/2)} = \frac{e^{-n\theta/2}}{1 - e^{-n\theta}}. \quad (4.45)$$

*Fonctions de corrélation.* Comme la mesure est gaussienne, il suffit de calculer les fonctions à un et deux points, les autres s'obtenant par le théorème de Wick.

Le calcul explicite repose sur quelques identités simples. D'abord, utilisant les relations de commutation (4.38) et la cyclicité de la trace, on trouve

$$\mathrm{tr} \mathbf{T}^n \mathbf{A}^m = \mathrm{tr} \mathbf{T}^n \mathbf{A}^{\dagger m} = 0 \quad \text{pour } m > 0.$$

Avec les mêmes ingrédients, on obtient

$$\mathrm{tr} \mathbf{A} \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{T}^n = e^{n\theta} \mathrm{tr} \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A} \mathbf{T}^n.$$

La relation de commutation (4.37) permet alors d'en déduire

$$\mathrm{tr} \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A} \mathbf{T}^n = \frac{2}{e^{n\theta} - 1} \mathrm{tr} \mathbf{T}^n.$$

*Fonction à un point.* La relation (4.36) entraîne que la fonction à un point est proportionnelle à

$$\mathrm{tr} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^n \propto \mathrm{tr} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\dagger}) \mathbf{T}^n = 0.$$

C'est un résultat qui découle, en fait, directement de la symétrie  $[\mathbf{T}](q, q') = [\mathbf{T}](-q, -q')$ .

*Fonction à deux points.* La fonction à deux points est donnée par (équation (4.15))

$$\langle q_0 q_\ell \rangle_n = \mathrm{tr} \mathbf{T}^{n-|\ell|} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{|\ell|} \hat{\mathbf{Q}} / \mathrm{tr} \mathbf{T}^n.$$

Utilisant l'équation (4.45), la relation (4.36) et les relations de commutation (4.38), on obtient le résultat explicite

$$\langle q_0 q_\ell \rangle_n = \frac{1}{2} \frac{\cosh((n/2 - |\ell|)\theta)}{\sinh(n\theta/2)}. \quad (4.46)$$

*Limite thermodynamique.* Dans la limite thermodynamique  $n \rightarrow \infty$  (cf. section 4.3), la fonction de partition (4.45) se comporte comme

$$\mathcal{Z}(n, \theta) \sim e^{-n\theta/2},$$

et donc la densité d'énergie libre (définie par l'équation (4.18))  $\mathcal{W}/n$  a une limite finie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{W} \equiv \frac{T}{n} \ln \mathcal{Z} = -T \frac{\theta}{2}.$$

Dans la limite de basse température  $T \rightarrow 0$ , la relation (4.27) entraînent  $\theta \sim \omega \sqrt{T/J}$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{W} \sim -\frac{1}{2} \omega T \sqrt{T/J}.$$

De même, la fonction à deux points devient

$$\langle q_0 q_\ell \rangle = \frac{1}{2} e^{-\theta|\ell|}. \quad (4.47)$$

*Comportement à grande distance.* L'expression (4.47) montre que la fonction à deux points décroît exponentiellement à grande distance. On caractérise cette décroissance par la *longueur de corrélation* (définie en (4.21))

$$\xi = \lim_{\ell \rightarrow \infty} -\frac{\ell}{\ln(|\langle q_0 q_\ell \rangle|)} = \frac{1}{\ln(\tau_0/\tau_1)} = \frac{1}{\theta},$$

en accord avec le résultat général (4.22) et le spectre (4.40). Pour  $T \rightarrow 0$ , c'est-à-dire à basse température,

$$\xi = \frac{1}{\theta} \sim \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{J}{T}}$$

et donc la longueur de corrélation diverge.

Par ailleurs,

$$\sum_{\ell} \langle q_0 q_\ell \rangle = \frac{1}{2 \tanh(\theta/2)},$$

et donc la distribution  $R_n(Q)$  de la variable moyenne  $Q = \sum_{\ell} q_\ell / n$  tend vers la gaussienne (section 4.4.1)

$$R_n(Q) \sim \sqrt{n \tanh(\theta/2)/\pi} e^{-n \tanh(\theta/2) Q^2}.$$

## 4.7 Modèle gaussien : limite continue

Puisque pour  $\theta \rightarrow 0$  la longueur de corrélation diverge, nous introduisons la longueur macroscopique  $\beta = n\theta$  et prenons la limite  $n \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$  à  $n\theta = \beta$  fixé. Ceci correspond à fixer la longueur du système en unités de longueur de corrélation, en effet  $n \sim \beta\xi$ . Cette limite est appelée limite continue, dans la mesure où pour les quantités définies à l'échelle de la longueur de corrélation, toute trace du réseau initial a disparu.

En réalité, dans le modèle gaussien toutes les fonctions ont déjà sur le réseau leur forme du continu. Ainsi, de l'équation (4.45) on déduit

$$\mathcal{Z}(n, \theta) = \mathcal{Z}(\beta) \equiv \frac{e^{-\beta/2}}{1 - e^{-\beta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0, n\theta = \beta \text{ fixé}} \mathcal{Z}(n, \theta). \quad (4.48)$$

### 4.7.1 Limite continue et hamiltonien quantique

La relation (4.43) entre l'opérateur hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique (4.44) et la matrice de transfert montre de même que

$$\mathbf{T}^n = e^{-\beta \mathbf{H}} = \lim_{\theta \rightarrow 0, n\theta = \beta \text{ fixé}} \mathbf{T}^n.$$

La fonction de partition dans la limite continue s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{tr} e^{-\beta \mathbf{H}}. \quad (4.49)$$

De façon assez remarquable, la fonction  $\text{tr} e^{-\beta \mathbf{H}}$ , qui coïncide avec la limite continue de la fonction de partition classique, est aussi la fonction de partition quantique associée à l'opérateur hamiltonien  $\mathbf{H}$ . Dans l'interprétation quantique,  $\beta$  devient l'inverse de la température dans un système d'unités où la constante de Boltzmann  $k_B = 1$  et la constante de Planck  $\hbar$  est aussi égale à 1.

Enfin, en terme de la variable de position macroscopique  $t = \ell\theta$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ , la fonction à deux points (4.46) s'écrit

$$\langle q(0)q(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\cosh(\beta/2 - |t|)}{\sinh(\beta/2)}. \quad (4.50)$$

Elle est donc égale à sa limite quand  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\ell \rightarrow \infty$  avec  $t = \ell\theta$  fixé, une limite qui correspond de nouveau à fixer la distance entre les deux points en unités de longueur de corrélation :  $\ell \sim t\xi$ .

Ainsi, fonction de partition et fonctions de corrélation ont une limite dans laquelle toute trace du réseau initial a disparu, appelée donc limite continue. Une telle limite continue n'a pu être définie que parce qu'il existe une limite dans laquelle la longueur de corrélation tend vers l'infini.

Enfin, dans la limite continue, la matrice de transfert, exprimée en terme de l'hamiltonien quantique,  $T(\beta) = e^{-\beta \mathbf{H}}$ , a une interprétation quantique : elle est la matrice densité à l'équilibre thermique à la température  $1/\beta$  qui sert à calculer les valeurs moyennes thermiques. L'équation

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{T}(\beta) = -\mathbf{H} \mathbf{T}(\beta),$$

écrite en termes de noyaux dans la représentation où l'opérateur  $\hat{\mathbf{Q}}$  (l'opérateur position de la mécanique quantique) agit par multiplication, prend la forme d'une équation aux dérivées partielles (cf. équation (4.44)) :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [\mathbf{T}(\beta)](q, q') = -\frac{1}{2} \left( -\frac{\partial^2}{(\partial q)^2} + q^2 \right) [\mathbf{T}(\beta)](q, q') \quad (4.51)$$

avec la condition aux limites

$$[\mathbf{T}(0)](q, q') = \delta(q - q').$$

C'est une équation de Schrödinger en « temps » imaginaire (en fait une équation de type diffusion ou chaleur).

*Divergence de la longueur de corrélation et limite continue.* Nous venons de mettre en évidence le premier exemple de limite *continue* associée à la divergence de la longueur de corrélation. L'existence d'une limite continue implique des propriétés d'universalité. Dans la limite  $\theta \rightarrow 0$  (ici basse température), les propriétés macroscopiques du modèle statistique sont indépendantes de la forme détaillée de la matrice de transfert. Nous aurions pu compliquer quelque

peu l'interaction de proches voisins et la distribution en chaque site et obtenir la même limite continue. Enfin, le résultat s'exprime en fonction de la solution d'une équation de diffusion dans l'espace continu dans laquelle toute trace du réseau initial a disparu.

*Limite thermodynamique.* Dans la limite continue, la limite  $\beta \rightarrow \infty$  correspond à la limite thermodynamique du modèle statistique classique et donc

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta) = -\frac{1}{2}.$$

C'est aussi la limite de température nulle du modèle quantique. Dans cette limite, la fonction de partition quantique est dominée par la valeur propre la plus petite, c'est-à-dire l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien quantique. L'étude de la limite thermodynamique du système classique est donc reliée à l'étude du fondamental du système quantique.

Dans cette limite, la fonction à deux points se réduit à

$$\langle q(t)q(0) \rangle = \frac{1}{2} e^{-|t|}. \quad (4.52)$$

*Mécaniques statistiques classique et quantique.* Nous avons trouvé, dans la limite continue, une relation entre mécanique statistique quantique à zéro dimension (une seule particule) et mécanique statistique classique à une dimension. En effet, dans la limite  $\theta \rightarrow 0$ ,  $n\theta = \beta$  fixé, la fonction de partition classique tend, à une normalisation triviale près, vers la fonction de partition d'une particule quantique. Ce type de relation n'est pas particulier à l'exemple gaussien, s'étend à certaines fonctions de corrélation et se généralise aux dimensions supérieures : la mécanique statistique quantique à  $d-1$  dimensions d'espace a des liens, dans la limite de basse température, avec la mécanique statistique classique à  $d$  dimensions. Ainsi, dans cet ouvrage, nous nous intéressons surtout à la mécanique statistique classique, mais son étude dans la limite continue conduit à des résultats transposables à la théorie quantique.

#### 4.7.2 Décimation et limite continue

Considérons de nouveau la matrice de transfert  $[\mathbf{T}](q, q')$  (équation (4.32)). De la représentation (4.43), on déduit

$$\mathbf{T}(\theta)\mathbf{T}(\theta') = \mathbf{T}(\theta + \theta'),$$

où  $\mathbf{T}(\theta)$  est l'opérateur de noyau  $[\mathbf{T}](q, q')$  et paramètre  $\theta$ , un résultat qu'on peut aussi vérifier directement par calcul explicite.

Pour calculer la fonction de partition, on peut alors utiliser une méthode dite de décimation qui consiste à regrouper les sites du réseau deux par deux de façon itérative. C'est l'analogue, pour ce problème, des transformations discutées en section 3.2. Ceci induit sur toute matrice de transfert, la transformation

$$\mathbf{T} \mapsto \mathbf{T}^2.$$

Dans le cas gaussien, puisque

$$\mathbf{T}^2(\theta) = \mathbf{T}(2\theta),$$

le paramètre  $\theta$  se transforme en  $2\theta$  et l'itération de la transformation conduit donc à la suite  $\mathbf{T}_m(\theta) = \mathbf{T}(2^m\theta)$ .

Un point fixe doit satisfaire

$$\mathbf{T}(2\theta) = \mathbf{T}(\theta),$$

ce qui n'a que la solution  $\theta = 0$  et donc  $\mathbf{T} = \mathbf{1}$  (laissant de côté le point fixe de sites indépendants  $\theta = \infty$  avec longueur de corrélation nulle). C'est la situation limite de température nulle où toutes les variables aléatoires sont égales et la longueur de corrélation infinie, que nous avons discutée dans l'exemple (iii) de la section 4.5.

Notons maintenant que pour  $\theta > 0$  la longueur de corrélation, qui est finie, est divisée par deux à chaque itération et tend donc vers zéro. Les itérations éloignent du point fixe qui correspond à une longueur de corrélation infinie et le paramètre  $\theta$  est donc associé à une direction d'instabilité, c'est-à-dire à une perturbation essentielle.

Cependant, une universalité réduite au seul point  $\theta = 0$  est d'un intérêt physique limité. Or nous avons montré qu'il existait une limite continue possédant des propriétés d'universalité. Montrons comment retrouver, dans ce contexte, cette universalité asymptotique dans le voisinage d'un point fixe, ici pour  $0 < \theta \ll 1$ , par une démarche qui va jouer un rôle important dans la suite de cet ouvrage.

L'idée est d'itérer la transformation  $m$  fois tel que  $2^m \gg 1$ , mais  $2^m\theta \ll 1$ , c'est-à-dire que la longueur de corrélation après  $m$  itérations soit encore grande par rapport à la maille du réseau. Une façon de réaliser cette situation est de diviser  $\theta$  par deux à chaque itération et donc de multiplier par deux la longueur de corrélation initiale. Ceci correspond à la transformation combinée

$$\mathbf{T}_m(\theta) \mapsto \mathbf{T}_{m+1}(\theta) = \mathbf{T}_m^2(\theta/2), \quad (4.53)$$

et donc  $\mathbf{T}_m(\theta) = \mathbf{T}(\theta)$ .

Cette transformation est telle que la longueur de corrélation du système transformé reste constante, mais diverge dans l'échelle du réseau initial.

Dans le modèle gaussien, la transformation (4.53) est une identité. Ceci reflète la propriété que même sur le réseau, dans ce modèle, les perturbations inessentiels sont absentes.

Cette façon d'ajuster l'amplitude initiale d'une perturbation essentielle de telle sorte que l'amplitude itérée reste finie, a un analogue en théorie statistique ou quantique des champs, où elle prend la forme d'une renormalisation de masse. L'équivalent de l'universalité asymptotique que nous venons de définir sera alors l'universalité dans le domaine critique (*cf.* section 9.4.4).

## 4.8 Modèles plus généraux : limite continue

Les résultats obtenus dans le cas gaussien se généralisent à la classe particulière des fonctions (dans la représentation (4.4))

$$S(q', q) = (q - q')^2 / 2\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon V(q) + \frac{1}{2}\varepsilon V(q'), \quad (4.54)$$

où  $V(q) \geq 0$  est, par exemple, un polynôme et le paramètre  $\varepsilon$ , qui joue le rôle de  $\sqrt{T}$  dans l'exemple gaussien, tend vers zéro.

Nous définissons la matrice de transfert par

$$[\mathbf{T}](q', q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-S(q', q)}. \quad (4.55)$$

La fonction de partition (toujours avec conditions aux limites périodiques  $q_0 = q_n$ ) est donnée par

$$\mathcal{Z}_n(\varepsilon) = \text{tr } \mathbf{T}^n.$$

En utilisant, en particulier, l'identité (4.33), on peut montrer que l'opérateur  $\mathbf{T}$  peut aussi s'exprimer en terme des opérateurs (4.12, 4.34). On trouve

$$\mathbf{T} = e^{-\varepsilon V(\hat{\mathbf{Q}})/2} e^{\varepsilon \hat{\mathbf{D}}^2/2} e^{-\varepsilon V(\hat{\mathbf{Q}})/2},$$

où encore

$$\mathbf{T} = \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger, \quad \mathbf{U} = e^{-\varepsilon V(\hat{\mathbf{Q}})/2} e^{\varepsilon \hat{\mathbf{D}}^2/4},$$

ce qui montre aussi que l'opérateur  $\mathbf{T}$  est positif.

La trace de  $\mathbf{T}$  est finie si  $V(q)$  tend vers l'infini assez vite pour  $|q| \rightarrow \infty$ . En effet,

$$\text{tr } \mathbf{T} = \int dq [\mathbf{T}](q, q) = \int dq e^{-\varepsilon V(q)}.$$

Donc la somme des valeurs propres  $\tau_k$  de  $\mathbf{T}$  (qui sont positives) est bornée,

$$\text{tr } \mathbf{T} = \sum_k \tau_k < \infty \Rightarrow \tau_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui entraîne que les valeurs propres s'accumulent à zéro.

*Limite continue*  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Puisque  $\mathbf{T}$  est positif, on peut définir l'opérateur hermitien  $\ln \mathbf{T}$  (il a les mêmes vecteurs propres que  $\mathbf{T}$  et comme valeurs propres  $\ln \tau_k$ ).

Pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{T}$  tend vers l'opérateur identité, et donc  $\ln \mathbf{T} \rightarrow 0$ . Pour obtenir le comportement dominant de  $\ln \mathbf{T}$ , il suffit d'estimer  $\mathbf{T} - \mathbf{1}$ . Développant le produit, on trouve

$$\mathbf{T} - \mathbf{1} = -\varepsilon \left[ -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{D}}^2 + V(\hat{\mathbf{Q}}) \right] + O(\varepsilon^2). \quad (4.56)$$

On en déduit

$$\mathbf{H} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \ln \mathbf{T} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{D}}^2 + V(\hat{\mathbf{Q}}) \Rightarrow \mathbf{T} = e^{-\varepsilon \mathbf{H} + O(\varepsilon^2)}.$$

L'opérateur  $\mathbf{H}$  est l'hamiltonien quantique d'une particule de masse unité, soumise au potentiel  $V(q)$  (dans un système d'unité où  $\hbar = 1$ ). Dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $n\varepsilon = \beta$  fixé, on trouve donc

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{tr } e^{-\beta \mathbf{H}}.$$

De nouveau, la fonction de partition classique, dans la limite continue, tend vers la fonction de partition quantique d'un système à une seule particule. Dans la limite thermodynamique,

$$W = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta) = -E_0,$$

et donc la densité d'énergie libre classique est proportionnelle à l'énergie  $E_0$  du fondamental quantique.

Cette limite continue est associée à la divergence de la longueur de corrélation  $\xi$ . En effet

$$\xi^{-1} = \ln(\tau_0/\tau_1) \sim \varepsilon(E_1 - E_0),$$

où  $E_0 < E_1$  sont les deux valeurs propres les plus petites de  $\mathbf{H}$ .

De nouveau, la limite continue peut être atteinte par une généralisation de la transformation (4.53) utilisée dans le cas gaussien. Le choix naturel ici est

$$\mathbf{T}_m(\varepsilon) \mapsto \mathbf{T}_{m+1}(\varepsilon) = \mathbf{T}_m^2(\varepsilon/2), \quad \mathbf{T}_0(\varepsilon) = \mathbf{T}(\varepsilon),$$

qui, asymptotiquement, correspond à une longueur de corrélation constante dans le modèle transformé. Techniquement, cette transformation correspond aussi à la formule de Trotter  $e^{\mathbf{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\mathbf{A}/m})^m$ . L'itération de cette transformation supprime les corrections inessentiels puisque dans le développement de  $\ln \mathbf{T}$  en puissances de  $\varepsilon$ , les coefficients des termes de degré supérieur à un tendent tous vers zéro :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{T}_m(\varepsilon) = e^{-\varepsilon \mathbf{H}}.$$

Enfin, nous aurions pu construire une matrice de transfert sans corrections inessentiels, comme dans le cas gaussien, en résolvant l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{T}(\varepsilon) = -\mathbf{H} \mathbf{T}(\varepsilon),$$

qui en termes de noyau s'exprime comme une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\mathbf{T}(\varepsilon)](q, q') = - \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial q)^2} + V(q) \right) [\mathbf{T}(\varepsilon)](q, q').$$

Soulignons que puisqu'à chaque hamiltonien quantique est associée une limite continue, le point fixe  $\mathbf{T} = \mathbf{1}$  a un nombre infini de perturbations essentielles.

## Exercices

**Exercice 4.1.** *Le segment.* Nous considérons une fonction  $S(q - q')$  (équation (4.4)) de la forme

$$S(q, q') = |q - q'|/T,$$

où  $q$  varie sur le segment  $[-1, 1]$  et  $T$  un paramètre positif qui, du point de vue physique, s'interprète comme la température.

Les vecteurs propres  $\psi(q)$  de la matrice de transfert correspondant à une valeur  $\tau$  satisfont alors

$$\int_{-1}^{+1} dq' e^{-|q-q'|/T} \psi(q') = \tau \psi(q). \quad (4.57)$$

(i) Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de transfert. On pourra penser à dériver l'équation.

(ii) En déduire la longueur de corrélation. Que peut-on dire de la limite  $T \rightarrow 0$  ?

*Solution.* Les vecteurs propres sont des fonctions paires ou impaires.

Dérivant une première fois l'équation (4.57), on trouve

$$\int_{-1}^{+1} dq' \operatorname{sgn}(q' - q) e^{-|q-q'|/T} \psi(q') = T\tau\psi'(q),$$

où  $\operatorname{sgn}(q)$  est la fonction signe de  $q$  :  $\operatorname{sgn}(q > 0) = 1$ ,  $\operatorname{sgn}(q < 0) = -1$ .

Pour  $q = \pm 1$ , on peut relier les valeurs de la dérivée et de la fonction. On trouve

$$q = 1 : \quad \psi(1) = -T\psi'(1), \quad q = -1 : \quad \psi(-1) = T\psi'(-1). \quad (4.58)$$

Dérivant à nouveau et utilisant l'équation (4.57), on obtient l'équation différentielle

$$-2T\psi(q) + \tau\psi(q) = \tau T^2\psi''(q).$$

Il est commode de poser

$$k^2 = \frac{2}{T\tau} - \frac{1}{T^2} \Rightarrow \tau = \frac{2T}{1 + k^2T^2}.$$

Les solutions satisfaisant aux conditions aux limites (4.58) sont

$$\begin{aligned} \psi_+(q) &= \cos kq \quad \text{avec} \quad kT \tan k = 1, \\ \psi_-(q) &= \sin kq \quad \text{avec} \quad \tan k = -kT. \end{aligned}$$

Combinant les deux équations, on trouve la condition spectrale

$$\tan(2k) = -\frac{2kT}{1 - k^2T^2}.$$

La situation intéressante est  $T \rightarrow 0$  où les corrélations sont les plus grandes. Alors ( $m$  entier positif),

$$k = \frac{1}{2}m\pi(1 - T) + O(T^2), \quad m > 0, \Rightarrow \tau_{m-1} = \frac{2T}{1 + T^2 m^2 \pi^2 / 4} + O(T^4).$$

On en déduit la longueur de corrélation

$$\xi \sim \frac{1}{\ln(\tau_0/\tau_1)} \sim \frac{4}{3\pi^2 T^2}.$$

La longueur de corrélation tend vers l'infini pour  $T \rightarrow 0$ . Le spectre complet de  $-\ln \mathbf{T}$  dans cette limite prend la forme

$$-\ln(\tau_m/2T) \sim (m-1)^2 \pi^2 T^2 / 4.$$

La divergence de la longueur de corrélation permet de définir une limite continue et une intégrale de chemin de type marche au hasard, mais avec des conditions de réflexion sur deux parois situées à  $q = \pm 1$ .

**Exercice 4.2. Le cercle.** Nous considérons maintenant la situation où la variable aléatoire  $q$  appartient à un cercle de rayon 1 et la matrice de transfert est une fonction périodique définie par

$$S(q, q') = -\cos(q - q')/T.$$

- (i) Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de transfert.
- (ii) En déduire la longueur de corrélation. Que peut-t-on dire de la limite  $T \rightarrow 0$  ?
- (iii) Dans ce contexte, il n'est pas naturel de considérer les fonctions de corrélation de la variable  $q$  qui n'est définie que modulo  $2\pi$ . On calculera donc les valeurs moyennes des produits de fonctions périodiques  $e^{\pm i q_\ell}$  pour un ou deux points, d'abord à taille finie, ensuite dans la limite thermodynamique.

*Solution.* Les fonctions propres sont de la forme  $e^{i\nu q} / \sqrt{2\pi}$  avec  $\nu$  entier. En effet, ces fonctions diagonalisent la matrice de transfert :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dq dq' e^{i\nu q - i\nu' q'} e^{\cos(q-q')/T} = \delta_{\nu\nu'} \int_{-\pi}^{+\pi} dq e^{i\nu q} e^{\cos q/T},$$

et donc les valeurs propres sont

$$\tau_\nu = \tau_{-\nu} = \int_{-\pi}^{+\pi} dq e^{i\nu q} e^{\cos q/T} = 2\pi I_\nu(1/T).$$

La matrice de transfert peut alors s'écrire

$$[\mathbf{T}](q, q') = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu} \tau_\nu e^{i\nu(q-q')}.$$

Dans la limite  $T \rightarrow 0$ , les valeurs propres peuvent être calculées par la méthode du col. On trouve (cf. exercice 2.4)

$$\tau_\nu = \sqrt{2\pi T} e^{1/T} \left( e^{-T(\nu^2 - 1/4)/2} + O(T^2) \right) = \tau_0 \left( e^{-T\nu^2/2} + O(T^2) \right).$$

(ii) Dans la limite de basse température  $T \rightarrow 0$ , la longueur de corrélation (équation (4.22)),

$$\xi \sim \frac{1}{\ln(\tau_0/\tau_1)} \sim \frac{2}{T}$$

diverge. On peut alors définir une limite continue qui correspond aussi au mouvement brownien sur le cercle.

Enfin, notons que le spectre asymptotique est le spectre exact d'une autre matrice de transfert sur le cercle qui peut s'écrire

$$[\mathbf{T}](q, q') = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(q - q' + 2m\pi)^2/2T}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} dq e^{i\nu q} [\mathbf{T}](q, 0) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} dq e^{i\nu q - q^2/2T} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{i\nu q - q^2/2T} = \sqrt{2\pi T} e^{-T\nu^2/2}. \end{aligned}$$

(iii) L'invariance par translation implique d'une part

$$\langle e^{\pm i q \ell} \rangle = 0$$

et d'autre part que la seule fonction à deux points non nulle est  $\langle e^{i q \ell_1} e^{-i q \ell_2} \rangle$ . Utilisant l'expression (4.15), on trouve ( $\ell = |\ell_1 - \ell_2|$ )

$$\begin{aligned} Z_n^{(2)}(\ell) &= Z_n^{-1} \text{tr} e^{i\hat{\mathbf{Q}}} \mathbf{T}^\ell e^{-i\hat{\mathbf{Q}}} \mathbf{T}^{n-\ell} \\ &= Z_n^{-1} \frac{1}{4\pi^2} \int dq dq' \sum_{\nu, \nu'} \tau_{\nu'}^{n-\ell} e^{i\nu'(q-q')} e^{iq} \tau_\nu^\ell e^{i\nu(q'-q)} e^{-iq'} \\ &= Z_n^{-1} \sum_\nu \tau_{\nu-1}^{n-\ell} \tau_\nu^\ell. \end{aligned}$$

Dans la limite thermodynamique,

$$Z^{(2)}(\ell) = (\tau_1/\tau_0)^\ell = e^{-\ell/\xi}.$$

**Exercice 4.3.** *Le modèle d'Ising : une dimension.* Dans le cas du modèle d'Ising à une dimension avec interaction de proches voisins, et en présence d'un champ magnétique  $h$ , la fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z}_\ell = \sum_{\{S_i = \pm 1\}} \exp[-\beta \mathcal{E}(S)], \quad (4.59)$$

avec l'énergie d'interaction

$$\mathcal{E}(S) = - \sum_{i=1}^{\ell} JS_i S_{i+1} - hS_i, \quad J > 0. \quad (4.60)$$

Résoudre ce modèle par la méthode de la matrice de transfert. Calculer l'énergie libre et la longueur de corrélation.

*Solution.* La matrice de transfert est une matrice  $2 \times 2$  qui peut être écrite

$$[\mathbf{T}](S', S) = \exp \left[ \beta (JS S' + \frac{1}{2}h(S + S')) \right], \quad (4.61)$$

où les éléments de matrice correspondent aux valeurs  $\pm 1$  de  $S$  et  $S'$ .

La limite thermodynamique correspond à faire tendre  $\ell$  vers l'infini. La fonction de partition est reliée à la plus grande valeur propre de la matrice de transfert. Les deux valeurs propres sont

$$\tau_{\pm} = e^{\beta J} \left[ \cosh(\beta h) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}} \right].$$

La densité d'énergie libre est donc

$$W = \beta J + \ln \left[ \cosh(\beta h) + \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}} \right].$$

La longueur de corrélation est elle liée au rapport des deux valeurs propres (les plus grandes, mais il n'y a que deux)

$$\xi^{-1} = \ln(\tau_+/\tau_-) = 2 \tanh^{-1} \left[ \frac{(\sinh^2 \beta h + e^{-4\beta J})^{1/2}}{\cosh \beta h} \right]. \quad (4.62)$$

La longueur de corrélation ne diverge qu'en champ nul, à température nulle :  $\xi(\beta, h=0) \propto e^{4\beta J}$ .

**Exercice 4.4.** *Le modèle  $O(\nu)$  : une dimension.* Dans le cas du modèle de spins avec symétrie  $O(\nu)$  et interaction de proches voisins, la fonction de partition à une dimension peut s'écrire

$$Z_{\ell} = \int \prod_i d\mathbf{S}_i \delta(\mathbf{S}_i^2 - 1) \exp[-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S})], \quad (4.63)$$

( $\mathbf{S}$  appartient à la sphère  $S_{\nu-1}$ ) avec une énergie d'interaction

$$\mathcal{E}(\mathbf{S}) = -J \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}, \quad J > 0. \quad (4.64)$$

Trouver les deux valeurs propres dominantes de la matrice de transfert à basse température.

*Solution.* La matrice de transfert correspond maintenant au noyau (posant  $v = \beta J$ )

$$[\mathbf{T}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = e^{v \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}'},$$

avec comme mesure d'intégration la mesure uniforme sur la sphère  $\mathbf{S}^2 = 1$ .

Pour toute matrice de transfert fonction uniquement du produit scalaire  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}'$ , les vecteurs propres se déduisent de considérations purement géométriques. Ils sont liés aux représentations irréductibles du groupe  $O(\nu)$  qui sont des tenseurs symétriques avec toutes les traces partielles nulles construits avec le vecteur  $\mathbf{S}$ . Le vecteur propre correspondant à la valeur la plus grande est invariant par le groupe  $O(\nu)$  et est donc une constante. La valeur propre correspondante est

$$\tau_0 = \frac{2\pi^{\nu/2-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu-1))} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{\nu-2} e^{v \cos \theta} = (2\pi)^{\nu/2} v^{1-\nu/2} I_{\nu/2-1}(v),$$

où  $\cos \theta = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}'$  et  $I_\nu(v)$  est une fonction de Bessel modifiée (généralisée à  $\nu$  non entier).

Pour  $v \rightarrow \infty$ , cette intégrale s'évalue par la méthode du col légèrement adaptée (exercices 2.4, 2.8). On trouve

$$\tau_0(v) \sim \left(\frac{2\pi}{v}\right)^{(\nu-1)/2} e^v \left[1 - \frac{1}{8}(\nu-1)(\nu-3)/v + O(1/v^2)\right].$$

La seconde valeur propre correspond à un vecteur propre proportionnel au vecteur  $\mathbf{S}$ . On en déduit la valeur propre

$$\begin{aligned} \tau_1(v) &= \frac{2\pi^{\nu/2-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu-1))} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{\nu-2} \cos \theta e^{v \cos \theta} = \tau'_0(v) \\ &= \tau_0 \left[1 - \frac{1}{2}(\nu-1)/v + O(1/v^2)\right]. \end{aligned}$$

Cela permet d'obtenir le comportement de la longueur de corrélation :

$$\xi \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \frac{v}{2(\nu-1)}.$$

**Exercice 4.5. Modèle gaussien.** Dans le cas du modèle gaussien, la fonction de partition est donnée par une intégrale gaussienne qui peut donc être calculée directement. Pour ce calcul, il est suggéré de commencer par trouver les valeurs propres de la matrice associée à la forme quadratique (4.28).

*Solution.* L'intégrale (4.31) est gaussienne. Appelant  $\Lambda_{ij}$  la matrice telle que l'expression (4.28) s'écrive

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{2 \sinh \theta} \sum_{i,j=1}^n \Lambda_{ij} q_i q_j,$$

on trouve

$$\mathcal{Z}(n, \theta) = (\det \Lambda)^{-1/2}.$$

On peut calculer le déterminant comme produit des valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $\Lambda$ . L'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\sum_{k=1}^n \Lambda_{jk} q_k = \sinh \theta \frac{\partial \mathcal{S}_n}{\partial q_j} \equiv 2 \cosh \theta q_j - q_{j+1} - q_{j-1} = \lambda q_j,$$

avec la condition  $q_n = q_0$ . À cause de la symétrie de translation sur le réseau avec conditions aux limites périodiques, les vecteurs propres sont de la forme  $q_i = r^i$  où la constante  $r$  satisfait  $r^n = 1$  et

$$\lambda = 2 \cosh \theta - r - r^{-1}.$$

Le paramètre  $r$  est une racine de l'unité,  $r = e^{2i\pi\ell/n}$ , et donc

$$\lambda = 2(\cosh \theta - \cos(2\pi\ell/n)), \quad 0 \leq \ell < n.$$

On en déduit la fonction de partition

$$\mathcal{Z}(n, \theta) = \left[ \prod_{\ell=0}^{n-1} 2(\cosh \theta - \cos(2\pi\ell/n)) \right]^{-1/2}. \quad (4.65)$$

Il est possible de calculer le produit explicitement. Utilisant la paramétrisation (4.27), on trouve l'identité

$$\prod_{\ell=0}^{n-1} 2(\cosh \theta - \cos(2\pi\ell/n)) = 2(\cosh n\theta - 1) = 4 \sinh^2(n\theta/2).$$

(On compare les racines et la normalisation des deux polynômes dans la variable  $\cosh \theta$ .) On retrouve alors la forme explicite (4.45) de  $\mathcal{Z}(n, \theta)$ .

# Chapitre 5

## Limite continue et intégrale de chemin

Nous avons étudié au chapitre 4 des modèles sur réseau à une dimension. Nous avons montré, en section 4.7, dans le cadre du modèle gaussien, que dans la limite où la longueur de corrélation diverge, il est possible de définir une limite continue à condition de ne considérer que des quantités définies à une échelle de distance proportionnelle à la longueur de corrélation. Les quantités caractéristiques de la limite continue peuvent alors être calculées dans un formalisme de type mécanique quantique, dans lequel toute trace de la structure du réseau initial a disparu.

Par exemple, la fonction de partition associée à la fonction (4.28) converge, dans la limite  $\theta \rightarrow 0$ ,  $n\theta = \beta$  fixé, vers une fonction de partition quantique.

Enfin, nous avons montré que l'exemple gaussien peut être généralisé et que pour toute une classe de matrices de transfert une limite continue peut être définie. Cette limite continue a également une interprétation en terme de fonction de partition quantique.

Nous montrons maintenant que, comme dans le cas de la marche au hasard, on peut associer à la limite continue une intégrale de chemin qui généralise l'intégrale de chemin (3.62) du mouvement brownien. Nous étudions d'abord l'exemple gaussien qui est plus simple, et ensuite le cas général. Il n'est cependant pas dans l'esprit de cet ouvrage de discuter de façon détaillée les intégrales de chemin, et le lecteur intéressé est renvoyé à la littérature spécialisée.

### 5.1 Intégrale de chemin gaussienne

La fonction de partition du modèle gaussien sur un réseau unidimensionnel de longueur  $n$ , avec condition aux limites périodiques, peut s'écrire

(équation (4.31))

$$\mathcal{Z}(n, \theta) = \int \prod_{k=1}^n \frac{dq_k}{\sqrt{2\pi \sinh \theta}} \exp[-\mathcal{S}(n, \theta, \mathbf{q})]$$

( $q_n = q_0$ ) avec

$$\mathcal{S}(n, \theta, \mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n S(q_k, q_{k-1}), \quad (5.1)$$

et (équation (4.29))

$$S(q, q') = \frac{1}{2 \sinh \theta} [(q^2 + q'^2) \cosh \theta - 2qq']. \quad (5.2)$$

Dans la même limite  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{S}(n, \theta, \mathbf{q})$  se réduit à

$$\mathcal{S}(n, \theta, \mathbf{q}) \sim \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{2\theta} + \frac{\theta}{2} q_k^2 \right].$$

On associe alors aux positions  $k$  sur le réseau, les valeurs d'une coordonnée continue  $t$  avec

$$t_k = k\theta, \quad t_n = n\theta = \beta.$$

Remarquons que si  $\theta \rightarrow 0$  à  $t = k\theta$  fixé, alors  $k$  est proportionnel à  $\xi = 1/\theta$ , c'est-à-dire que les positions  $t_k$  sur le réseau sont proportionnelles à la longueur de corrélation.

On introduit aussi la fonction

$$q(t) = q_{k-1} + (q_k - q_{k-1}) (t - t_{k-1})/\theta \quad \text{pour } t_{k-1} \leq t \leq t_k,$$

qui interpole linéairement entre les points  $q_k$ , comme dans l'exemple de la figure 3.1.

Les deux identités suivantes :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\theta} = \frac{1}{2} \int_0^\beta dt \dot{q}^2(t),$$

ainsi que, pour  $\theta \rightarrow 0$ ,

$$\theta \sum_{k=1}^n q_k^2 \sim \int_0^\beta dt q^2(t),$$

permettent de prendre la limite formelle du continu,  $\theta \rightarrow 0$ ,  $n\theta = \beta$  fixé. On trouve alors

$$\mathcal{S}_0(q) = \lim_{\theta \rightarrow 0, n\theta = \beta \text{ fixé}} \mathcal{S}(n, \theta, \mathbf{q}) = \int_0^\beta dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) \right]. \quad (5.3)$$

La fonction de partition est alors donnée par l'intégrale de chemin gaussienne

$$\mathcal{Z}_0(\beta) = \lim_{\theta \rightarrow 0, n\theta = \beta \text{ fixé}} \mathcal{Z}(n, \theta) = \int [dq(t)] \exp[-\mathcal{S}_0(q)] \quad (5.4)$$

avec  $q(0) = q(\beta)$  (conditions aux limites périodiques), où la notation  $\int [dq(t)]$  signifie somme sur tous les chemins.

La quantité  $\mathcal{S}_0(q)$  qui est proportionnelle à l'action classique d'un oscillateur harmonique en temps imaginaire, est aussi appelée, dans le cadre de la physique quantique, *action euclidienne*. L'intégrale de chemin est aussi directement associée à l'hamiltonien quantique (4.44).

Cette représentation par intégrale de chemin se généralise au noyau associé à l'opérateur statistique  $e^{-\beta \mathbf{H}}$  pour des hamiltoniens quantiques plus généraux du type considéré en section 4.8.

*Remarque.* Ici, comme dans l'exemple de l'intégrale de chemin (3.62), la notation  $\dot{q}$  pourrait laisser supposer que les chemins contribuant à l'intégrale de chemin sont dérivables. Pour les mêmes raisons il n'en est rien. Pour  $\theta \rightarrow 0$ , les chemins typiques qui contribuent satisfont

$$[q(t + \theta) - q(t)]^2 / \theta \underset{\theta \rightarrow 0}{=} O(1),$$

comme les chemins browniens. En particulier,  $[dq(t)]$  ne représente pas une mesure sur les chemins. Le facteur  $\exp[-\frac{1}{2} \int \dot{q}^2]$  fait partie de la mesure et spécifie l'espace des chemins qui contribuent à l'intégrale.

Néanmoins, la notation est utile car les chemins qui donnent les contributions dominantes à l'intégrale de chemin sont dans un voisinage de chemins classiques qui eux sont dérivables.

### 5.1.1 Fonctionnelle génératrice. Dérivée fonctionnelle

Comme dans le cas des variables discrètes, pour discuter les propriétés algébriques des fonctions de corrélation, il est utile d'introduire les concepts de fonctionnelle génératrice, généralisation de la fonction génératrice introduite en section 2.1, et de dérivée fonctionnelle.

*Fonctionnelle génératrice.* Nous introduisons d'abord la notion de fonction génératrice (appelée aussi dans ce contexte fonctionnelle génératrice) des fonctions de corrélations.

Soit  $\{F^{(n)}(t_1, \dots, t_n)\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , une suite de fonctions *symétriques* de leurs arguments. Nous introduisons une nouvelle fonction d'une variable  $f(t)$  et considérons la série formelle en  $f$  suivante :

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n F^{(n)}(t_1, \dots, t_n) f(t_1) \dots f(t_n). \quad (5.5)$$

On appelle  $\mathcal{F}(f)$  fonctionnelle génératrice de la suite des fonctions  $F^{(n)}$ .

En fait, nous admettrons pour les  $F^{(n)}$  plus généralement aussi des distributions. Dans ce cas, la fonction  $f(t)$  doit appartenir à la classe des fonctions test correspondante, et donc être considérée implicitement comme continue ou même indéfiniment différentiable.

Par la suite, nous calculerons des fonctions de corrélation de la forme

$$Z^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \langle q(t_1) \dots q(t_n) \rangle,$$

où  $q(t)$  est la valeur de la fonction aléatoire  $q$  au point  $t$ , et  $\langle \bullet \rangle$  veut dire valeur moyenne. Nous introduirons alors la fonction génératrice des fonctions de corrélation

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n Z^{(n)}(t_1, \dots, t_n) f(t_1) \dots f(t_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n \langle q(t_1) \dots q(t_n) \rangle f(t_1) \dots f(t_n) \\ &= \left\langle \exp \left[ \int dt q(t) f(t) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.6)$$

*Dérivée fonctionnelle.* Pour calculer une fonction  $F^{(n)}$  à partir de  $\mathcal{F}(f)$ , nous avons alors besoin de la notion de *dérivée fonctionnelle*, notée dans cet ouvrage  $\delta/\delta f(t)$ .

La dérivée fonctionnelle est définie par les propriétés qu'elle satisfait aux règles algébriques habituelles de toute dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(t)} [\mathcal{F}_1(f) + \mathcal{F}_2(f)] &= \frac{\delta}{\delta f(t)} \mathcal{F}_1(f) + \frac{\delta}{\delta f(t)} \mathcal{F}_2(f), \\ \frac{\delta}{\delta f(t)} [\mathcal{F}_1(f) \mathcal{F}_2(f)] &= \mathcal{F}_1(f) \frac{\delta}{\delta f(t)} \mathcal{F}_2(f) + \mathcal{F}_2(f) \frac{\delta}{\delta f(t)} \mathcal{F}_1(f) \end{aligned} \quad (5.7)$$

et de plus, pour toute fonction  $G(t)$ ,

$$\frac{\delta}{\delta f(u)} \int dt G(t) f(t) = G(u), \quad (5.8)$$

la dérivée de  $\mathcal{F}(f)$ , par exemple, est

$$\frac{\delta}{\delta f(u)} \mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n F^{(n+1)}(u, t_1, \dots, t_n) f(t_1) \dots f(t_n). \quad (5.9)$$

En dérivant alors  $p$  fois et en prenant la limite  $f \equiv 0$ , on trouve

$$F^{(p)}(t_1, \dots, t_p) = \left\{ \left( \prod_{i=1}^p \frac{\delta}{\delta f(t_i)} \right) \mathcal{F} \right\} \Big|_{f=0}.$$

*Remarque.* Ce formalisme s'étend aussi à la situation où les  $F^{(n)}$  ne sont plus des fonctions mais généralement des distributions. Par exemple,

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta f(u)} f(t) &= \delta(u - t), \\ \frac{\delta}{\delta f(u)} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{\delta}{\delta f(u)} \frac{d}{dt} \int dz \delta(t - z) f(z) \\ &= \frac{d}{dt} \delta(t - u),\end{aligned}$$

où  $\delta(t)$  est la fonction (plus exactement distribution) de Dirac.

Ainsi, il est possible d'obtenir les équations du mouvement classique d'une théorie lagrangienne en annulant la dérivée fonctionnelle de l'action. C'est une manière de rendre algébrique le calcul des variations.

Considérons, par exemple, l'action, intégrale du lagrangien,

$$\mathcal{S}(q) = \int dt \left[ \frac{1}{2} (\dot{q}(t))^2 - V(q(t)) \right].$$

Sa dérivée fonctionnelle est

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta q(\tau)} = \int dt \left[ \dot{q}(t) \frac{d}{dt} \delta(t - \tau) - V'(q(t)) \delta(t - \tau) \right] = -\ddot{q}(\tau) - V'(q(\tau)).$$

L'équation  $\delta \mathcal{S} / \delta q(\tau) = 0$  est donc l'équation du mouvement classique.

### 5.1.2 Fonctions de corrélations gaussiennes

En section 5.1, nous avons introduit la notion formelle d'intégrale de chemin. En section 2.2, nous avons montré que l'intégrale gaussienne avec un terme linéaire était une fonction génératrice de valeurs moyennes de polynômes avec poids gaussien. Nous généralisons maintenant cette méthode à l'intégrale de chemin.

Il est commode de remplacer l'intervalle  $[0, \beta]$  par  $[-\beta/2, \beta/2]$ , ce qui correspond à une simple translation sur le temps,  $t \mapsto t - \beta/2$ , mais ce qui rend la limite thermodynamique plus transparente.

Nous considérons donc l'intégrale de chemin

$$\mathcal{Z}_G(b, \beta) = \int_{q(\beta/2)=q(-\beta/2)} [dq(t)] \exp[-\mathcal{S}_G(q, b)] \quad (5.10)$$

avec

$$\mathcal{S}_G(q, b) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) - b(t)q(t) \right]. \quad (5.11)$$

La fonction  $\mathcal{Z}_G(b, \beta)$  est une fonctionnelle de  $b(t)$ , fonction génératrice des fonctions de corrélation (généralisant la fonction génératrice (2.1)). En effet,

si l'on applique l'identité (la définition de la dérivée fonctionnelle a été donnée en section 5.1.1)

$$\frac{\delta}{\delta b(t_1)} \exp \left[ \int dt b(t) q(t) \right] = q(t_1) \exp \left[ \int dt b(t) q(t) \right],$$

à l'intégrale de chemin (5.10), on obtient

$$\frac{\delta}{\delta b(t_1)} \mathcal{Z}_G(\dot{b}, \beta) = \int [dq] q(t_1) \exp[-\mathcal{S}_G(q, b)],$$

et, plus généralement, par dérivations successives,

$$\prod_{j=1}^p \frac{\delta}{\delta b(t_j)} \mathcal{Z}_G(b, \beta) = \int [dq(t)] \prod_{j=1}^p q(t_j) \exp[-\mathcal{S}_G(q, b)].$$

La limite  $b \equiv 0$  est donc proportionnelle à la fonction à  $p$  points.

### 5.1.3 Calcul de l'intégrale gaussienne

Généralisant le calcul du mouvement brownien, nous montrons maintenant que l'intégrale de chemin gaussienne (5.10) peut être calculée sans faire référence à la limite d'un processus discret, à une normalisation près.

Pour éliminer le terme linéaire en  $q$  dans  $\mathcal{S}_G(q, b)$ , nous faisons le changement de variables (translation pour tout temps  $t$ ) :

$$q(t) \mapsto r(t) = q(t) - q_c(t),$$

où la fonction  $q_c(t)$  satisfait aux conditions aux limites

$$q_c(\beta/2) = q_c(-\beta/2) \Rightarrow r(\beta/2) = r(-\beta/2), \quad (5.12)$$

et va être déterminée ci-dessous. Alors,

$$\mathcal{S}_G(q, b) = \mathcal{S}_0(r) + \mathcal{S}_G(q_c, b) + \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt [\dot{r}(t) \dot{q}_c(t) + r(t) q_c(t) - b(t) r(t)].$$

Nous intégrons par parties le terme linéaire en  $\dot{r}$  :

$$\int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \dot{r}(t) \dot{q}_c(t) = r(\beta/2) \dot{q}_c(\beta/2) - r(-\beta/2) \dot{q}_c(-\beta/2) - \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt r(t) \ddot{q}_c(t).$$

Tenant compte des conditions (5.12), nous notons que le terme linéaire en  $r$  s'annule si la fonction  $q_c(t)$  est la solution de l'équation différentielle

$$-\ddot{q}_c(t) + q_c(t) = b(t),$$

avec les conditions aux limites (5.12) et  $\dot{q}_c(\beta/2) = \dot{q}_c(-\beta/2)$ .

La solution peut s'écrire

$$q_c(t) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \Delta(t-u)b(u)du, \quad (5.13)$$

où la fonction  $\Delta(t)$  est aussi solution de l'équation

$$-\ddot{\Delta}(t) + \Delta(t) = \delta(t)$$

( $\delta$  est la fonction de Dirac) avec les conditions aux limites périodiques

$$\Delta(\beta/2) = \Delta(-\beta/2), \quad \dot{\Delta}(\beta/2) = \dot{\Delta}(-\beta/2).$$

L'équation (5.13) est l'analogue continu de l'équation (2.9) et le noyau  $\Delta(t-u)$  est l'inverse de l'opérateur différentiel  $-\mathrm{d}_t^2 + 1$  avec conditions aux limites périodiques.

La solution de l'équation différentielle est

$$\Delta(t) = \frac{1}{2 \sinh(\beta/2)} \cosh(\beta/2 - |t|), \quad (5.14)$$

où l'on reconnaît la fonction à deux points (4.50).

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_G(q_c, b) &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_c^2(t) + \frac{1}{2} q_c^2(t) - b(t)q_c(t) \right] \\ &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt q_c(t) \left[ -\frac{1}{2} \ddot{q}_c(t) + \frac{1}{2} q_c(t) - b(t) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt q_c(t)b(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt du b(t)\Delta(t-u)b(u). \end{aligned}$$

L'intégrale résiduelle

$$\mathcal{N} = \int_{r(\beta/2)=r(-\beta/2)} [dr(t)] \exp[-\mathcal{S}_0(r)],$$

où  $\mathcal{S}_0$  est la fonction (5.3), ne peut pas être évaluée complètement dans le continu (*cf.* aussi la discussion de la section 3.5). Cependant, nous savons qu'elle ne dépend que de  $\beta$  et est égale à la fonction de partition  $\mathcal{Z}_0(\beta)$  de l'oscillateur harmonique (équations (4.48) et (4.49)). Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_G(b, \beta) &= \mathcal{Z}_0(\beta) e^{-\mathcal{S}_G(q_c, b)} \\ &= \mathcal{Z}_0(\beta) \exp \left[ \frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} du dv \Delta(v-u)b(v)b(u) \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

*Limite thermodynamique.* La fonction  $\Delta(t)$  se simplifie dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire quand  $\beta \rightarrow \infty$ . On trouve alors

$$\Delta(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \frac{e^{i\kappa t}}{\kappa^2 + 1}. \quad (5.16)$$

## 5.2 Corrélations gaussiennes. Théorème de Wick

Dérivant deux fois l'expression (5.15), on trouve la fonction de corrélation à deux points

$$\langle q(t)q(u) \rangle = Z_0^{-1}(\beta) \frac{\delta^2}{\delta b(t)\delta b(u)} Z_G(b, \beta) \Big|_{b \equiv 0} = \Delta(t - u). \quad (5.17)$$

En général,

$$\left[ \prod_{j=1}^p \frac{\delta}{\delta b(t_j)} \right] Z_G(b, \beta) \Big|_{b \equiv 0} = \int [dq] \left[ \prod_{j=1}^p q(t_j) \right] \exp[-\mathcal{S}_0(q)] \quad (5.18a)$$

$$= Z_0(\beta) \langle q(t_1)q(t_2) \dots q(t_p) \rangle. \quad (5.18b)$$

Remplaçant dans le membre de gauche de l'équation (5.18b)  $Z_G(b, \beta)$  par le résultat explicite (5.15), on obtient

$$\langle q(t_1)q(t_2) \dots q(t_p) \rangle = \prod_{j=1}^p \frac{\delta}{\delta b(t_j)} \exp \left[ \frac{1}{2} \int du dv \Delta(v - u) b(v) b(u) \right] \Big|_{b \equiv 0}.$$

Chaque dérivée fonctionnelle, quand elle agit sur l'exponentielle de la forme quadratique, fait apparaître un nouveau facteur  $b$  :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b(t_1)} \exp \left[ \frac{1}{2} \int du dv \Delta(v - u) b(v) b(u) \right] &= \int du_1 \Delta(t_1 - u_1) b(u_1) \\ &\times \exp \left[ \frac{1}{2} \int du dv \Delta(v - u) b(v) b(u) \right]. \end{aligned}$$

*Théorème de Wick.* Les arguments de la section 2.2 s'appliquent alors de nouveau. Les seuls termes qui survivent dans la limite  $b \equiv 0$  correspondent à des appariements de toutes les dérivées fonctionnelles. On retrouve la propriété générale de la mesure gaussienne : toutes les fonctions de corrélation s'expriment en termes de la fonction à deux points d'une manière spécifiée par le théorème de Wick :

$$\begin{aligned} \langle q(t_1)q(t_2) \dots q(t_\ell) \rangle &= \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{possibles } P \text{ de } \{1,2,\dots,\ell\}}} \Delta(t_{P_1} - t_{P_2}) \dots \Delta(t_{P_{\ell-1}} - t_{P_\ell}) \\ &= \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{possibles } P \text{ de } \{1,2,\dots,\ell\}}} \langle q(t_{P_1})q(t_{P_2}) \rangle \dots \langle q(t_{P_{\ell-1}})q(t_{P_\ell}) \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

### 5.3 Mesure gaussienne perturbée

Dans différentes situations, nous serons amenés à étudier l'effet d'une perturbation sur une mesure gaussienne. Par ailleurs, nous avons indiqué en section 4.8 comment des limites continues plus générales pouvaient être engendrées.

Ainsi, la fonction de partition avec conditions aux limites périodiques, correspondant dans la limite continue à l'hamiltonien quantique

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}^2 + V_I(\hat{\mathbf{Q}}), \quad (5.20)$$

est donnée par l'intégrale de chemin

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int [dq] \exp \left\{ - \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) + V_I(q(t)) \right] dt \right\} \quad (5.21)$$

avec  $q(-\beta/2) = q(\beta/2)$ .

Dans ce qui suit, nous supposons que la perturbation

$$V_I(q) = \sum_{n=1} v_n q^n$$

est un polynôme de la variable  $q$ , même si certains résultats se généralisent au cas de toute fonction développable en puissances de  $q$ .

L'intégrant (5.21) peut être développé en puissances de  $V_I(q)$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{Z}(\beta)}{\mathcal{Z}_0(\beta)} &= \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \left[ \int dt V_I(q(t)) \right]^k \right\rangle_0 \\ &= \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!} \int dt_1 dt_2 \dots dt_k \langle V_I(q(t_1)) \dots V_I(q(t_k)) \rangle_0, \end{aligned}$$

où  $\langle \bullet \rangle_0$  signifie moyenne par rapport à la mesure gaussienne  $e^{-S_0} / \mathcal{Z}_0$  (équation (5.3)) avec condition aux limites périodiques. Les arguments donnés en section 2.2 s'appliquent immédiatement ici aussi. Si  $V_I(q)$  est un polynôme, les termes successifs du développement peuvent être calculés systématiquement en utilisant le théorème de Wick (2.18) sous la forme (5.19). Ceci fournit la base de la théorie des perturbations.

*Remarque.* Il est possible de donner une justification perturbative de l'intégrale de chemin (5.21) en prenant la limite continue, ordre par ordre, dans le développement perturbatif discret. La fonction à deux points gaussienne et le théorème de Wick étant identiques, il suffit de montrer que les sommes convergent vers des intégrales.

*Développement perturbatif et minimum du potentiel.* L'intégrale de chemin ne dépend en réalité que de la somme

$$V(q) = \frac{1}{2}q^2 + V_I(q), \quad (5.22)$$

appelée potentiel dans le contexte quantique. À toute décomposition d'une fonction  $V(q)$  en une somme d'un terme quadratique et d'un reste  $V_I(q)$  est associé un développement perturbatif. Toutefois, l'intégrant est maximum dans le voisinage des chemins qui minimisent l'action. Clairement, les fonctions périodiques qui minimisent l'action sont les fonctions constantes  $q(t) \equiv q_0$ , pour minimiser le terme  $\int \dot{q}^2$ , dont la valeur  $q_0$  minimise le potentiel  $V(q)$  et donc

$$V'(q_0) = 0, \quad V''(q_0) > 0.$$

La décomposition optimale consiste alors à poser

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2}V''(q_0)(q - q_0)^2 + V_I(q).$$

Des problèmes particuliers sont associés à la dégénérescence du minimum du potentiel  $V(q)$ .

*Fonctions de corrélation.*

Les fonctions de corrélation ont un développement perturbatif analogue à la fonction de partition. Par exemple, le développement de la fonction à deux points peut s'écrire

$$\langle q(t)q(u) \rangle = \frac{\mathcal{Z}_0(\beta)}{\mathcal{Z}(\beta)} \left[ \langle q(t)q(u) \rangle_0 - \int d\tau \langle q(t)q(u)V_I(q(\tau)) \rangle_0 + \frac{1}{2} \cdots \right].$$

Le développement des fonctions de corrélation peut aussi se déduire du développement de la fonction génératrice correspondant à la mesure gaussienne perturbée. Cela conduit à développer directement l'intégrale de chemin

$$\mathcal{Z}(b, \beta) = \int_{q(\beta/2)=q(-\beta/2)} [dq(t)] \exp[-\mathcal{S}(q, b)], \quad (5.23)$$

avec

$$\mathcal{S}(q, b) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) + V(q(t)) - b(t)q(t) \right]. \quad (5.24)$$

De nouveau, la fonction

$$\mathcal{W}(b, \beta) = \ln \mathcal{Z}(b, \beta)$$

engendre les fonctions de corrélation connexes qui ont des propriétés d'amas (section 4.4) dans la limite thermodynamique  $\beta \rightarrow \infty$ .

## 5.4 Calculs perturbatifs : exemples

Nous considérons la distribution  $e^{-\mathcal{S}(q)} / \mathcal{Z}$ , où

$$\mathcal{S}(q) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) + \frac{1}{4!} \lambda q^4(t) \right], \quad (5.25)$$

et  $\mathcal{Z}$  est la fonction de partition :

$$\mathcal{Z}(\beta, \lambda) = \int [dq] \exp [-\mathcal{S}(q)].$$

Nous choisissons de nouveau des conditions aux limites périodiques.

Comme application du théorème de Wick, nous calculons les premiers termes du développement en puissances du paramètre  $\lambda$  de la fonction de partition et des fonctions à deux et quatre points.

### 5.4.1 Fonction de partition

L'algèbre est la même qu'en section 2.3. Appliquant le théorème de Wick à l'ordre  $\lambda$ , on trouve (cf. expression (2.24) et figure 2.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta, \lambda) &= \mathcal{Z}_0(\beta) \left[ 1 - (\lambda/24) \times 3 \times \beta \Delta^2(0) \right] + O(\lambda^2) \\ &= \frac{1}{2 \sinh(\beta/2)} \left[ 1 - \beta(\lambda/32) (\coth^2(\beta/2)) \right] + O(\lambda^2), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'expression (5.14) de la fonction à deux points gaussienne.

Dans la limite thermodynamique, on peut négliger les termes qui décroissent exponentiellement pour  $\beta \rightarrow \infty$  et l'expression se simplifie beaucoup :

$$\mathcal{Z}(\beta, \lambda) = e^{-\beta/2} \left( 1 - \frac{1}{32} \beta \lambda \right) + O(\lambda^2).$$

En particulier,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \mathcal{W}(\beta, \lambda) \equiv \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta, \lambda) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \lambda + O(\lambda^2).$$

À l'ordre suivant, on trouve (cf. expression (2.24)) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta, \lambda) / \mathcal{Z}_0(\beta) &= 1 - \frac{1}{8} \lambda \beta \Delta^2(0) + \frac{1}{128} \lambda^2 \beta^2 \Delta^4(0) + \frac{1}{16} \beta \lambda^2 \Delta^2(0) \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \Delta^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{48} \lambda^2 \beta \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \Delta^4(t) + O(\lambda^3), \end{aligned} \quad (5.26)$$

où la périodicité de  $\Delta(t)$  a été utilisée.

Dans le logarithme, les termes non connexes, qui se comportent comme  $\beta^2$  pour  $\beta \rightarrow \infty$ , se compensent. On trouve (cf. expression (2.25) et figure 2.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\beta, \lambda) &= \ln \mathcal{Z}(\beta, \lambda) \\ &= \mathcal{W}_0(\beta) - \frac{1}{8}\lambda\beta\Delta^2(0) + \frac{1}{16}\beta\lambda^2\Delta^2(0) \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \Delta^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{48}\lambda^2\beta \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \Delta^4(t) + O(\lambda^3),\end{aligned}$$

où  $\mathcal{W}_0(\beta) = \ln \mathcal{Z}_0(\beta)$ .

Pour  $\beta \rightarrow \infty$ , on peut remplacer la fonction  $\Delta$  par sa forme asymptotique (5.16) car les corrections sont exponentiellement petites. De plus, on peut intégrer sur  $t \in (-\infty, +\infty)$  avec, à nouveau, des erreurs exponentielles car  $\Delta(t)$  décroît exponentiellement pour  $t \rightarrow \infty$ . On trouve

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \mathcal{W}(\beta, \lambda) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{32}\lambda + \frac{7}{1536}\lambda^2 + O(\lambda^3).$$

## 5.4.2 Fonctions de corrélation

*Fonction à deux points.* Nous calculons maintenant la fonction à deux points  $\langle q(t)q(u) \rangle_\lambda$  correspondant à la mesure spécifiée par la fonction (5.25), à l'ordre  $\lambda^2$ , et dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$ . Nous faisons le calcul avec les mêmes conditions aux limites périodiques.

L'algèbre est la même qu'en section 2.5.1.

*Ordre  $\lambda$ .* Le développement à l'ordre  $\lambda$  peut s'écrire

$$\begin{aligned}Z^{(2)}(t, u) &\equiv \langle q(t)q(u) \rangle_\lambda \\ &= \frac{\mathcal{Z}(\beta, 0)}{\mathcal{Z}(\beta, \lambda)} \left[ \Delta(t - u) - \frac{1}{24}\lambda \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \langle q(t)q(u)q^4(\tau) \rangle_0 \right] + O(\lambda^2),\end{aligned}$$

où la fonction de partition  $\mathcal{Z}(\beta, \lambda)$  a été calculée à cet ordre plus haut et  $\Delta(t)$  est donnée en (5.14).

L'application du théorème de Wick et la compensation des termes non connexes dans le rapport conduit au développement à l'ordre  $\lambda$  de l'expression (2.28), la matrice  $\Delta$  étant remplacée par la fonction  $\Delta(t)$  et les sommes étant remplacées par des intégrales :

$$\Delta_{n_{i_1} i_2} \mapsto \Delta(t_1 - t_2), \quad \sum_i \mapsto \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau.$$

On en déduit (cf. aussi figure 2.4)

$$Z^{(2)}(t, u) = \Delta(t - u) - \frac{1}{2}\lambda\Delta(0) \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \Delta(t - \tau)\Delta(\tau - u) + O(\lambda^2).$$

Dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$ , utilisant la forme (5.16) de  $\Delta$ , on trouve

$$Z^{(2)}(t, u) = \frac{1}{2} e^{-|t-u|} \left[ 1 - \frac{1}{8} \lambda (1 + |t-u|) \right] + O(\lambda^2). \quad (5.27)$$

On a montré de façon générale en section 4.3.3, qu'à grande distance

$$Z^{(2)}(t, u) \underset{|t-u| \rightarrow \infty}{\sim} A e^{-|t-u|/\xi}.$$

On en déduit la variation de la longueur de corrélation :

$$\xi^{-1} = 1 + \frac{1}{8} \lambda + O(\lambda^2).$$

On conclut que la fonction à deux points peut, à cet ordre, s'écrire

$$Z^{(2)}(t, u) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{8} \lambda) e^{-|t-u|/\xi} + O(\lambda^2).$$

*Représentation de Fourier.* À cet ordre, la fonction à deux points a une transformée de Fourier simple, semblable à la fonction gaussienne :

$$\tilde{Z}^{(2)}(\kappa) = \int dt e^{-i\kappa t} Z^{(2)}(t, 0) = \frac{1}{\kappa^2 + 1/\xi^2} + O(\lambda^2). \quad (5.28)$$

*Ordre  $\lambda^2$ .* L'ordre  $\lambda^2$  peut aussi se déduire directement de l'expression (2.28). On trouve (cf. figure 2.5)

$$\begin{aligned} & \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau_1 d\tau_2 \left[ \frac{1}{4} \Delta^2(0) \Delta(t - \tau_1) \Delta(\tau_2 - \tau_1) \Delta(\tau_2 - u) + \frac{1}{4} \Delta(0) \Delta^2(\tau_2) \Delta(t - \tau_1) \right. \\ & \quad \left. \times \Delta(u - \tau_1) + \frac{1}{6} \Delta(t - \tau_1) \Delta^3(\tau_2 - \tau_1) \Delta(\tau_2 - u) \right]. \end{aligned}$$

Dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$ , il est commode de passer directement à la représentation de Fourier :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \Delta^2(0) (\kappa^2 + 1)^{-3} + \frac{1}{4} \Delta(0) \int d\tau \Delta^2(\tau) (\kappa^2 + 1)^{-2} \\ & \quad + \frac{1}{6} (\kappa^2 + 1)^{-2} \int d\tau e^{-i\kappa\tau} \Delta^3(\tau) \\ & = \frac{1}{16} (\kappa^2 + 1)^{-3} + \frac{1}{32} (\kappa^2 + 1)^{-2} + \frac{1}{8} (\kappa^2 + 1)^{-2} (\kappa^2 + 9)^{-1}. \end{aligned}$$

Le développement prend alors la forme

$$\tilde{Z}^{(2)}(\kappa) = \frac{1}{\kappa^2 + 1} - \frac{\lambda/4}{(\kappa^2 + 1)^2} + \frac{\lambda^2/16}{(\kappa^2 + 1)^3} \left( 1 + \frac{1}{2} (\kappa^2 + 1) + 2 \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa^2 + 9} \right) + O(\lambda^3).$$

On démontre, de façon générale, que la fonction à deux points peut s'écrire comme une somme de pôles simples en  $\kappa^2$  avec résidus positifs et que la somme des résidus est égale à 1. Ici, on vérifie

$$\tilde{Z}^{(2)}(\kappa) = \frac{1 - \lambda^2/512}{\kappa^2 + 1/\xi^2} + \frac{\lambda^2/512}{\kappa^2 + 9} + O(\lambda^3),$$

avec

$$\xi^{-2} = 1 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{64}\lambda^2 + O(\lambda^3) \Rightarrow \xi^{-1} = 1 + \frac{1}{8}\lambda - \frac{1}{32}\lambda^2 + O(\lambda^3).$$

*Fonction à quatre points connexe.* La forme de la fonction à quatre points connexe se déduit en particulier de l'expression (2.33). On trouve (cf. aussi figure 2.6)

$$\begin{aligned} W^{(4)}(t_1, t_2, t_3, t_4) = & -\lambda \int d\tau \Delta(t_1 - \tau) \Delta(t_2 - \tau) \Delta(t_3 - \tau) \Delta(t_4 - \tau) \\ & + \frac{1}{2}\lambda^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \{ \Delta^2(\tau_1 - \tau_2) [\Delta(t_1 - \tau_1) \Delta(t_2 - \tau_1) \Delta(t_3 - \tau_2) \Delta(t_4 - \tau_2) \\ & + \Delta(t_1 - \tau_1) \Delta(t_3 - \tau_1) \Delta(t_2 - \tau_2) \Delta(t_4 - \tau_2) \\ & + \Delta(t_1 - \tau_1) \Delta(t_4 - \tau_1) \Delta(t_2 - \tau_2) \Delta(t_3 - \tau_2)] \\ & + \Delta(0) \Delta(\tau_1 - \tau_2) [\Delta(t_1 - \tau_1) \Delta(t_2 - \tau_2) \Delta(t_3 - \tau_2) \Delta(t_4 - \tau_2) + 3 \text{ termes}] \} \\ & + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les intégrales peuvent se calculer explicitement, mais une expression plus intéressante est obtenue en passant en représentation de Fourier. Comme la fonction  $W^{(4)}(t_1, t_2, t_3, t_4)$  est invariante par translation, elle est déterminée par sa valeur à  $t_4 = 0$ . On pose alors

$$\widetilde{W}^{(4)}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = \int dt_1 dt_2 dt_3 e^{i(\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 + \kappa_3 t_3)} W^{(4)}(t_1, t_2, t_3, 0), \quad (5.30)$$

où la variable  $\kappa_4 = -\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3$  a été introduite de façon à restaurer la symétrie entre les quatre points (cf. section 6.2.2). On trouve alors

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{(4)}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = & \frac{1}{(\kappa_1^2 + 1)(\kappa_2^2 + 1)(\kappa_3^2 + 1)(\kappa_4^2 + 1)} \\ & \times \left\{ -\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 \left[ \left( \frac{1}{(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + 4} + \frac{1}{(\kappa_1 + \kappa_3)^2 + 4} + \frac{1}{(\kappa_1 + \kappa_4)^2 + 4} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa_1^2 + 1} + \frac{1}{\kappa_2^2 + 1} + \frac{1}{\kappa_3^2 + 1} + \frac{1}{\kappa_4^2 + 1} \right) \right] \right\} + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Les quatre derniers termes combinés avec le terme d'ordre  $\lambda$  ont comme effet de remplacer  $\kappa^2 + 1$  par  $\kappa^2 + 1/\xi^2$  dans les dénominateurs.

## Exercices

**Exercice 5.1.** On considère la mesure associée à la fonction

$$\mathcal{S}(q) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) + \lambda \gamma q^3(t) + \frac{1}{2} \lambda^2 q^4(t) \right],$$

où  $\gamma$  est une constante arbitraire. Déterminer l'énergie libre, par unité de longueur, dans la limite thermodynamique (qui est l'opposée de l'énergie du fondamental de l'hamiltonien quantique correspondant) à l'ordre  $\lambda^2$ .

*Solution.*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(3 - 11\gamma^2)\lambda^2 + O(\lambda^4).$$

**Exercice 5.2.** Déterminer l'énergie libre, par unité de longueur, dans la limite thermodynamique à l'ordre  $\lambda$  pour

$$\mathcal{S}(q) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) + \lambda q^6(t) \right].$$

*Solution.*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta) = -\frac{1}{2} - \frac{15}{8}\lambda + O(\lambda^2).$$

**Exercice 5.3.** Même question avec

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2(t) + \frac{1}{2} \mathbf{q}^2(t) + \frac{1}{4} \lambda (\mathbf{q}^2)^2 \right],$$

où  $\mathbf{q}$  dénote le vecteur à deux composantes  $q_1, q_2$  et  $\mathbf{q}^2$  son carré scalaire.

*Solution.*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta) = -1 - \lambda/2 + O(\lambda^2).$$



## Chapitre 6

# Systèmes ferromagnétiques. Corrélations

Nous généralisons maintenant un certain nombre de concepts et d'outils que nous avons développés dans les chapitres précédents à des modèles de physique statistique classique (c'est-à-dire non quantique) plus généraux, en particulier, en dimension d'espace arbitraire.

Le concept de fonctions (ou fonctionnelles) génératrices de fonctions de corrélation sera de nouveau très utile. Ce chapitre contient donc quelques rappels techniques sur différents types de fonctions de corrélation et les fonctions génératrices correspondantes.

En section 4.4, nous avons déjà mentionné que les fonctions de corrélation connexes, en une dimension d'espace pour des systèmes avec interactions de portée finie, ont une propriété d'amas. Cette propriété se généralise, en dimension arbitraire, pour des systèmes avec interactions de courte portée (une notion que nous expliciterons plus loin).

Pour étudier les transitions de phase, il est particulièrement utile d'introduire le potentiel thermodynamique, transformé de Legendre de l'énergie libre. Rappelons que la relation entre lagrangien et hamiltonien en mécanique classique a aussi la forme d'une transformation de Legendre. La relation par transformation de Legendre entre énergie libre et potentiel thermodynamique se généralise dans une relation entre fonction génératrice des fonctions de corrélation connexes et fonction génératrice des fonctions de vertex. Les fonctions de vertex qui, du point de vue des diagrammes de Feynman sont une ligne irréductible, sont aussi appelées en théorie quantique des champs fonctions 1PI (pour une particule irréductible). Les transformées de Fourier de ces fonctions ont de meilleures propriétés de régularité que les fonctions de corrélations connexes dont elles se déduisent, ce qui en fait des objets d'étude privilégiés.

Enfin, nous examinons les relations entre transformée de Legendre et méthode du col. Nous calculons les premiers termes du développement des fonctions de vertex à deux et quatre points dans un exemple simple.

À partir de ce chapitre, nous adoptons, par commodité, un *langage ferromagnétique*, même si de nombreux systèmes physiques auxquels ces considérations s'appliquent aussi, n'ont rien de magnétique.

## 6.1 Systèmes ferromagnétiques : définition

Nous considérons des modèles statistiques définis sur réseau, nous limitant au réseau  $\mathbb{Z}^d$  des points de coordonnées entières (la généralisation des réseaux carré et cubique) de l'espace à  $d$  dimensions. Ce réseau peut physiquement représenter un cristal, mais il peut être aussi un outil technique dans des situations où il est utile d'approximer l'espace continu par un réseau.

À chaque sommet (ou site) du réseau sont associées une ou plusieurs variables aléatoires réelles, appelées maintenant *spins* (mais non quantiques) et notées  $S_i$  où l'indice  $i$  caractérise un site du réseau et est une écriture symbolique pour les  $d$  coordonnées entières :

$$i \equiv (n_1, n_2, \dots, n_d), \quad n_\mu \in \mathbb{Z}.$$

Nous notons  $\mathcal{E}(S)$  l'énergie d'interaction des spins en champ nul,  $\beta$  l'inverse de la température et  $\rho(S)$  la distribution de spin (normalisée) qui pondère les configurations de spin en chaque site.

L'énergie d'interaction contient des termes qui corrélient les spins des différents sites. Nous supposons que les interactions sont à courte portée ou locales, une notion que nous préciserons plus tard, mais dont les interactions de proches voisins fournissent l'exemple le plus simple. Par ailleurs, nous supposons l'énergie d'interaction invariante par translation sur le réseau.

Nous commençons par définir des systèmes sur le sous-ensemble fini  $\mathcal{C}$  du réseau  $\mathbb{Z}^d$  (que nous appelons *cube* dans ce qui suit indépendamment de la dimension  $d$  d'espace) des points de coordonnées entières

$$0 \leq n_\mu < L, \quad \text{for } 1 \leq \mu \leq d, \quad L \in \mathbb{Z}.$$

Le nombre de points de  $\mathcal{C}$  (le volume) est donc  $\Omega = L^d$ . De plus, sauf indication explicite contraire, nous supposons des *conditions aux limites périodiques* dans toutes les directions de sorte que l'invariance par translation est préservée pour  $L$  fini.

Dans ce qui suit, toutes les expressions sont écrites pour une variable par site du réseau mais la généralisation à plusieurs variables est simple.

La fonction de partition, dans un champ magnétique uniforme  $H/\beta$  et pour un cube  $\mathcal{C}$  de  $\Omega$  sites, s'écrit alors

$$Z_\Omega(H) = \int \left( \prod_{i \in \mathcal{C}} \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(S) + H \sum_i S_i \right]. \quad (6.1)$$

Nous supposons que le poids statistique est tel que la fonction de partition existe, pour un volume  $\Omega$  fini, pour toute valeur de  $H$ . Alors, la fonction de partition  $\mathcal{Z}_\Omega(H)$  est une fonction entière de  $H$ .

Les valeurs moyennes des fonctions de spin sont données par

$$\langle \Phi(S) \rangle_\Omega = \frac{1}{\mathcal{Z}_\Omega} \int \left( \prod_{i \in \mathcal{C}} \rho(S_i) dS_i \right) \Phi(S) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(S) + H \sum_i S_i \right],$$

où valeur moyenne  $\langle \bullet \rangle_\Omega$  signifie valeur moyenne dans un volume  $\Omega$ .

*Remarque.* On peut se demander pourquoi attacher une importance particulière à la fonction de partition qui n'est qu'une normalisation du poids statistique? En réalité, si  $\mathcal{Z}_\Omega$  n'a pas de signification statistique, ses dérivées logarithmiques par rapport à tous les paramètres dont elle dépend sont des valeurs moyennes, comme la section suivante va l'illustrer.

### 6.1.1 Distribution de spin moyen et énergie libre

Sur un réseau fini à  $\Omega$  sites, les moments de la distribution du spin moyen sur le réseau

$$\sigma = \frac{1}{\Omega} \sum_{i \in \mathcal{C}} S_i, \quad (6.2)$$

correspondant à la fonction de partition (6.1), sont donnés par

$$\langle \sigma^n(H) \rangle_\Omega = \Omega^{-n} \mathcal{Z}_\Omega^{-1}(H) \frac{\partial^n \mathcal{Z}_\Omega(H)}{(\partial H)^n}.$$

La valeur moyenne  $\langle \sigma \rangle_\Omega$  est l'aimantation.

Nous avons supposé l'invariance par translation sur le réseau infini. De plus, dans le cas d'un cube  $\mathcal{C}$  avec conditions aux limites périodiques, l'invariance par translation est préservée sur le réseau fini, et donc la valeur moyenne  $\langle S_i \rangle$  est indépendante du site  $i$ . On en déduit

$$\langle \sigma \rangle_\Omega = \frac{1}{\Omega} \sum_{j \in \mathcal{C}} \langle S_j \rangle_\Omega = \langle S_i \rangle_\Omega \quad \forall i.$$

L'énergie libre par unité de volume  $W_\Omega(H)$  correspondante (notre définition de l'énergie libre diffère des définitions usuelles, ici et plus tard, par un facteur de température en général sans importance pour les questions que nous étudions) est définie par

$$W_\Omega(H) = \frac{1}{\Omega} \ln \mathcal{Z}_\Omega(H). \quad (6.3)$$

À cause de la positivité de la fonction de partition, la fonction  $W_\Omega(H)$  est aussi indéfiniment différentiable sur un réseau fini. Elle est une fonction génératrice des cumulants  $(\langle \sigma^n \rangle_\Omega)_{\text{conn.}}$  de la distribution du spin moyen. On vérifie

$$(\langle \sigma^n \rangle_\Omega)_{\text{conn.}} = \Omega^{1-n} \frac{\partial^n W_\Omega(H)}{(\partial H)^n}. \quad (6.4)$$

En particulier,

$$\langle \sigma \rangle_{\Omega} = (\langle \sigma \rangle_{\Omega})_{\text{conn.}} = \frac{\partial W_{\Omega}(H)}{\partial H}.$$

*Positivité.* Comme nous l'avons déjà montré, la dérivée seconde  $\partial^2 W_{\Omega}/(\partial H)^2$ , proportionnelle au second cumulant de la distribution de spin moyen, est strictement positive. En effet, la dérivée seconde peut être écrite

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_{\Omega}}{(\partial H)^2} &= \frac{\partial \langle \sigma \rangle_{\Omega}}{\partial H} = \Omega^{-1} Z_{\Omega}^{-1}(H) \frac{\partial^2 Z_{\Omega}}{(\partial H)^2} - \Omega^{-1} \left( Z_{\Omega}^{-1}(H) \frac{\partial Z_{\Omega}}{\partial H} \right)^2 \\ &= \Omega \left\langle (\sigma - \langle \sigma \rangle_{\Omega})^2 \right\rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

La dérivée seconde ne s'annule que pour une valeur de  $\sigma$  certaine, situation triviale que nous excluons.

### 6.1.2 Transformation de Legendre

Comme nous le montrons dans l'étude des transitions de phase, au chapitre 7, il est plus commode de travailler à aimantation fixée qu'à champ magnétique fixé. Cela correspond à passer de l'énergie libre au potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$ . Les deux fonctions  $W(H)$  et  $\mathcal{G}(M)$  sont reliées par une transformation de Legendre, une transformation qui sera discutée de façon plus générale en section 6.3.

Le concept de transformée de Legendre apparaît aussi dans d'autres domaines de la mécanique statistique, ou plus généralement de la physique, comme en mécanique analytique où elle relie hamiltonien et lagrangien. Les variables conjuguées sont alors le vecteur vitesse  $\dot{q}(t)$  et le vecteur moment conjugué  $p(t)$  (l'impulsion dans les cas les plus simples) :

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) + H(p, q) = p(t)\dot{q}(t), \quad p(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(t)}.$$

*Transformation de Legendre : définition globale.* Soit  $W(H)$  une fonction de  $H$ , partout définie et admettant une dérivée seconde continue et strictement positive. On appelle transformée de Legendre de  $W(H)$ , la fonction  $\mathcal{G}(M)$ , définie de la manière suivante

$$W(H) + \mathcal{G}(M) = HM, \quad (6.6a)$$

$$M = \frac{\partial W(H)}{\partial H}. \quad (6.6b)$$

Avec les hypothèses sur la dérivée seconde

$$\frac{\partial H}{\partial M} = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial^2 W}{(\partial H)^2} \right)^{-1}$$

existe. La transformation est alors involutive. En effet, la première relation entraîne

$$\frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial M} = H + \frac{\partial H}{\partial M} \frac{\partial}{\partial H} \Big|_M (HM - W(H)).$$

L'équation (6.6b) entraîne alors que le deuxième terme s'annule. Ainsi,

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial M}. \quad (6.7)$$

Par ailleurs, dérivant l'équation (6.6b) par rapport à  $M$  et utilisant l'équation (6.7), on trouve

$$\frac{\partial^2 W}{(\partial H)^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{(\partial M)^2} = 1. \quad (6.8)$$

La dérivée seconde de  $\mathcal{G}(M)$  est donc aussi continue positive.

Dans son domaine de définition, la transformation de Legendre est bijective puisque la fonction  $W'(H)$  est croissante et continue. Notons, cependant, qu'à la différence de  $W(H)$ , la fonction  $\mathcal{G}(M)$  n'est pas nécessairement définie pour toute valeur de  $M$  mais comme  $W'(H)$  est continue, le domaine de définition est connexe.

*Stationnarité.* Une propriété algébrique importante de la transformation de Legendre est la suivante : supposons que  $W(H)$  dépende de façon dérivable d'un paramètre  $\varepsilon$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sum HM - W(H) \right] \\ &= -\frac{\partial W(H)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial H} [HM - W(H)] \end{aligned}$$

et donc à cause de (6.6b)

$$\frac{\partial W(H)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (6.9)$$

En particulier, supposons que  $W(H)$  soit développable à  $\varepsilon = 0$  :

$$W(H) = W_0(H) + \varepsilon W_1(H) + O(\varepsilon^2).$$

Soient  $\mathcal{G}_0(M)$  la transformée de Legendre de  $W_0(H)$  et  $H^{(0)}(M)$  sa dérivée. Alors,

$$\mathcal{G}(M) = \mathcal{G}_0(M) - \varepsilon W_1(H^{(0)}(M)).$$

*Application.* Dans le problème qui nous intéresse, la variable  $M$  est la valeur moyenne du spin, ou aimantation :

$$M = \langle \sigma \rangle.$$

La fonction  $\mathcal{G}(M)$  est la densité de potentiel thermodynamique. À volume fini, l'énergie libre  $W(H)$  est une fonction régulière et l'équation (6.5) implique que sa dérivée seconde est positive. La transformation de Legendre est définie globalement et inversible.

*Limite thermodynamique.* Dans le cas d'interactions locales, dans la limite du volume  $\Omega$  infini (ou limite thermodynamique) :  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}^d$ , la densité d'énergie libre  $W(H)$  a une limite finie, une propriété qui généralise le résultat obtenu à une dimension. De la relation (6.4) entre cumulants et dérivées de  $W(H)$ , on conclut, en particulier, que le spin moyen tend vers une valeur certaine  $\langle \sigma(H) \rangle$ . De plus, pour les distributions et valeurs de  $H$  pour lesquelles la dérivée seconde de  $W(H)$  est finie, les cumulants de la distribution de  $\sigma$  ont le comportement prédit par le théorème centrale, même si les spins ne sont pas des variables indépendantes.

Nous avons vu (section 4.4.1) que pour  $n = 2$  cette condition est satisfaite si la longueur de corrélation est finie et nous verrons que cette propriété se généralise.

Cette question a un rapport direct avec l'inversibilité de la transformation de Legendre et est intimement liée aux problèmes de transitions de phase. Si en effet la dérivée seconde de  $W(H)$  diverge pour certaines valeurs de  $H$  (ce qui implique, en particulier, que la longueur de corrélation diverge),  $\mathcal{G}''(M)$  s'annule et la relation (6.7)

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial M},$$

n'a plus nécessairement une solution unique en  $M$ .

Une autre situation peut être réalisée où la dérivée de  $W(H)$  a des discontinuités, et le domaine de définition de  $\mathcal{G}(M)$  n'est pas connexe. Alors la transformation de Legendre n'est plus bijective : c'est la situation réalisée dans les systèmes ayant une transition de phase, dans la région à plusieurs phases.

### 6.1.3 Distribution du spin moyen et potentiel thermodynamique

La distribution  $R_\Omega(\sigma)$  du spin moyen (6.2) est la transformée de Fourier de la valeur moyenne de  $\exp[-ik \sum_i S_i]$  (cf. section 3.1) :

$$R_\Omega(\sigma) = \frac{\Omega}{2\pi} \int dk e^{ik\Omega\sigma} \left\langle e^{-ik \sum_i S_i} \right\rangle.$$

Cette valeur moyenne est obtenue directement à partir de  $W_\Omega(H)$  par prolongement analytique :

$$\left\langle e^{-ik \sum_i S_i} \right\rangle = \mathcal{Z}_\Omega^{-1}(H) e^{\Omega W_\Omega(H - ik)}.$$

Donc,

$$R_{\Omega}(\sigma) = \frac{\Omega}{2\pi} \mathcal{Z}_{\Omega}^{-1}(H) \int dk e^{\Omega[i\sigma k + W_{\Omega}(H-ik)]}.$$

Dans la limite thermodynamique  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $W_{\Omega}(H)$  tend vers une limite finie  $W(H)$  qui reste analytique, au moins si la longueur de corrélation reste finie. L'intégrale peut donc se calculer par la méthode du col (section 2.6). Le col est donné par l'équation

$$\sigma = W'(H - ik).$$

L'équation a une solution au moins pour  $\sigma$  et  $H$  suffisamment petits. À l'ordre dominant, la distribution  $R_{\Omega}(\sigma)$  peut alors s'écrire

$$R_{\Omega}(\sigma) \underset{\Omega \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{Z}_{\Omega}^{-1}(H) \left( \frac{\Omega}{2\pi W''(H - ik)} \right)^{1/2} e^{\Omega H \sigma} e^{\Omega[-(H-ik)\sigma + W(H-ik)]}.$$

Comparant ces expressions avec les équations (7.3, 7.13, 7.14), on en déduit

$$R_{\Omega}(\sigma) \underset{\Omega \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{Z}_{\Omega}^{-1}(H) \sqrt{\Omega \mathcal{G}''(\sigma)/2\pi} e^{\Omega[H\sigma - \mathcal{G}(\sigma)]}, \quad (6.10)$$

une relation asymptotique entre potentiel thermodynamique et distribution de spin moyen. Notons, cependant, que cette relation n'est valable que dans le domaine de définition de  $\mathcal{G}(\sigma)$ , une subtilité importante dans le cas de transitions de phase.

Dans la limite thermodynamique, la valeur de  $\sigma$  tend vers une valeur certaine qui est l'aimantation  $M$ , minimum absolu de  $H\sigma - \mathcal{G}(\sigma)$  et donc solution de

$$H = \mathcal{G}'(M).$$

Si la dérivée seconde  $\mathcal{G}''(M)$ , qui est toujours non négative, ne s'annule pas, la distribution peut être approximée par la distribution gaussienne

$$R_{\Omega}(\sigma) \underset{\Omega \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\Omega \mathcal{G}''(M)/2\pi} e^{-\Omega \mathcal{G}''(M)(\sigma - M)^2/2}, \quad (6.11)$$

et  $\sigma$  se comporte comme une moyenne de variables aléatoires indépendantes. Nous verrons que cette condition est réalisée si la longueur de corrélation est finie. Les exceptions à ce comportement, longueur de corrélation infinie, cols multiples, sont toutes liées à l'existence d'une transition de phase.

## 6.2 Fonctions de corrélation. Représentation de Fourier

Nous considérons à nouveau la fonction de partition  $\mathcal{Z}(\mathbf{H})$  d'un système ferromagnétique classique du type défini en section 6.1 (équation (6.1)), mais

en champ magnétique variable, c'est-à-dire, dont l'amplitude varie de site en site :

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left( \prod_{i \in \mathcal{C}} \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(S) + \sum_{i \in \mathcal{C}} H_i S_i \right]. \quad (6.12)$$

Nous supposons que le poids statistique est tel que la fonction de partition existe pour toute valeur de  $\mathbf{H}$ .

La fonction de partition  $\mathcal{Z}(\mathbf{H})$  est une fonction génératrice des fonctions de corrélation de spins en champ variable. En effet,

$$\langle S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_n} \rangle = \mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{H}) \frac{\partial^n \mathcal{Z}(\mathbf{H})}{\partial H_{i_1} \partial H_{i_2} \dots \partial H_{i_n}}.$$

Dans ce qui suit, nous ne considérons que des fonctions de corrélation en champ uniforme, qui correspondent à la limite  $H_i = H$  et, en particulier, en champ nul,  $H_i = 0$ .

### 6.2.1 Fonctions connexes et propriété d'amas

L'énergie libre associée  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  (nous rappelons que notre définition de l'énergie libre diffère par un facteur de température des définitions usuelles) :

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) = \ln \mathcal{Z}(\mathbf{H})$$

est alors la fonction génératrice des fonctions de corrélation connexes (*cf.* section 4.4)

$$W_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(H) = \langle S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_n} \rangle_{\text{connexe}} = \frac{\partial^n \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial H_{i_1} \partial H_{i_2} \dots \partial H_{i_n}} \Big|_{H_i = H}.$$

En champ constant, la fonction  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  diffère de la fonction  $W(H)$  définie en section 6.1 par un facteur de volume.

*Propriété d'amas.* Nous considérons maintenant la fonction à  $n$  points connexe  $W_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ ,  $n > 1$  dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire de volume infini :  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}^d$ . Nous séparons les points  $i_1, i_2, \dots, i_n$  en deux sous-ensembles disjoints non vides  $E, E'$ . Nous définissons la distance  $D$  entre ces sous-ensembles par

$$D = \min_{i \in E, i' \in E'} |i - i'|,$$

où nous avons noté  $|i - i'|$  la distance entre les points  $i$  et  $i'$ . Alors, la fonction de corrélation tend vers zéro quand la séparation  $D$  tend vers l'infini :

$$\lim_{D \rightarrow \infty} W_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} = 0.$$

En l'absence de transition de phase, ou bien dans la phase de haute température au-dessus de la transition de phase, la décroissance est exponentielle quand la séparation tend vers l'infini : on appelle *longueur de corrélation* l'inverse  $\xi$  du plus petit taux de décroissance. En terme de la fonction à deux points connexe,

$$\frac{1}{\xi} = \max \lim_{|i-j| \rightarrow \infty} - \frac{\ln |\langle S_i S_j \rangle_{\text{conn.}}|}{|i-j|}. \quad (6.13)$$

Dans un système statistique avec transition de phase, à la température de transition et dans la région à plusieurs phases, la décroissance peut n'être qu'algébrique.

Quand la longueur de corrélation  $\xi$  est finie, il découle de la définition (6.2), de l'équation (6.5) et de l'invariance par translation sur le réseau, que

$$W''(H) = \frac{1}{\Omega} \sum_{i,j} \langle S_i S_j \rangle_{\text{conn.}} = \sum_i \langle S_i S_j \rangle_{\text{conn.}} < \infty.$$

Quand la longueur de corrélation est finie, la dérivée seconde  $W''(H)$  est donc finie.

La propriété de décroissance exponentielle se généralise à toutes les fonctions de corrélation connexes. Dans le cas d'interaction de portée finie, pour lesquelles une matrice de transfert peut être définie, la représentation (4.16) se généralise et forme de nouveau une base pour une démonstration.

## 6.2.2 Invariance par translation et représentation de Fourier

Dans ce qui suit, nous supposons que la limite thermodynamique a été prise. Par ailleurs, nous notons maintenant par  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{Z}^d$  les points sur le réseau  $d$ -dimensionnel. Nous utilisons explicitement l'invariance par translation du modèle statistique, ce qui implique que pour tout  $a \in \mathbb{Z}^d$ , la fonction de corrélation connexe à  $n$  points satisfait

$$W^{(n)}(x_1 + a, \dots, x_n + a) = W^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Nous introduisons sa transformée de Fourier

$$F^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^d} W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j \cdot p_j \right),$$

où la fonction  $F^{(n)}$  est périodique dans toutes les composantes des vecteurs  $p_j$ .

Utilisant l'invariance par translation, nous prenons comme arguments  $x_n$  et  $y_j = x_j - x_n$  pour  $j < n$  :

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = W^{(n)}(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n, 0) = W^{(n)}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0).$$

Après ce changement de variables, la somme devient

$$F^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{x_n} \sum_{y_1, \dots, y_{n-1}} W^{(n)}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \\ \times \exp \left( i \sum_{j=1}^{n-1} y_j \cdot p_j + i x_n \cdot \sum_{j=1}^n p_j \right).$$

Au sens des distributions

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} = 2\pi \delta(\theta),$$

où dans ce cas,  $\delta(\theta)$  est la distribution de Dirac sur le cercle, concentrée à  $\theta = 0 \bmod (2\pi)$ .

En  $d$  dimensions,

$$\sum_{x_n \in \mathbb{Z}^d} e^{i x_n \cdot P} = (2\pi)^d \delta^{(d)}(P) \quad \text{avec} \quad P = \sum_i p_i,$$

où la fonction  $\delta^{(d)}$  signifie pour chaque composante  $P_\mu$  de  $P$ , que  $P_\mu = 0 \bmod (2\pi)$ .

Nous factorisons alors la distribution de Dirac  $\delta^{(d)}(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ , qui est donc une conséquence directe de l'invariance par translation, et posons

$$F^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n),$$

où la fonction

$$\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} W^{(n)}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \exp \left( i \sum_{j=1}^{n-1} x_j \cdot p_j \right) \quad (6.14)$$

n'est définie que sur la surface  $\sum_i p_i = 0$ .

Comme un point est fixé, la fonction connexe  $W^{(n)}(0, x_2, \dots, x_n)$  décroît quand  $x_i$  tend vers l'infini et  $\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  a des propriétés de régularité dans les variables  $p_i$ .

Enfin, la relation entre fonction à  $n$  points et sa transformée de Fourier peut se récrire

$$(2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{W}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j \cdot p_j \right). \quad (6.15)$$

*Terminologie.* Par la suite, par référence au formalisme quantique, nous appellerons souvent *impulsions* les arguments  $p_i$  des transformées de Fourier.

*Représentation de Fourier et énergie libre en champ uniforme.* Considérons d'abord un cube périodique  $\mathcal{C}$  contenant  $\Omega$  points. Dans ces notations, la fonction génératrice  $\mathcal{W}_\Omega(H)$  se développe sous la forme

$$\mathcal{W}_\Omega(H) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}} W_\Omega^{(n)}(x_1, \dots, x_n) H(x_1) \dots H(x_n).$$

En champ uniforme  $H$ , grâce à l'invariance par translation, l'expression devient

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\Omega(H) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{n!} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}} W_\Omega^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{n!} \sum_{y_1, \dots, y_{n-1}, x_n \in \mathcal{C}} W_\Omega^{(n)}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \\ &= \Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{n!} \sum_{y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathcal{C}} W_\Omega^{(n)}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Dans la limite  $\Omega \rightarrow \infty$ , si les sommes convergent, utilisant la définition (6.14), on obtient

$$W(H) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \mathcal{W}_\Omega(H)/\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{n!} \tilde{W}^{(n)}(0, \dots, 0). \quad (6.16)$$

## 6.3 Transformation de Legendre et fonctions de vertex

Il est utile de généraliser la transformation de Legendre au cas du champ magnétique ou de l'aimantation variable spatialement et, donc, de définir la transformée de Legendre pour un nombre quelconque de variables. Cela permet, en particulier, de définir des fonctions de corrélation généralisées appelées fonctions de vertex qui jouent un rôle technique important en théorie statistique ou quantique des champs à cause de leurs propriétés de régularité.

### 6.3.1 Transformation de Legendre : généralisation

Soit  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  une fonction des variables  $H_i$ , partout définie et admettant des dérivées partielles secondes continues et telle que la matrice

$$W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_i \partial H_j}$$

soit définie positive :

$$\sum_{i,j} X_i W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) X_j > 0 \quad \forall \mathbf{X} \quad \text{avec} \quad |\mathbf{X}| = 1.$$

On appelle transformée de Legendre de  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$ , la fonction  $\Gamma(\mathbf{M})$  définie par les relations suivantes :

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) + \Gamma(\mathbf{M}) = \sum_i H_i M_i, \quad (6.17a)$$

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial H_i}. \quad (6.17b)$$

On vérifie immédiatement que cette transformation est involutive: En effet, la première relation entraîne ( $\partial H / \partial M$  est défini)

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_i} = H_i + \sum_j \frac{\partial H_j}{\partial M_i} \frac{\partial}{\partial H_j} \left[ \sum_k H_k M_k - \mathcal{W}(\mathbf{H}) \right].$$

Utilisant (6.17b), on trouve que le deuxième terme s'annule. Donc,

$$H_i = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_i}. \quad (6.18)$$

Notons cependant qu'à la différence de  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$ , la fonction  $\Gamma(\mathbf{M})$  n'est pas nécessairement définie pour toute valeur de  $\mathbf{M}$ . En revanche, à cause de la continuité des dérivées premières, le domaine de définition est simplement connexe.

De la transformation de Legendre, on déduit une relation entre dérivées secondes. Dérivant l'équation (6.17b) par rapport à  $M_j$  et utilisant l'équation (6.18), on trouve

$$\sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_i \partial H_k} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_k \partial M_j} = \delta_{ij}. \quad (6.19)$$

La matrice des dérivées secondes de  $\Gamma(\mathbf{M})$  est donc aussi définie positive.

*Stationnarité.* La propriété algébrique (6.9) de la transformation de Legendre se généralise sans difficulté. Supposons que  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  dépende de façon dérivable d'un paramètre  $\varepsilon$ . Alors,

$$\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (6.20)$$

*Inversibilité.* La transformation de Legendre, dans son domaine de définition, est toujours bijective. Cette propriété est vraie localement à cause de la positivité de la matrice des dérivées secondes.

Pour la démontrer globalement, nous supposons que deux valeurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$  correspondent à la même valeur de  $\mathbf{M}$ . Nous introduisons l'interpolation linéaire

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H} + t(\mathbf{H}' - \mathbf{H}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}(\mathbf{H}(1)) = \mathbf{M}(\mathbf{H}(0)).$$

Considérons alors la fonction

$$\Phi(t) = \mathcal{W}(\mathbf{H}(t)).$$

Sa dérivée est donnée par

$$\Phi'(t) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{H}(t))}{\partial H_i} (\mathbf{H}' - \mathbf{H})_i = \sum_i \mathbf{M}_i(\mathbf{H}(t)) (\mathbf{H}' - \mathbf{H})_i.$$

Elle satisfait donc

$$\Phi'(1) = \Phi'(0).$$

La dérivée seconde

$$\Phi''(t) = \sum_{i,j} (H'_i - H_i) \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\mathbf{H}(t))}{\partial H_i \partial H_j} (H'_j - H_j) > 0$$

est positive puisque la matrice est positive. La fonction  $\Phi'(t)$  est donc une fonction strictement croissante et la condition  $\Phi'(1) = \Phi'(0)$  ne peut pas être satisfaite.

*Physique statistique.* Sur un réseau fini, toutes les hypothèses précédentes sont satisfaites. La fonction  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  est indéfiniment différentiable. Par ailleurs,

$$\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial H_i} = \frac{1}{\mathcal{Z}(\mathbf{H})} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H_i}$$

et donc

$$W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) = \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial H_i \partial H_j} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{H}) \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial H_i \partial H_j} - \mathcal{Z}^{-2}(\mathbf{H}) \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H_i} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H_j}.$$

Utilisant la définition (6.12), on trouve que la fonction à deux points connexe peut être écrite (cf. aussi la relation (2.32) et la section 3.3.3)

$$W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) = \langle (S_i - \langle S_i \rangle) (S_j - \langle S_j \rangle) \rangle,$$

où valeur moyenne  $\langle \bullet \rangle$  signifie valeur moyenne en présence du champ  $H_i$ . Prenant la valeur moyenne de cette matrice symétrique dans un vecteur  $X_i$  non-nul, on trouve

$$\sum_{i,j} X_i X_j W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) = \left\langle \left[ \sum_i X_i (S_i - \langle S_i \rangle) \right]^2 \right\rangle \geq 0, \quad (6.21)$$

l'égalité n'étant possible que pour une valeur de  $S$  certaine, situation triviale que nous excluons. La matrice  $W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H})$  est donc définie positive, ce qui équivaut à dire que toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

*Limite thermodynamique.* Dans la limite thermodynamique, la question de l'inversibilité devient plus subtile et est intimement liée à l'existence de transitions de phase. En effet,  $W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H})$  peut avoir des valeurs propres qui s'accumulent à l'infini pour certaines valeurs de  $\mathbf{H}$ . Ceci correspond à un point de transition de phase. Dans ces conditions,  $\partial^2 \Gamma(\mathbf{M}) / \partial M_i \partial M_j$  peut avoir des valeurs propres nulles et la relation (6.18)

$$H_i = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_i},$$

n'est plus localement inversible.

Une autre situation peut être réalisée où les dérivées partielles de  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  ont des discontinuités. Alors, la transformation de Legendre n'est plus bijective : c'est la situation réalisée dans les systèmes ayant une transition de phase dans la région à plusieurs phases.

### 6.3.2 Fonctions de vertex

Les coefficients du développement du potentiel thermodynamique en puissances de l'aimantation locale  $M(x)$ ,

$$\Gamma(\mathbf{M}) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} \Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) M(x_1) M(x_2) \dots M(x_n), \quad (6.22)$$

sont appelés *fonctions de vertex* ou fonctions de corrélation *1-irréductibles* (pour des raisons qui seront précisées dans le chapitre 12).

Dans des modèles à interactions de courte portée (c'est-à-dire les modèles statistiques qui nous intéressent), ces fonctions ont de meilleures propriétés de décroissance que les fonctions de corrélation connexes et donc, pour des systèmes invariants par translation, leurs transformées de Fourier

$$(2\pi)^d \delta \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{x_1, \dots, x_n} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j \right) \quad (6.23)$$

ont de meilleures propriétés de régularité.

*Fonctions à deux points.* Dans un système invariant par translation, appliquant la relation (6.14) au cas  $n = 2$ , on trouve

$$\widetilde{W}^{(2)}(p) = \sum_x W^{(2)}(0, x) e^{ix \cdot p}, \quad (6.24)$$

où le deuxième argument  $-p$  est généralement omis.

La condition de positivité devient simplement

$$\widetilde{W}^{(2)}(p) > 0.$$

De même,

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \sum_x \Gamma^{(2)}(0, x) e^{ix \cdot p}. \quad (6.25)$$

La relation entre les transformées de Fourier est alors algébrique :

$$\widetilde{W}^{(2)}(p) \widetilde{\Gamma}^{(2)}(p) = 1. \quad (6.26)$$

*Remarque.* Cette propriété se généralise à la fonction à  $n$  points. Dans un système invariant par translation, en représentation de Fourier, les relations entre fonctions connexes et fonctions de vertex n'impliquent aucune intégration.

*Potentiel thermodynamique en champ uniforme et représentation de Fourier.* Utilisant les arguments de la section 6.2.2, qui ont conduit à la représentation (6.16), on relie la densité de potentiel thermodynamique et la représentation de Fourier :

$$\mathcal{G}(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \widetilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0). \quad (6.27)$$

### 6.3.3 Modèle gaussien

Considérons la fonction de partition donnée par l'intégrale gaussienne

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left( \prod_i dS_i \right) \exp \left[ -\mathcal{H}(\mathbf{S}) + \sum_i H_i S_i \right]$$

avec

$$\mathcal{H}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathfrak{S}_{ij} S_i S_j, \quad (6.28)$$

où la matrice  $\mathfrak{S}_{ij}$  est définie positive. Alors,

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) - \mathcal{W}(0) = \ln(\mathcal{Z}(\mathbf{H})/\mathcal{Z}(0)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} H_i [\mathfrak{S}^{-1}]_{ij} H_j.$$

On en déduit l'aimantation locale

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial H_i} = \sum_j [\mathfrak{S}^{-1}]_{ij} H_j \Rightarrow H_i = \sum_j \mathfrak{S}_{ij} M_j.$$

Enfin, le potentiel thermodynamique est donné par

$$\Gamma(\mathbf{M}) = -\mathcal{W}(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_i \mathfrak{S}_{ij} M_j.$$

La transformée de Legendre d'une forme quadratique est aussi une forme quadratique. De plus,  $\Gamma(\mathbf{M})$  est directement relié à la forme quadratique (6.28) qui apparaît dans l'intégrale initiale, à une constante additive près. En effet,

$$\Gamma(\mathbf{M}) = -\mathcal{W}(0) + \mathcal{H}(\mathbf{M}).$$

*Invariance par translation.* Dans un système invariant par translation et en champ uniforme  $H_i = H$ , l'aimantation est uniforme. De plus, pour un cube  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{Z}^d$  de volume  $\Omega$ , avec conditions aux limites périodiques

$$\mathfrak{S}_{ij} \equiv \mathfrak{S}(x_i - x_j),$$

la densité de potentiel thermodynamique est alors

$$\mathcal{G}(M) = \frac{1}{\Omega} \Gamma(M) = \mathcal{G}(0) + \frac{1}{2\Omega} \sum_{x, x' \in \mathcal{C}} \mathfrak{S}(x - x') M^2 = \mathcal{G}(0) + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{C}} \mathfrak{S}(x) M^2.$$

Si la somme sur  $x$  converge, on peut prendre la limite du volume infini. Introduisant la transformée de Fourier de la fonction  $\mathfrak{S}(x)$ ,

$$\tilde{\mathfrak{S}}(k) = \sum_x e^{ik \cdot x} \mathfrak{S}(x),$$

on peut récrire l'expression

$$\mathcal{G}(M) = \mathcal{G}(0) + \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{S}}(0) M^2. \quad (6.29)$$

## 6.4 Transformation de Legendre et méthode du col

La relation entre transformation de Legendre et méthode du col explique en partie le rôle important joué par le potentiel thermodynamique.

Considérons la fonction de partition dans un champ externe  $H_i$ ,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left( \prod_i dS_i \right) e^{-\mathcal{H}(\mathbf{S}) + \sum_i H_i S_i},$$

où  $\mathcal{H}$ , comme fonction des variables  $S_i$ , a des propriétés d'analyticité telles que la méthode du col soit applicable au calcul de l'intégrale.

Les cols sont donnés par (*cf.* section 2.7.2)

$$H_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_i}. \quad (6.30)$$

Nous supposons que l'équation a une solution unique. L'ordre dominant est obtenu en remplaçant  $\mathbf{S}$  dans l'intégrant par sa valeur au col. On trouve

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) = \mathcal{W}_0(\mathbf{H}) = -\mathcal{H}(\mathbf{S}) + \sum_i H_i S_i,$$

où  $\mathbf{S}$  est une fonction de  $\mathbf{H}$  à travers l'équation du col (6.30). Nous observons que la relation entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}$  est une transformation de Legendre. Par ailleurs,

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_i} = S_i(\mathbf{H})$$

et donc,

$$\Gamma(\mathbf{M}) = \Gamma_0(\mathbf{M}) = \mathcal{H}(\mathbf{M}).$$

Le deuxième ordre de la méthode du col est ensuite donné par l'intégration gaussienne (équation (2.49)). Négligeant les facteurs  $2\pi$ , on obtient

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{H}) = -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial S_i \partial S_j}.$$

Utilisant la propriété de stationnarité (6.20), on en déduit

$$\Gamma_1(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\partial^2 \mathcal{H}(\mathbf{M})}{\partial M_i \partial M_j}. \quad (6.31)$$

Appliquée à l'exemple gaussien, la méthode du col est évidemment exacte.

Plus généralement, les fonctionnelles  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  et  $\Gamma(\mathbf{M})$  peuvent être développées à tous les ordres de la méthode du col :

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) = \sum_{\ell=0} \mathcal{W}_\ell(\mathbf{H}), \quad \Gamma(\mathbf{M}) = \sum_{\ell=0} \Gamma_\ell(\mathbf{M}).$$

Nous verrons en section 12.4 que, du point de vue des diagrammes de Feynman,  $\ell$  compte alors le nombre de boucles des diagrammes.

## 6.5 Fonctions de vertex à deux et quatre points

Nous avons exhibé la relation entre fonction à deux points connexe et fonction de vertex à deux points. Etablissons, comme un exercice qui sera utile pour la suite, la relation entre fonctions à quatre points dans le cas de distributions de spin invariantes par la réflexion  $S_i \mapsto -S_i$ .

On part de l'identité établie précédemment

$$\sum_k \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_k} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_k \partial H_j} = \delta_{ij}.$$

On dérive par rapport à  $M_l$ ,

$$\sum_k \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial M_l \partial M_i \partial M_k} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_k \partial H_j} + \sum_{k,m} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_k} \frac{\partial^3 \mathcal{W}}{\partial H_m \partial H_k \partial H_j} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_m \partial M_l} = 0, \quad (6.32)$$

où nous avons de nouveau utilisé

$$H_m = \frac{\partial \Gamma}{\partial M_m} \Rightarrow \frac{\partial H_m}{\partial M_l} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_m \partial M_l}.$$

L'identité (6.32) peut être réécrite

$$\frac{\partial^3 \Gamma}{\partial M_{i_1} \partial M_{i_2} \partial M_{i_3}} = - \sum_{j_1, j_2, j_3} \frac{\partial^3 \mathcal{W}}{\partial H_{j_1} \partial H_{j_2} \partial H_{j_3}} \prod_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_{j_k} \partial M_{i_k}}. \quad (6.33)$$

Introduisons la notation

$$W_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} = \left. \frac{\partial^4 \mathcal{W}}{\partial H_{i_1} \partial H_{i_2} \partial H_{i_3} \partial H_{i_4}} \right|_{H=0},$$

$$\Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} = \left. \frac{\partial^4 \Gamma}{\partial M_{i_1} \partial M_{i_2} \partial M_{i_3} \partial M_{i_4}} \right|_{M=0}.$$

Nous dérivons à nouveau (6.33) par rapport à  $M$  et nous prenons la limite  $M = 0$ . À cause de la symétrie de réflexion, les fonctions de corrélation en champ nul d'un nombre impair de spins s'annulent dans la phase symétrique. Nous utilisons ici cette propriété pour la fonction à trois points. Nous en déduisons

$$\Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} = - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4} W_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{(4)} \prod_{k=1}^4 \Gamma_{i_k j_k}^{(2)}, \quad (6.34)$$

ou de façon équivalente

$$W_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{(4)} = - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} \prod_{k=1}^4 W_{i_k j_k}^{(2)}.$$

L'identité générale, incluant une fonction à trois points non triviale, a une représentation graphique donnée par la figure 12.4 en section 12.1.

*Exemple.* En section 2.5, nous avons calculé le développement perturbatif à l'ordre  $\lambda^2$  des fonctions de corrélation à deux et quatre points connexes avec le poids  $e^{-\mathcal{H}(x)} / \mathcal{Z}$ , où

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \frac{1}{4!} \lambda \sum_{i=1}^n x_i^4. \quad (6.35)$$

Nous l'avons exprimé en termes de la fonction à deux points  $\Delta$  de la limite gaussienne, inverse de la matrice  $\mathbf{A}$  d'éléments  $A_{ij}$  :

$$\Delta = \mathbf{A}^{-1}.$$

L'application de l'identité (6.34) aux développements perturbatifs (2.28, 2.33) des fonctions à deux et quatre points conduit à

$$\begin{aligned}\Gamma_{i_1 i_2}^{(2)} &= A_{i_1 i_2} + \frac{1}{2} \lambda \delta_{i_1 i_2} \Delta_{i_1 i_1} - \lambda^2 \left( \frac{1}{4} \delta_{i_1 i_2} \Delta_{i_1 j}^2 \sum_j \Delta_{jj} + \frac{1}{6} \Delta_{i_1 i_2}^3 \right) + O(\lambda^3). \\ \Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} &= \lambda \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_1 i_4} - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \Delta_{i_1 i_3}^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \Delta_{i_1 i_4}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \Delta_{i_1 i_2}^2 + O(\lambda^3).\end{aligned}\quad (6.36)$$

On note que dans les fonctions de vertex tous les diagrammes de Feynman un-réductibles, c'est-à-dire qui peuvent être rendus non connexes en coupant une seule ligne, ont disparu (figures 2.4, 2.5, 2.6).

Si les indices représentent les sites d'un réseau cubique auxquels nous associons des coordonnées  $x$  et si nous supposons l'invariance par translation,

$$A_{ij} \equiv A(x(i) - x(j)) \Rightarrow \Delta_{ij} \equiv \Delta(x(i) - x(j)),$$

ces équations peuvent se récrire

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(x) &= A(x) + \frac{1}{2} \lambda \delta(x) \Delta(0) \\ &\quad - \lambda^2 \left( \frac{1}{4} \delta(x) \Delta(0) \sum_y \Delta^2(y) + \frac{1}{6} \Delta^3(x) \right) + O(\lambda^3); \\ \Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \lambda \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) \Delta^2(x_1 - x_3) \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4) \Delta^2(x_1 - x_4) \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta(x_1 - x_4) \delta(x_2 - x_3) \Delta^2(x_1 - x_2) + O(\lambda^3).\end{aligned}\quad (6.37)$$

Introduisant la représentation de Fourier de la fonction à deux points gaussienne,

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \, e^{-ip \cdot x} \tilde{\Delta}(p), \quad A(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \, e^{-ip \cdot x} \tilde{A}(p),$$

et donc,

$$\tilde{A}(p) \tilde{\Delta}(p) = 1$$

(les composantes du vecteur  $p$  varie sur un intervalle  $2\pi$ ), on peut récrire ce développement en représentation de Fourier

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \tilde{A}(p) + \frac{1}{2} \lambda O - \frac{1}{4} \lambda^2 O B(0) - \frac{1}{6} \lambda^2 C(p) + O(\lambda^3), \quad (6.38a)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \lambda - \frac{1}{2} \lambda^2 [B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) + B(p_1 + p_4)] \\ &\quad + O(\lambda^3),\end{aligned}\quad (6.38b)$$

avec

$$O = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\Delta}(k), \quad (6.39a)$$

$$B(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\Delta}(k) \tilde{\Delta}(p-k), \quad (6.39b)$$

$$C(p) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int d^d k_1 d^d k_2 \tilde{\Delta}(k_1) \tilde{\Delta}(k_2) \tilde{\Delta}(p-k_1-k_2). \quad (6.39c)$$

## Exercices

**Exercice 6.1.** *Méthode du col et développement perturbatif.* Retrouver les contributions aux fonctions de vertex à deux et quatre points d'ordre  $\lambda$  et  $\lambda^2$ , respectivement, dans le développement (6.36) en développant en puissances de  $\lambda$  l'expression (6.31), obtenue par la méthode du col.

*Solution.* Dans l'exemple (6.35), l'expression (6.31) s'écrit

$$\Gamma_1(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\partial^2 \mathcal{H}(\mathbf{M})}{\partial M_i \partial M_j} = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left( A_{ij} + \frac{1}{2} \lambda M_i^2 \delta_{ij} \right).$$

Comme  $\text{tr} \ln = \ln \det$ ,

$$\text{tr} \ln \mathbf{A} \mathbf{B} = \text{tr} \ln \mathbf{A} + \text{tr} \ln \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \text{tr} \ln (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr} \ln \mathbf{A} + \text{tr} \ln (\mathbf{1} + \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}).$$

Donc,

$$\Gamma_1(\mathbf{M}) - \Gamma_1(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left( \mathbf{1} + \frac{1}{2} \lambda \mathbf{K} \right),$$

avec  $(\Delta \mathbf{A} = \mathbf{1})$

$$K_{ij} = M_i^2 \Delta_{ij}.$$

Utilisant

$$\text{tr} \ln (\mathbf{1} + \frac{1}{2} \lambda \mathbf{K}) = \frac{1}{2} \lambda \text{tr} \mathbf{K} - \frac{1}{8} \lambda^2 \text{tr} \mathbf{K}^2 + O(\lambda^3),$$

on obtient

$$\Gamma_1(\mathbf{M}) - \Gamma_1(\mathbf{0}) = \frac{1}{4} \lambda \sum_i M_i^2 \Delta_{ii} - \frac{1}{16} \lambda^2 \sum_{i,j} M_i^2 \Delta_{ij}^2 M_j^2 + O(\lambda^3).$$

Dérivant deux puis quatre fois par rapport à  $M_i$ , on retrouve, dans la limite  $M_i = 0$ , les contributions d'ordre  $\lambda$  à  $\Gamma^{(2)}$  et  $\lambda^2$  à  $\Gamma^{(4)}$  dans (6.36) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial M_{i_1} \partial M_{i_2}} \right|_{\mathbf{M}=0} &= \frac{1}{2} \lambda \Delta_{i_1 i_1} \delta_{i_1 i_2}, \\ \left. \frac{\partial^4 \Gamma_1}{\partial M_{i_1} \partial M_{i_2} \partial M_{i_3} \partial M_{i_4}} \right|_{\mathbf{M}=0} &= -\frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \Delta_{i_1 i_3}^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \Delta_{i_1 i_4}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \Delta_{i_1 i_2}^2. \end{aligned}$$

## Chapitre 7

# Transitions de phase : généralités et exemples

AVANT D'ABORDER L'ÉTUDE des propriétés des transitions de phase continues ou du second ordre dans le cadre de la mécanique statistique classique, nous voulons d'abord rappeler quelques subtilités de la notion générale de transition de phase. Pour ce qui suit, il est utile, mais pas indispensable, de connaître la phénoménologie élémentaire des transitions de phase dans des systèmes simples comme les systèmes liquide-vapeur ou les systèmes magnétiques.

Une première remarque importante est que les transitions de phase ne sont possibles que dans des systèmes de volume infini, c'est-à-dire des systèmes ayant un nombre infini de degrés de liberté. Ceci montre déjà que le concept de transitions de phase n'est pas en soi quelque chose d'évident.

Les modèles que nous examinerons, et qui exhibent des transitions de phase, ont la propriété suivante : suivant la valeur d'un paramètre de contrôle, en général la température, le système peut être dans une région à une ou au contraire à plusieurs phases. Ces phases se distinguent par des sensibilités différentes aux conditions aux limites. La région à une seule phase ne garde pas trace de la manière spécifique dont la limite thermodynamique, c'est-à-dire de volume infini, est atteinte. Il n'en est pas de même dans la région à plusieurs phases où, par exemple, certaines fonctions de corrélation dépendent de la façon dont la limite thermodynamique est prise. Chaque limite distincte correspond à une phase.

Pour les modèles simples que nous allons étudier, il est possible de trouver des observables locales dont les valeurs discriminent entre les différentes phases. On appelle une telle observable *paramètre d'ordre*. Par exemple, le spin est un paramètre d'ordre pour les transitions ferromagnétiques.

De plus, dans ces modèles, la transition de phase est associée à une *brisure spontanée de symétrie*. Par exemple, le poids statistique du modèle d'Ising ne change pas quand on change le signe de tous les spins. On s'attend donc

à ce que la valeur moyenne du spin soit nulle. Cependant, si l'on ajoute à l'énergie d'interaction un terme qui brise explicitement la symétrie du système (un terme de champ magnétique pour un système ferromagnétique), qu'on prend la limite de volume infini et qu'on fait tendre ensuite l'amplitude du terme de brisure vers zéro, deux cas peuvent se présenter : dans la région de paramètre à une phase unique, la symétrie est restaurée en ce sens que toutes les fonctions de corrélation ont la symétrie du modèle ; dans la région de brisure de symétrie spontanée au contraire, la limite thermodynamique et la limite de brisure nulle ne commutent pas. Dans le cas des spins, on trouve une valeur moyenne du spin non-nulle, c'est-à-dire une *aimantation spontanée*. Le signe de l'aimantation spontanée dépend du signe du champ magnétique qui tend vers zéro.

Une autre caractérisation simple et assez générale d'une transition de phase est dynamique. On appelle ici espace de configuration l'ensemble des configurations possibles d'un système. Par exemple, si nous considérons le modèle d'Ising, un modèle de spins classiques sur réseau où chaque spin ne peut prendre que deux valeurs, alors l'espace de configuration pour  $\Omega$  spins est un ensemble de  $2^\Omega$  éléments.

Considérons alors une dynamique aléatoire ou déterministe dans l'espace de configurations qui admet, comme distribution asymptotique (on parle aussi de distribution d'équilibre), le poids de Boltzmann d'un modèle exhibant une transition de phase. Un exemple d'une telle dynamique est l'équation d'évolution (3.21) de la marche au hasard qui conduit à une distribution gaussienne (mais qui n'exhibe pas de transition de phase). Les transitions que nous allons considérer ont alors le caractère suivant : aussi longtemps que le volume du système est fini, tout élément de l'espace de configuration a une probabilité non nulle d'être atteint au cours de l'évolution temporelle et ceci, quelle que soit la température (si le système n'est pas discret comme dans le modèle d'Ising, *tout élément* doit être remplacé par un élément de volume de l'espace de configuration aussi petit soit-il) et quel que soit le point de départ. On dit que le système est *ergodique*. Si le système converge alors vers un état d'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire une distribution de probabilité invariante par la dynamique, les moyennes temporelles tendent vers les moyennes calculées en sommant sur toutes les configurations de l'espace de configuration avec le poids de Boltzmann.

En revanche, dans la limite du volume infini (à densité fixée pour un système de particules), suivant les valeurs de la température, le système peut soit rester ergodique, ou au contraire subir une *brisure d'ergodicité*. Dans ce dernier cas, l'espace de configuration se décompose en sous-ensembles disjoints. Quand le système est préparé initialement dans un de ces sous-ensembles, il y reste. Par exemple, pour un système de type Ising en dessous de la température critique, les deux sous-ensembles correspondent aux deux valeurs opposées de l'aimantation spontanée.

Notre but est d'analyser le comportement des quantités thermodynamiques au voisinage d'une transition, en particulier leurs singularités comme fonctions de la température. Nous avons déjà souligné le rôle de la longueur de corrélation. Les transitions qui vont nous intéresser plus particulièrement sont celles pour laquelle la longueur de corrélation diverge à la transition.

Toutefois, avant de discuter les transitions de phase par des méthodes plus élaborées, nous illustrons certains aspects élémentaires des propriétés générales décrites ci-dessus en étudiant le comportement de certains systèmes ferromagnétiques simples sur réseau.

Nous commençons l'étude des transitions de phase par un modèle simple, mais un peu pathologique, correspondant suivant l'interprétation à une limite de dimension d'espace infinie ou de forces à longue portée. Ce modèle peut être résolu par des méthodes élémentaires et présente une transition de phase de type *champ moyen* ayant certaines propriétés du modèle quasi-gaussien, comme on le verra par la suite.

Nous mettons en évidence les propriétés universelles des comportements des quantités thermodynamiques à la transition (appelés comportements critiques).

Nous examinons ensuite les propriétés d'un système ferromagnétique avec interactions de proches voisins et dimension d'espace fixé. Un tel système n'admet pas en général de solution exacte. Cependant, des arguments de basse et haute température (qui peuvent être rendus rigoureux) permettent de montrer de façon convaincante, dans la limite du volume infini, l'existence de transitions de phase dans des systèmes de type Ising, c'est-à-dire avec une symétrie de réflexion.

Dans le cas d'interactions de proches voisins, une matrice de transfert peut être définie. La limite thermodynamique (de volume infini) est alors dominée par la valeur propre la plus grande de la matrice. La possibilité d'une transition de phase est reliée à la divergence de la longueur de corrélation, et donc à une valeur propre dominante dégénérée (multiple).

Le modèle d'Ising est un exemple caractéristique des modèles avec symétries discrètes, c'est-à-dire correspondant à des groupes finis. Une conclusion importante qui se dégage des arguments intuitifs (mais qui peuvent être rendus rigoureux) que nous présentons, est la suivante : les transitions de phase avec interactions de courte portée et brisure spontanée de symétrie, qui nous intéressent particulièrement, ne sont possibles qu'à partir de la dimension 2 pour les brisures de symétrie correspondant à des groupes discrets et 3 pour des groupes continus.

*Modèles ferromagnétiques de type Ising.* Les exemples que nous étudions dans ce chapitre appartiennent de nouveau à la classe des modèles ferromagnétiques classiques introduits au chapitre 6. À chaque site du réseau cubique sont attachées des variables aléatoires (réelles) ou spins classiques  $S_i$ , où l'indice  $i$  caractérise le site du réseau ( $i$  est une écriture symbolique pour les  $d$  coordonnées entières, c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{Z}^d$ ).

Nous considérons le poids statistique, ou poids de Boltzmann,

$$\mathcal{Z}^{-1}(H) \left( \prod_i \rho(S_i) \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) + H \sum_i S_i \right],$$

où  $\beta$  est l'inverse de la température et le champ magnétique  $H$  inclut un facteur de température  $\beta H \mapsto H$ .  $\rho(S)$  est la distribution de spin (normalisée) en chaque site et  $\mathcal{E}(\mathbf{S})$  est l'énergie d'interaction des spins en champ nul. Enfin,  $\mathcal{Z}(H)$  est la fonction de partition (*cf.* expression (6.1))

$$\mathcal{Z}(H) = \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) + H \sum_i S_i \right]. \quad (7.1)$$

De plus, nous supposons maintenant,

- (i) que le modèle en champ nul a une symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ , et donc  $\mathcal{E}(\mathbf{S}) = \mathcal{E}(-\mathbf{S})$  ainsi que  $\rho(S) = \rho(-S)$ ,
- (ii) que la distribution de spin  $\rho(S)$  décroît, pour  $|S| \rightarrow \infty$ , plus vite qu'une gaussienne :

$$\int_S^\infty \rho(S') dS' \leq K e^{-\mu S^\alpha}, \quad \mu > 0, \quad \alpha > 2. \quad (7.2)$$

Plus loin dans ce chapitre, en section 7.5.2, nous généralisons l'analyse à des systèmes où le spin est un vecteur à  $\nu$  composantes et le groupe de symétrie  $\mathbb{Z}_2$  est remplacé par le groupe orthogonal  $O(\nu)$  des rotations-réflexions de l'espace à  $\nu$  dimensions.

## 7.1 Température infinie ou spins indépendants

Pour mettre en oeuvre les concepts théoriques précédents, établir un ensemble de notations et quelques propriétés élémentaires, nous considérons d'abord un modèle à température infinie ( $\beta = 0$ ) ou sans interaction. Nous sommes alors ramenés à un ensemble de spins indépendants et donc à une situation analogue au théorème de la limite centrale (section 3.1), mais dans un cadre plus spécifique.

### 7.1.1 Modèle à un site

La fonction de partition du modèle à un site est

$$z(h) = \int ds \rho(s) e^{sh}, \quad z(0) = 1. \quad (7.3)$$

Elle est obtenue à partir de la transformée de Fourier de la distribution de spin par prolongement analytique  $h \mapsto ih$  (cf. aussi section 2.1). Elle est une fonction génératrice des moments de la distribution en champ  $h$ .

Par exemple, pour le modèle d'Ising où  $s$  ne prend que deux valeurs,  $s = \pm 1$ , avec probabilité  $1/2$ , on trouve

$$z(h) = \cosh h.$$

La condition de décroissance (7.2) implique que l'intégrale converge pour tout  $h$  réel ou complexe et la fonction  $z(h)$  est donc entière. Elle est paire, à cause de la symétrie  $s \mapsto -s$  de la distribution, et positive pour  $h$  réel. De plus,

$$z'(h) = \int ds \rho(s) s e^{sh} = \int ds \rho(s) s \sinh(sh) \Rightarrow h z'(h) \geq 0.$$

La fonction  $z(h)$  est croissante pour  $h > 0$  et décroissante pour  $h < 0$ .

Enfin, la borne (7.2) implique que l'intégrale

$$K(\lambda) = \int ds \rho(s) e^{\lambda|s|^\alpha}$$

converge pour  $\lambda < \mu$ . Donc,

$$\begin{aligned} z(h) &= \int ds \rho(s) e^{\lambda|s|^\alpha} e^{-\lambda|s|^\alpha + h s} \leq K(\lambda) \max_{\{s\}} e^{-\lambda|s|^\alpha + |h||s|} \\ &\leq K(\lambda) \exp \left( \text{const. } |h|^{\alpha/(\alpha-1)} \right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Puisque  $\alpha > 2$ , on trouve l'inégalité

$$\alpha/(\alpha-1) < 2.$$

La fonction génératrice des cumulants

$$A(h) = \ln z(h) \quad (7.5)$$

est paire et, puisque  $z(h)$  est strictement positive, holomorphe dans un voisinage de l'axe réel. Sa dérivée est impaire et s'annule à  $h = 0$ . De plus, la remarque (6.5) implique  $A''(h) > 0$  et la fonction  $A(h)$  est donc convexe. Elle est croissante pour  $h > 0$ .

Enfin, comme conséquence de la condition (7.2), pour une grande classe de distributions  $\rho(s)$ , la variable aléatoire  $s$  tend vers une valeur certaine  $s(h)$  quand  $|h| \rightarrow \infty$  et  $A''(h)$ , le second cumulant en champ, tend donc vers zéro :

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} A''(h) = 0. \quad (7.6)$$

Nous nous limiterons à cette classe par la suite.

Pour ce qui suit, nous paramétrons le développement de  $A$  à  $h = 0$  sous la forme

$$A(h) = \sum_{p=1} \frac{a_{2p}}{2p!} h^{2p}, \quad a_2 > 0. \quad (7.7)$$

La valeur  $m = A'(h)$  est l'aimantation en champ  $h$ .

En plus de ces fonctions déjà introduites en section 3.1, nous définissons aussi la transformée de Legendre  $B(m)$  de  $A(h)$  par

$$B(m) + A(h) = mh, \quad m = A'(h). \quad (7.8)$$

Dans l'exemple du modèle d'Ising ( $s = \pm 1$ ), on trouve

$$B(m) = \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) + \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m). \quad (7.9)$$

La fonction  $B(m)$  est paire. L'aimantation  $m$  a le signe de  $h$ .

La relation (6.8) implique

$$B''(m) = 1/A''(h). \quad (7.10)$$

Parce que  $A(h)$  est une fonction convexe de  $h$ ,  $B(m)$  est aussi convexe. Elle est analytique dans un voisinage de l'origine. Nous pouvons donc la paramétrer sous la forme

$$B(m) = \sum_{p=1} \frac{b_{2p}}{2p!} m^{2p}, \quad b_2 > 0. \quad (7.11)$$

Les coefficients  $b_p$  sont reliés aux coefficients (7.7) du développement de  $A(h)$ . Par exemple,

$$b_2 = 1/a_2, \quad b_4 = -a_4/a_2^4.$$

Dans le modèle d'Ising, on trouve

$$b_2 = 1, \quad b_4 = 2.$$

Enfin, la condition (7.6) entraîne soit que  $|m|$  est borné soit que  $B(m)$  croît plus vite que  $m^2$  pour  $|m| \rightarrow \infty$ .

### 7.1.2 Spins indépendants

*Fonction de partition.* En l'absence d'interactions ( $\mathcal{E} = 0$ ), ou pour  $\beta = 0$  (c'est-à-dire à température infinie), la fonction de partition (7.1) se calcule immédiatement :

$$\begin{aligned} Z_0(H) &= \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left( H \sum_i S_i \right) = \int \prod_i dS_i \rho(S_i) e^{HS_i} \\ &= \prod_i \int dS_i \rho(S_i) e^{HS_i} = (z(H))^\Omega, \end{aligned} \quad (7.12)$$

où  $\Omega$  est le nombre de sites et  $z(h)$  la fonction (7.3).

*Énergie libre.* La densité d'énergie libre est alors

$$W_0(H) = \frac{1}{\Omega} \ln Z_0(H) = A(H), \quad (7.13)$$

où  $A(h)$  est définie en (7.5). L'aimantation s'en déduit :

$$M = \frac{1}{\Omega} \sum_i \langle S_i \rangle = A'(H).$$

*Potentiel thermodynamique.* La densité de potentiel thermodynamique, transformée de Legendre de  $W_0(H)$ , est donnée par

$$\mathcal{G}_0(M) = MH - W_0(H) \quad \text{avec} \quad M = W'_0(H), \quad (7.14)$$

et donc,  $\mathcal{G}_0(M) = B(M)$  (définition (7.8)).

*Distribution du spin moyen et potentiel thermodynamique.* En section 6.1.3, nous avons relié la distribution  $R_\Omega$  du spin moyen  $\sigma$  sur le réseau au potentiel thermodynamique, sous l'hypothèse de régularité de l'énergie libre et du potentiel thermodynamique. Ces hypothèses sont toujours vérifiées en volume fini, et aussi pour des spins indépendants. La fonction  $B''(M)$  est toujours positive. L'application de l'évaluation asymptotique (6.11) donne ici

$$R_\Omega(\sigma) \underset{\Omega \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\Omega B''(M)/2\pi} e^{-\Omega B''(M)(\sigma-M)^2/2},$$

où  $M$  est l'aimantation. En champ nul,  $M = 0$  et la largeur de la gaussienne est liée à  $B''(0) = b_2$ .

## 7.2 Transitions de phase en dimension infinie

Il existe un modèle simple, mais un peu pathologique, qui peut être résolu exactement. Dans ce modèle, tous les spins sont couplés deux à deux. Ce modèle a deux interprétations. À dimension d'espace finie, c'est un modèle avec des interactions de portée infinie, c'est-à-dire très différentes de celles qui nous intéressent réellement. Mais il peut aussi être interprété comme un modèle avec des interactions de proches voisins, dans une limite où la dimension de l'espace tend vers l'infini. En effet, à dimension infinie, un site sur un réseau cubique a un nombre infini de voisins.

Dans ce modèle, chaque spin est soumis à l'action d'un nombre infini d'autres spins. Cette interaction peut être remplacée par l'action d'un champ magnétique moyen, et dans un tel modèle, l'approximation dite de *champ moyen* est exacte.

*Le modèle.* L'énergie d'interaction, en champ nul, du modèle est donnée par

$$\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) = -\frac{v}{\Omega} \sum_{i,j=1}^{\Omega} S_i S_j, \quad (7.15)$$

où le paramètre  $v$  est proportionnel à  $\beta$ , l'inverse de la température. Nous choisissons  $v > 0$ , ce qui favorise des spins de même signe : on dit que l'interaction est *ferromagnétique*.

Dans ce modèle, la distribution spatiale des spins ne joue aucun rôle de sorte que nous les numérotions simplement  $i = 1, \dots, \Omega$ . Par ailleurs, parce que le nombre de termes qui couplent les spins est d'ordre  $\Omega^2$ , pour que la limite thermodynamique existe, il faut diviser l'interaction par un facteur  $\Omega$ .

Nous supposons une distribution de spin en chaque site paire,  $\rho(S) = \rho(-S)$ , normalisée, et qui a toutes les propriétés décrites en section 7.1, en particulier, qui décroît plus vite qu'une gaussienne pour  $|S| \rightarrow \infty$ .

Comme la distribution spatiale des spins ne joue aucun rôle, la seule quantité physique intéressante est la fonction de partition dans un champ magnétique externe  $H$  que nous allons calculer exactement dans la limite thermodynamique  $\Omega \rightarrow \infty$ .

### 7.2.1 Distribution de spin moyen. Fonctions thermodynamiques

L'énergie d'interaction (7.15) peut aussi s'écrire

$$\beta\mathcal{E}(\mathbf{S}) = -\frac{v}{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{\Omega} S_i \right)^2.$$

Introduisons alors le spin moyen sur le réseau

$$\sigma = \frac{1}{\Omega} \sum_i S_i. \quad (7.16)$$

La fonction

$$R_{\Omega}(\sigma) = \Omega e^{\Omega v \sigma^2} \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i \right) \delta \left( \Omega \sigma - \sum_i S_i \right) \quad (7.17)$$

est, à une normalisation près, la distribution du spin moyen  $\sigma$ .

Il est possible d'intégrer sur les spins en passant en transformée de Fourier comme dans le cas du théorème de la limite centrale (représentation (3.8)). On utilise

$$\delta \left( \Omega \sigma - \sum_i S_i \right) = \frac{1}{2\pi} \int dk \exp \left[ ik \left( \Omega \sigma - \sum_i S_i \right) \right].$$

Introduisant la transformée (7.3) de la distribution et son logarithme (équation (7.5)),

$$z(\lambda) = \int ds \rho(s) e^{\lambda s}, \quad A(\lambda) = \ln z(\lambda),$$

on en déduit la représentation

$$R_{\Omega}(\sigma) = \frac{\Omega}{2\pi} e^{\Omega v \sigma^2} \int dk e^{\Omega [ik\sigma + A(-ik)]}. \quad (7.18)$$

Dans la limite thermodynamique  $\Omega \rightarrow \infty$ , cette intégrale se calcule par la méthode du col. Le col est donné par

$$\sigma = A'(-ik).$$

À l'ordre dominant de la méthode du col, et utilisant la définition (7.8) avec  $h = -ik$ ,  $m = \sigma$  et la relation (7.10), on trouve

$$R_{\Omega}(\sigma) \sim \sqrt{\Omega B''(\sigma)/2\pi} \exp [\Omega (v\sigma^2 - B(\sigma))]. \quad (7.19)$$

Posant

$$G(\sigma) = B(\sigma) - v\sigma^2, \quad (7.20)$$

on peut récrire l'expression

$$R_{\Omega}(\sigma) \sim \sqrt{\Omega B''(\sigma)/2\pi} \exp [-\Omega G(\sigma)]. \quad (7.21)$$

*Fonctions thermodynamiques.* La fonction de partition en champ est définie par

$$\mathcal{Z}_{\Omega}(H, v) = \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) + H \sum_{i=1}^{\Omega} S_i \right]. \quad (7.22)$$

Utilisant l'équation (7.17), on vérifie alors qu'elle est donnée par

$$\mathcal{Z}_{\Omega}(H, v) = \int d\sigma R_{\Omega}(\sigma) e^{\Omega H \sigma}, \quad (7.23)$$

et donc, pour  $\Omega \rightarrow \infty$ ,

$$\mathcal{Z}_{\Omega}(H, v) \sim \int d\sigma \sqrt{\Omega B''(\sigma)/2\pi} e^{\Omega [H\sigma - G(\sigma)]}.$$

Pour  $\Omega \rightarrow \infty$ , l'intégrale se calcule aussi par la méthode du col. À l'ordre dominant, dans le cas *d'un seul col dominant*, la densité d'énergie libre est donnée par

$$W(H, v) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \ln \mathcal{Z}_{\Omega}(H, v) = H\sigma - G(\sigma) \quad (7.24)$$

avec

$$H = G'(\sigma). \quad (7.25)$$

Cette expression a naturellement la forme d'une transformée de Legendre. La valeur moyenne  $M$  du spin, ou aimantation, est alors (utilisant l'équation (7.25))

$$M = \langle S_i \rangle = \frac{1}{\Omega} \sum_i \langle S_i \rangle = \frac{\partial W(H, v)}{\partial H} = \sigma(H). \quad (7.26)$$

La densité de potentiel thermodynamique s'en déduit immédiatement :

$$\mathcal{G}(M, v) = HM - W(H, v) = -vM^2 + B(M) = G(M). \quad (7.27)$$

L'aimantation  $M$  est aussi solution de

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M} = -2vM + B'(M), \quad (7.28)$$

une relation appelée *équation d'état*.

Nous analysons maintenant les solutions de l'équation de col (7.25) et discutons leur interprétation physique, en fonction des deux paramètres  $v$  et  $H$ .

### 7.2.2 Limites de basse et haute température

La nature des cols est liée au signe de la dérivée seconde

$$G''(\sigma) = B''(\sigma) - 2v.$$

La fonction  $B''(\sigma)$  est positive, continue et, avec nos hypothèses, tend vers l'infini quand  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .

*Haute température.* Pour  $v \rightarrow 0$ , c'est-à-dire à haute température du point de vue physique, et plus précisément pour

$$v \leq \min_{\sigma} \frac{1}{2} B''(\sigma),$$

la dérivée seconde  $G''(\sigma)$  est toujours positive et l'équation de col a une solution unique, qui correspond au maximum de l'intégrant.

Pour  $H = 0$ , elle se réduit à la solution triviale  $\sigma = 0$ . Pour  $H \rightarrow 0$ , la position du col, et donc l'aimantation  $M$ , deviennent (dans la paramétrisation (7.11))

$$M = \sigma(H) = \frac{1}{b_2 - 2v} H + O(H^2).$$

qui s'annulent donc en champ nul. Notons que les limites  $H \rightarrow 0$  et  $\Omega \rightarrow \infty$  commutent.

*Basse température.* En champ nul,  $H = 0$ , la solution  $\sigma = 0$  correspond à un maximum local de l'intégrant aussi longtemps que

$$v < v_c, \quad v_c = b_2/2,$$

mais, pour  $v > v_c$ , la dérivée seconde devient négative à  $\sigma = 0$  et cette solution correspond à un minimum. En revanche, pour  $|\sigma| \rightarrow \infty$ ,  $B''(\sigma)$  tend vers l'infini et la dérivée seconde est toujours positive. Ainsi, pour  $v > v_c$ ,  $G''(\sigma)$  a au moins un zéro et comme c'est une fonction paire elle en a au moins deux. Une paire de zéros opposés correspond à un maximum de l'intégrant. Il y a deux cols dominants dégénérés  $\pm\sigma_c$  qui donnent la même contribution à  $W(0, v)$ .

Pour  $H \neq 0$ , les deux solutions  $\pm\sigma_c$  sont déplacées, mais le point essentiel est que les deux cols ne sont plus à la même hauteur aussi petit que soit  $|H|$ . Pour  $\Omega \rightarrow \infty$ , un seul col contribue et l'on trouve une aimantation induite non nulle. Prenant ensuite la limite  $H \rightarrow 0$ , on trouve

$$\lim_{H \rightarrow 0} M \equiv \langle S_i \rangle = \lim_{H \rightarrow 0} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\partial W(H, v)}{\partial H} = \text{signe}(H) |\sigma_c|.$$

Cette fois, les limites ne commutent plus puisque les limites prises dans l'ordre inverse conduisent à une valeur nulle par symétrie.

Les conditions physiques du problème privilégient le résultat non trivial : en effet le point symétrique est l'équivalent d'un point d'équilibre instable en mécanique rationnelle. N'importe quelle brisure de symétrie, aussi faible soit-elle, induit une des deux solutions non-nulles.

Ce modèle présente donc une transition de phase qui a lieu pour une valeur de  $v \leq v_c$  entre une situation avec une phase unique et symétrique, et une situation à deux phases différentes symétriques l'une de l'autre. On parle, dans ce dernier cas, de *brisure spontanée de symétrie*.

Notons que dans cette situation, la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M, v)$  donnée par l'équation (7.27), n'est apparemment pas convexe, en contradiction avec les résultats généraux (6.5, 6.8). En réalité, elle n'est pas définie pour les valeurs de  $M$  telles que  $G''(M) < 0$ . En effet,

$$\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{\partial^2 W}{(\partial H)^2} > 0.$$

Par conséquent, on a toujours  $|M(H)| \geq |\sigma_c|$  et les valeurs intermédiaires  $|M| < |M(0)|$  ne peuvent pas être atteintes.

### 7.2.3 Distribution du spin moyen et transition de phase

Nous examinons maintenant, de façon plus détaillée, les propriétés thermodynamiques en champ magnétique nul.

L'analyse des cols se réduit alors à l'étude de la fonction  $R_\Omega$ , qui est proportionnelle à la distribution du spin moyen  $\sigma$ , sous la forme asymptotique (7.21) :

$$R_\Omega(\sigma) \sim \sqrt{\Omega B''(\sigma)/2\pi} \exp[-\Omega G(\sigma)],$$

et donc de la fonction  $G(\sigma)$ .

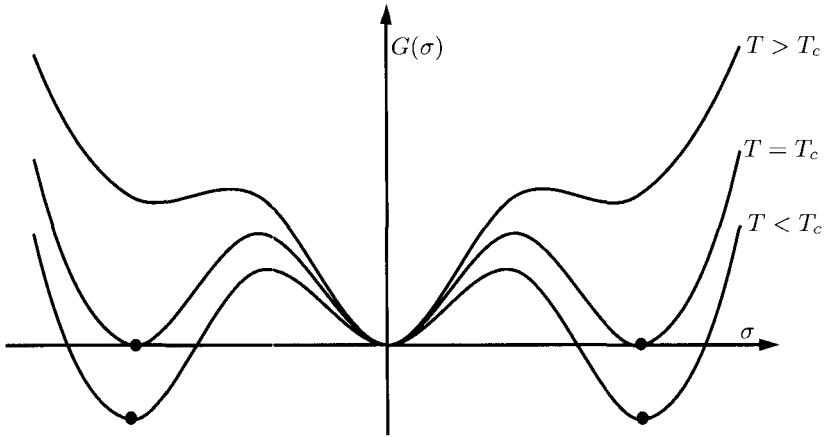


FIG. 7.1 – Potentiel thermodynamique : transition de phase du premier ordre.

Dans la limite thermodynamique, l'aimantation *spontanée*  $M$  est donnée par les minima absolus de  $G(\sigma)$  (équation (7.26)), dont il faut déterminer la position quand la température, et donc  $v$ , varie.

*Transition de phase du premier ordre.* La propriété (7.6) implique que pour  $|\sigma|$  assez grand,  $G(\sigma)$  est une fonction croissante. Pour  $v$  faible (c'est-à-dire à haute température),  $v\sigma^2$  est négligeable et le membre de droite de l'équation (7.20) est convexe. Le minimum de  $G(\sigma)$  est  $\sigma = 0$  ; l'aimantation s'annule. En général, quand  $v$  croît, on rencontre une valeur de  $v$  pour laquelle d'autres minima locaux apparaissent qui ensuite deviendront des minima absolus de  $G(\sigma)$ . Quand cela arrive, la valeur de l'aimantation  $M$  saute de façon discontinue de zéro à une valeur finie correspondant à ces nouveaux minima absolus. Le système subit une transition de phase du premier ordre. Les fluctuations autour du col sont gouvernées par la valeur de la dérivée seconde du potentiel au minimum. Dans cette situation, la dérivée seconde est strictement positive.

Bien que les transitions de phase du premier ordre soient communes, elles ne nous intéressent pas particulièrement ici. En même temps, l'approximation de champ moyen ou modèle quasi-gaussien (chapitre 8, et plus particulièrement la section 8.10) qui partage nombre de propriétés avec ce modèle en dimension infinie, donne une description qualitative satisfaisante de la physique.

*Transition de phase continue ou du second ordre.* Au contraire, si aucun minimum absolu n'apparaît à une distance finie de l'origine, finalement à une température critique  $T_c$ , correspondant à la valeur

$$v_c = \frac{1}{2}B''(0) = \frac{1}{2}b_2 \quad (7.29)$$

de  $v$ , l'origine cesse d'être un minimum de  $G$ , et au dessous de cette température, deux minima s'éloignent continûment de l'origine. Puisque l'aimantation

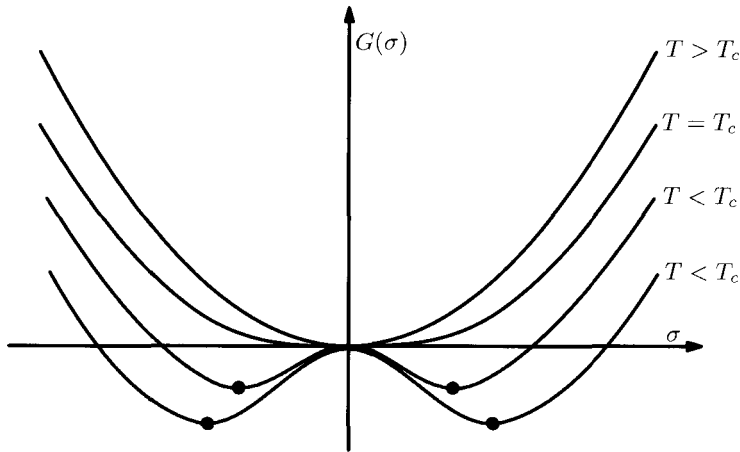


FIG. 7.2 – Potentiel thermodynamique : transition de phase du second ordre.

reste continue à  $v_c$ , la transition de phase est appelée continue ou du second ordre.

C'est la situation que nous analysons systématiquement maintenant.

Notons qu'à la transition, la distribution de spin moyen se comporte comme  $e^{-\Omega b_4 \sigma^4/24}$ , ce qui implique  $b_4 > 0$ , et qui est différent du comportement d'une somme de variables indépendantes. La corrélation entre un nombre infini de spins joue donc un rôle crucial.

*Remarque.* En champ nul, dans une situation de transition continue, exactement à la transition, la méthode du col simple ne s'applique plus puisque la fonction  $G(\sigma)$  est d'ordre  $\sigma^4$ . Mais ceci n'affecte, pour  $\Omega \rightarrow \infty$ , que les corrections aux fonctions thermodynamiques et non l'ordre dominant.

### 7.3 Universalité en dimension infinie

Nous examinons maintenant le comportement de quelques quantités thermodynamiques importantes quand la température  $T$  s'approche de  $T_c$ , c'est-à-dire  $v$  s'approche de  $v_c$  dans le cas d'une *transition continue*. Nous verrons plus tard que les résultats universels obtenus, dans le cadre de ces modèles en dimension infinie, sont identiques à ceux obtenus dans le cadre de la théorie du champ moyen ou du modèle quasi-gaussien.

L'aimantation tend vers zéro pour  $T \rightarrow T_c$  et  $H \rightarrow 0$ . Dans cette limite, nous pouvons donc développer  $\mathcal{G}(M, v)$  (équation (7.27)), qui comme  $B(M)$  est une fonction régulière paire, en séries de Taylor en  $M$ . Dans la paramétrisation (7.11),

$$\mathcal{G}(M, v) = -vM^2 + \frac{b_2}{2!}M^2 + \frac{b_4}{4!}M^4 + \dots \quad (7.30)$$

La convexité de  $B(M)$  implique que  $b_2$  est positif. Le paramètre  $b_4$  est aussi génériquement positif, parce que nous avons supposé qu'aucune transition du premier ordre n'a eu lieu à des températures plus élevées (la limite  $b_4 = 0$  mais avec  $b_6 > 0$  demande une analyse particulière et correspond à un point dit *tricritique*).

Pour  $v$  proche de  $v_c$  et un champ magnétique appliqué  $H$  uniforme et faible, les premiers termes contribuant à l'équation d'état (7.28) sont

$$H = 2(v_c - v)M + \frac{1}{6}b_4M^3 + O(M^5). \quad (7.31)$$

*Aimantation spontanée.* En champ nul, l'équation d'état se réduit à

$$\frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial M} = 0.$$

Pour  $v > v_c$  mais  $|v - v_c| \ll 1$ , cette équation a deux solutions

$$M \sim \pm [12(v - v_c)/b_4]^{1/2} \quad \text{pour } |v - v_c| \rightarrow 0, \quad (7.32)$$

qui sont les deux valeurs possibles de l'*aimantation spontanée*. À la température critique  $T_c$ , l'aimantation a donc un comportement en loi de puissances universel :

$$M \propto (T_c - T)^\beta \quad \text{avec } \beta = 1/2, \quad (7.33)$$

où la valeur  $\beta = \frac{1}{2}$  de l'exposant magnétique est la valeur quasi-gaussienne ou de champ moyen (aussi classique) de l'exposant.

*Susceptibilité magnétique.* L'inverse de la susceptibilité magnétique  $\chi$  (c'est-à-dire la réponse de l'aimantation à un changement de champ magnétique) est donnée par

$$\chi^{-1} = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)^{-1} = \frac{\partial H}{\partial M} = 2(v_c - v) + \frac{1}{2}b_4M^2 + O(M^4).$$

En champ nul, on trouve

$$\begin{aligned} \chi_+^{-1} &= 2(v_c - v) & T > T_c, \\ \chi_-^{-1} &= 4(v - v_c) & T < T_c, \end{aligned} \quad (7.34)$$

où l'équation (7.32) a été utilisée en dessous de  $T_c$ . La susceptibilité magnétique diverge donc à  $T_c$  avec des exposants de susceptibilité magnétique  $\gamma, \gamma'$  universels

$$\begin{aligned} \chi_+ &\sim C_+ (T - T_c)^{-\gamma}, & \gamma &= 1, \\ \chi_- &\sim C_- (T_c - T)^{-\gamma'}, & \gamma' &= 1, \end{aligned} \quad (7.35)$$

et le rapport des amplitudes des singularités a la valeur universelle

$$C_+/C_- = 2. \quad (7.36)$$

*Équation d'état.* Revenons à l'équation générale (7.31). À  $T_c$  ( $v = v_c$ ) pour  $H \rightarrow 0$ , on trouve

$$H \propto M^3. \quad (7.37)$$

On caractérise, plus généralement, le comportement de  $H$  à  $T_c$  pour  $M \rightarrow 0$  par l'exposant critique  $\delta$  :

$$H \propto M^\delta. \quad (7.38)$$

Ici,

$$\delta = 3, \quad (7.39)$$

qui est la valeur universelle quasi-gaussienne ou de champ moyen (aussi classique) de l'exposant.

Plus généralement, pour  $H, T - T_c \rightarrow 0$  et donc  $M \rightarrow 0$ , après un changement de normalisation de champ magnétique, température et aimantation, l'équation d'état peut être mise sous une forme d'échelle universelle,

$$H = M^\delta f((T - T_c)M^{-1/\beta}), \quad (7.40)$$

ce qui signifie que le rapport  $H/M^\delta$  n'est pas fonction des variables  $T$  et  $M$  indépendamment, mais seulement de la combinaison  $(T - T_c)/M^{1/\beta}$ .

La fonction  $f(x)$  peut se mettre sous la forme

$$f(x) = 1 + x. \quad (7.41)$$

La valeur  $x = -1$ , où  $H$  s'annule avec  $M$  non nul, correspond à la courbe de coexistence dans la région à deux phases, et redonne l'aimantation spontanée.

*Chaleur spécifique.* En champ nul, la dérivée par rapport à  $\beta$  (l'inverse de la température) de la densité d'énergie libre donne l'énergie moyenne. Comme  $v$  est proportionnel à  $\beta$ , on peut dériver par rapport à  $v$  (un changement d'unité de température). Nous avons démontré (équation (6.9)) pour tout paramètre, et donc cela s'applique à  $v$ , la relation

$$\frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial v} + \frac{\partial W(H)}{\partial v} = 0.$$

On en déduit

$$\left. \frac{\partial W(H)}{\partial v} \right|_{H=0} = M^2(H=0).$$

On trouve qu'au dessus de  $T_c$ , l'énergie moyenne s'annule et qu'au dessous de  $T_c$ , elle est proportionnelle au carré de l'aimantation spontanée. La dérivée de l'énergie moyenne par rapport à la température est la chaleur spécifique  $\mathcal{C}$ . Calculant la dérivée par rapport à  $v$  à  $v_c$ , on obtient un résultat proportionnel à la chaleur spécifique. Utilisant l'expression (7.32), on trouve

$$\mathcal{C}(T \rightarrow T_{c+}) = 0, \quad \mathcal{C}(T \rightarrow T_{c-}) = 12/b_4. \quad (7.42)$$

Dans ce modèle, comme dans l'approximation de champ moyen, la chaleur spécifique a donc une discontinuité à  $T_c$  dont la valeur *n'est pas universelle*.

*Remarques.*

- (i) D'autres modèles peuvent être résolus en dimension infinie par la même méthode. Par exemple, le spin peut être un vecteur dans  $\mathbb{R}^N$  et le modèle invariant par les transformations du groupe orthogonal  $O(N)$  des rotations-réflexion de l'espace à  $N$  dimensions. On vérifie que la plupart des propriétés d'universalité reste inchangée. En dimension infinie, les propriétés universelles dépendent peu du groupe de symétrie.
- (ii) Plus généralement, on peut définir des modèles avec interactions de portée finie en dimension d'espace  $d$  et calculer les quantités thermodynamiques sous forme d'un développement en  $1/d$ . Les corrections au modèle  $d = \infty$  ne modifient pas les quantités universelles.

## 7.4 Transformations, points fixes et universalité

Comme nous l'avons déjà fait aux chapitres 3 et 4, nous associons maintenant les propriétés d'universalité aux points fixes d'une transformation. Comme toutes les propriétés des modèles sont déterminées par la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$ , nous pouvons exprimer la transformation sur  $\mathcal{G}$  directement. Nous procédons de la manière suivante, nous regroupons les spins deux par deux, et pour chaque paire, nous intégrons sur un spin, la moyenne des deux étant fixée. Nous utilisons la représentation (7.18) qui exprime la distribution de spin moyen en termes d'une intégrale correspondant à un modèle de spins indépendants. Nous avons déjà noté que, dans ce cas, la fonction génératrice des cumulants avait une transformation simple (cf. section 3.2). Ici, on trouve

$$\mathcal{T} : \quad \Omega \mapsto \Omega/2, \quad v \mapsto 2v, \quad A(h) \mapsto 2A(h/2).$$

La transformée de Legendre  $B(M)$  de  $A$  est alors multipliée par un facteur 2. On en déduit la transformée du potentiel thermodynamique

$$[\mathcal{T}\mathcal{G}](M) = 2\mathcal{G}(M).$$

Comme en section 3.2, nous combinons cette décimation du nombre de variables aléatoires avec une renormalisation de l'aimantation :  $M \mapsto \zeta M$ , et la transformation générale devient

$$[\mathcal{T}\mathcal{G}](M) = 2\mathcal{G}(\zeta M).$$

L'équation de point fixe est donc

$$\mathcal{G}_*(M) = 2\mathcal{G}_*(\zeta M).$$

*Point fixe gaussien.* Comme la fonction  $\mathcal{G}(M)$  est holomorphe à  $M = 0$ , elle est développable en série de Taylor. Identifiant les coefficients de  $M^2$ ,

on trouve

$$v - b_2/2 = 2(v - b_2/2)\zeta^2.$$

Pour  $v \neq v_c = b_2/2$  et choisissant  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ , on trouve le point fixe

$$\mathcal{G}_*(M) = (b_2/2 - v)M^2.$$

La distribution de spin correspondant à ce point fixe est une distribution gaussienne, qui est une limite singulière des distributions que nous avons supposées. Par ailleurs, le point fixe n'est pertinent que pour  $v < v_c$ , domaine où l'aimantation spontanée s'annule.

Ce point fixe est stable en ce sens que le coefficient  $b_{2p}$  du terme d'ordre  $M^{2p}$  est multiplié par  $2^{1-p} < 1$  pour  $p > 1$ .

*Point fixe à la température critique.* Pour  $v = v_c$ , il faut développer jusqu'à l'ordre 4 et pour  $\zeta = 2^{-1/4}$ , on trouve le point fixe

$$\mathcal{G}_*(M) = \frac{b_4}{4!}M^4.$$

Notons que dans les deux cas  $\zeta < 1$ , ce qui permet de comprendre pourquoi le point fixe correspond au premier terme du développement en puissances de  $M$ .

Le coefficient  $b_{2p}$  devient

$$\mathcal{T}b_{2p} = 2^{1-p/2}b_{2p}.$$

De l'analyse de stabilité, on conclut donc :

- (i) Un terme en  $M^2$  est lié à une perturbation essentielle.
- (ii) Un terme en  $M^4$  est lié à des perturbations redondantes.
- (iii) Tous les autres termes correspondent à des perturbations inessentiels.

Par ailleurs, si nous interprétons le système comme un modèle de spin en dimension  $d$  avec interactions de portée infinie, alors le nombre de spins est proportionnel à  $L^d$  où  $L$  caractérise la dimension linéaire du réseau. Diviser le nombre de spins par deux correspond à diviser  $L$  par  $2^{1/d}$ . Il est alors commode d'exprimer le comportement des différentes variables en inverse d'unité de longueur (pour que la dimension des variables essentielles soit positive). Dans cette unité, l'aimantation a une dimension  $d/4$  et  $v - v_c$  a dimension  $d/2$ .

*Universalité dans le domaine critique.* Suivant une stratégie qui a déjà été utilisée en section 4.7.2, il est possible d'établir des propriétés d'universalité asymptotique dans un voisinage infinitésimal du point fixe, appelé domaine critique, de la manière suivante. On modifie la transformation  $\mathcal{T}$  en renormalisant la différence

$$v - v_c \mapsto (v - v_c)/\sqrt{2}.$$

Cela correspond à faire tendre la valeur initiale de  $v - v_c$  vers zéro. Dans ces conditions, le coefficient de  $M^2$  garde une valeur fixe alors que les coefficients des termes inessentiels tendent vers zéro. Asymptotiquement,

$$\mathcal{G}(M) = (v_c - v)M^2 + \frac{b_4}{4!}M^4,$$

c'est-à-dire une combinaison linéaire des termes de dimension  $d$ . Ceci conclut l'analyse pour  $H = 0$ .

*Transformation en champ  $H \neq 0$ .* Il faut rajouter à l'énergie libre le terme  $HM$  qui devient  $2\zeta HM$  et donc

$$\mathcal{T}H = 2\zeta H = 2^{3/4}H.$$

Le champ magnétique est donc une perturbation essentielle. Il a une dimension  $3d/4$ . De nouveau, pour que le terme de champ magnétique ait une limite finie, il faut renormaliser  $H$  en  $H2^{-3/4}$  ce qui correspond à faire tendre le champ magnétique initial vers zéro.

Enfin, prenant en compte les dimensions de  $H, v - v_c, M$ , on vérifie que la propriété d'échelle (7.40) de l'équation d'état s'interprète comme la conséquence d'une analyse dimensionnelle.

## 7.5 Interactions de portée finie en dimension finie

Nous examinons maintenant le problème des transitions de phases pour des modèles avec interactions de portée finie en dimension d'espace fini. Comme les modèles ne peuvent plus, en général, être résolus exactement, nous utilisons d'abord des arguments de basse et haute température pour établir l'existence de transitions et en déduire quelques unes de leurs propriétés.

Nous considérons d'abord un système sur le réseau fini  $\mathcal{C}$  appartenant à  $\mathbb{Z}^d$  des points  $\mathbf{r}$  de coordonnées entières, défini par

$$\mathbf{r} \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq r_\mu \in \mathbb{Z} < L, \quad \mu = 1, \dots, d.$$

Il est commode de choisir des conditions aux limites périodiques dans les  $d$  dimensions, ce qui, pour les systèmes invariants par translation d'espace qui seront étudiés, préserve l'invariance par translation sur le réseau fini.

Pour illustrer le formalisme par un exemple concret, nous considérons des modèles de spins avec une interaction de proches voisins sur le réseau, mais les résultats obtenus seront plus généralement valables pour tout système avec interactions de portée finie. Un résultat très important, qui émerge de l'analyse heuristique qui suit, est l'importance des groupes de symétries et, en particulier, de leur caractère discret ou continu.

### 7.5.1 Symétries discrètes : le modèle d'Ising

Comme exemple de modèle avec symétrie discrète, nous étudions le modèle d'Ising, où les spins ne prennent que les valeurs  $\pm 1$ , avec une interaction de proches voisins sur le réseau. Ce modèle a une symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ , correspondant à changer le signe de tous les spins :  $S \rightarrow -S$ . Les résultats que nous obtiendrons seront plus généralement valables pour tout modèle ayant une symétrie de réflexion et des interactions de portée finie, et représentatifs des modèles avec symétries discrètes.

La fonction de partition en champ nul du modèle d'Ising en  $d$  dimensions avec interaction de proches voisins (en anglais *nearest neighbours* : n.n.) s'écrit

$$\mathcal{Z}_\Omega(\beta) = \sum_{\{S_{\mathbf{r}} = \pm 1\}} \exp\left(\beta \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \text{ n.n.} \in C} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}\right), \quad (7.43)$$

où  $\beta$ , l'inverse de la température, inclut aussi un facteur caractérisant l'intensité de l'interaction supposée ferromagnétique et  $\Omega$  est le nombre de sites dans  $C$  :  $\Omega = L^d$ . Le nombre de configurations de spin est alors  $2^\Omega$ .

Dans les deux limites de haute et basse température, il est possible d'évaluer la distribution du spin moyen  $\sigma = \sum_i S_i / \Omega$  dans la limite thermodynamique.

*Distribution de spin moyen : haute température.* Dans la limite de haute température ( $\beta \rightarrow 0$ ), les spins deviennent des variables indépendantes. La distribution de spin moyen obéit donc au théorème de la limite centrale et a une forme gaussienne asymptotique centrée autour de  $\sigma = 0$ , une situation décrite en section 7.1.2. Pour  $\Omega = \infty$ ,  $\sigma = 0$  est une valeur certaine et l'aimantation en champ nul est nulle.

*Basse température.* Comme le nombre de configurations total est  $2^\Omega$ , à basse température ( $\beta \rightarrow \infty$ ), la distribution de spin moyen est dominée par l'énergie d'interaction. Les deux configurations les plus probables correspondent à tous les spins alignés  $S_i = S = \pm 1$ . Pour que dans la limite  $\Omega \rightarrow \infty$ , le spin moyen ait une distribution qui ne soit pas réduite à  $\sigma = \pm 1$ , il faut qu'il existe des configurations avec des spins  $+$  et  $-$  occupant chacun une proportion finie du volume  $\Omega = L^d$  qui aient une probabilité non nulle. Supposons que les spins  $+$  soient majoritaires. La probabilité relative d'une configuration du type représenté en figure 7.3 pour la dimension 2, par rapport à la probabilité des configurations avec spins alignés, est, à basse température, de l'ordre de  $\mathcal{N} e^{-\beta \Delta \mathcal{E}}$ , où  $\Delta \mathcal{E}$  est la différence d'énergie d'interaction et  $\mathcal{N}$  le nombre de configurations correspondant.

Par rapport à la configuration de référence avec tous les spins égaux à  $+1$ , la probabilité d'un domaine de spins  $-1$  est proportionnelle à  $e^{-2\beta A}$ , où  $A$  est la mesure de la frontière du domaine. À  $d$  dimensions, un domaine de frontière minimale est une sphère. Si nous appelons  $\ell$  son rayon, la mesure de la frontière est d'ordre  $\Sigma_d \ell^{d-1}$  ( $\Sigma_d$  est l'aire de la sphère  $S_{d-1}$ ) et la probabilité

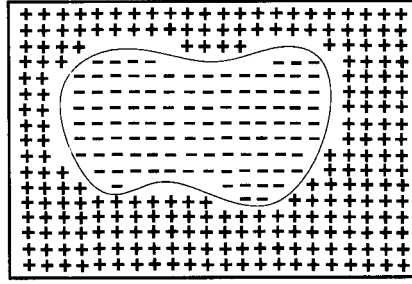


FIG. 7.3 – Domaine de spins – dans un environnement de spins + pour  $d = 2$ .

est d'ordre  $\mathcal{N}(\ell) e^{-2\Sigma_d \beta \ell^{d-1}}$ . Par ailleurs, on peut vérifier que le nombre de configurations  $\mathcal{N}(\ell)$  est borné par  $e^{K\ell^{d-1}}$ , où  $K$  est une constante, de sorte que pour  $\beta$  suffisamment grand, le terme d'énergie domine toujours.

Dans la limite thermodynamique, pour que le spin moyen correspondant soit inférieur à 1, il faut que  $\ell/L$  reste finie. Les conclusions sont donc :

- (i) Pour  $d = 1$ , la probabilité de  $|\sigma| < 1$  reste finie et aucune transition de phase n'est possible.
- (ii) Au contraire, pour  $d > 1$ , la probabilité de  $|\sigma| < 1$  tend vers zéro pour  $L \rightarrow \infty$  et donc, à basse température la distribution se réduit à  $\sigma = \pm 1$ . C'est une situation que nous avons déjà examinée dans le cas du modèle en dimension infinie. Elle correspond à une région à deux phases avec aimantation spontanée non-nulle. En effet, l'ajout d'un terme de champ magnétique change l'énergie de  $\pm H L^d$  et favorise une des deux configurations aussi petit que soit  $H$ . La distribution limite est concentrée sur une seule valeur de  $\sigma$  qui est l'aimantation spontanée.

Clairement, dans la limite du volume infini, il n'y a pas de prolongement analytique possible entre une phase unique à haute température et une région à deux phases à basse température, et donc les quantités thermodynamiques doivent avoir au moins une singularité en  $\beta$  à une valeur finie  $\beta_c$ .

### 7.5.2 Symétries continues : l'exemple du groupe orthogonal

Nous discutons maintenant brièvement une famille de modèles à symétrie continue, pour exhiber quelques différences importantes avec le cas des symétries discrètes.

Nous considérons de nouveau un système de spins classiques, mais où les spins  $\mathbf{S}_r$  sont des vecteurs à  $\nu$  composantes de longueur unité, qui ont des interactions à deux spins ferromagnétiques de proches voisins. La fonction de

partition prend la forme

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \left( \prod_{\mathbf{r}} d\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{S}_{\mathbf{r}}^2 - 1) \right) \exp[-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S})], \quad (7.44)$$

où nous choisissons l'énergie de configuration

$$\mathcal{E}(\mathbf{S}) = - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \text{ n.n.}} \mathbf{S}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{r}}.$$

Le modèle a alors une symétrie continue correspondant au groupe orthogonal  $O(\nu)$  des rotations-réflexions de l'espace à  $\nu$  dimensions agissant sur les vecteurs  $\mathbf{S}_{\mathbf{r}}$ . Nous considérons, ci-dessous,  $\nu$  arbitraire et sans lien avec la dimension  $d$  de l'espace.

À haute température ( $\beta \rightarrow 0$ ), comme dans le cas du modèle d'Ising, le modèle tend vers un système de spins indépendants et le spin moyen a une distribution limite donnée par le théorème de la limite centrale. En particulier, l'aimantation spontanée est nulle.

À basse température, de nouveau la distribution du spin moyen est dominée par les configurations d'énergie minimale, c'est-à-dire tous les spins alignés dans une direction déterminée et donc  $|\boldsymbol{\sigma}| = 1$ . Pour que les configurations avec  $|\boldsymbol{\sigma}| < 1$  aient une probabilité non-nulle dans la limite thermodynamique, il faut trouver des configurations de spin qui interpolent entre deux directions de spin. La différence essentielle avec le cas de la symétrie discrète est qu'il est possible d'interpoler entre deux directions asymptotiques différentes, d'angle relatif  $\alpha$ , en faisant tourner les spins d'un angle  $\alpha/\ell$  entre sites adjacents. Ceci doit être contrasté avec le cas d'une symétrie discrète, où la transition se passe entre deux sites (ou plus généralement un nombre fini de sites) seulement. Considérant donc une sphère centrée en  $\mathbf{r} = 0$  et appelant  $\theta(r = |\mathbf{r}|)$  l'angle des spins dans le plan formé par les directions des spins initiale et finale, on peut prendre

$$\theta(r) = \alpha r / \ell, \quad 0 \leq r \leq \ell.$$

Pour  $\ell$  grand, la variation du produit scalaire  $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$  entre spins adjacents est proportionnel à  $1 - \cos(\delta\theta(r)) \propto \alpha^2/\ell^2(\delta r)^2$ . La variation totale de l'énergie de configuration est donc proportionnelle à

$$\alpha^2 \ell^{-2} \times \ell^d = \alpha^2 \ell^{d-2}.$$

Pour que le spin moyen soit modifié, il faut de nouveau que dans la limite du volume infini  $L \rightarrow \infty$ , le rapport  $\ell/L$  reste fini. On en conclut :

- (i) Pour  $d \leq 2$ , la variation d'énergie reste finie, et donc la distribution de spin moyen a un support non trivial dans la sphère de rayon unité. En conséquence, même à basse température l'aimantation spontanée reste nulle.

- (ii) En revanche, en dimension  $d > 2$ , à basse température, la distribution de spin se réduit à la sphère  $|\boldsymbol{\sigma}| = 1$ . De nouveau, un terme de champ magnétique arbitrairement faible sélectionne une direction de spin et détermine une aimantation spontanée.

## 7.6 Modèle d'Ising : matrice de transfert

Dans le but d'analyser de façon plus détaillée ce problème de transition de phase, nous étudions de nouveau le modèle d'Ising avec interactions de proches voisins, mais avec un formalisme de matrice de transfert. Nous considérons d'abord le modèle sur un réseau fini dans lequel, en dimension  $d > 1$ , nous distinguons une direction que nous appelons direction de temps par commodité, quand aucune confusion n'est possible. Le réseau correspond alors aux points de coordonnées entières  $\mathbf{r} = (t, \boldsymbol{\rho})$ , avec

$$0 \leq t \leq \ell, \quad 0 \leq \rho_\mu \leq L \quad \text{pour } 1 \leq \mu \leq d-1.$$

Il est commode de prendre des conditions aux limites périodiques dans les  $d-1$  dimensions transverses.

### 7.6.1 Matrice de transfert

Lorsque les interactions sont de portée finie, il est possible d'introduire le formalisme de matrice de transfert, que nous avons déjà discuté en section 4.1.2 dans le cas particulier de modèles statistiques à une seule dimension d'espace.

Nous définissons la matrice de transfert dans la direction de temps. En terme de la matrice de transfert  $\mathbf{T}$  qui fait passer du temps  $t$  au temps  $t+1$ , la fonction de partition, en dimension  $d$  arbitraire, avec condition aux limites périodiques dans la direction de temps, peut alors s'écrire

$$\mathcal{Z}(\ell, L) = \text{tr } \mathbf{T}^\ell. \quad (7.45)$$

Nous supposons l'interaction isotrope ce qui permet de choisir une matrice de transfert symétrique.

Dans l'exemple du modèle d'Ising à  $d$  dimensions avec interactions de proches voisins (en anglais *nearest neighbours*, n.n.) dont la fonction de partition est donnée par l'expression (7.43), les éléments de la matrice de transfert correspondante sont

$$[\mathbf{T}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = \exp \left[ \beta \left( \sum_{\rho} S_{\rho} S'_{\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\rho, \rho' \text{ n.n.}} (S_{\rho} S_{\rho'} + S'_{\rho} S'_{\rho'}) \right) \right], \quad (7.46)$$

où  $\rho$  est la position sur le réseau transverse à  $d-1$  dimensions et  $\mathbf{S}$  représente l'ensemble des spins du réseau transverse. Un vecteur est associé à une

distribution de spins dans l'espace transverse qui a  $d - 1$  dimensions. Pour un réseau de taille transverse  $L$ , l'espace vectoriel est donc de dimension  $2^{L^{d-1}}$ .

*Symétrie  $\mathbb{Z}_2$ .* Le modèle d'Ising est caractérisé par une symétrie discrète  $\mathbb{Z}_2$ , une réflexion, correspondant à changer le signe de tous les spins. Agissant sur l'espace vectoriel précédent, la réflexion est représentée par une matrice  $\mathbf{P}$ , dont les éléments de matrice, dans la notation (7.46), sont

$$[\mathbf{P}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = \prod_{\rho} \delta_{S_{\rho}, -S'_{\rho}}. \quad (7.47)$$

Elle satisfait  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{1}$  et ses valeurs propres sont  $\pm 1$ .

La matrice  $\mathbf{P}$  commute avec la matrice de transfert,

$$[\mathbf{T}, \mathbf{P}] = 0,$$

et donc  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{T}$  peuvent être diagonalisés simultanément. Les vecteurs propres de  $\mathbf{T}$  peuvent aussi être choisis vecteurs propres de  $\mathbf{P}$ .

Notons  $\tau_{\pm, n}$  les valeurs propres de  $\mathbf{T}$  correspondant aux vecteurs propres  $\psi_{\pm, n}$  tels que

$$\mathbf{P} \psi_{\pm, n} = \pm \psi_{\pm, n}, \quad \mathbf{T} \psi_{\pm, n} = \tau_{\pm, n} \psi_{\pm, n}.$$

La fonction de partition peut alors s'écrire

$$\mathcal{Z}(\ell, L, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{+, n}^{\ell} + \tau_{-, n}^{\ell}). \quad (7.48)$$

Il est utile pour la discussion qui suit d'introduire aussi la fonction de partition avec conditions aux limites anti-périodiques dans la direction de temps

$$\mathcal{Z}_a(\ell, L, \beta) = \text{tr } \mathbf{P} \mathbf{T}^{\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{+, n}^{\ell} - \tau_{-, n}^{\ell}). \quad (7.49)$$

*Paramètre d'ordre.* Le spin  $S_{\sigma}$  au site  $\sigma$  du réseau transverse est un *paramètre d'ordre*, en ce sens que dans la région où plusieurs phases coexistent, sa valeur moyenne discrimine entre les phases. En effet, la matrice correspondante  $\mathbf{S}_{\sigma}$ , dont les éléments de matrice entre deux configurations de spin sont

$$[\mathbf{S}_{\sigma}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = S_{\sigma} \prod_{\rho} \delta_{S_{\rho}, S'_{\rho}}, \quad (7.50)$$

est impaire par réflexion :

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_{\sigma} \mathbf{P} = -\mathbf{S}_{\sigma}. \quad (7.51)$$

*Limite  $L$  finie,  $\ell \rightarrow \infty$ .* Aussi longtemps que la dimension transverse du réseau reste finie, l'analyse générale de la section 4.1.2 reste valable. Le vecteur propre unique de la matrice de transfert associé à la plus grande valeur propre est symétrique

$$\mathbf{P}\psi_{+,0} = \psi_{+,0}.$$

En effet, le vecteur propre  $\psi_{+,0}$  a toutes ses composantes positives et l'équation (7.47) montre que  $\mathbf{P}$  ne change pas le signe des vecteurs de base.

En conséquence, la valeur moyenne du spin est nulle :

$$\langle S \rangle = (\psi_{+,0}, \mathbf{S}_\sigma \psi_{+,0}) = -(\psi_{+,0}, \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_\sigma \mathbf{P} \psi_{+,0}) = -(\psi_{+,0}, \mathbf{S}_\sigma \psi_{+,0}) = 0. \quad (7.52)$$

La symétrie  $S \rightarrow -S$  n'est brisée à aucune température.

De plus, aucun croisement de niveaux ne peut se produire et l'énergie libre  $\mathcal{W}$ , qui dans la limite  $\ell \rightarrow \infty$  est donnée par :

$$\mathcal{W} \sim \ell \ln \tau_{+,0}, \quad (7.53)$$

est une fonction régulière de la température  $T = 1/\beta$  pour  $T > 0$ . On conclut de cette analyse que, dans un modèle de spin avec interactions de portée finie et symétrie de réflexion, aucune transition de phase n'est possible même sans brisure de symétrie ; l'énergie libre est une fonction régulière de la température, et la longueur de corrélation  $\xi$  ne peut diverger qu'à température nulle. Ces résultats se généralisent à toutes les interactions de courte portée.

### 7.6.2 Limite de dimension transverse infinie : transitions de phase

Quand la dimension transverse  $L$  tend vers l'infini, de nouveaux phénomènes peuvent se produire qu'une analyse des limites de haute et basse températures met en évidence.

*Haute température.* À haute température ( $\beta \rightarrow 0$ ), les spins sur des sites différents se découplent. À température infinie, les spins deviennent des variables indépendantes ; tous les éléments de matrice de  $\mathbf{T}$  deviennent égaux et  $\mathbf{T}$  devient un projecteur sur le vecteur propre  $\psi_0$  qui a des composantes égales sur toutes les configurations de spin. Toutes les valeurs propres sauf une s'annulent. La longueur de corrélation est donc nulle également. Ces propriétés sont indépendantes du volume et donc les résultats précédents restent vrais même pour  $L$  infini. À haute température, on trouve, comme attendu, une phase désordonnée où  $\langle S \rangle = 0$  et la symétrie de réflexion n'est pas brisée.

*Basse température.* À basse température, c'est-à-dire pour  $\beta \rightarrow \infty$ , les contributions dominantes à la fonction de partition correspondent aux deux configurations où tous les spins sont égaux soit à  $+1$ , soit à  $-1$  :

$$S_{\mathbf{r}} = S = \pm 1 \quad \forall \mathbf{r}.$$

On en déduit

$$\mathcal{Z}(\ell, L, \beta) = \text{tr } \mathbf{T}^\ell \sim 2 e^{\beta d \ell L^{d-1}}, \quad (7.54)$$

où le facteur 2 correspond aux deux configurations.

À basse température, les contributions dominantes à la fonction de partition avec conditions aux limites anti-périodiques (7.49) correspondent à une région avec spins  $+1$  séparée de spins  $-1$ . Par rapport aux contributions uniformes qui dominent  $\mathcal{Z}(\ell, L, \beta)$ , la variation d'énergie est proportionnelle à l'aire de la surface qui sépare les deux régions. L'aire minimale est une surface plane  $t = t_0$  avec  $1 \leq t_0 \leq \ell$ . Le rapport  $\mathcal{Z}_a/\mathcal{Z}$  est alors

$$r(\ell, L) = \frac{\text{tr } \mathbf{P} \mathbf{T}^\ell}{\text{tr } \mathbf{T}^\ell} = \frac{\mathcal{Z}_a(\ell, L, \beta)}{\mathcal{Z}(\ell, L, \beta)} \sim \ell e^{-\beta L^{d-1}}, \quad (7.55)$$

où le facteur  $\ell$  correspond à toutes les positions possibles de la surface de séparation.

Pour  $\ell \rightarrow \infty$ , les fonctions de partitions sont dominées par les valeurs propres les plus grandes de la matrice de transfert. L'expression (7.54) montre que deux valeurs propres dominent la somme (7.48). Comme  $\mathcal{Z}_a(\ell, L, \beta)$  est plus petit que  $\mathcal{Z}(\ell, L, \beta)$ , ces deux valeurs propres sont asymptotiquement égales et correspondent à des vecteurs propres pair et impair. Ainsi,

$$r(\ell, L) = \frac{\mathcal{Z}_a(\ell, L, \beta)}{\mathcal{Z}(\ell, L, \beta)} \sim \frac{\tau_{+,0}^\ell - \tau_{-,0}^\ell}{\tau_{+,0}^\ell + \tau_{-,0}^\ell}. \quad (7.56)$$

En terme de la longueur de corrélation  $\xi_L = 1/\ln(\tau_{+,0}/\tau_{-,0})$ ,

$$\frac{\tau_{+,0}}{\tau_{-,0}} - 1 \underset{\xi_L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\xi_L},$$

et donc

$$r(\ell, L) \sim \frac{\ell}{2\xi_L} \sim \ell e^{-\beta L^{d-1}}.$$

On en déduit que

$$\xi_L \sim \frac{1}{2} e^{\beta L^{d-1}}. \quad (7.57)$$

Partant des configurations où tous les spins sont alignés, et prenant en compte des configurations où un nombre fini de spins a été retourné, on peut ensuite obtenir les valeurs et vecteurs propres comme un développement de basse température. Mais les comportements ne sont pas modifiés qualitativement.

*Transitions de phase.* Pour  $L$  fini, la longueur de corrélation  $\xi_L$  ne diverge qu'à température nulle, comme à une dimension. Toute transition de phase est impossible.

En revanche, pour  $d > 1$ , à température suffisamment basse fixée, la longueur de corrélation diverge dans la limite  $L \rightarrow \infty$ , et la valeur propre maximale de la matrice de transfert est double. La limite thermodynamique dépend

alors des conditions aux limites. En particulier, une brisure infinitésimale de symétrie sélectionne non pas un vecteur propre pair mais un des vecteurs propres correspondant à des spins alignés. Dans ce cas, l'aimantation est différente de zéro. Les deux phases possibles correspondent aux deux valeurs possibles opposées de l'aimantation spontanée.

Dans la limite du volume infini, les fonctions thermodynamiques doivent avoir au moins une singularité à une valeur finie  $\beta_c$  de  $\beta$  qui sépare une région à une phase à haute température et à une région à deux phases à basse température.

Notons que la longueur de corrélation  $\xi_L$  n'a de sens qu'en volume fini. En effet, elle suppose qu'on moyenne sur toutes les configurations possibles. Or si le système se trouve dans une des phases de symétrie brisée (une phase pure), on doit calculer la fonction de partition en ne sommant que sur une partie des configurations, les configurations d'aimantation de signe donné. La divergence de  $\xi_L$  est un précurseur de la propriété que la fonction de corrélation à deux spins en volume infini ne tend plus vers zéro à grande distance, mais vers le carré de l'aimantation spontanée.

#### Remarques

- (i) Cette analyse de la limite du volume infini est qualitativement correcte dans toute la phase de basse température. À  $\beta_c$ , la situation change ; un nombre infini de valeurs propres s'accumule à la même valeur  $\tau_{+,0}$ .
- (ii) Nous avons vu que le rapport (7.55) fournit un critère de brisure spontanée de symétrie. Cette analyse peut être généralisée à d'autres groupes de symétrie. On considère alors le rapport

$$r(\ell, L) = \frac{\text{tr } \mathbf{R} \mathbf{T}^\ell}{\text{tr } \mathbf{T}^\ell}, \quad (7.58)$$

où  $\mathbf{R}$  est un élément du groupe de symétrie.

Dans la phase symétrique, le vecteur propre dominant de la matrice de transfert est invariant par les transformations du groupe de symétrie et, donc,  $r(\ell = \infty, L) = 1$ .

Au contraire, si la symétrie est brisée spontanément,  $\mathbf{R}$  échange les vecteurs propres dégénérés et donc  $r(\ell = \infty, L)$  s'annule dans la limite du volume infini  $L \rightarrow \infty$ .

Une autre limite de ce rapport,  $r(L, L)$  pour  $L \rightarrow \infty$ , est intéressante. Elle correspond à la limite thermodynamique qui est prise en faisant tendre toutes les dimensions vers l'infini de la même manière. On est alors ramené à calculer le rapport de deux fonctions de partition sur un réseau à  $d$  dimensions de dimension linéaire  $L$  avec des conditions aux limites différentes : le dénominateur correspond à des conditions aux limites périodiques dans la direction de temps, le numérateur correspond à des conditions aux deux bords qui diffèrent par des transformations du groupe de symétrie. Dans des systèmes de

type Ising, le seul élément du groupe est la réflexion  $\mathbf{P}$  et, donc, ces conditions aux limites sont anti-périodiques. Cette limite fournit, à basse température, un critère direct de brisure spontanée de symétrie. La probabilité est alors d'ordre

$$r(L, L) = \frac{\text{tr } \mathbf{P} \mathbf{T}^L}{\text{tr } \mathbf{T}^L} \sim e^{-\beta L^{d-1}}. \quad (7.59)$$

## 7.7 Symétries continues et matrice de transfert

Nous discutons de nouveau la famille de modèles avec symétrie orthogonale introduite en section 7.5.2, pour montrer comment les différences entre symétries continues et discrètes se manifestent dans le cadre du formalisme de la matrice de transfert.

Nous considérons les systèmes de spins classiques dont la fonction de partition est donnée par l'expression (7.44). Les spins  $\mathbf{S}_r$  sont des vecteurs à  $\nu$  composantes de longueur unité qui ont des interactions à deux spins ferromagnétiques de proches voisins.

Ces modèles ont une symétrie continue correspondant au groupe orthogonal  $O(\nu)$  des rotations-réflexions de l'espace à  $\nu$  dimensions.

*Matrice de transfert.* Ici aussi, nous pouvons écrire la fonction de partition (7.44) en fonction d'une matrice de transfert  $\mathbf{T}$ , dont les éléments sont

$$[\mathbf{T}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = \exp \left[ \beta \left( \sum_{\rho} \mathbf{S}_{\rho} \cdot \mathbf{S}'_{\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\rho, \rho' \text{ n.n.}} (\mathbf{S}_{\rho} \cdot \mathbf{S}_{\rho'} + \mathbf{S}'_{\rho} \cdot \mathbf{S}'_{\rho'}) \right) \right], \quad (7.60)$$

où  $\rho$  est la position dans l'espace transverse à  $d - 1$  dimensions.

À haute température ( $\beta \rightarrow 0$ ), comme dans le cas du modèle d'Ising, le vecteur propre de la matrice de transfert correspondant à la valeur propre maximale a des composantes uniformes sur toutes les configurations et est donc invariant par les transformations du groupe orthogonal  $O(\nu)$ .

Pour discuter la phase de basse température, instruit par l'exemple du modèle d'Ising, nous introduisons la généralisation du rapport (7.55). L'opération de symétrie est ici une rotation  $\mathbf{R}(\alpha)$  d'angle  $\alpha$ . Nous définissons

$$\mathcal{Z}(\alpha, \ell, L, \beta) = \text{tr } \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{T}^{\ell} \quad (7.61)$$

avec un choix de conditions aux limites périodiques dans toutes les directions transverses. Nous examinons le comportement du rapport

$$r(\alpha, \ell, L) = \frac{\mathcal{Z}(\alpha, \ell, L, \beta)}{\mathcal{Z}(0, \ell, L, \beta)} \quad (7.62)$$

pour  $\beta \gg 1$  dans la limite  $L \rightarrow \infty$ .

La fonction de partition  $Z(\alpha, \ell, L, \beta)$  est la fonction de partition sur un réseau à  $d$  dimensions, avec conditions aux limites modifiées dans la direction de temps où l'on impose

$$\mathbf{S}_{t=\ell, \rho} \cdot \mathbf{S}_{t=0, \rho} = \cos \alpha. \quad (7.63)$$

À basse température, les configurations d'énergie minimale correspondent à prendre tous les spins alignés dans  $d-1$  dimensions, et tournant d'un angle  $\alpha/\ell$  entre deux sites adjacents le long de l'axe de temps. Ceci doit être contrasté avec le cas d'une symétrie discrète, où la transition entre les configurations imposées par les conditions aux limites se passe entre deux sites (ou plus généralement un nombre fini de sites) seulement.

La variation d'énergie  $\Delta\mathcal{E}$  due à la rotation est alors

$$\Delta\mathcal{E} = \ell \times L^{d-1} \times [\cos(\alpha/\ell) - 1] \quad (7.64)$$

et donc

$$r(\alpha, \ell, L) \propto \exp [\beta \ell L^{d-1} (\cos(\alpha/\ell) - 1)].$$

Pour  $\ell \gg 1$ , on peut développer

$$r(\alpha, \ell, L) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta L^{d-1} \alpha^2 / \ell \right]. \quad (7.65)$$

Ce résultat est le même que pour un modèle  $O(\nu)$  à une dimension, à basse température, avec  $\beta \mapsto \beta L^{d-1}$ . L'exercice 4.4 présente le calcul de la longueur de corrélation correspondante. On trouve ici

$$\xi_L \sim \frac{\beta L^{d-1}}{2(\nu - 1)}. \quad (7.66)$$

Un calcul équivalent consiste à remplacer, à basse température, tous les spins  $\mathbf{S}_\rho$  et les spins  $\mathbf{S}'_\rho$  dans la matrice de transfert par deux spins constants. Le résultat est de nouveau la matrice de transfert du modèle unidimensionnel, avec une interaction  $\beta \mapsto \beta L^{d-1}$ .

Ce résultat semble indiquer, de nouveau, que la longueur de corrélation diverge à partir de la dimension 2, comme dans le cas discret. Ce résultat n'est correct qu'en dimension plus grande que 2.

En dimension 2, l'estimation prédit que la longueur de corrélation croît comme  $L$ , c'est-à-dire que  $\xi_L/L$  reste constant. C'est un cas assez subtil où les fluctuations autour des configurations constantes influent sur le calcul même à basse température et qui doit être étudié avec des arguments plus fins. En fait, ce résultat n'est valable que pour  $\nu = 2$  (cas où le groupe des rotations  $SO(2)$  est abélien). Pour  $\nu > 2$  la longueur de corrélation ne diverge qu'à température nulle.

Par ailleurs, même pour  $\nu = 2$ , bien que la longueur de corrélation diverge, parce que  $\xi_L/L$  reste fini, l'aimantation spontanée dans la phase de basse température est nulle,  $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ , et la symétrie  $O(2)$  n'est pas brisée.

On trouve une phase de basse température caractérisée par une décroissance algébrique des fonctions de corrélations connexes (phase dite de Kosterlitz–Thouless). Ainsi qu’un argument de type ergodique le suggère, pour que la valeur moyenne du spin soit différente de zéro, il faut que  $\xi_L/L \rightarrow \infty$  pour  $L \rightarrow \infty$ .

*Remarque.* Comme critère de brisure de symétrie, on peut aussi utiliser le rapport des fonctions de partition (7.65) pour  $\ell = L$ . On trouve

$$r(\alpha, L, L) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta L^{d-2} \alpha^2 \right]. \quad (7.67)$$

Ainsi, dans le cas d’une symétrie continue, il est plus facile de passer d’un minimum de l’énergie à un autre. Cette propriété a comme conséquence directe qu’il est plus difficile de briser la symétrie et que des modes de Goldstone apparaissent dans la phase de symétrie brisée (voir section 7.8). Pour  $d \leq 2$ ,  $r(\alpha, L, L)$  a une limite finie et la symétrie n’est jamais brisée. Ce résultat, pour lequel nous avons donné des arguments heuristiques, peut être démontré rigoureusement (théorème de Mermin–Wagner–Coleman).

Pour  $d > 2$  au contraire, la symétrie est brisée à basse température. Il existe une température finie  $T_c$ , où une transition de phase a lieu.

## 7.8 Symétries continues et modes de Goldstone

Si la variable initiale de spin  $\mathbf{S}_r$  est un vecteur à  $\nu$  composantes, et si à la fois l’interaction et la distribution de spin ont une symétrie continue (associée à un groupe de Lie compact), l’existence de plusieurs fonctions et longueurs de corrélation quand l’aimantation est différente de zéro, induit quelques propriétés nouvelles. En particulier, en champ nul, à toute température au dessous de  $T_c$  certaines longueurs de corrélation, associées à des modes appelés *modes de Goldstone*, divergent.

Nous illustrons de nouveau ces remarques par l’exemple de modèles ayant une symétrie orthogonale  $O(\nu)$  ( $\nu > 1$ ).

*Modes de Goldstone : symétrie  $O(\nu)$ .* La symétrie orthogonale  $O(\nu)$  implique que la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(\mathbf{M})$  en champ uniforme n’est qu’une fonction du carré du vecteur aimantation, et donc peut s’écrire ( $|\mathbf{M}| = M$ )

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}) = G(M^2/2).$$

En conséquence, la relation entre composantes  $H_\alpha$  et  $M_\alpha$  du champ magnétique et de l’aimantation, respectivement, prend la forme

$$H_\alpha = M_\alpha G'(M^2/2), \quad (7.68)$$

et donc en module

$$|\mathbf{H}| \equiv H = M G'(M^2/2). \quad (7.69)$$

La fonction à deux points connexe est maintenant une matrice

$$W_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle S_\alpha(\mathbf{r}) S_\beta(\mathbf{r}') \rangle_{\text{conn.}} .$$

La fonction de vertex, inverse de la fonction à deux points, en représentation de Fourier, à argument nul, est donnée par (*cf.* équation (6.27))

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k} = 0) = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial M_\alpha \partial M_\beta} = M_\alpha M_\beta G''(M^2/2) + \delta_{\alpha\beta} G'(M^2/2). \quad (7.70)$$

La matrice  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k} = 0)$  a deux sous-espaces propres correspondant au vecteur  $M_\alpha$  et aux  $\nu - 1$  vecteurs  $X_\alpha$  orthogonaux à  $M_\alpha$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(0) M_\beta &= M_\alpha [M^2 G''(M^2/2) + G'(M^2/2)] , \\ \sum_{\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(0) X_\beta &= X_\alpha G'(M^2/2). \end{aligned}$$

Notant les valeurs propres  $\tilde{\Gamma}_L^{(2)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_T^{(2)}$ , respectivement, on trouve

$$\tilde{\Gamma}_L^{(2)}(0) = M^2 G''(M^2/2) + G'(M^2/2), \quad (7.71)$$

$$\tilde{\Gamma}_T^{(2)}(0) = G'(M^2/2) = H/M, \quad (7.72)$$

où nous avons utilisé l'équation (7.69) dans (7.72).

Les valeurs propres de la fonction à deux point connexe  $\widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k} = 0)$  sont les inverses de celles de  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ . La valeur propre transverse de la fonction à deux points connexe à argument nul est donc

$$\widetilde{W}_T^{(2)}(k = 0) = \left[ \tilde{\Gamma}_T^{(2)}(k = 0) \right]^{-1} = M/H. \quad (7.73)$$

*Modes de Goldstone.* Au dessus de  $T_c$ , l'aimantation s'annule linéairement en  $H$  et la fonction à deux points a une limite finie pour  $H \rightarrow 0$ . En revanche, en dessous de  $T_c$ , quand  $H$  tend vers zéro,  $M$  tend vers l'aimantation spontanée qui est non nulle, et donc la fonction à deux points transverse diverge. Ceci implique la divergence de la longueur de corrélation transverse correspondant à  $\nu - 1$  modes appelés *modes de Goldstone* (des particules de masse nulle au sens de la théorie des interactions fondamentales).

*Autre argument.* Ce résultat peut aussi être obtenu de la manière suivante. En champ nul, au-dessous de  $T_c$ , l'aimantation est non nulle alors que le potentiel est symétrique. Si un vecteur  $\mathbf{M}$  correspond à un minimum, tout vecteur déduit de  $\mathbf{M}$  par une rotation (une transformation orthogonale), correspond aussi à un minimum. Cela entraîne que le potentiel thermodynamique, par symétrie, a une sphère de minima  $|\mathbf{M}| = M$ . Une rotation infinitésimale correspond à l'addition à  $\mathbf{M}$  d'un vecteur tangent à la sphère et donc orthogonal

à  $\mathbf{M}$ . Appelant  $\mathbf{X}$  un tel vecteur,  $|\mathbf{X}| \ll 1$ , et développant la condition d'extremum au premier ordre en  $\mathbf{X}$ , on obtient la condition

$$\sim \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{M} + \mathbf{X})}{\partial M_\alpha} \sim \sum_\beta \frac{\partial^2 \mathcal{G}(\mathbf{M})}{\partial M_\alpha \partial M_\beta} X_\beta = 0.$$

On retrouve les  $\nu - 1$  vecteurs propres de valeur propre nulle, correspondant aux modes de Goldstone.

*Note mathématique.* De façon plus générale, considérons un modèle ayant une symétrie correspondant à un groupe continu (groupe de Lie)  $\mathfrak{G}$ , et tel que cette symétrie soit brisée spontanément par une valeur moyenne non-nulle  $\mathbf{M}$  du paramètre d'ordre. Soit  $\mathfrak{H}$  le sous-groupe de  $\mathfrak{G}$  qui laisse le vecteur  $\mathbf{M}$  invariant (le groupe de symétrie résiduel). Dans l'exemple précédent,  $\mathfrak{G} \equiv O(\nu)$  et  $\mathfrak{H} \equiv O(\nu - 1)$ . Enfin, soit  $g$  le nombre de générateurs de l'algèbre de Lie de  $\mathfrak{G}$  et  $h$  celui de  $\mathfrak{H}$ . Une généralisation simple de l'argument précédent montre qu'il existe  $g - h$  modes de Goldstone, associés aux générateurs de  $\mathfrak{G}$  qui ne sont pas dans  $\mathfrak{H}$ . Dans l'exemple orthogonal,

$$g = \frac{1}{2}\nu(\nu - 1), \quad h = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) \Rightarrow g - h = \nu - 1.$$

## Exercices

**Exercice 7.1.** *Modèle avec symétrie orthogonale en dimension infinie.* Généraliser l'étude de la section 7.2 à un modèle avec des spins  $\mathbf{S}$  appartenant de nouveau à la sphère  $S_{\nu-1}$  avec la même distribution isotrope qu'en section 7.7, mais avec l'énergie d'interaction invariante par le groupe  $O(\nu)$ ,

$$-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) = \frac{v}{\Omega} \sum_{i,j=1}^{\Omega} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad v > 0,$$

et un terme de champ magnétique

$$\mathbf{H} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i.$$

On introduira la distribution de spin moyen  $\boldsymbol{\sigma}$ , un vecteur à  $\nu$  composantes.

*Solution.* Quelques éléments. En termes du spin moyen  $\boldsymbol{\sigma}$ ,

$$-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) = \Omega v \boldsymbol{\sigma}^2.$$

La distribution de spin moyen est proportionnelle à

$$R_\Omega(\boldsymbol{\sigma}) = \left( \frac{\Omega}{2\pi} \right)^\nu e^{\Omega v \boldsymbol{\sigma}^2} \int d^\nu k \, e^{\Omega [i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} + A(-i\mathbf{k})]},$$

où  $A(\mathbf{h}) = \ln z(h)$  est l'énergie libre du modèle à un site, déduit de la fonction de partition à un site

$$z(h = |\mathbf{h}|) = \frac{2\pi^{\nu/2-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu-1))} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{\nu-2} e^{h \cos \theta} .$$

Pour  $\Omega \rightarrow \infty$ , cette intégrale peut être calculée par la méthode du col. Le col est donné par

$$\sigma = \mathbf{k}A'(-ik)/k .$$

Le résultat s'exprime de nouveau en terme de la transformée de Legendre de la fonction  $A$ .

## Chapitre 8

# Approximation quasi-gaussienne : universalité, dimension critique

DANS CE CHAPITRE, nous poursuivons l'étude des transitions de phase dans des systèmes avec interactions de courte portée commencée dans le chapitre 7. Nous utilisons encore la terminologie des systèmes ferromagnétiques, ce qui n'est partiellement qu'une restriction de langage. En effet, comme conséquence de la propriété d'*universalité* des phénomènes critiques, une propriété que nous allons décrire et analyser, les résultats que nous allons obtenir s'appliquent à de nombreux autres systèmes physiques qui n'ont rien de magnétiques, comme la transition liquide-vapeur, les transitions de séparation des mélanges binaires, la transition superfluide de l'hélium etc. À cette liste, il convient d'ajouter un problème qui ne semble pas, à première vue, relever des phénomènes critiques, les propriétés statistiques des polymères, ou du point de vue théorique, des chemins aléatoires sur réseau, sans intersection ou auto-évitant (SAW ou *self-avoiding walk*).

Pour des raisons que nous avons déjà évoquées, nous ne nous intéressons qu'aux transitions de phase du second ordre, au voisinage de la température de transition. Pour ces transitions, la longueur de corrélation, qui caractérise la décroissance à grande distance des fonctions de corrélation connexes, diverge au point de transition (la température critique par exemple). Ainsi, une échelle de distance, grande par rapport à l'échelle des longueurs microscopiques (portée des forces, maille de réseau), est engendrée dynamiquement. Alors, une physique macroscopique ou de grande distance apparaît qui a des propriétés d'*universalité*, c'est-à-dire des propriétés indépendantes, dans une large mesure, des détails des interactions microscopiques.

Nous avons déjà montré qu'aussi longtemps que la longueur de corrélation reste finie, c'est-à-dire dans la phase de haute température, les quantités macroscopiques, comme l'aimantation moyenne, ont le comportement prédit par le théorème de la limite centrale. À volume infini, elles tendent vers des valeurs certaines avec des fluctuations gaussiennes. Ce résultat se comprend dans la

mesure où les degrés de liberté microscopiques peuvent être remplacés par des spins moyens indépendants, attachés à des volumes ayant la longueur de corrélation comme dimension linéaire. Dans un premier temps, nous étudions donc les propriétés des modèles gaussiens.

À la température de transition  $T_c$ , et en dessous de  $T_c$ , ces arguments ne sont plus valables. Néanmoins, on peut se demander si la mesure gaussienne asymptotique peut être simplement remplacée par une mesure gaussienne perturbée, c'est-à-dire si les corrélations résiduelles entre des spins moyens peuvent être traitées perturbativement. Une telle approximation peut être qualifiée de *quasi-gaussienne*. L'approximation quasi-gaussienne prédit des propriétés de longue distance remarquablement universelles, indépendantes dans une large mesure de la géométrie, de la dimension d'espace, ... Pour les quantités homogènes, elles coïncident avec celles du modèle en dimension infinie que nous avons étudié en section 7.2. Cependant, l'approximation quasi-gaussienne prédit que le comportement singulier des fonctions de corrélation pour  $T \rightarrow T_c$  et en faible champ est également *universel*.

Dans la première partie de cette étude, nous nous limitons à des modèles avec symétrie discrète. Cependant, en dessous de  $T_c$  ou en champ magnétique, les modèles avec symétries continues ont des propriétés particulières, dues en particulier à l'apparition de modes de Goldstone, qui nécessitent une discussion spéciale (*cf.* section 7.8).

Un calcul systématique des corrections à l'approximation quasi-gaussienne permet de vérifier sa cohérence et son domaine de validité. Nous mettons ainsi en évidence le rôle de la dimension 4, qui sépare les dimensions supérieures, où l'approximation est justifiée, des dimensions inférieures où elle ne peut pas être valable.

La description la plus ancienne et la plus simple des transitions de phase est la théorie du champ moyen (TCM). On suppose que l'infinité de degrés de liberté microscopiques peut être remplacée par un petit nombre de degrés de liberté macroscopiques, les effets résiduels pouvant être traités de façon perturbative. L'approximation de champ moyen peut être qualifiée de quasi-gaussienne, en ce sens qu'elle prédit les mêmes résultats universels. L'approximation de champ moyen peut être introduite par plusieurs méthodes : sommation partielle du développement de haute température, principe variationnel, ordre dominant de la méthode du col. Cette dernière méthode permet de calculer les corrections à l'approximation de champ moyen et donc de discuter son domaine de validité, qui, en effet, est le même que celui de l'approximation quasi-gaussienne.

*Systèmes ferromagnétiques de type Ising.* Nous considérons de nouveau un système de spins classiques  $S_i$  sur le réseau  $d$ -dimensionnel des points de coordonnées entières,  $i$  dénotant un site du réseau. Nous imaginons que les spins classiques sont en réalité des spins moyens dans un volume physique grand à l'échelle des interactions microscopiques (ce qui justifie le caractère classique), mais petit à l'échelle des phénomènes que nous voulons étudier.

Ceci conduit à admettre aussi des spins ayant une distribution continue même si la distribution initiale est discrète. Par ailleurs, nous supposons que les spins fluctuent peu autour de  $S = 0$  et donc que la distribution de spin  $\rho(S)$ , en chaque site, satisfait les conditions de la section 7.1 et décroît, pour  $|S| \rightarrow \infty$ , plus vite qu'une gaussienne (condition (7.2)). Nous supposons enfin que le système a une symétrie de réflexion (de type Ising)  $S \mapsto -S$ . La distribution de spin est donc paire,  $\rho(S) = \rho(-S)$ . Nous choisissons une interaction à deux spins ferromagnétique qui généralise celle des exemples (7.22) et (7.43), de la forme

$$-\beta\mathcal{E}(S) = \sum_{i,j} V_{ij} S_i S_j, \quad (8.1)$$

caractérisée par une matrice  $V_{ij}$  à éléments positifs, invariante par translation, de courte portée (une notion qui est définie ci-dessous).

La fonction de partition (6.12), dans un champ magnétique local  $H_i$  qui brise la symétrie explicitement, s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(S) + \sum_i H_i S_i \right], \quad (8.2)$$

où, de nouveau,  $H$  inclut un facteur  $\beta = 1/T$ .

Grâce à la condition de décroissance (7.2), la fonction de partition est définie, au moins dans un volume fini, pour toute interaction de paires (8.1) et toute température.

## 8.1 Interactions à deux spins de courte portée

Dans le modèle 7.2, l'espace ne joue aucun rôle, l'interaction ayant une portée infinie. Les systèmes que nous voulons étudier, en revanche, ont des interactions à courte portée, une notion que nous précisons ici dans le cas d'interactions à deux spins, et dont nous décrivons quelques propriétés.

Nous ne considérons que des interactions de paires dites ferromagnétiques, c'est-à-dire telles que  $V_{ij} = V_{ji} \geq 0$ . Nous supposons aussi que les interactions sont invariantes par translation, c'est-à-dire

$$V_{ij} \equiv V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = V(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \geq 0,$$

où  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$  sont les vecteurs joignant les sites  $i$  et  $j$  à l'origine.

Enfin, nous appelons, par définition, *interactions de courte portée des interactions à décroissance exponentielle*. Pour l'interaction à deux spins, ceci implique

$$V(\mathbf{r}) \leq M e^{-\kappa|\mathbf{r}|}, \quad \kappa > 0. \quad (8.3)$$

Il est commode d'introduire le paramètre

$$v = \sum_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) > 0, \quad (8.4)$$

qui est proportionnel à  $\beta$ , l'inverse de la température (dans ce qui suit, nous caractériserons la température par la valeur de  $1/v$ ) et la fonction

$$U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})/v. \quad (8.5)$$

Nous supposons que  $U(\mathbf{r})$  satisfait la condition d'ergodicité de la classe des probabilités de saut de la marche au hasard (section 3.3.7). Avec cette condition, le minimum de l'énergie d'interaction est obtenue pour des spins tous de même signe. Enfin, nous nous limitons à des potentiels ayant la symétrie cubique du réseau (définie en (3.46)), parce que c'est plus simple. Le potentiel normalisé, c'est-à-dire la fonction  $U(\mathbf{r})$ , appartient donc à la classe des probabilités de saut 3.3.7.

Toutefois, l'hypothèse de symétrie cubique n'est pas essentielle ; la symétrie par réflexion  $V(\mathbf{r}) = V(-\mathbf{r})$  suffit puisque, dans la limite continue, il est toujours possible de faire des transformations linéaires sur les coordonnées.

L'interaction étant invariante par translation, il est naturel d'introduire les transformées de Fourier

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = v \tilde{U}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} V(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (8.6)$$

La fonction  $\tilde{V}(\mathbf{k})$  est paire et périodique dans toutes les composantes  $k_\mu$  du vecteur  $\mathbf{k}$ . On peut donc restreindre ces composantes à ce qu'on appelle une zone de Brillouin :  $|k_\mu| < \pi$ . Le vecteur  $\mathbf{k}$  est parfois appelé vecteur *impulsion* en analogie avec la mécanique quantique où position et impulsion sont duaux dans la transformation de Fourier.

La condition de courte portée (8.3) implique que les transformées de Fourier  $\tilde{V}(\mathbf{k})$  et  $\tilde{U}(\mathbf{k})$  sont holomorphes pour  $|\operatorname{Im} \mathbf{k}| < \kappa$ . La positivité des coefficients  $V_{ij}$  entraîne, de plus,

$$|\tilde{U}(\mathbf{k})| \leq \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} U(\mathbf{r}) = \tilde{U}(0) = 1. \quad (8.7)$$

La fonction  $\tilde{U}(\mathbf{k})$  admet alors, pour  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , un développement de la forme

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = 1 - a^2 k^2 + O(k^4), \quad (8.8)$$

où  $k^2$  est le carré de la longueur du vecteur  $\mathbf{k}$ , et  $a$  une constante positive.

*Exemple : interaction de proches voisins.* Une interaction de proches voisins sur le réseau est un exemple d'une interaction de courte portée. Appelant  $\mathbf{e}_\mu$  les  $d$  vecteurs unitaires correspondant aux liens du réseau, nous pouvons l'écrire

$$V(\mathbf{r}) = \frac{v}{2d} \sum_{\mu=1}^d (\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{e}_\mu} + \delta_{\mathbf{r}, -\mathbf{e}_\mu}),$$

où  $\delta$  est ici le symbole de Kronecker. La transformée de Fourier  $\tilde{V}(\mathbf{k})$  est alors

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} V(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \frac{v}{2d} \sum_{\mu} [\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mu}) + \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mu})] \\ &= \frac{v}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos k_{\mu},\end{aligned}$$

où  $k_{\mu}$  sont les composantes du vecteurs  $\mathbf{k}$ .

Pour  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ ,

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = 1 - \frac{k^2}{2d} + \sum_{\mu=1}^d \frac{k_{\mu}^4}{24d} + O(k_{\mu}^6).$$

*Développement de haute température.* Il est possible de calculer la fonction de partition et les fonctions de corrélation en développant l'expression (8.2) en puissances de l'interaction  $V_{ij}$  et en évaluant les termes successifs (développement de haute température). Le développement s'exprime en fonction des moments de la distribution locale (section 7.1),

$$\langle S_i^n \rangle = z^{-1} (H_i) \left( \frac{\partial}{\partial H_i} \right)^n z(H_i). \quad (8.9)$$

Comme dans le cas des perturbations à la mesure gaussienne, l'énergie libre a un développement plus simple que la fonction de partition car les contributions « non connexes » se compensent :

$$\mathcal{W}(H) - \mathcal{W}_0(H) = \sum_{i,j} V_{ij} \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle + \frac{1}{2!} \sum_{i,j,k,l} V_{ij} V_{kl} \langle S_i S_j S_k S_l \rangle_c + \dots, \quad (8.10)$$

où par exemple,

$$\sum_{i,j,k,l} V_{ij} V_{kl} \langle S_i S_j S_k S_l \rangle_c = \sum_{i,j,k,l} V_{ij} V_{kl} [\langle S_i S_j S_k S_l \rangle - \langle S_i S_j \rangle \langle S_k S_l \rangle].$$

Dans la différence, tous les termes avec les quatre indices  $i, j, k, l$  différents se compensent. Cette propriété est liée à l'extensivité de l'énergie libre.

Le développement de haute température diverge à la température critique où les fonctions thermodynamiques sont singulières. À condition d'être capable de calculer assez de termes du développement, on peut l'utiliser, combiné avec des méthodes numériques d'analyse de séries (méthode de rapports, extrapolation par table de Neville et ses généralisations, approximants de Padé logarithmiques, approximants différentiels,...) pour obtenir des informations numériques sur le comportement critique.

*Remarque.* Il est techniquement commode, dans le cadre du développement de haute température comme de l'approximation de champ moyen (cf. section 8.10), de supposer que  $V_{ii}$  s'annule (par invariance par translation  $V_{ii}$  est indépendant du site  $i$ ), une telle contribution à un site pouvant être incluse dans la mesure  $\rho(S)$ .

## 8.2 Le modèle gaussien : la fonction à deux points

Considérons d'abord les systèmes ferromagnétiques dans la phase désordonnée  $T > T_c$ . Parce que la longueur de corrélation est alors finie, comme nous l'avons déjà indiqué en section 6.1.3 on s'attend à pouvoir décrire leurs propriétés macroscopiques en termes de spins classiques  $\sigma_i$ , qui sont déjà des moyennes des spins microscopiques dans des petits volumes. On s'attend, de plus, dans l'esprit du théorème de la limite centrale, à ce que les fluctuations des spins  $\sigma$  soient faibles et que leur distribution soit en première approximation gaussienne. Cette idée nous conduit au modèle gaussien que nous présentons maintenant.

Une mise en oeuvre formelle et plus précise de cette idée sera présentée en section 8.10.

*Modèle gaussien.* Comme dans la phase désordonnée, les spins fluctuent autour d'une valeur moyenne nulle par symétrie  $\sigma \rightarrow -\sigma$ , une distribution gaussienne en chaque site a la forme

$$\rho(\sigma) = e^{-b_2 \sigma^2 / 2}, \quad b_2 > 0.$$

L'interaction à deux spins de type (8.1) est directement quadratique. Elle peut être considérée comme le premier terme d'un développement en puissances de  $\sigma$ . Avec cette interaction, la fonction de partition gaussienne s'écrit

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \prod_i d\sigma_i \exp \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i \right], \quad (8.11)$$

où

$$\mathcal{H}(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathfrak{S}_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad \mathfrak{S}_{ij} = b_2 \delta_{ij} - 2V_{ij} \quad (8.12)$$

et  $V_{ij}$  a la forme discutée en section 8.1. En particulier,  $\mathfrak{S}_{ij}$  ne dépend que de  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , où  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  sont les positions des sites  $i$  et  $j$  :

$$\mathfrak{S}_{ij} \equiv \mathfrak{S}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

Le modèle n'est défini que si la matrice  $\mathfrak{S}_{ij}$  est définie positive. Dans la limite thermodynamique, les valeurs propres de la matrice  $\mathfrak{S}$  prennent la forme d'un spectre continu donné par la transformée de Fourier

$$\tilde{\mathfrak{S}}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathfrak{S}(\mathbf{r}).$$

En effet, cette équation peut être réécrite comme une équation aux valeurs propres (cf. équation (3.34)),

$$\tilde{\mathfrak{S}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathfrak{S}(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Avec les définitions (8.5) et (8.6), on trouve

$$\tilde{\mathfrak{S}}(\mathbf{k}) = b_2 - 2v\tilde{U}(\mathbf{k}), \quad (8.13)$$

et à cause de la borne (8.7), la condition de positivité est donc

$$\frac{1}{2}b_2 \equiv v_c > v. \quad (8.14)$$

Comme nous le verrons, cette condition implique que la longueur de corrélation est finie, ce qui est cohérent avec les hypothèses qui ont conduit au modèle gaussien.

Nous pouvons alors utiliser les résultats de la section 6.3.3. Le potentiel thermodynamique est simplement

$$\Gamma(M) = \Gamma(0) + \frac{b_2}{2} \sum_i M_i^2 - \sum_{i,j} V_{ij} M_i M_j. \quad (8.15)$$

### 8.2.1 Quantités homogènes

En champ magnétique uniforme  $H_i = H$ , l'aimantation  $M$  est uniforme. La fonction  $\Gamma(M)$  est alors proportionnelle au nombre de sites  $\Omega$ , et nous posons

$$\Omega^{-1} [\Gamma(M) - \Gamma(0)] \equiv \mathcal{G}(M) = \frac{1}{2}(b_2 - 2v)M^2, \quad (8.16)$$

où la définition (8.4) a été utilisée.

La distribution du spin moyen  $\sigma = \sum_i S_i / \Omega$  est gaussienne et est donnée par

$$R_\Omega(\sigma) = \sqrt{(b_2 - 2v)/2\pi} e^{H\sigma - (b_2 - 2v)\sigma^2/2}. \quad (8.17)$$

On retrouve la valeur particulière (8.14) :  $v_c = b_2/2$ . Pour  $v < v_c$ ,  $\mathcal{G}(M)$  est minimum à  $M = 0$ , et donc l'aimantation s'annule en champ nul :

$$M = \langle \sigma_i \rangle_{H=0} = 0.$$

La phase de haute température est une phase désordonnée.

Pour  $v = v_c$ , l'aimantation est indéterminée et à plus basse température, le modèle n'a plus de sens car la distribution  $R_\Omega(\sigma)$  n'est pas sommable.

L'équation d'état est linéaire :

$$H = \mathcal{G}'(M) = (v_c - v)M.$$

La susceptibilité magnétique, qui est la dérivée de l'aimantation par rapport au champ magnétique, prend la forme

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{v_c - v}.$$

La susceptibilité magnétique diverge donc pour  $v = v_c$ , qui peut être interprété comme un point de transition correspondant à une température critique  $T_c$ . Le comportement

$$\chi \propto (T - T_c)^{-1},$$

coïncide avec celui obtenu en champ nul dans le modèle en dimension infinie en section 7.3.

On ne s'attend, en général, à une telle divergence qu'en champ nul mais, dans le modèle gaussien, la susceptibilité ne dépend pas du champ appliqué.

## 8.2.2 Fonction à deux points

La fonction à deux points en champ nul, pour  $v < v_c$ ,

$$\Delta_{ij} \equiv \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\text{conn.}} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{W}(H)}{\partial H_i \partial H_j} \right|_{H=0}$$

est l'inverse de la matrice  $\mathfrak{S}$  (équation (8.12)) :

$$\sum_k \Delta_{ik} \mathfrak{S}_{kj} = \delta_{ij}.$$

À cause de l'invariance par translation, à la fois  $\mathfrak{S}_{ij}$  et  $\Delta_{ij}$  ne dépendent que de  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , où  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  sont les positions des sites  $i$  et  $j$ . L'équation précédente est donc une équation de convolution qui devient simple après transformation de Fourier. La transformée de Fourier

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(\mathbf{r}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k})$$

est l'inverse de la transformée de Fourier (8.13) :

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \tilde{\mathfrak{S}}^{-1}(\mathbf{k}) = \left[ b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{k}) \right]^{-1}. \quad (8.18)$$

Pour  $v < v_c$ , le dénominateur ne s'annule pas dans un voisinage de l'axe réel. La fonction  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  reste donc analytique dans une bande et la fonction  $\Delta(\mathbf{r})$  décroît exponentiellement pour  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ , confirmant que la longueur de corrélation est finie.

En revanche, pour  $v = v_c$  (c'est-à-dire à la température de transition  $T = T_c$ ), le dénominateur se comporte pour  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$  comme (utilisant la paramétrisation (8.8))

$$2v_c(1 - \tilde{U}(\mathbf{k})) = 2v_c a^2 k^2 + O(k^4).$$

D'ailleurs, c'est le seul point où le dénominateur peut s'annuler (à cause de la borne (8.7)). La longueur de corrélation est infinie, ce qui est cohérent avec

une interprétation de ce point comme correspondant à une température de transition. La fonction  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  est singulière,

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \underset{|\mathbf{k}| \rightarrow 0}{\sim} \frac{D}{k^2}, \quad D = 1/2v_c a^2, \quad (8.19)$$

et cela conduit à une décroissance algébrique de  $\Delta(\mathbf{r})$  pour  $d > 2$ .

Pour  $d = 2$  et  $v = v_c$ , l'intégrale

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \, e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k})$$

diverge à  $\mathbf{k} = 0$  et donc le modèle gaussien ne peut pas décrire le point de transition  $T = T_c$  en dimension 2.

### 8.2.3 Le comportement critique

Bien que certaines propriétés du point de transition  $v = v_c$  soient un peu pathologiques, examinons le comportement de la fonction à deux points,

$$\Delta(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \, e^{-i\lambda\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}),$$

pour  $d > 2$ , au point critique  $v = v_c$  quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Le calcul explicite de l'intégrale est présenté en section 8.4.3, mais le comportement peut être obtenu par des arguments simples.

Après le changement  $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}/\lambda$ , l'intégrale devient

$$\Delta(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \lambda^{2-d} \int d^d k \, e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \lambda^{-2} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}/\lambda),$$

où maintenant les composantes  $k_\mu$  du vecteur  $\mathbf{k}$  varient dans l'intervalle  $-\lambda\pi \leq k_\mu \leq \lambda\pi$ .

À cause de la régularité de  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  pour  $\mathbf{k} \neq 0$ , on peut prendre la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  dans l'intégrant et les bornes d'intégration et, donc,

$$\Delta(\lambda\mathbf{r}) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{\lambda^{2-d}}{2v_c a^2} \int \frac{d^d k}{k^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Comme le dénominateur est maintenant invariant par rotation, dans cette limite,  $\Delta(\mathbf{r})$  n'est fonction que de  $r = |\mathbf{r}|$ . On en déduit

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{r=|\mathbf{r}| \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{r^{d-2}}. \quad (8.20)$$

La fonction à deux points a une décroissance algébrique et donc la longueur de corrélation est infinie.

De plus, asymptotiquement,  $\Delta(\mathbf{r})$  a une symétrie de rotation  $O(d)$  (celle de l'espace continu), plus étendue que les symétries discrètes du réseau (une propriété analogue a été obtenue pour la marche au hasard en section 3.3.9).

On montrera que dans des modèles plus généraux, la transformée de Fourier de la fonction à deux points se comporte, à la température critique  $T = T_c$  pour  $r \rightarrow \infty$ , comme

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty}{\propto} 1/r^{d-2+\eta}, \quad (8.21)$$

ce qui correspond, par les mêmes arguments, au comportement

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \underset{k \rightarrow 0}{\propto} 1/k^{2-\eta}. \quad (8.22)$$

Ici, des formes (8.19) ou (8.20) de la fonction à deux points, on déduit

$$\eta = 0, \quad (8.23)$$

qui est la valeur gaussienne ou classique de l'exposant  $\eta$ .

### 8.2.4 Domaine critique

Pour  $v < v_c$ , mais  $v_c - v \rightarrow 0$  et  $\mathbf{k}$  d'ordre  $(v_c - v)^{1/2}$  (le domaine critique), le terme dominant de  $1/\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  est

$$2v_c - 2v\tilde{U}(\mathbf{k}) = 2(v_c - v) + 2v_c a^2 k^2 + O(k^4, (v - v_c)k^2), \quad (8.24)$$

et donc

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \sim \frac{1}{2} (v_c - v + v_c a^2 k^2)^{-1}.$$

À cause du développement (8.8), dans cette limite,  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  a encore une symétrie de rotation  $O(d)$ , plus étendue que les symétries du réseau.

De plus, dans cette limite, la fonction à deux points a une forme d'Ornstein–Zernike ou de champ libre (voir section 8.4).

On en déduit que  $\Delta(\mathbf{r})$  décroît exponentiellement (équations (8.40) et (8.42)) avec le comportement asymptotique :

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{r^{(d-1)/2}} e^{-r/\xi},$$

où la longueur de corrélation diverge pour  $T \rightarrow T_c$  comme

$$\xi \underset{v \rightarrow v_c}{\sim} a(1 - v/v_c)^{-1/2} \propto (T - T_c)^{-1/2}.$$

Dans une grande classe de modèles, on trouve

$$\xi(T) \propto (T - T_c)^{-\nu}, \quad (8.25)$$

et  $\nu = 1/2$  est la valeur gaussienne de l'exposant de corrélation.

Dans le cadre restreint de la théorie gaussienne sur réseau, nous avons obtenu des comportements universels de la fonction à deux points à grande distance à  $T_c$  et près de  $T_c$  quand la longueur de corrélation est grande par rapport à l'échelle microscopique, ainsi que la singularité universelle de la longueur de corrélation.

Tous les comportements *universels* ainsi obtenus sont également ceux qu'on retrouvera dans l'approximation quasi-gaussienne (section 8.5), qu'on déduit des hypothèses générales de la théorie de Landau (section 8.7), ou qui apparaissent très généralement dans l'approximation de champ moyen (section 8.10).

### 8.3 Modèle gaussien et marche au hasard

Montrons, à titre d'exercice et parce qu'une telle propriété a des généralisations, comment la fonction à deux points gaussienne peut être reliée à un processus de marche au hasard, tel qu'il est défini en section 3.3.7.

Nous partons de l'expression (8.18) :

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \left[ 2v_c - 2v\tilde{U}(\mathbf{k}) \right]^{-1},$$

que nous développons en puissances de  $v$  :

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2v_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{v}{v_c} \right)^n \tilde{U}^n(\mathbf{k}). \quad (8.26)$$

Inversant la représentation (8.6), nous exprimons maintenant  $\tilde{U}(\mathbf{k})$  en terme de sa transformée de Fourier :

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} U(\mathbf{r}).$$

Alors,

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2v_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{v}{v_c} \right)^n \sum_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n} U(\mathbf{r}_1) \dots U(\mathbf{r}_n) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_n)}.$$

Nous introduisons maintenant un point initial  $\mathbf{q}_0$  arbitraire sur le réseau et changeons de variables, posant

$$\mathbf{r}_\ell = \mathbf{q}_\ell - \mathbf{q}_{\ell-1}, \quad 1 \leq \ell \leq n.$$

L'expression devient

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2v_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{v}{v_c} \right)^n \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} U(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \dots U(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_0)}. \quad (8.27)$$

Nous avons déjà noté que la fonction  $U(\mathbf{r})$  a toutes les propriétés des fonctions de saut de la marche au hasard invariante par translation. Définissons alors le processus correspondant (équation (3.43)) par l'équation d'évolution

$$P_n(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbb{Z}^d} U(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) P_{n-1}(\mathbf{q}),$$

où  $P_n(\mathbf{q})$  est la probabilité pour le marcheur d'être au point  $\mathbf{q}$  au temps  $n$  avec comme point de départ  $\mathbf{q}_0$  au temps 0.

L'itération de cette équation donne

$$P_n(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-2}, \mathbf{q}_{n-1}} U(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{n-1}) U(\mathbf{q}_{n-1} - \mathbf{q}_{n-2}) \dots U(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0).$$

L'expression (8.27) peut donc s'écrire ( $\mathbf{q}_n \mapsto \mathbf{q}$ )

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2v_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{v}{v_c} \right)^n \sum_{\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)}. \quad (8.28)$$

Le coefficient de  $v^n$  est donc une fonction génératrice des moments de la distribution au temps  $n$ . De façon générale, le comportement de la distribution  $P_n(\mathbf{q})$  pour  $n \rightarrow \infty$  est lié à la singularité de  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$ , comme fonction de  $v$ , la plus proche de l'origine. Ici, comparant avec l'expression (8.26), on obtient directement

$$\tilde{U}^n(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)}.$$

On peut ensuite développer en puissances de  $\mathbf{k}$ . Par exemple, le second moment est le coefficient de  $\mathbf{k}^2$  :

$$na^2 \mathbf{k}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0))^2$$

et donc,

$$\sum_{\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)_\alpha (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)_\beta = 2na^2 \delta_{\alpha\beta}.$$

Nous retrouvons, comme nous l'avons déjà démontré, que la distribution asymptotique de  $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  est isotrope et  $(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2$  croît en moyenne linéairement avec le temps.

## 8.4 Modèle gaussien et intégrale de champ

Au chapitre 5, nous avons montré que les propriétés de longue distance de modèles sur réseau unidimensionnel, peuvent être décrites, quand la longueur de corrélation diverge, par une intégrale de chemin. En dimension arbitraire,

les propriétés universelles du modèle gaussien sur réseau peuvent être déduites d'une théorie statistique des champs (qui remplacent les configurations de spin) dans l'espace continu et isotrope.

Soient  $\sigma(x)$  un champ dans l'espace continu à  $d$  dimensions  $\mathbb{R}^d$  et  $H(x)$  un champ magnétique arbitraire.

Nous considérons l'*intégrale de champ*, ou *intégrale fonctionnelle*, gaussienne

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\sigma(x)] \exp \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \int d^d x \sigma(x) H(x) \right]$$

avec

$$\mathcal{H}(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x \left[ \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \sigma(x))^2 + m^2 \sigma^2(x) \right] \quad (8.29)$$

et la notation  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ , où  $m > 0$  est un paramètre lié à la déviation à la température critique, comme nous le vérifions plus loin. La fonctionnelle  $\mathcal{H}(\sigma)$  est souvent appelée *hamiltonien* dans ce contexte (une dénomination empruntée à la théorie statistique des gaz classiques).

L'intégrale de champ généralise à  $d$  dimensions l'intégrale de chemin, et le symbole  $[d\sigma(x)]$  signifie qu'on intègre sur tous les champs  $\sigma(x)$ .

Dans le cadre de la théorie quantique des champs qui décrit les interactions fondamentales à l'échelle microscopique, le cas gaussien correspond à une théorie de champs libres. La forme quadratique dans les champs (8.29) est alors appelée *action euclidienne* et le paramètre  $m$  est la masse de la particule associée au champ  $\sigma$ .

Comme dans le cas du réseau, quand cela s'avère nécessaire, nous définissons la limite de volume infini ou thermodynamique en partant d'un cube avec des conditions aux limites périodiques.

### 8.4.1 Maximum de l'intégrant et fonction à deux points

Le calcul de l'intégrale gaussienne est une généralisation simple du calcul de l'intégrale de chemin (5.11). On cherche d'abord le maximum de l'intégrant et donc le minimum de

$$\mathcal{H}(\sigma, H) = \mathcal{H}(\sigma) - \int d^d x \sigma(x) H(x). \quad (8.30)$$

Pour cela on pose

$$\sigma(x) = \sigma_c(x) + \varepsilon(x), \quad (8.31)$$

où la fonction  $\sigma_c(x)$  est déterminée par la condition que le terme linéaire en  $\varepsilon$  s'annule :

$$- \int d^d x \left[ \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu \sigma_c(x) \partial_\mu \varepsilon(x) + m^2 \sigma_c(x) \varepsilon(x) \right] + \int d^d x \varepsilon(x) H(x) = 0.$$

On intègre le terme linéaire en  $\partial_\mu \varepsilon(x)$  par parties (par rapport à  $x_\mu$ ) :

$$\sum_{\mu=1}^d \int d^d x \partial_\mu \sigma_c(x) \partial_\mu \varepsilon(x) = - \sum_{\mu=1}^d \int d^d x \varepsilon(x) (\partial_\mu)^2 \sigma_c(x),$$

parce que les termes tout intégrés s'annulent à cause des conditions aux limites périodiques. On trouve alors l'équation

$$(-\nabla_x^2 + m^2)\sigma_c(x) = H(x),$$

où  $\nabla_x^2$  est le laplacien à  $d$  dimensions :

$$\nabla_x^2 = \sum_{\mu} \partial_\mu^2.$$

La solution peut s'écrire

$$\sigma_c(x) = \int d^d y \Delta(x-y) H(y),$$

où  $\Delta(x-y)$  est aussi la fonction à deux points gaussienne en champ nul (équations (2.9, 2.17)) :

$$\langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle_{H=0} = \Delta(x-y).$$

Elle satisfait

$$(-\nabla_x^2 + m^2)\Delta(x) = \delta^{(d)}(x),$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac, comme on le vérifie en appliquant  $-\nabla_x^2 + m^2$  à  $\sigma_c$ . Cette équation se résout par transformation de Fourier. Dans la limite du volume infini, on trouve

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{-ik \cdot x} \tilde{\Delta}(k) \quad (8.32)$$

avec

$$\tilde{\Delta}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad (8.33)$$

comme on le vérifie en appliquant  $-\nabla_x^2 + m^2$  à  $\Delta(x)$  ( $\int d^d k e^{-ik \cdot x} = (2\pi)^d \delta^{(d)}(x)$ ).

Enfin, la fonctionnelle (8.30) pour  $\sigma = \sigma_c$ , après une intégration par parties, prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\sigma_c, H) &= \int d^d x \sigma_c(x) \left[ -\frac{1}{2} \nabla_x^2 + \frac{1}{2} m^2 - H(x) \right] \sigma_c(x) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x \sigma_c(x) H(x) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y H(x) \Delta(x-y) H(y). \end{aligned} \quad (8.34)$$

### 8.4.2 Intégration gaussienne

On fait maintenant le changement de variable (8.31),  $\sigma(x) \mapsto \varepsilon(x)$ . La fonctionnelle (8.30) devient

$$\mathcal{H}(\sigma, H) = \mathcal{H}(\sigma_c, H) + \mathcal{H}(\varepsilon),$$

et donc

$$\mathcal{Z}(H) = e^{-\mathcal{H}(\sigma_c, H)} \int [d\varepsilon(x)] e^{-\mathcal{H}(\varepsilon)}.$$

L'intégrale gaussienne résiduelle sur  $\varepsilon(x)$  donne une normalisation,

$$\mathcal{Z}(0) = \int [d\varepsilon(x)] e^{-\mathcal{H}(\varepsilon)},$$

indépendante de  $H$ , et qui ne peut être évaluée entièrement qu'en remplaçant le continu par un réseau (*cf.* aussi la discussion des sections 3.5 et 5.1.3).

La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation connexes est donc (équation (8.34))

$$\mathcal{W}(H) = \ln \mathcal{Z}(H) = \mathcal{W}(0) + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y H(x) \Delta(x - y) H(y). \quad (8.35)$$

En champ uniforme, la densité d'énergie libre devient

$$\begin{aligned} W(H) &= (\mathcal{W}(H) - \mathcal{W}(0)) / \text{volume} \\ &= \frac{1}{2} H^2 \int d^d x \Delta(x) = \frac{1}{2} H^2 \tilde{\Delta}(0) = \frac{1}{2} H^2 / m^2, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit la densité de potentiel thermodynamique

$$\mathcal{G}(M) = \frac{1}{2} m^2 M^2. \quad (8.36)$$

Comparant ces expressions avec la partie asymptotique universelle des expressions sur réseau, par exemple  $\mathcal{G}(M)$  avec l'expression (8.16), on identifie le paramètre  $m^2$  :

$$m^2 \sim 2(v_c - v) \propto T - T_c. \quad (8.37)$$

### 8.4.3 Calcul explicite de la fonction à deux points

Nous calculons maintenant la fonction à deux points dans l'espace continu explicitement.

À  $T_c$ , il faut évaluer

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{k^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, nous utilisons l'identité

$$\frac{1}{k^2} = \int_0^\infty dt e^{-tk^2}.$$

L'intégrale sur  $k$  devient alors gaussienne. Après intégration,

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{d/2}} e^{-r^2/4t}.$$

Après le changement de variables  $u = r^2/4t$ , l'intégration sur  $u$  donne

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \frac{1}{r^{d-2}}. \quad (8.38)$$

Pour la fonction  $1/(k^2 + m^2)$ , la stratégie est la même. On trouve alors

$$\Delta(r) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{d/2}} e^{-r^2/4t - m^2 t} = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{2m}{r}\right)^{d/2-1} K_{1-d/2}(mr), \quad (8.39)$$

où  $K_\nu(r)$  est une fonction de Bessel de troisième espèce (cf. définition (2.52)). Pour  $z \rightarrow +\infty$ ,  $K_\nu(z)$  peut être évaluée par la méthode du col (cf. exercice 2.6). On en déduit

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2m} \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{(d-1)/2} \frac{e^{-mr}}{r^{(d-1)/2}}. \quad (8.40)$$

La constante  $\xi = 1/m$ , qui caractérise la décroissance exponentielle de la fonction à deux points, est la longueur de corrélation.

*Remarque.* Pour avoir une idée de la classe des champs typiques qui contribuent à l'intégrale fonctionnelle, on peut évaluer la fonction à deux points dans la limite des points coïncidents :

$$\langle \sigma(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{y}) \rangle \underset{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \rightarrow 0}{\sim} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}, m = 0) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2}}.$$

On voit que cette classe de fonctions est si singulière que la valeur moyenne de  $\sigma^2(\mathbf{x})$  diverge, et ce d'autant plus vite que la dimension d'espace  $d$  est plus grande. Cette singularité de la mesure gaussienne correspondant au hamiltonien (8.29) ne manquera pas de poser des problèmes par la suite.

Pour  $d = 2$ , le comportement prend la forme

$$\langle \sigma(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{y}) \rangle \underset{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2\pi} \ln(m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|).$$

#### 8.4.4 Réseau et limite continue

Nous étudions maintenant comment, quand la longueur de corrélation tend vers l'infini, la fonction à deux points sur le réseau converge, à grande distance, vers la fonction du continu.

À  $T_c$ , la fonction sur le réseau s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \int_{|k_\mu| \leq \pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{2} \int_{|k_\mu| \leq \pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \int_0^\infty dt e^{-t[v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})]}.\end{aligned}\quad (8.41)$$

Si nous restreignons l'intégrale sur  $t$  à un intervalle fini  $t < t_{\max}$ , la fonction

$$\int_0^{t_{\max}} dt e^{-t[v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})]}$$

est analytique dans une bande et suivant l'analyse de la section A.5.2, sa transformée de Fourier décroît exponentiellement pour  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ . Donc le voisinage de  $t = \infty$ , qui engendre la singularité à  $\mathbf{k} = 0$ , donne la contribution dominante à grande distance. On se retrouve alors dans la situation de la méthode du col. Le col se trouve à  $\mathbf{k} = 0$ . On développe donc  $v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})$  pour  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , et le terme dominant est proportionnel à  $k^2$ . De plus, on peut intégrer sans restriction sur  $\mathbf{k}$ . On retrouve donc le résultat du continu (8.38).

L'analyse se généralise à la situation  $|v - v_c| \ll 1$ . Après le changement de variables  $\mathbf{k} = (1 - v/v_c)^{1/2} \mathbf{k}'/a$  et donc (équation (8.24))

$$2v_c - 2v\tilde{U}(\mathbf{k}) = 2(v_c - v)(1 + k'^2) + O((v_c - v)^2),$$

l'intégrale (8.41) devient

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{v \rightarrow v_c}{\sim} (1 - v/v_c)^{d/2-1} \frac{1}{2v_c a^d} \int_{|k_\mu| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}/\xi}}{1 + k^2}, \quad (8.42)$$

où nous avons posé

$$\Lambda = \pi a(1 - v/v_c)^{-1/2}, \quad \xi = a(1 - v/v_c)^{-1/2}. \quad (8.43)$$

Quand  $v \rightarrow v_c$ , la borne  $\Lambda \rightarrow \infty$  et on peut donc intégrer sans restrictions sur les composantes du vecteur  $\mathbf{k}$ . Le calcul devient alors identique au calcul du continu et  $\xi$  s'identifie bien à la longueur de corrélation.

### 8.5 Approximation quasi-gaussienne

En dessous du point de transition, le modèle gaussien n'est certainement plus valable puisque la forme quadratique (8.12) n'est plus positive et donc

l'intégrale gaussienne (8.11) n'est plus définie. On remarque aussi que la distribution du spin moyen, dans cette limite quadratique, n'est plus sommable.

Cependant, même dans le cadre du théorème de la limite centrale, la distribution gaussienne n'est qu'asymptotique. L'analyse du modèle gaussien montre qu'en dessous du point de transition, les corrections à la distribution gaussienne, c'est-à-dire les termes de degré plus élevé dans la distribution effective de spin, même s'ils sont petits, ne peuvent plus être négligés.

Nous montrons ici que la méthode du col conduit naturellement à une approximation quasi-gaussienne qui reproduit, à l'ordre dominant, les résultats du modèle en dimension infinie. Cependant, à la différence du modèle en dimension infinie, elle permet également d'étudier le comportement des fonctions de corrélation à la transition.

*Modèle effectif.* Pour aller au-delà du modèle gaussien, nous considérons donc une distribution en chaque site plus générale,

$$\rho(\sigma) = e^{-B(\sigma)}$$

où, suivant l'analyse en fin de section 7.1.2 (*cf.* équation (6.10)), nous choisissons une fonction  $B(\sigma)$  de la forme (7.11), qui est le potentiel thermodynamique d'un modèle à un site. Nous avons montré qu'une telle fonction est analytique et nous paramétrons son développement à  $\sigma = 0$ , sous la forme

$$B(\sigma) = \sum_{p=1} \frac{b_{2p}}{2p!} \sigma^{2p}, \quad b_2 > 0. \quad (8.44)$$

Nous supposons aussi  $b_4 > 0$  puisque nous voulons étudier des transitions continues.

La fonction génératrice des fonctions de corrélation s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(H) = \int \left( \prod_i d\sigma_i \right) \exp \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i \right], \quad (8.45)$$

où l'hamiltonien  $\mathcal{H}(\sigma)$  prend la forme

$$\mathcal{H}(\sigma) = - \sum_{i,j} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i B(\sigma_i). \quad (8.46)$$

*Approximation quasi-gaussienne.* Comme l'intégrale (8.45) n'est plus gaussienne, elle ne peut plus être calculée exactement. Mais puisque  $B(\sigma)$  est analytique, nous pouvons évaluer l'intégrale sur les spins par la méthode du col. Si nous supposons que les fluctuations autour du col varient lentement, nous pouvons approximer l'intégrale par la contribution dominante, une approximation qu'on peut qualifier de quasi-gaussienne. Une telle hypothèse implique, en particulier, que les spins  $\sigma_i$  sont la somme d'une valeur moyenne  $M_i$  et

d'une partie fluctuante faiblement corrélée. Cette hypothèse va au-delà d'une idée de théorème de la limite centrale en ce sens que la valeur moyenne  $M_i$  n'est plus liée seulement à la distribution en chaque site mais est aussi un résultat des interactions.

*Méthode du col.* Le maximum de l'intégrant dans l'intégrale (8.45) est donné par une solution de l'équation de col

$$H_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma_i} \quad (8.47)$$

et, à l'ordre dominant,

$$\mathcal{W}(H) = -\mathcal{H}(\sigma) + \sum_i \sigma_i H_i,$$

où  $\sigma$  est une fonction de  $H$  à travers (8.47).

Comme nous l'avons déjà noté,  $\mathcal{W}(H)$  est la transformée de Legendre de  $\mathcal{H}(\sigma)$ . En conséquence, le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$ , transformé de Legendre de  $\mathcal{W}(H)$ , est simplement

$$\Gamma(M) = \mathcal{H}(M) = - \sum_{i,j} V_{ij} M_i M_j + \sum_i B(M_i). \quad (8.48)$$

Dans le cas des modèles invariants par translation d'espace que nous étudions, l'aimantation en champ uniforme est uniforme. La densité de potentiel thermodynamique est alors

$$\mathcal{G}(M) = \Omega^{-1} \Gamma(M) = -vM^2 + B(M), \quad (8.49)$$

où  $v$  est le paramètre (8.4).

L'équation d'état, qui est la relation entre champ magnétique, aimantation et température, s'en déduit :

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M} = -2vM + B'(M). \quad (8.50)$$

Nous retrouvons exactement les expressions (7.27) et (7.28) du modèle en dimension infinie, et la discussion du comportement universel des quantités homogènes est identique à celle présentée en sections 7.2, 7.3.

## 8.6 La fonction à deux points : universalité

Contrairement au modèle en dimension infinie, l'approximation quasi-gaussienne engendre une fonction à deux points non triviale dont nous étudions maintenant les propriétés.

*Divergence de la longueur de corrélation et transition continue.* Une transition continue est caractérisée par la propriété

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{(\partial M)^2} \right|_{M=0} = 0 \quad (8.51)$$

et donc par la divergence de la susceptibilité magnétique  $\chi = \partial^2 W / (\partial H)^2$  en champ nul. Par ailleurs,

$$\frac{\partial W(H)}{\partial H} = \left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_i} \right|_{H_i=H}$$

et donc

$$\frac{\partial^2 W(H)}{(\partial H)^2} = \sum_j \left. \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_i \partial H_j} \right|_{H_i=H} = \sum_j W_{ij}^{(2)}$$

où  $W_{ij}^{(2)}$  est la fonction à deux points connexe. À cause de l'invariance par translation en champ uniforme,

$$W_{ij}^{(2)} = W^{(2)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

où  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$  sont les vecteurs joignant les points  $i$  et  $j$  à l'origine. Ainsi,

$$\frac{\partial^2 W(H)}{(\partial H)^2} = \sum_{\mathbf{r}} W^{(2)}(\mathbf{r}).$$

Nous introduisons maintenant les transformées de Fourier des fonctions connexe et de vertex

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{r}} W^{(2)}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \\ \tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{r}} \Gamma^{(2)}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{\partial^2 W(H)}{(\partial H)^2} = \sum_{\mathbf{r}} W^{(2)}(\mathbf{r}) = \widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}=0) = 1/\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}=0), \quad (8.52)$$

où la dernière équation découle de l'équation (6.26).

La somme  $\sum_{\mathbf{r}} W^{(2)}(\mathbf{r})$  ne diverge que si la longueur de corrélation diverge. La condition de transition continue (8.51) entraîne donc la divergence de la longueur de corrélation en aimantation nulle.

*La fonction à deux points.* De façon générale, de l'équation (8.48) on déduit la relation entre champ magnétique et aimantation locale

$$H_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial M_i} = -2 \sum_j V_{ij} M_j + B'(M_i). \quad (8.53)$$

En dérivant à nouveau, on obtient la fonction de vertex à deux points à aimantation fixée

$$\Gamma_{ij}^{(2)} \equiv \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_j} \Big|_{M_i=M} = -2V_{ij} + B''(M)\delta_{ij},$$

ou en notation plus explicite

$$\Gamma^{(2)}(\mathbf{r}) = -2V(\mathbf{r}) + B''(M)\delta(\mathbf{r}). \quad (8.54)$$

Sa transformation de Fourier est donnée par

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = B''(M) - 2\tilde{V}(\mathbf{k}). \quad (8.55)$$

La transformée de Fourier de la fonction à deux points connexe s'en déduit (équation (6.26)) :

$$\widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) = 1/\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = \left[ B''(M) - 2\tilde{V}(\mathbf{k}) \right]^{-1}. \quad (8.56)$$

En champ nul, au-dessus de  $T_c$ , l'aimantation s'annule et l'on retrouve la forme (8.18) du *modèle gaussien*

$$\widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}[v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})]^{-1}, \quad (8.57)$$

où  $v_c = b_2/2$ . Si la transition est du second ordre, cette expression reste valable jusqu'à  $v = v_c$  ( $T = T_c$ ) où la longueur de corrélation diverge parce que la dérivée seconde de  $\Gamma(M)$  s'annule, et c'est la source de propriétés d'universalité spatiale. En particulier, on retrouve les valeurs gaussiennes ou classiques des exposants (définitions (8.21, 8.25)),  $\eta = 0$ ,  $\nu = 1/2$ .

Plus généralement pour  $|v - v_c|$ ,  $|\mathbf{k}|$ ,  $M \ll 1$  (ce qui implique aussi champ magnétique faible), dans la paramétrisation (7.11), on trouve

$$\widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) \sim \left[ 2v_c + \frac{1}{2}b_4M^2 - 2v(1 - a^2k^2) \right]^{-1}. \quad (8.58)$$

La fonction de corrélation garde une forme d'Ornstein-Zernike ou de champ libre. Les équations (8.42, 8.43) se généralisent immédiatement et la longueur de corrélation pour  $M \neq 0$  s'en déduit :

$$\xi^{-2} = \frac{1}{2v_c a^2} \left( 2v_c - 2v + \frac{1}{2}b_4M^2 \right). \quad (8.59)$$

En champ magnétique nul, utilisant en dessous de  $T_c$  l'expression (7.32) de l'aimantation spontanée, on trouve

$$\begin{aligned} \xi_+^{-2} &= a^{-2} (1 - v/v_c) & \text{pour } T > T_c, \\ \xi_-^{-2} &= 2a^{-2} (v/v_c - 1) & \text{pour } T < T_c. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Introduisant, également, de façon générale, un exposant de longueur de corrélation  $\nu'$  pour  $T \rightarrow T_{c-}$ , et définissant les amplitudes critiques  $f_{\pm}$  pour  $|T - T_c| \rightarrow 0$  par

$$\xi_+ \sim f_+ (T - T_c)^{-\nu}, \quad \xi_- \sim f_- (T_c - T)^{-\nu'}, \quad (8.61)$$

on déduit de la relations (8.60) la valeur quasi-gaussienne de l'exposant

$$\nu' = \frac{1}{2},$$

et le rapport d'amplitudes

$$f_+ / f_- = \sqrt{2}. \quad (8.62)$$

Notons qu'on définit parfois la longueur de corrélation à partir du second moment  $\xi_1^2$  de  $W_{ij}^{(2)}$  qui est proportionnel à  $\xi^2$ , et qui a donc les mêmes propriétés universelles

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = \left[ \tilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) \right]^{-1} \sim \tilde{\Gamma}^{(2)}(0) (1 + k^2 \xi_1^2 + O(k^4)). \quad (8.63)$$

Il y a encore d'autres rapports d'amplitudes universels. Par exemple, si pour  $v = v_c$ ,  $H \rightarrow 0$ , on pose

$$\chi \sim C^c / H^{2/3}, \Rightarrow 3C^c = (6/b_4)^{1/3},$$

et en champ nul,

$$M \sim M_0 (v - v_c)^{1/2}, \Rightarrow M_0^2 = 12/b_4,$$

on trouve la combinaison

$$R_\chi = C^+ M_0^2 (3C^c)^{-3} = 1,$$

qui est donc universelle.

## 8.7 Approximation quasi-gaussienne et théorie de Landau

Les résultats universels que nous avons obtenus dans le cadre de l'approximation quasi-gaussienne découlent également de la théorie de Landau que nous rappelons ici. La théorie de Landau est basée sur des hypothèses très générales concernant les propriétés des systèmes avec interactions à courte portée, dont nous avons utilisé certains aspects pour justifier l'approximation quasi-gaussienne.

Nous supposons qu'en champ nul le système physique est invariant par translation d'espace. La théorie de Landau prend alors la forme de plusieurs conditions de régularité du potentiel thermodynamique fonction de la

température et de l'aimantation locale (plus généralement, d'un paramètre d'ordre local) :

- (i) Le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$ , fonction de l'aimantation locale  $M(\mathbf{r})$  (engendrée par un champ magnétique inhomogène), qui est aussi une fonction génératrice des fonctions de vertex, est développable en puissances de  $M$  à  $M = 0$ .
- (ii) Nous introduisons la représentation de Fourier du champ d'aimantation :

$$M(\mathbf{r}) = \int d^d k \, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{M}(\mathbf{k}).$$

Le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$  peut alors être développé en puissances de  $\tilde{M}(\mathbf{k})$  (cf. les définitions sur réseau (6.22, 6.23)) :

$$\begin{aligned} \Gamma(M) &= \sum_n \frac{1}{n!} \int d^d k_1 \dots d^d k_n \tilde{M}(\mathbf{k}_1) \dots \tilde{M}(\mathbf{k}_n) \\ &\times (2\pi)^d \delta^{(d)}\left(\sum_i \mathbf{k}_i\right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n), \end{aligned}$$

où les fonctions  $\delta$  de Dirac sont la conséquence directe de l'invariance par translation qui implique que la somme des variables de Fourier doit s'annuler.

Alors, les fonctions de vertex  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ , qui apparaissent dans ce développement, sont régulières à  $\mathbf{k}_i = 0$ .

- (iii) Les coefficients du développement sont des fonctions régulières de la température pour  $T$  proche de  $T_c$ , la température à laquelle le coefficient de  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k} = 0)$  s'annule.

Enfin, une condition nécessaire pour que la transition soit du second ordre est que  $\tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0)$  soit positif.

Ces conditions sont motivées par quelques hypothèses générales : les spins effectifs sont des moyennes de variables microscopiques faiblement couplées dont les fluctuations peuvent être traitées de façon perturbative. Ceci s'exprime aussi comme un découplage des différentes échelles de physique, et conduit à la conclusion que les phénomènes critiques peuvent être décrits, à l'ordre dominant, en termes d'un nombre fini de variables macroscopiques effectives, comme dans la théorie du champ moyen.

Ces remarques rendent encore un peu plus troublante la constatation empirique que les résultats universels du champ moyen sont en désaccord quantitatif (et parfois même qualitatif) avec les résultats expérimentaux et ceux, exacts ou numériques, provenant de modèles sur réseau. Un examen des corrections principales à la théorie gaussienne va nous fournir quelques indications sur les origines de cette difficulté.

## 8.8 Symétries continues et modes de Goldstone

Si la variable initiale de spin  $S_i$  est un vecteur à  $N$  composantes, et si à la fois l'interaction et la distribution de spin ont une symétrie continue (associée à un groupe de Lie compact), la plupart des résultats obtenus dans le cadre de l'approximation quasi-gaussienne reste inchangée. Cependant, l'apparition de plusieurs fonctions et longueurs de corrélation quand l'aimantation est différente de zéro, induit quelques propriétés nouvelles. En particulier en champ nul, à toute température au dessous de  $T_c$ , certaines longueurs de corrélation, associées à des modes appelés *modes de Goldstone* divergent comme nous l'avons montré de façon générale en section 7.8.

Nous vérifions ces propriétés dans l'approximation quasi-gaussienne dans le cas de modèles ayant une symétrie orthogonale  $O(N)$  ( $N > 1$ ), c'est-à-dire invariant par le groupe des rotations-réflexions de l'espace à  $N$  dimensions agissant sur les  $N$  composantes du vecteur  $\mathbf{S}$ .

*Approximation quasi-gaussienne.* Il est simple d'examiner les propriétés de l'approximation quasi-gaussienne dans ce cas plus général. Le potentiel thermodynamique a une structure analogue à l'expression (8.48), à la différence près que l'aimantation locale  $\mathbf{M}_i$  est maintenant un vecteur à  $N$  composantes et que le potentiel thermodynamique est invariant par les transformations orthogonales agissant sur le vecteur  $\mathbf{M}_i$ .

L'invariance par le groupe  $O(N)$  implique que le potentiel thermodynamique s'exprime en termes de produits scalaires et donc peut s'écrire :

$$\Gamma(\mathbf{M}) = - \sum_{i,j} V_{ij} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j + \sum_i \mathcal{B}(\mathbf{M}_i^2), \quad (8.64)$$

où la fonction  $\mathcal{B}$  est une fonction développable de  $M^2$  avec des propriétés semblables à la fonction (7.11) :

$$\mathcal{B}(X) = \frac{b_2}{2} X + \frac{b_4}{4!} X^2 + \dots \text{ avec } b_2 > 0,$$

où l'hypothèse de transition continue implique aussi  $b_4 > 0$ .

*Équation d'état.* En champ uniforme, la densité de potentiel thermodynamique s'écrit alors

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}) = -vM^2 + \mathcal{B}(M^2).$$

L'équation d'état s'en déduit :

$$H_\alpha = \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{M})}{\partial M_\alpha} = M_\alpha (-2v + \mathcal{B}'(M^2)).$$

Prenant le module des deux membres, on obtient une forme analogue à la forme (7.31) :

$$H = M(-2v + \mathcal{B}'(M^2)), \quad (8.65)$$

où  $H$ ,  $M$  sont maintenant les longueurs des vecteurs  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$ .

La discussion de l'existence d'une transition de phase continue à  $v_c = b_2/2$  et des propriétés universelles correspondantes de l'équation d'état est alors en tout point identique à la discussion déjà donnée en section 7.3 dans le cas de la symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ .

*Fonction à deux points.* Dérivant une fois l'expression (8.64), on trouve

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_{\alpha,i}} = -2 \sum_j V_{ij} M_{\alpha,j} + 2M_{\alpha,i} \mathcal{B}'(M_i^2), \quad (8.66)$$

où  $M_{\alpha,i}$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) sont les composantes du vecteur aimantation  $\mathbf{M}_i$ .

La dérivée de l'équation (8.66) donne, pour  $\mathbf{M}$  uniforme, la fonction de vertex, inverse de la fonction connexe à deux points,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta,ij}^{(2)} &= \left. \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_{\alpha,i} \partial M_{\beta,j}} \right|_{\mathbf{M}=\mathbf{M}} \\ &= (-2V_{ij} + 2\delta_{ij} \mathcal{B}'(M^2)) \delta_{\alpha\beta} + 4\delta_{ij} M_{\alpha} M_{\beta} \mathcal{B}''(M^2). \end{aligned} \quad (8.67)$$

Après transformation de Fourier,

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k}) = (-2\tilde{V}(\mathbf{k}) + 2\mathcal{B}'(M^2)) \delta_{\alpha\beta} + 4M_{\alpha} M_{\beta} \mathcal{B}''(M^2). \quad (8.68)$$

La fonction  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k})$  reste une matrice dans l'espace des composantes vectorielles, et son inverse au sens des matrices est la fonction de corrélation connexe  $\tilde{W}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k})$ .

Introduisons un vecteur unité le long de la direction de l'aimantation :

$$\mathbf{M} = M\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}^2 = 1.$$

La matrice  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}$  a deux sous-espaces propres correspondant au vecteur  $\mathbf{u}$  et au sous-espace orthogonal à  $\mathbf{u}$ . La fonction (8.68) peut alors être décomposée en parties transverse et longitudinale :

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)} = u_{\alpha} u_{\beta} \tilde{\Gamma}_{\text{L}}^{(2)} + (\delta_{\alpha\beta} - u_{\alpha} u_{\beta}) \tilde{\Gamma}_{\text{T}}^{(2)}, \quad (8.69)$$

où  $\tilde{\Gamma}_{\text{L}}^{(2)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{\text{T}}^{(2)}$  sont les deux valeurs propres, respectivement. Elles sont données par

$$\tilde{\Gamma}_{\text{L}}^{(2)}(\mathbf{k}) = 2\mathcal{B}'(M^2) + 4M^2 \mathcal{B}''(M^2) - 2\tilde{V}(\mathbf{k}), \quad (8.70a)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\text{T}}^{(2)}(\mathbf{k}) = 2\mathcal{B}'(M^2) - 2\tilde{V}(\mathbf{k}). \quad (8.70b)$$

Les expressions (8.70a) et (8.58) sont similaires. Utilisant l'équation (8.65), on peut récrire

$$\tilde{\Gamma}_T^{(2)}(\mathbf{k}) = H/M + 2 \left[ \tilde{V}(0) - \tilde{V}(\mathbf{k}) \right]. \quad (8.71)$$

Ce résultat est clairement cohérent avec le résultat général (7.72). Comme  $\tilde{\Gamma}_L^{(2)}$  et  $\tilde{\Gamma}_T^{(2)}$  sont les valeurs propres de la matrice  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ , la matrice des fonctions connexes a comme valeurs propres les inverses

$$\widetilde{W}_L^{(2)}(\mathbf{k}) = \left[ \tilde{\Gamma}_L^{(2)}(\mathbf{k}) \right]^{-1}, \quad \widetilde{W}_T^{(2)}(\mathbf{k}) = \left[ \tilde{\Gamma}_T^{(2)}(\mathbf{k}) \right]^{-1}.$$

À toute température  $T < T_c$ , le rapport  $H/M$  tend vers zéro pour  $H \rightarrow 0$ . Cette équation montre alors qu'en champ nul dans la phase ordonnée, la fonction de corrélation à deux points transverse diverge comme  $1/k^2$  pour  $k \rightarrow 0$ , ce qui est cohérent avec le résultat général de la section 7.8 qui implique l'existence de  $N - 1$  modes de Goldstone.

## 8.9 Corrections à l'approximation quasi-gaussienne

Pour décrire la phase de basse température, il a été nécessaire d'aller au-delà du modèle gaussien. Mais l'approximation quasi-gaussienne n'est justifiée que si la méthode du col est justifiée. Formellement, cette condition semble réalisée si tous les coefficients  $b_{2p}$  du développement (7.11), sauf le coefficient  $b_2$  du terme quadratique, sont « petits ».

Il faut cependant que les corrections inévitables au résultat de l'ordre dominant ne changent que les coefficients du développement du potentiel thermodynamique, sans affecter ses propriétés de régularité.

C'est ce que nous voulons vérifier en calculant les premières corrections à la dérivée seconde  $\mathcal{G}''(M)$  de la densité de potentiel thermodynamique à aimantation nulle, c'est-à-dire dans la phase désordonnée au-dessus de  $T_c$  ( $v < v_c$ ), et en champ nul.

Nous déterminons d'abord la valeur de  $v$  pour laquelle  $\mathcal{G}''(0)$  s'annule, de façon à trouver la première correction à  $v_c$  et donc à la température critique. La valeur  $v_c$  n'étant pas universelle, cette correction ne joue pas de rôle. Nous en déduisons ensuite la première correction au comportement de  $\mathcal{G}''(0)$ , qui est aussi l'inverse de la susceptibilité magnétique  $\chi$  en champ nul, pour  $v \rightarrow v_c$ , ce qui est le résultat intéressant.

### 8.9.1 Calcul de la correction

Dans la phase désordonnée  $v < v_c$ , en champ nul, l'aimantation  $M = \langle \sigma \rangle$  s'annule et le col dominant est juste  $\sigma = 0$ . La première correction à la méthode du col est alors aussi la première correction au modèle gaussien.

Les corrections au résultat gaussien sont obtenues en développant l'expression (8.45), séparant dans l'hamiltonien  $\mathcal{H}(\sigma)$  une partie quadratique d'un reste appelé perturbation :

$$\mathcal{H}(\sigma) = - \sum_{i,j} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i B(\sigma_i) = \mathcal{H}_0(\sigma) + \sum_i (B(\sigma_i) - \tfrac{1}{2} b_2 \sigma_i^2),$$

avec

$$\mathcal{H}_0(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathfrak{S}_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad \mathfrak{S}_{ij} = b_2 \delta_{ij} - 2V_{ij}.$$

À l'ordre dominant, les contributions ne viennent que du terme quartique de  $B(\sigma)$ . Il suffit donc de considérer la fonction de partition

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(H) &= \int \left( \prod_i d\sigma_i \right) \exp \left[ -\mathcal{H}_0(\sigma) - \frac{b_4}{4!} \sum_i \sigma_i^4 + \sum_i H_i \sigma_i \right] \\ &= \int \prod_i d\sigma_i \exp \left[ -\mathcal{H}_0(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i \right] \sum_{\ell} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} \left( \sum_i \frac{1}{4!} b_4 \sigma_i^4 \right)^{\ell}. \end{aligned}$$

La dérivée seconde du potentiel thermodynamique est aussi l'inverse de la fonction à deux points connexe en représentation de Fourier, à argument nul. La première correction au résultat gaussien de la fonction à deux points est donnée par la contribution d'ordre  $b_4$ . De plus, comme l'aimantation est nulle, la fonction à deux points connexe est égale à la fonction à deux points complète. On peut donc utiliser le résultat général (2.28) avec  $\lambda \equiv b_4$  et  $\Delta = \mathfrak{S}^{-1}$  :

$$W_{ij}^{(2)} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \Delta_{ij} - \frac{1}{2} b_4 \sum_k \Delta_{ik} \Delta_{kk} \Delta_{kj} + O(b_4^2).$$

L'inverse de la fonction à deux points connexe (au sens des matrices) est la fonction de vertex  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  (équation (6.19)). On trouve ici

$$\Gamma_{ij}^{(2)} = \mathfrak{S}_{ij} + \frac{1}{2} b_4 \Delta_{ii} \delta_{ij} + O(b_4^2).$$

À cause de l'invariance par translation,  $\Delta_{ii}$  est indépendant du point  $i$  et donc  $\Delta_{ii} \equiv \Delta(\mathbf{r} = 0)$ .

En représentation de Fourier (équations (8.13, 8.18)),

$$\Delta_{ii} \equiv \Delta(\mathbf{r} = 0) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{p})}.$$

La transformée de Fourier de  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  est alors donnée par

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} b_4 \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{p})} + O(b_4^2). \quad (8.72)$$

Le coefficient de  $M^2$  dans le développement de la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$ , qui est aussi l'inverse de la susceptibilité magnétique en champ nul (*cf.* aussi l'équation (6.19)), est donné par

$$\begin{aligned}\chi^{-1}(M=0) &= \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{(\partial M)^2} \Big|_{M=0} = \sum_j \Gamma_{ij}^{(2)} = \tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}=0) \\ &= -2v + b_2 + \frac{b_4}{2(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2v\tilde{U}(\mathbf{p})} + O(b_4^2),\end{aligned}\quad (8.73)$$

où nous avons introduit la transformée de Fourier  $\tilde{U} = \tilde{V}/v$  de la fonction (8.5) (équation (8.6)).

*Correction à la méthode du col.* Alternativement, on peut se servir du résultat général (6.31), qui donne la première correction de la méthode du col et qui, ici, prend la forme

$$\Gamma(M) = - \sum_{i,j} V_{ij} M_i M_j + \sum_i B(M_i) + \frac{1}{2} \text{tr} \ln [-2V_{ij} + B''(M_i)\delta_{ij}]. \quad (8.74)$$

Si  $M$  est constant, le calcul de la correction se simplifie à cause de l'invariance par translation. La matrice

$$L_{ij} = \ln [-2V_{ij} + B''(M)\delta_{ij}],$$

en notation plus explicite, est de la forme

$$L_{ij} = L(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Donc,

$$\text{tr} \mathbf{L} = \sum_i L_{ii} = \Omega L(0).$$

La densité de potentiel thermodynamique s'en déduit :

$$\mathcal{G}(M) = -vM^2 + B(M) + \frac{1}{2}\Omega L(0).$$

Dans la limite du volume infini, à cause de l'invariance par translation, les matrices  $-2V_{ij} + B''(M)\delta_{ij}$  et  $L_{ij}$  se diagonalisent par transformation de Fourier (équation (8.55)). Les valeurs propres de  $L_{ij}$  sont les logarithmes des valeurs propres de  $-2V_{ij} + B''(M)\delta_{ij}$ . On en déduit

$$L(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \tilde{L}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln [-2\tilde{V}(\mathbf{p}) + B''(M)].$$

On obtient alors

$$\mathcal{G}(M) = -vM^2 + B(M) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln [-2\tilde{V}(\mathbf{p}) + B''(M)]$$

et pour la dérivée seconde à  $M = 0$  :

$$\chi^{-1}(M = 0) = \mathcal{G}''(0) = -2v + b_2 + \frac{b_4}{2(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2v\tilde{U}(\mathbf{p})} + O(b_4^2), \quad (8.75)$$

ce qui coïncide avec le résultat (8.73).

### 8.9.2 Le comportement critique

La condition de criticalité est maintenant

$$\mathcal{G}''(0) = -2v + b_2 + \frac{b_4}{2(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2v\tilde{U}(\mathbf{p})} + O(b_4^2) = 0. \quad (8.76)$$

Le premier effet du terme correctif est de modifier la valeur critique  $v_c$ , et donc la température critique. Dans le terme d'ordre  $b_4$ , nous pouvons remplacer  $v_c$  par  $b_2/2$ , sa valeur à l'ordre dominant, et l'équation devient

$$2v_c = b_2 + \frac{b_4}{2b_2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \tilde{U}(\mathbf{p})} + O(b_4^2),$$

Pour  $\mathbf{p} \rightarrow 0$  (équation (8.8)) :

$$1 - \tilde{U}(\mathbf{p}) \sim a^2 p^2.$$

Nous vérifions de nouveau le caractère pathologique du modèle en dimension  $d = 2$  où l'intégrale diverge à  $\mathbf{p} = 0$  : les transitions de phase continues en dimension 2 ne peuvent pas être décrites par le modèle gaussien, et donc gaussien perturbé.

Nous dérivons maintenant  $\mathcal{G}''(0)$  par rapport à  $v$  :

$$\frac{\partial \mathcal{G}''(0)}{\partial v} = -2 + b_4 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{U}(\mathbf{p})}{(b_2 - 2v\tilde{U}(\mathbf{p}))^2} + O(b_4^2). \quad (8.77)$$

À cet ordre, la valeur de la dérivée pour  $v = v_c$  est obtenue en remplaçant  $v_c$  par  $b_2/2$  dans la correction d'ordre  $b_4$ . On trouve

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}''(0)}{\partial v} \right|_{v=v_c} = -2 + \frac{b_4}{b_2^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{U}(\mathbf{p})}{(1 - \tilde{U}(\mathbf{p}))^2} + O(b_4^2). \quad (8.78)$$

Si l'intégrale a une limite finie quand  $v \rightarrow v_c$ , la dérivée existe à  $v = v_c$  et la correction à  $\mathcal{G}''(0)$ , au-delà de la contribution gaussienne, est proportionnelle à  $v - v_c$  :

$$\mathcal{G}''(0) \underset{v \rightarrow v_c}{\sim} (v - v_c) \left. \frac{\partial \mathcal{G}''(0)}{\partial v} \right|_{v=v_c}.$$

Dans ce cas,  $\mathcal{G}''(0)$  s'annule toujours linéairement au point critique comme  $v - v_c$  ou  $T - T_c$ , comme dans la théorie quasi-gaussienne et seul le coefficient, non universel, est légèrement modifié.

Pour  $p \rightarrow 0$ , le numérateur de l'intégrale dans l'expression (8.78) tend vers 1 et le dénominateur se comporte comme  $p^4$ . L'intégrale ne converge donc que pour  $d > 4$ . Cette analyse met donc en évidence le rôle particulier de la dimension 4.

Pour  $d > 4$ , la perturbation à la théorie gaussienne est petite, et ne modifie que des quantités non universelles. La susceptibilité magnétique continue à diverger comme  $1/(T - T_c)$  et l'exposant critique  $\gamma$  (définition (7.35)) conserve sa valeur gaussienne :  $\gamma = 1$ .

Pour  $2 < d \leq 4$ , au contraire l'intégrale diverge quand  $v \rightarrow v_c$ . Ainsi, aussi petit que soit l'amplitude  $b_4$  du terme correctif à la distribution gaussienne, pour  $d \leq 4$  quand la longueur de corrélation  $\xi$  diverge, la contribution d'ordre  $b_4$  finit par l'emporter sur le terme gaussien. Le développement perturbatif ne peut donc pas être valable au voisinage de  $T_c$ , et les prédictions universelles du modèle gaussien et du modèle gaussien perturbé ne sont pas confirmées.

Il est instructif d'évaluer plus soigneusement le comportement de l'intégrale (8.77) quand  $v \rightarrow v_c$ . Nous voyons que la contribution principale vient du voisinage de  $\mathbf{p} = 0$ . Nous pouvons donc approximer  $1 - \tilde{U}(\mathbf{p})$  par  $a^2 p^2$  :

$$\frac{\partial \mathcal{G}''(0)}{\partial v} \sim -2 + \frac{b_4}{4(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{(v_c - v + v_c a^2 \mathbf{p}^2)^2} + O(b_4^2).$$

Pour  $d < 4$ , l'intégrale ainsi approximée converge à l'infini. Une intégration jusqu'à l'infini modifie le résultat d'une constante négligeable pour  $v \rightarrow v_c$ . Nous faisons alors le changement de variable  $\mathbf{p} = \mathbf{p}' \sqrt{v_c/v - 1}/a$ , ce qui donne

$$\int \frac{d^d p}{(v_c - v + v_c a^2 \mathbf{p}^2)^2} = \frac{1}{v_c^2 a^d} (1 - v/v_c)^{d/2-2} \int \frac{d^d p'}{(1 + p'^2)^2}.$$

Calculant l'intégrale et introduisant la longueur de corrélation (8.43) à l'ordre gaussien,  $\xi = a/\sqrt{v_c/v - 1}$ , on en déduit

$$\mathcal{G}''(0) = \chi^{-1} \underset{\xi \gg 1}{=} 2(v_c - v) \left[ 1 + \frac{b_4}{8v_c^2 a^d} \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{\xi}{a} \right)^{4-d} \right] + O(b_4^2). \quad (8.79)$$

Pour  $d = 4$ , la correction a une divergence logarithmique :

$$\mathcal{G}''(0) = \chi^{-1} \underset{\xi \gg 1}{=} 2(v_c - v) \left[ 1 - \frac{b_4}{64\pi^2 v_c^2 a^4} \ln(\xi/a) \right] + O(b_4^2).$$

En résumé :

- (i) Pour les dimensions  $d > 4$ , la correction ne modifie pas les prédictions universelles de l'approximation quasi-gaussienne. On trouve bien des corrections singulières mais elles sont sous-dominantes.
- (ii) Pour les dimensions  $d \leq 4$ , des singularités dites « infrarouges » (IR), une dénomination empruntée à la théorie quantique des champs, dues au comportement à grande distance de la fonction à deux points gaussienne (appelée aussi propagateur), ou à argument nul de sa transformée de Fourier, entraînent que les prédictions gaussiennes ne peuvent pas être correctes en général.

Une inspection des corrections d'ordre plus élevé confirme ces résultats. Pour  $d \leq 4$ , les corrections sont de plus en plus singulières quand l'ordre augmente, alors que pour  $d > 4$ , elles le sont de moins en moins, ce qui confirme la validité de l'analyse du premier ordre.

Les termes perturbatifs responsables de cette difficulté font intervenir le rapport  $\xi/a$  entre la longueur de corrélation et l'échelle microscopique. Ceci donne une indication sur le mécanisme responsable de l'échec d'approximation quasi-gaussienne : la physique à l'échelle microscopique ne se découple pas de la physique à longue distance.

En effet, pour  $d > 4$ , la contribution d'arguments  $|\mathbf{p}| \leq \xi^{-1}$  est négligeable quand  $\xi$  diverge, ce qui signifie que dans l'espace direct, les degrés de liberté correspondant à des distances d'ordre de la longueur de corrélation ou plus grande jouent un rôle négligeable. Au contraire, pour  $d \leq 4$ , à  $T_c$  toutes les échelles contribuent. C'est cette propriété qui met en échec l'idée du théorème de la limite centrale, à savoir qu'un petit nombre de degrés de liberté effectif avec une distribution quasi-gaussienne peut remplacer l'infinité des degrés de liberté microscopiques initiaux.

C'est pour résoudre ce problème de couplage entre toutes les échelles qu'un outil nouveau est nécessaire, le *groupe de renormalisation*.

Notons enfin que la première contribution singulière ne dépend que du coefficient de  $\sigma^4$  dans le développement (8.44) et de la forme asymptotique de type Ornstein–Zernike du propagateur (la fonction à deux points gaussienne). L'effet du réseau s'est limité à borner le domaine d'intégration en  $\mathbf{p}$  à la zone de Brillouin.

Une étude systématique montre alors que les termes les plus singuliers, à chaque ordre du développement de la méthode du col, peuvent être reproduits, dans la limite critique, par une théorie statistique des champs avec interaction de type  $\sigma^4$ , dans l'espace euclidien continu. En conséquence, si la somme des termes les plus divergents suffit pour déterminer les propriétés critiques des modèles que nous étudions, alors des propriétés de limite continue et d'universalité en découlent puisqu'on démontre que la théorie des champs correspondante ne dépend que d'un petit nombre de paramètres.

## 8.10 Approximation de champ moyen et corrections

Nous présentons maintenant un formalisme systématique, basé sur la méthode du col, qui permet de retrouver, à partir d'un modèle microscopique sur réseau assez général de type (8.2) avec l'interaction (8.1), les résultats précédents.

À l'ordre dominant, il conduit à l'approximation du champ moyen qui reproduit les résultats de l'approximation quasi-gaussienne. Les termes suivants du développement permettent une étude des corrections au champ moyen. De nouveau, les corrections les plus importantes au point critique et dans son voisinage, le domaine critique, ont la forme exhibée par les corrections à l'approximation quasi-gaussienne.

Nous considérons la fonction de partition en champ variable, ou fonction génératrice des fonctions de corrélation,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) + \sum_i H_i S_i \right], \quad (8.80)$$

avec une interaction à deux spins :

$$-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) = \sum_{i,j} V_{ij} S_i S_j.$$

Notons qu'ici, comme pour le développement de haute température, il est techniquement commode de supposer que  $V_{ii}$  s'annule, une telle contribution à un site pouvant être incluse dans la mesure  $\rho(S)$ . Dans le cas contraire, il est nécessaire de modifier légèrement la méthode qui est expliquée ci-dessous.

### 8.10.1 Représentation de spins moyens et méthode du col

Puisque la fonction de partition peut facilement être calculée quand tous les sites sont découplés, une idée simple est d'écrire le facteur, qui dans la somme sur les configurations couple les spins en différents sites, comme une intégrale sur un poids de Boltzmann de spins découplés. Plus explicitement, nous introduisons la fonction  $\delta$ , dans sa représentation de Fourier,

$$\delta(\sigma - S) = \frac{1}{2\pi} \int d\lambda \, e^{i\lambda(\sigma - S)},$$

dans l'expression (8.80) de la fonction de partition. Nous utilisons cette identité en tout point  $i$ , remplaçant  $S_i$  par  $\sigma_i$  dans l'interaction. La fonction de

partition s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(H) = \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i d\sigma_i \frac{d\lambda_i}{2\pi} \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i + i\lambda_i (\sigma_i - S_i) \right]. \quad (8.81)$$

L'intégration sur les variables  $S_i$  est alors immédiate. Elle conduit à remplacer la distribution en chaque site par sa représentation de Fourier. Introduisant l'énergie libre du modèle à un site  $A(h)$  définie en (7.5) (qui est une fonction analytique), on trouve

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_i d\sigma_i d\lambda_i \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\sigma) + \sum_i (H_i + i\lambda_i) \sigma_i + A(-i\lambda_i) \right]. \quad (8.82)$$

*Méthode du col.* Nous évaluons alors l'intégrale (8.82) par la méthode du col et ce, malgré l'absence de paramètre associé.

Les dérivées par rapport à  $\lambda_i$  et  $\sigma_i$  donnent les deux équations de col. Posant  $h_i = -i\lambda_i$ , on trouve

$$\sigma_i = A'(h_i), \quad (8.83a)$$

$$h_i = 2 \sum_j V_{ij} \sigma_j + H_i. \quad (8.83b)$$

L'énergie libre, dans l'approximation du champ moyen, est alors

$$\mathcal{W}(H) \equiv \ln \mathcal{Z}(H) = \sum_{i,j} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i ((H_i - h_i) \sigma_i + A(h_i)), \quad (8.84)$$

$$= - \sum_{i,j} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i A(h_i), \quad (8.85)$$

où  $\sigma_i, h_i$  sont les solutions des équations de col (8.83).

Comme l'expression (8.84) est stationnaire par rapport aux variations de  $\sigma_i$  et  $h_i$ , l'aimantation locale  $M_i$  dans l'approximation du champ moyen est donnée par la dérivée explicite par rapport à  $H$  :

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_i} = \sigma_i. \quad (8.86)$$

*Discussion.* Comparant les équations (7.26) et (8.83a), on remarque que  $h_i$  a un sens de champ magnétique effectif. L'équation (8.83b) le détermine alors comme la somme du champ appliqué et d'un champ moyen dû aux autres spins. Le sens de cette approximation est que l'interaction entre spins a été remplacée par un champ magnétique moyen. Une analyse détaillée montre que cette approximation devient exacte quand la dimension  $d$  d'espace devient grande, de sorte que l'action d'un grand nombre de sites sur un site donné

peut, en effet, être remplacée par un champ magnétique moyen. On retrouve alors un modèle limite de type 7.2.

L'avantage de cette formulation algébrique de l'approximation de champ moyen est qu'elle permet une discussion systématique des corrections, à la différence d'autres méthodes classiques comme, par exemple, celles basées sur des principes variationnels.

*Potentiel thermodynamique et transition de phase.* Des équations (8.84) et (8.86), on déduit le potentiel thermodynamique, transformé de Legendre de  $\mathcal{W}(H)$ ,

$$\Gamma(M) = \sum_i M_i H_i - \mathcal{W}(H) = - \sum_{i,j} M_i V_{ij} M_j + \sum_i B(M_i), \quad (8.87)$$

où  $B(M)$  est la transformée de Legendre (7.14) de  $A(H)$ . Nous reconnaissons une expression identique à l'équation (8.48). L'approximation de champ moyen a donc les mêmes propriétés que l'approximation quasi-gaussienne, en particulier, les mêmes propriétés universelles.

### 8.10.2 Méthode du col : un paramètre de développement

Avant de discuter les corrections à l'approximation de champ moyen, il est instructif d'introduire un paramètre qui caractérise le développement autour du champ moyen. Remplaçons donc les coefficients  $V_{ij}$  dans l'expression (8.1) par  $\ell V_{ij}$  et le spin  $S$  par la moyenne  $\sigma$  de  $\ell$  spins indépendants de même distribution  $\rho(S)$  :

$$\sigma = \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} S^{(k)}.$$

Le cas  $\ell = 1$  correspond à la distribution initiale. Cette modification réalise l'idée que  $\sigma$  est un spin macroscopique effectif, moyenne locale de nombreux spins microscopiques faiblement couplés.

Par la méthode déjà utilisée dans le cas du théorème de la limite centrale, nous exprimons la distribution  $R_\ell(\sigma)$  de la variable aléatoire  $\sigma$  en terme de la transformée de la distribution  $\rho$  et donc de la fonction (7.5) :

$$R_\ell(\sigma) = \frac{\ell}{2\pi} \int d\lambda \, e^{i\ell\lambda\sigma + A(-i\lambda)}.$$

La fonction de partition devient (à un changement de normalisation trivial près)

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_i d\sigma_i d\lambda_i \exp \left\{ -\ell\beta \mathcal{E}(\sigma) + \ell \sum_i [(H_i + i\lambda_i)\sigma_i + A(-i\lambda_i)] \right\}, \quad (8.88)$$

où nous avons supposé que le champ magnétique est couplé à la somme des spins.

Cette expression montre que la méthode du col semble *a priori* justifiée dans la limite  $\ell \rightarrow \infty$  : le calcul de la fonction de partition par la méthode du col engendre un développement formel en puissances de  $1/\ell$ .

Il est commode de définir l'énergie libre par

$$\mathcal{W}(H) \equiv \frac{1}{\ell} \ln \mathcal{Z}(H), \quad (8.89)$$

de sorte que l'ordre dominant soit indépendant de  $\ell$ .

*Développement perturbatif.* Un calcul systématique des corrections au champ moyen est maintenant obtenu en développant autour du col. Il est commode de poser

$$\int d\lambda \, e^{\ell[A(-i\lambda) + i\lambda\sigma]} = \mathcal{N} e^{-\ell\Sigma(\sigma, \ell)} \quad (8.90)$$

avec

$$\mathcal{N} = \int d\lambda \, e^{\ell A(-i\lambda)}.$$

Pour cette intégrale, comme nous l'avons déjà noté plusieurs fois, le col est donné par  $\sigma = A'(-i\lambda)$ , et l'ordre dominant de la méthode du col fait donc intervenir la transformée de Legendre de  $A$ . On en déduit

$$\Sigma(\sigma, \ell) = B(\sigma) + O(1/\ell).$$

À l'ordre  $1/\ell$ , on trouve donc deux types de corrections.

En premier lieu, les coefficients  $b_2$  et  $b_4$  qui apparaissent dans  $\Gamma(M)$  sont modifiés. En particulier, la température critique est modifiée. Mais les propriétés universelles que nous avons exhibées sont indépendantes de ces valeurs explicites et restent donc inchangées.

Pour calculer les autres corrections, nous pouvons remplacer  $\Sigma(\sigma, \ell)$  par  $B(\sigma)$ . Dans cette approximation (et avec un changement trivial de normalisation),

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_i d\sigma_i \exp \ell \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i \right], \quad (8.91)$$

où l'hamiltonien prend la forme

$$\mathcal{H}(\sigma) = - \sum_{i,j} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i B(\sigma_i). \quad (8.92)$$

Dans  $\mathcal{H}(\sigma)$ , nous reconnaissons le potentiel thermodynamique de l'approximation de champ moyen, qui est aussi un potentiel thermodynamique ayant les propriétés postulées dans la théorie de Landau.

Pour  $\ell = 1$ , nous retrouvons le modèle (8.46), que nous avons étudié dans l'approximation quasi-gaussienne. Pour  $\ell \neq 1$ , faisant le changement de variables  $\sigma_i \mapsto \sigma_i/\sqrt{\ell}$ , nous reconnaissons aussi le modèle (8.46) où la fonction  $B(\sigma)$  a des coefficients modifiés  $b_{2p} \mapsto \ell^{1-p}b_{2p}$ . Tous les coefficients sauf le terme gaussien  $b_2$  tendent vers zéro pour  $\ell \rightarrow \infty$ , ce qui justifie formellement un traitement perturbatif.

Au-dessus de  $T_c$ , en champ nul, l'aimantation s'annule et le col est  $\sigma = 0$ . Le développement de la méthode du col correspond à la théorie des perturbations et la correction provient uniquement du terme quartique d'ordre  $\sigma^4$  dans  $B(\sigma)$ , traité au premier ordre. Par exemple, l'expression (8.72) de la transformée de Fourier  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k})$  de l'inverse de la fonction à deux points devient

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{k}) + \frac{b_4}{2\ell} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(\mathbf{p}) + O\left(\frac{1}{\ell^2}\right). \quad (8.93)$$

Pour  $v$  proche de  $v_c$  et  $2 < d < 4$ , la contribution dominante (8.79) à la susceptibilité magnétique est remplacée par

$$\chi^{-1} = 2(v_c - v) \left[ 1 + \frac{b_4}{8v_c^2 a^d \ell} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{\xi}{a}\right)^{4-d} \right] + O\left(\frac{1}{\ell^2}\right).$$

On observe qu'aussi grand que soit  $\ell$ , pour  $d \leq 4$ , la correction au terme principal diverge pour  $\xi \rightarrow \infty$ .

## 8.11 Points tricritiques

Jusqu'ici, nous avons supposé que nous ne pouvions ajuster qu'un seul paramètre de contrôle, la température, et qu'ainsi, le coefficient  $b_4$  du terme  $M^4$  dans le développement de  $\Gamma(M)$  était générique c'est-à-dire un nombre d'ordre unité. Toutefois, il existe des situations où d'autres paramètres physiques peuvent être variés, et les coefficients  $b_2$  et  $b_4$  de  $M^2$  et  $M^4$  peuvent être annulés à la fois. Cela arrive, par exemple, dans les mélanges  $\text{He}^3$ - $\text{He}^4$  ou dans certains systèmes métamagnétiques. Dans les modèles de type Ising que nous avons étudié jusqu'ici, cela peut être obtenu en ajustant la distribution de spin. Si le coefficient  $b_6$  de  $M^6$  est positif, on trouve un point appelé tricritique et une nouvelle analyse doit être faite. De façon plus générale, on peut étudier le voisinage du point tricritique, où à la fois les coefficients de  $M^2$  et  $M^4$  sont petits :

$$\Gamma(M) = - \sum_{i,j} V_{ij} M_i M_j + \sum_i \left( \frac{b_2}{2!} M_i^2 + \frac{b_4}{4!} M_i^4 + \frac{b_6}{6!} M_i^6 + \dots \right). \quad (8.94)$$

En particulier pour  $v = v_c = b_2/2$ , si à partir d'une valeur positive  $b_4$  décroît, on trouve une ligne de points critiques ordinaires jusqu'à ce que  $b_4$  s'annule au

point tricritique. Après le point tricritique,  $b_4$  devient négatif et la transition de phase devient du premier ordre.

Les exposants du point tricritique ont des valeurs différentes de celles trouvées pour un point critique ordinaire, par exemple  $\beta = 1/4$ ,  $\delta = 5$ .

Les corrections à la théorie tricritique peuvent être étudiées par des méthodes similaires à celle de la section 8.9. Analysant le développement perturbatif, on trouve maintenant qu'au-dessus de trois dimensions, la théorie du champ moyen prédit correctement les quantités universelles alors qu'elle n'est définitivement pas valable en trois dimensions et en dessous : la dimension critique supérieure est 3. De plus, pour  $d \leq 3$ , les corrections les plus singulières sont reproduites par une théorie des champs dans l'espace continu avec interaction  $\phi^6$ .

## Exercices

**Exercice 8.1. Calculs préliminaires.** On considère la mesure gaussienne normalisée  $(2\pi)^{-N/2} d\mathbf{S} e^{-\mathbf{S}^2/2}$ , où  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^N$ , invariante par le groupe orthogonal  $O(N)$  (rotations-réflexions à  $N$  dimensions). Calculer, en utilisant le théorème de Wick, les moyennes  $\langle S_\alpha S_\beta \rangle_G$ ,  $\langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta \rangle_G$ , où les  $S_\alpha$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{S}$ .

Passant en coordonnées radiale et angulaires, en déduire les mêmes valeurs moyennes avec la mesure  $\mathcal{N} d\mathbf{S} \delta(\mathbf{S}^2 - 1)$ , où la normalisation  $\mathcal{N}$  est définie par la condition  $\langle 1 \rangle = 1$ . Vérifier les résultats en reliant  $\langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta \rangle_{\text{sph.}}$  à  $\langle S_\alpha S_\beta \rangle_{\text{sph.}}$  et  $\langle S_\alpha S_\beta \rangle_{\text{sph.}}$  à  $\langle 1 \rangle_{\text{sph.}} = 1$ .

*Remarque.* Utilisant l'identité

$$1 = \int_0^\infty d\rho \delta(\rho - \mathbf{S}^2) = \int_0^\infty 2R dR \delta(R^2 - \mathbf{S}^2),$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac, on peut écrire

$$\int d\mathbf{S} f(\mathbf{S}) = \int_0^\infty 2R dR \int d\mathbf{S} \delta(R^2 - \mathbf{S}^2) f(\mathbf{S}).$$

On fait alors le changement de variables  $\mathbf{S} = R\mathbf{S}'$ . On note

$$\delta(R^2 - \mathbf{S}^2) = R^{-2} \delta(1 - \mathbf{S}'^2).$$

L'équation devient (en oubliant le prime)

$$\int d\mathbf{S} f(\mathbf{S}) = \int_0^\infty R^{N-1} dR \int d\mathbf{S} 2\delta(1 - \mathbf{S}^2) f(R\mathbf{S}),$$

ce qui correspond à une factorisation de la mesure initiale  $d\mathbf{S}$ , dans  $\mathbb{R}^N$ , dans deux mesures radiale et angulaire (ou sur la sphère unité).

*Solution.* Directement,

$$\langle S_\alpha S_\beta \rangle_G = \delta_{\alpha\beta}$$

et donc, par le théorème de Wick,

$$\langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta \rangle_G = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}.$$

On passe alors en coordonnées radiale–angulaires en posant  $\mathbf{S} = S \hat{\mathbf{S}}$  avec  $\hat{\mathbf{S}}^2 = 1$ . On obtient

$$\begin{aligned} \langle S_\alpha S_\beta \rangle_G &= \langle S_\alpha S_\beta \rangle_{\text{sph.}} I_1 / I_0, \\ \langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta \rangle_G &= \langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta \rangle_{\text{sph.}} I_2 / I_0, \end{aligned}$$

avec

$$I_p = \int_0^\infty dS S^{N-1+2p} e^{S^2/2} = 2^{N/2+p-1} \Gamma(N/2 + p),$$

où  $I_1/I_0$  et  $I_2/I_0$  sont les valeurs moyennes radiales.

En particulier,

$$I_1/I_0 = N, \quad I_2/I_0 = N(N+2).$$

Ainsi, avec la mesure  $\mathcal{N} d\mathbf{S} \delta(\mathbf{S}^2 - 1)$ ,

$$\langle S_\alpha S_\beta \rangle = \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta \rangle = \frac{1}{N(N+2)} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}). \quad (8.95)$$

Sommant les deux valeurs moyennes pour  $\alpha = \beta$  sur  $\alpha$  et utilisant  $\mathbf{S}^2 = 1$ , on vérifie les normalisations.

**Exercice 8.2.** *Le modèle  $O(2)$ .* Déterminer le développement du potentiel thermodynamique du modèle à un site avec symétrie  $O(2)$ , c'est-à-dire pour un spin  $\mathbf{S}$  à deux composantes appartenant au cercle  $\mathbf{S}^2 = 1$  avec une mesure uniforme sur le cercle, jusqu'à l'ordre 4.

Même exercice pour un modèle avec symétrie  $O(3)$  et un spin appartenant à la sphère  $S_2$ .

*Solution.* Dans le cas du groupe  $O(N)$ , la fonction de partition à un site s'écrit

$$z(\mathbf{h}) = \mathcal{N} \int d\mathbf{S} \delta(\mathbf{S}^2 - 1) e^{\mathbf{S} \cdot \mathbf{h}},$$

où la normalisation  $\mathcal{N}$  est définie par la condition  $z(0) = 1$ .

À cause de l'invariance par rotation, on peut toujours choisir  $\mathbf{h} = (0, h)$  et utiliser la paramétrisation pour  $\alpha < N$ ,  $S_\alpha = \mathbf{n}_\alpha \sin \theta$ , où  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{n}$  sont des vecteurs à  $N-1$  composantes avec  $\mathbf{n}^2 = 1$ , et  $S_N = \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta < \pi$ . Alors,  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{h} = h \cos \theta$ . Pour  $N = 2$ ,

$$z(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{h \cos \theta} = 1 + \frac{1}{4} h^2 + \frac{1}{64} h^4 + O(h^6).$$

Plus généralement,

$$d\mathbf{S} \delta(\mathbf{S}^2 - 1) = d\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) d\theta (\sin \theta)^{N-2},$$

où  $(\sin \theta)^N$  vient du changement de variables et  $1/\sin^2 \theta$  de la fonction  $\delta$ .

Après intégration sur  $\mathbf{n}$ , on obtient la mesure  $d\theta (\sin \theta)^{N-2}$  pour le groupe  $O(N)$ . En particulier, pour  $O(3)$ ,

$$z(h) = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{h \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dt e^{th} = \frac{\sinh h}{h} = 1 + \frac{1}{6} h^2 + \frac{1}{120} h^4 + O(h^6).$$

Une méthode alternative utilise une approche plus géométrique. Développant,

$$z(\mathbf{h}) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} h_\alpha h_\beta \langle S_\alpha S_\beta \rangle + \frac{1}{24} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} h_\alpha h_\beta h_\gamma h_\delta \langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta \rangle + O(h^6),$$

où  $\langle \bullet \rangle$  veut dire moyenne sur la sphère  $S_{N-1}$  avec la mesure invariante. On peut alors utiliser les résultats (8.95) qui se déduisent aussi de l'invariance par rotation. On en conclut que  $W(h) = \ln z(h)$  et  $B(m)$  sa transformée de Legendre ont le développement suivant :

$$W(h) = \frac{1}{2N} h^2 - \frac{1}{4N^2(N+2)} h^4 + O(h^6),$$

$$B(m) = \frac{N}{2} m^2 + \frac{N^2}{4(N+2)} m^4 + O(m^6).$$

**Exercice 8.3.** Avec la même distribution en chaque site et dans le cas d'une interaction à deux spins

$$-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) = \sum_{i,j} V_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j,$$

calculer le potentiel thermodynamique dans l'approximation de champ moyen.

*Solution.* Le résultat généralise simplement l'expression (8.87) et on trouve

$$\Gamma(\mathbf{M}) = - \sum_{i,j} V_{ij} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j + \sum_i B(M_i).$$

**Exercice 8.4.** Calculer, dans le même modèle, la première correction au champ moyen dans le cas de la fonction de vertex à deux points à argument nul dans la limite  $T \rightarrow T_{c+}$ .

*Solution.* La fonction à deux points est diagonale :

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(0) = \delta_{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}^{(2)}(0).$$

Dans les notations de la section 8.10, on trouve alors un résultat de la forme

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(0) = \chi^{-1} = 2(v_c - v) \left[ 1 + \frac{b_4(N)}{8v_c^2 a^d \ell} \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{\xi}{a} \right)^{4-d} \right],$$

où ici  $b_4(N) = N^2$ .

**Exercice 8.5.** On considère de nouveau un spin à deux composantes sur réseau. On suppose que le modèle statistique a la symétrie du carré, c'est-à-dire qu'il est invariant par les trois transformations

$$S_1 \leftrightarrow -S_1, \quad S_2 \leftrightarrow -S_2, \quad S_1 \leftrightarrow S_2.$$

$$S_1 \leftrightarrow S_2, \quad S_1 \mapsto -S_1.$$

Montrer que les densités d'énergie libre  $W(H_1, H_2)$  et de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M_1, M_2)$  ont alors les mêmes symétries.

Se plaçant dans le cadre de l'approximation quasi-gaussienne ou de champ moyen, écrire la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M_1, M_2)$ , en champ uniforme, ayant la symétrie du carré, la plus générale, développée jusqu'à l'ordre 4 dans l'aimantation  $\{M_1, M_2\}$  pour  $|M| \rightarrow 0$ .

On considère un exemple particulier d'un tel potentiel thermodynamique

$$\mathcal{G}(M_1, M_2) = \frac{1}{2}\tau(M_1^2 + M_2^2) + \frac{1}{4}g(M_1^4 + M_2^4 + 2\cos\theta M_1^2 M_2^2),$$

avec  $\tau \propto T - T_c$ ,  $g > 0$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ . Calculer l'aimantation spontanée en champ magnétique nul pour  $\tau < 0$ . En déduire la matrice des dérivées secondes

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial M_\alpha \partial M_\beta}$$

dans cette situation. On rappelle que la matrice des susceptibilités magnétiques

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 W}{\partial H_\alpha \partial H_\beta},$$

est l'inverse de la matrice  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ . En déduire la matrice  $\chi_{\alpha\beta}$  en champ magnétique nul pour  $\tau < 0$ . Montrer qu'il existe une valeur de  $\theta$  pour laquelle une des valeurs propres de  $\chi_{\alpha\beta}$  diverge pour tout  $\tau < 0$ . Que peut-on dire du modèle pour cette valeur spéciale ?

*Solution.* On trouve l'aimantation spontanée

$$M_1^2 = M_2^2 = -\frac{\tau}{g(1 + \cos\theta)}.$$

La matrice des dérivées secondes d'éléments  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$  est

$$\mathcal{G} = -\frac{2\tau}{1 + \cos\theta} \begin{pmatrix} 1 & \pm \cos\theta \\ \pm \cos\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$-2\tau, \quad -2\tau \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}.$$

Pour la valeur  $\theta = 0$ , la deuxième valeur propre s'annule et donc une valeur propre de  $\chi_{\alpha\beta}$  diverge. On note alors que la symétrie du modèle correspondant devient une symétrie continue associée au groupe  $O(2)$ . La divergence de la susceptibilité transverse est une manifestation du phénomène de Goldstone.



## Chapitre 9

# Groupe de renormalisation : formalisme général

AU CHAPITRE 8, NOUS AVONS ÉTUDIÉ des systèmes de type Ising (et plus généralement, des systèmes ferromagnétiques avec symétrie  $O(N)$ ) avec interactions de courte portée et déterminé le comportement des fonctions thermodynamiques près d'une transition de phase continue, dans le cadre des approximations quasi-gaussienne et de champ moyen. Nous avons montré que ces approximations prédisent un ensemble de propriétés *universelles*, c'est-à-dire des propriétés qui sont indépendantes de la structure détaillée de l'énergie d'interaction ou de l'hamiltonien microscopique.

Toutefois, de nombreuses observations expérimentales ainsi que des résultats numériques et analytiques venant de systèmes modèles montrent que de tels résultats ne peuvent pas être quantitativement corrects, du moins en dimensions 2 ou 3. Par exemple, la solution exacte du modèle d'Ising en 2D donne des exposants comme  $\beta = 1/8$ ,  $\eta = 1/4$  ou  $\nu = 1$  clairement différents des prédictions du modèle quasi-gaussien.

En examinant les corrections principales à l'approximation gaussienne, nous avons identifié l'origine de la difficulté. Nous avons trouvé qu'au-dessus de quatre dimensions, ces corrections n'affectent pas les quantités universelles. Au contraire, en dessous de quatre dimensions, les corrections divergent à la température critique et donc les hypothèses qui sont à la base de l'approximation quasi-gaussienne (ou de champ moyen) ne peuvent certainement pas être correctes.

De plus, cette analyse indique que le couplage des degrés de liberté correspondant à différentes échelles de physique joue un rôle essentiel : il est impossible de ne considérer que des degrés de liberté effectifs macroscopiques. On pourrait craindre dans ces conditions qu'en dimension  $d \leq 4$ , la physique, même de longue distance, soit sensible à la structure microscopique détaillée des systèmes. Toutefois, de façon assez surprenante, des propriétés universelles survivent, quoique différentes de celles du modèle quasi-gaussien.

Mais ces propriétés sont moins universelles dans le sens suivant : les systèmes statistiques qui ont les mêmes propriétés dans l'approximation quasi-gaussienne, sont divisés en *classes d'universalité* caractérisées par la dimension de l'espace, les symétries et quelques autres propriétés qualitatives.

Pour expliquer ce phénomène quelque peu paradoxal, un outil tout à fait nouveau a été d'abord suggéré par Kadanoff (1966), puis développé par Wilson (1971), Wegner..., et ensuite nombre d'autres physiciens, le *Groupe de Renormalisation* (GR). Dans l'approche de Wilson, l'idée fondamentale est d'intégrer successivement sur les degrés de liberté correspondant aux échelles les plus courtes. On obtient ainsi une suite de modèles qui tous décrivent la même physique de longue distance mais dans lesquels, la structure de courte distance est progressivement éliminée. Si cette suite a une limite, ce qui suppose que les transformations de groupe de renormalisation admettent des *points fixes*, alors les propriétés d'universalité sont expliquées : tous les modèles statistiques qui, après ces transformations, convergent vers le même point fixe, appartiennent à la même classe d'universalité.

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire les idées fondamentales du groupe de renormalisation dans un cadre assez général, même si la formulation restera assez imprécise et les arguments très largement heuristiques. Le rôle des points fixes du groupe de renormalisation sera mis en évidence.

Dans la pratique, ce groupe de renormalisation est très difficile à construire puisqu'il agit dans l'espace de dimension infinie des modèles statistiques possibles. Seules les mesures gaussiennes peuvent être discutées de façon générale. Nous identifierons donc le point fixe le plus simple, le *point fixe gaussien*, qui appartient à la classe des modèles gaussiens décrits précédemment. De plus, une analyse locale complète au voisinage de ce point fixe est possible. Elle permet de classer les perturbations au modèle gaussien en *essentiels*, c'est-à-dire des perturbations qui deviennent de plus en plus importantes à longue distance, *inessentiels* dans le cas contraire et *marginales* dans la situation limite.

Les idées générales de groupe de renormalisation, quoique *a priori* un peu vagues, sont extrêmement suggestives et, en effet, ont été mises en oeuvre sous beaucoup de formes approchées et ont induit une grande variété de calculs pratiques. Notre but ici n'est pas de les passer en revue. Toutefois, dans le contexte plus spécifique de la théorie des champs, les hypothèses à la base du groupe de renormalisation ont été clarifiées et vérifiées dans de nombreux exemples d'intérêt physique, confirmant de manière très directe les relations profondes, d'abord reconnue par Wilson, entre la théorie quantique des champs décrivant la physique des interactions fondamentales à l'échelle microscopique et la théorie des phénomènes critiques. (En fait, il s'agit de la théorie quantique des champs en temps imaginaire qui est aussi une théorie statistique des champs.)

## 9.1 Théorie statistique des champs.

### Hamiltonien de Landau

Dans ce qui suit, nous nous plaçons directement dans l'espace continu, plutôt que sur un réseau. En effet, nous avons vu que même pour des modèles initialement définis sur réseau, les propriétés universelles du modèle quasi-gaussien sont liées à l'existence d'une limite continue. Il en est de même des corrections les plus singulières qui ne font intervenir que les propriétés de la fonction à deux points gaussienne à grande distance. Dans ces conditions, les modèles sur réseau peuvent être remplacés par une Théorie Statistique des Champs. En fait, le réseau n'est intervenu que pour borner les arguments des transformées de Fourier dans les intégrales. Au sens de la théorie statistique des champs, il joue le rôle de « cut-off », c'est-à-dire d'échelle de coupure des grandes *impulsions* (comme nous l'avons déjà expliqué, cette dénomination est empruntée à la théorie quantique où les arguments des transformées de Fourier sont des impulsions).

#### 9.1.1 Théorie statistique des champs effective

Comme dans la théorie des champs gaussienne de la section 8.4, le paramètre d'ordre local est donc un champ, que nous notons  $\sigma(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^d$ ), équivalent des variables sur réseau  $\sigma_i$  des sections 8.2, 8.5 et 8.10. Le champ  $\sigma$  est un spin moyen local et donc une variable continue, même si le spin microscopique initial a des valeurs discrètes comme dans le modèle d'Ising.

Le modèle statistique est alors défini par une fonctionnelle locale  $\mathcal{H}(\sigma)$  du champ  $\sigma$ , généralisation de la forme quadratique (8.29), et de la forme sur réseau (8.46) du modèle quasi-gaussien. Les fonctions de corrélation correspondantes sont obtenues en intégrant sur les champs  $\sigma(x)$  avec le poids  $e^{-\mathcal{H}(\sigma)} / \mathcal{Z}$ ,

$$\langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \dots \sigma(x_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int [d\sigma] \sigma(x_1) \sigma(x_2) \dots \sigma(x_n) e^{-\mathcal{H}(\sigma)},$$

où  $\mathcal{Z}$  est la fonction de partition en champ nul déterminée par la condition  $\langle 1 \rangle = 1$ .

La fonction de partition dans un champ externe variable  $H(x)$ ,

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\sigma] \exp \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \int d^d x H(x) \sigma(x) \right],$$

(et donc  $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}(0)$ ) engendre les fonctions de corrélation. La fonctionnelle  $\mathcal{H}(\sigma)$  est souvent appelée *hamiltonien* dans le contexte de la physique statistique. Elle est aussi une généralisation de l'*action euclidienne*, c'est-à-dire l'action classique en temps imaginaire, de la théorie quantique des interactions fondamentales.

Il découle de la définition de la dérivée fonctionnelle que

$$\frac{\delta}{\delta H(y)} \exp \left[ \int dx \sigma(x) H(x) \right] = \sigma(y) \exp \left[ \int dx \sigma(x) H(x) \right]. \quad (9.1)$$

Les fonctions de corrélation sont donc obtenues en faisant agir des dérivées fonctionnelles sur  $\mathcal{Z}(H)$  :

$$\langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle = \mathcal{Z}^{-1}(0) \left. \frac{\delta^n \mathcal{Z}(H)}{\delta H(x_1) \dots \delta H(x_n)} \right|_{H(x) \equiv 0}.$$

### 9.1.2 Hamiltonien de Landau

Le hamiltonien  $\mathcal{H}(\sigma)$  est une fonction du champ  $\sigma(x)$ . Nous supposons qu'il possède les propriétés générales du potentiel thermodynamique de la théorie de Landau (section 8.7).  $\mathcal{H}(\sigma)$  généralise donc le hamiltonien du modèle quasi-gaussien ou le hamiltonien effectif qui conduit à l'approximation de champ moyen.

Cette hypothèse est cohérente avec l'analyse de la section 8.10. En effet, nous avons montré que l'hamiltonien effectif (8.92) dans l'expression (8.91) a les propriétés du potentiel thermodynamique du champ moyen, de sorte que celui-ci se déduit de l'approximation dominante de la méthode du col.

Nous supposons donc que l'hamiltonien, qui dans ce contexte est aussi appelé hamiltonien de Landau–Ginzburg–Wilson, a les propriétés suivantes :

- (i) Le hamiltonien  $\mathcal{H}$  est une fonction régulière de tous les paramètres thermodynamiques comme la température (sauf à température nulle).
- (ii) Il est développable en puissances du champ  $\sigma$  :

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 d^d x_2 \dots d^d x_n \mathcal{H}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n). \quad (9.2)$$

- (iii) Nous ne discutons, en général, que des systèmes invariants par translation et donc

$$\mathcal{H}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{H}^{(n)}(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) \quad \forall a \in \mathbb{R}^d.$$

Dans ces conditions, les transformées de Fourier des coefficients (fonctions ou distributions)  $\mathcal{H}^{(n)}$  prennent la forme (cf. section 6.2.2)

$$(2\pi)^d \delta \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int d^d x_1 \dots d^d x_n \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j \right) \times \mathcal{H}^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (9.3)$$

- (iv) L'hypothèse de courte portée des forces (avec décroissance exponentielle), ou de localité au sens de la théorie quantique des champs, entraîne que les coefficients  $\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}$  sont holomorphes dans des bandes du type  $|\operatorname{Im} p_i| < \kappa$ .

Notons qu'en termes des composantes de Fourier du champ  $\sigma$  :

$$\sigma(x) = \int d^d k \, e^{ikx} \tilde{\sigma}(k),$$

le développement de  $\mathcal{H}$  s'écrit

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d k_1 \dots d^d k_n (2\pi)^d \delta \left( \sum_{i=1}^n k_i \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) \tilde{\sigma}(k_1) \dots \tilde{\sigma}(k_n). \quad (9.4)$$

*Remarque.* On peut se demander pourquoi considérer immédiatement des hamiltoniens aussi généraux, alors que nous n'avons pas encore réussi à déterminer le comportement critique de systèmes plus simples. Bien sûr, il est possible de représenter ainsi une classe de systèmes plus large. Mais c'est surtout parce que, comme nous le verrons, les transformations du groupe de renormalisation engendrent de tels hamiltoniens, même quand l'hamiltonien initial est beaucoup plus simple.

## 9.2 Fonctions de corrélation connexes. Fonctions de vertex

Au chapitre 6, nous avons déjà introduit, sur le réseau, différentes fonctionnelles génératrices des fonctions de corrélation. Nous nous contentons donc de récrire les définitions et relations entre fonctionnelles génératrices dans l'espace continu, une majeure partie de la discussion du chapitre 6 s'appliquant aussi ici.

En section 6.2.1, nous avons introduit la fonctionnelle génératrice (qui est aussi l'énergie libre en champ variable à un facteur de température près)

$$\mathcal{W}(H) = \ln \mathcal{Z}(H)$$

des fonctions de corrélation connexes

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \mathcal{W}(H)}{\delta H(x_1) \dots \delta H(x_n)} \right|_{H(x) \equiv 0} \equiv \langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle_{\text{connexe}}. \quad (9.5)$$

Dans la suite, nous ne considérons que des fonctions connexes parce qu'elles ont des propriétés de décroissance à longue distance, dites propriétés d'amas (*cf.* section 6.2.1).

*Représentation de Fourier.* Nous avons supposé que la théorie des champs est invariante par translation. Cette hypothèse implique que pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ , la fonction de corrélation connexe à  $n$  points satisfait

$$W^{(n)}(x_1 + a, \dots, x_n + a) = W^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

La relation entre fonction à  $n$  points et sa transformée de Fourier peut s'écrire

$$\begin{aligned} (2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \widetilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\ = \int d^d x_1 \dots d^d x_n W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j \right), \end{aligned} \quad (9.6)$$

qui est la forme, dans le continu, de la représentation (6.15). La fonction de corrélation connexe  $W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  satisfait à une propriété d'amas (section 6.2.1), qui se traduit dans des propriétés de décroissance quand ses arguments tendent vers l'infini. Des propriétés de régularité dans les variables  $p_i$  de  $\widetilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  en découlent.

*Fonctionnelle génératrice des fonctions de vertex.* En section 6.3, nous avons aussi défini par transformation de Legendre la fonctionnelle génératrice  $\Gamma(M)$  des fonctions de vertex :

$$\Gamma(M) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) M(x_1) \dots M(x_n).$$

Dans le continu, la transformation de Legendre prend la forme

$$\mathcal{W}(H) + \Gamma(M) = \int d^d x H(x) M(x), \quad (9.7a)$$

$$M(x) = \frac{\delta \mathcal{W}(H)}{\delta H(x)}. \quad (9.7b)$$

En mécanique statistique,  $\Gamma(M)$  est le potentiel thermodynamique fonction de l'aimantation locale.

La transformée de Fourier de la fonction de vertex à  $n$  points est définie par (cf. la définition (6.23))

$$\begin{aligned} (2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\ = \int d^d x_1 \dots d^d x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j \cdot p_j \right). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Les *fonctions de vertex*, à cause des propriétés de régularité des  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ , jouent un rôle particulier en théorie des perturbations.

### 9.3 Le groupe de renormalisation : idée générale

Au chapitre 8, nous avons montré que des propriétés d'universalité émergent dans l'étude du comportement asymptotique à grandes distances de la fonction connexe à deux points gaussienne au voisinage du point critique. Dans le cadre d'un modèle général, nous voulons donc explorer les propriétés du comportement à grande distance des fonctions de corrélation connexes.

#### 9.3.1 Équations de groupe de renormalisation

Techniquement, nous voulons déterminer le comportement des fonctions à  $n$  points connexes  $W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ , au point critique, quand le paramètre de dilatation réel positif  $\lambda$  tend vers l'infini où, pour des raisons qui apparaîtront plus tard (mais qui ne sont pas sans rapport avec la remarque de la fin de la section 8.4.3), il est nécessaire de supposer que *tous les points  $x_i$  sont distincts*.

L'idée du groupe de renormalisation (GR) est alors de construire un hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda(\sigma)$  dépendant du paramètre de dilatation  $\lambda$ , tel que

$$\mathcal{H}_{\lambda=1}(\sigma) \equiv \mathcal{H}(\sigma),$$

et dont les fonctions de corrélation  $W_\lambda^{(n)}(x_i)$  satisfont

$$W_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) - Z^{-n/2}(\lambda) W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = R_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (9.9)$$

avec

$$W_{\lambda=1}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv W^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad Z(1) = 1, \quad R_{\lambda=1}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

L'équation de groupe de renormalisation (EGR) (9.9) fait intervenir des fonctions  $R^{(n)}$  qui ne satisfont qu'une condition : elles décroissent pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , par exemple plus vite que toute puissance de  $\lambda$ . En l'absence d'un tel terme, on parle de GR linéaire (*cf.* section 16.2.4 pour plus de détails).

Les fonctions  $Z^{-n/2}(\lambda) W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$  sont les fonctions de corrélation connexes du champ  $\sigma(\lambda x)/\sqrt{Z(\lambda)}$  : le facteur  $\sqrt{Z(\lambda)}$  renormalise le champ  $\sigma(x)$ . On note ici une différence avec les situations que nous avons rencontrées précédemment : la renormalisation prend *a priori* la forme d'une fonction quelconque de  $\lambda$  et pas uniquement une puissance.

L'hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda(\sigma)$  est aussi appelé *hamiltonien effectif* à l'échelle  $\lambda$  et la transformation  $\mathcal{H}(\sigma) \mapsto \mathcal{H}_\lambda(\sigma)$  est appelée transformation de GR.

Diverses transformations de GR peuvent différer par la forme des fonctions  $R^{(n)}$  et la fonction  $Z(\lambda)$ . Dans les constructions explicites, les  $R^{(n)}$  sont engendrés par l'intégration sur les modes de grande impulsion de  $\sigma(x)$  (*cf.* chapitre 16). Quand  $R^{(n)} \equiv 0$  et à la fois l'espace et les champs sont des variables continues, la transformation de GR est réalisée par un changement d'échelle d'espace et des champs :

$$\mathcal{H}_\lambda(\sigma(x)) = \mathcal{H}_{\lambda=1}(Z^{1/2}(\lambda)\sigma(x/\lambda)). \quad (9.10)$$

Toutefois, en dehors des modèles gaussiens, une telle transformation n'a pas, en général, de point fixe et il est donc nécessaire de considérer des transformations plus générales. Ci-dessous, nous omettons les termes  $R^{(n)}$  et donc les égalités entre fonctions de corrélation devront être comprises modulo des termes décroissants plus vite que toute puissance de  $\lambda$ . Nous discutons ainsi, un GR linéaire asymptotique.

*Représentation de Fourier.* L'équation (9.9), après transformation de Fourier (équation (9.6)) et négligeant  $R_n$ , s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \widetilde{W}_\lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\
 &= Z^{-n/2}(\lambda) \int d^d x_1 \dots d^d x_n W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j \right) \\
 &= Z^{-n/2}(\lambda) \lambda^{-nd} \int d^d x_1 \dots d^d x_n W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j / \lambda \right) \\
 &= Z^{-n/2}(\lambda) \lambda^{-nd} (2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i / \lambda \right) \widetilde{W}_\lambda^{(n)}(p_1 / \lambda, \dots, p_n / \lambda).
 \end{aligned}$$

Utilisant la propriété

$$\delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i / \lambda \right) = \lambda^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right),$$

on en déduit

$$\widetilde{W}_\lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z^{-n/2}(\lambda) \lambda^{(1-n)d} \widetilde{W}^{(n)}(p_1 / \lambda, \dots, p_n / \lambda). \quad (9.11)$$

En particulier, pour  $n = 2$ ,

$$\widetilde{W}_\lambda^{(2)}(p) = Z^{-1}(\lambda) \lambda^{-d} \widetilde{W}^{(2)}(p / \lambda). \quad (9.12)$$

### 9.3.2 Fonctions génératrices et fonctions de vertex

La relation asymptotique (9.9),

$$W_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = Z^{-n/2}(\lambda) W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

se traduit aussi par une relation entre fonctions génératrices :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_\lambda(H(x)) &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n Z^{-n/2}(\lambda) W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) H(x_1) \dots H(x_n) \\
 &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n Z^{-n/2}(\lambda) \lambda^{-nd} W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\
 &\quad \times H(x_1/\lambda) \dots H(x_n/\lambda) \\
 &= \mathcal{W}(\lambda^{-d} Z^{-1/2}(\lambda) H(x/\lambda)).
 \end{aligned}$$

De même pour l'aimantation locale

$$\begin{aligned}
 M(y) &= \frac{\delta \mathcal{W}_\lambda}{\delta H(y)} \\
 &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n Z^{-(n+1)/2}(\lambda) W^{(n+1)}(\lambda y, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) H(x_1) \\
 &\quad \times \dots H(x_n),
 \end{aligned}$$

et donc

$$M(y/\lambda) = Z^{-1/2}(\lambda) \frac{\delta}{\delta H(y)} \mathcal{W}(\lambda^{-d} Z^{-1/2}(\lambda) H(x/\lambda)). \quad (9.13)$$

L'inversion de cette relation, par définition de la transformation de Legendre, donne

$$\lambda^{-d} Z^{-1/2}(\lambda) H(x/\lambda) = \frac{\delta}{\delta M(x)} \Gamma(Z^{1/2}(\lambda) M(y/\lambda))$$

et donc

$$H(x/\lambda) = \lambda^d Z^{1/2}(\lambda) \frac{\delta}{\delta M(x)} \Gamma(Z^{1/2}(\lambda) M(y/\lambda)),$$

à comparer à

$$H(x) = \frac{\delta}{\delta M(x)} \Gamma_\lambda(M(y)).$$

Comparant alors à l'équation (9.13), on observe que le passage de  $\mathcal{W}, H$  à  $\Gamma, M$  s'accompagne du changement  $\lambda^{-d} Z^{-1/2}$  en  $Z^{1/2}$ . On en conclut que

$$\Gamma_\lambda(M(y)) = \Gamma(Z^{1/2}(\lambda) M(y/\lambda)),$$

qui est en cohérence avec la relation (9.10), et donc aussi

$$\Gamma_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = Z^{n/2}(\lambda) \lambda^{nd} \Gamma^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Remplaçant dans l'équation (9.11)  $W$  par  $\Gamma$  et de façon simultanée  $\lambda^{-d} Z^{-1/2}$  par  $Z^{1/2}$ , on obtient la forme du GR pour la transformée de Fourier de la fonction de vertex à  $n$  points (cf. la définition (9.8)) :

$$\tilde{\Gamma}_\lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z^{n/2}(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1/\lambda, \dots, p_n/\lambda). \quad (9.14)$$

En particulier, pour la fonction de vertex à deux points

$$\tilde{\Gamma}_\lambda^{(2)}(p) = Z(\lambda)\lambda^d \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda), \quad (9.15)$$

ce qui est cohérent avec la relation (9.12) puisque  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  est l'inverse de  $\widetilde{W}^{(2)}(p)$ .

### 9.3.3 Hamiltonien de point fixe

Un hamiltonien général local dépend d'un nombre infini de paramètres. Les paramètres qui apparaissent dans  $\mathcal{H}_\lambda$  sont des fonctions de  $\lambda$ . Supposons qu'il existe une transformation de GR telle que, quand  $\lambda \rightarrow \infty$ , l'hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda(\sigma)$  ait une limite  $\mathcal{H}^*(\sigma)$ , un hamiltonien de point fixe. Nous notons  $W_*^{(n)}$  les fonctions de corrélation correspondantes. Alors l'équation (9.9) implique

$$W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} Z^{n/2}(\lambda) W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (9.16)$$

Introduisant une seconde dilatation  $\mu > 0$ , on peut calculer  $W^{(n)}(\lambda \mu x_i)$  à partir de l'équation (9.16) de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} W^{(n)}(\lambda \mu x_1, \dots, \lambda \mu x_n) &\underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} Z^{n/2}(\lambda) W_*^{(n)}(\mu x_1, \dots, \mu x_n) \\ &\underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} Z^{n/2}(\lambda \mu) W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Éliminant  $W^{(n)}(\lambda \mu x_i)$ , on obtient la relation

$$W_*^{(n)}(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = Z_*^{n/2}(\mu) W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (9.17)$$

avec

$$Z_*(\mu) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Z(\lambda \mu) / Z(\lambda). \quad (9.18)$$

L'équation (9.17) étant valable pour  $\mu$  arbitraire, cela implique immédiatement que  $Z_*(\lambda)$  forme une représentation du semi-groupe des dilatations :

$$Z_*(\lambda_1) Z_*(\lambda_2) = Z_*(\lambda_1 \lambda_2). \quad (9.19)$$

Ainsi, avec des hypothèses raisonnables,  $Z_*(\lambda)$  a un comportement en loi de puissances :

$$Z_*(\lambda) = \lambda^{-2d_\sigma}. \quad (9.20)$$

On en déduit le comportement dit d'échelle

$$W_*^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{-nd_\sigma} W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (9.21)$$

Le nombre positif  $d_\sigma$ , qui caractérise le comportement en loi de puissances des fonctions de corrélation au point fixe, est appelé dimension du champ ou paramètre d'ordre  $\sigma(x)$ , exprimée en inverse d'unité de longueur.

De l'équation (9.18), on conclut alors que  $Z(\lambda)$  a aussi asymptotiquement un comportement en loi de puissances. Enfin, l'équation (9.16) entraîne que les fonctions de corrélation connexes ont un comportement d'échelle à grande distance de la forme

$$W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\propto} \lambda^{-nd_\sigma} W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (9.22)$$

déterminé par le point fixe.

Comme le membre de droite de l'équation, qui détermine le comportement critique des fonctions de corrélation, ne dépend que de l'hamiltonien de point fixe, les fonctions de corrélation correspondant à tous les hamiltoniens qui convergent après des transformations de GR vers le même point fixe, ont le même comportement critique. Une telle propriété *d'universalité* divise donc l'espace des hamiltoniens en *classes d'universalité*. L'universalité, au-delà de la TCM, est liée à l'existence de points fixes de longue distance (IR) du GR dans l'espace des hamiltoniens.

Appliquée à la fonction à deux points, ce résultat montre en particulier que si  $2d_\sigma < d$ , la longueur de corrélation  $\xi$  diverge et donc que les hamiltoniens correspondants sont nécessairement critiques. Les hamiltoniens critiques définissent, dans l'espace des hamiltoniens, la *surface critique* qui est invariante par le GR. Dans le cas générique où  $\xi$  est finie, la longueur de corrélation  $\xi/\lambda$  correspondant à  $\mathcal{H}_\lambda$  tend vers zéro. Les composantes de Fourier des fonctions de corrélation deviennent indépendantes des impulsions et donc les fonctions de corrélation deviennent des fonctions  $\delta$  dans l'espace direct. Ce point fixe trivial de variables indépendantes correspond à  $2d_\sigma = d$ .

## 9.4 Flots des hamiltoniens : points fixes et stabilité

Nous supposons maintenant qu'il existe une transformation de l'hamiltonien compatible avec l'équation (9.16).

Nous supposons, de plus, que cette transformation est de type markovien, c'est-à-dire que la transformation ne dépend que de  $\mathcal{H}_\lambda$  et non du chemin qui a conduit de  $\mathcal{H}$  à  $\mathcal{H}_\lambda$ . Dans l'espace continu,  $\lambda$ , le paramètre de dilatation, peut être varié de façon continue (alors que sur un réseau,  $\lambda$  ne peut prendre que des valeurs discrètes). C'est pourquoi, nous pouvons écrire la transformation sous une forme différentielle en termes d'une transformation  $\mathcal{T}$  de l'espace des hamiltoniens sur lui-même et d'une fonction réelle  $D_\sigma$  définie sur l'espace des hamiltoniens. L'EGR satisfaite par l'hamiltonien prend alors la forme

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{T}[\mathcal{H}_\lambda], \quad (9.23)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = -2D_\sigma[\mathcal{H}_\lambda]. \quad (9.24)$$

Nous supposons, de plus, un processus markovien stationnaire, de sorte que le membre de droite ne dépend de  $\lambda$  qu'à travers  $\mathcal{H}_\lambda$  (et donc pas de  $\lambda$  explicitement). Ceci est une des caractéristiques principales de ces équations et explique nombre de résultats qui vont suivre. L'apparition de la dérivée  $\lambda d/d\lambda = d/d \ln \lambda$  reflète le caractère multiplicatif des dilatations ou changements d'échelle. Les équations de GR définissent donc un processus dynamique dans le temps  $\ln \lambda$ . Par ailleurs, nous supposons, et c'est aussi une hypothèse très importante, que l'application  $\mathcal{T}$  est suffisamment différentiable (par exemple infiniment différentiable).

Un exemple explicite d'une transformation (9.23) est donnée par l'équation (16.51).

### 9.4.1 Points fixes et flot linéarisé

Un hamiltonien de point fixe  $\mathcal{H}^*$  est nécessairement une solution de l'équation de point fixe

$$\mathcal{T}[\mathcal{H}^*] = 0. \quad (9.25)$$

La dimension  $d_\sigma$  du champ  $\sigma$  est alors

$$d_\sigma = D_\sigma[\mathcal{H}^*]. \quad (9.26)$$

*EGR linéarisée.* Le point fixe du GR étant déterminé, nous appliquons l'EGR (9.23) à un hamiltonien  $\mathcal{H}$  proche du point fixe  $\mathcal{H}^*$ . Posant  $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}^* + \Delta\mathcal{H}_\lambda$ , nous linéarisons l'EGR qui prend la forme

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \Delta\mathcal{H}_\lambda = L^*(\Delta\mathcal{H}_\lambda), \quad (9.27)$$

où  $L^*$  est un opérateur linéaire indépendant de  $\lambda$ , agissant sur l'espace des hamiltoniens. Il est alors possible d'étudier le flot du GR dans un voisinage du point fixe et d'en déduire les propriétés de stabilité locale du point fixe.

La solution formelle de l'équation (9.27) est

$$\Delta\mathcal{H}_\lambda = \lambda^{L^*} \Delta\mathcal{H}_1. \quad (9.28)$$

Supposons que  $L^*$  ait un spectre discret avec des valeurs propres  $l_i$ , correspondant à un ensemble de vecteurs propres  $\mathcal{O}_i$ . Pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , le flot va être dominé par les valeurs propres les plus grandes (de partie réelle la plus grande si elles sont complexes). Développons alors  $\Delta\mathcal{H}_\lambda$  sur les vecteurs propres  $\mathcal{O}_i$  de  $L^*$  :

$$\Delta\mathcal{H}_\lambda = \sum_i h_i(\lambda) \mathcal{O}_i. \quad (9.29)$$

L'équation de flot (9.27) est équivalente à

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_i(\lambda) = l_i h_i(\lambda), \quad (9.30)$$

qui s'intègre en

$$h_i(\lambda) = \lambda^{l_i} h_i(1). \quad (9.31)$$

Aucun résultat général n'implique que toutes les valeurs propres soient réelles. Néanmoins, pour la classe de modèles que nous étudions, il se trouve empiriquement qu'il en est ainsi. Dans la suite, nous ne discutons donc que de cette situation.

### 9.4.2 Classification des vecteurs propres

Les vecteurs, ou perturbations, propres  $\mathcal{O}_i$  peuvent alors être classés en quatre familles suivant le signe des valeurs propres  $l_i$  correspondantes (cf. section 3.2) :

- (i) *Valeurs propres positives.* Les vecteurs propres correspondants sont appelés *essentiels* (*relevant* en anglais). Si  $\Delta\mathcal{H}_\lambda$  a une composante sur un de ces vecteurs, cette composante croîtra avec  $\lambda$  et  $\mathcal{H}_\lambda$  s'éloignera de  $\mathcal{H}^*$ . Ces vecteurs correspondent à des directions d'instabilité au voisinage du point fixe. Par exemple, les vecteurs associés à des déviations à la criticalité sont clairement essentiels puisqu'une dilatation décroît la longueur de corrélation effective.
- (ii) *Valeurs propres nulles.* Les vecteurs propres correspondant à une valeur propre nulle sont appelés *marginaux*. Dans la section 9.5, nous montrons que  $\int dx \sigma^4(x)$  est marginal à quatre dimensions. Pour résoudre l'EGR (9.23) et déterminer le comportement de la composante correspondante, il est nécessaire d'aller au-delà de l'approximation linéaire. Génériquement, on trouve

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_i(\lambda) \sim B h_i^2(\lambda). \quad (9.32)$$

Suivant le signe de la constante  $B$  et le signe de  $h_i$ , le point fixe est alors marginalement instable ou stable. Dans ce dernier cas, pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , la solution se comporte comme

$$h_i(\lambda) \sim -1/(B \ln \lambda). \quad (9.33)$$

La présence d'un vecteur propre marginal conduit, généralement, à une convergence logarithmique vers le point fixe.

Un exemple exceptionnel est fourni par le modèle XY en deux dimensions (modèle avec spin à deux composantes et symétrie  $O(2)$ ) qui, au lieu d'un point fixe isolé, a une ligne de points fixes. Le vecteur propre qui correspond au mouvement le long de la ligne est évidemment marginal (cf. section 15.10.2).

- (iii) *Valeurs propres négatives.* Les vecteurs propres correspondant sont appelés *inessentiels* (en anglais, *irrelevant*). Les composantes de  $\Delta\mathcal{H}_\lambda$  sur ces vecteurs propres convergent vers zéro à grande dilatation.
- (iv) *Enfin, quelques vecteurs propres n'affectent pas la physique.* Un exemple est donné par le vecteur propre réalisant une renormalisation multiplicative constante des variables dynamiques  $\sigma(x)$ . Ces vecteurs propres sont appelés *redondants*.

*Classification des point fixes.* Les points fixes peuvent être classés d'après leurs propriétés de stabilité locale, c'est-à-dire le nombre de vecteurs propres essentiels linéairement indépendants. Ce nombre est aussi le nombre de paramètres qu'il est nécessaire de fixer pour imposer à un hamiltonien général d'être sur la surface qui forme le bassin d'attraction du point fixe. Pour un point fixe non trivial correspondant à des hamiltoniens critiques, il est la co-dimension de la surface critique.

### 9.4.3 EGR : autre forme

L'équation (9.9) peut être écrite de façon équivalente (en négligeant le reste  $R_n$ )

$$Z^{n/2}(\lambda)W_\lambda^{(n)}(x_1/\lambda, \dots, x_n/\lambda) = W^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (9.34)$$

Nous supposons maintenant que l'hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda$  est paramétré en termes de constantes  $h_i(\lambda)$  (en général, en nombre infini). Alors, on peut changer de notation et écrire

$$W_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1, \dots, x_n),$$

où ici,  $\{h(\lambda)\}$  représente l'ensemble des  $h_i(\lambda)$ . Nous dérivons alors l'équation (9.34) par rapport à  $\lambda$ . Le membre de droite n'en dépend pas et donc

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ Z^{n/2}(\lambda) W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1/\lambda, \dots, x_n/\lambda) \right] = 0. \quad (9.35)$$

Introduisons l'opérateur différentiel

$$D_{RG} \equiv \sum_{\ell=1}^n x_\ell \cdot \nabla_{x_\ell} + \sum_i \beta_i(\{h\}) \frac{\partial}{\partial h_i} + n D_\sigma(\{h\}),$$

avec les définitions

$$\beta_i(\{h\}) = -\lambda \frac{d}{d\lambda} h_i(\lambda), \quad (9.36)$$

$$2D_\sigma(\{h\}) = -\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda). \quad (9.37)$$

Ces deux équations sont équivalentes aux équations (9.23) et (9.24). La propriété *markovienne stationnaire* implique que  $\beta_i$  et  $D_\sigma$  ne dépendent pas de  $\lambda$  explicitement, mais seulement à travers les paramètres  $h_i(\lambda)$ . L'équation (9.35) peut alors être écrite (par utilisation de la propriété de dérivée en chaîne)

$$\begin{aligned} -Z^{-n/2}(\lambda)\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ Z^{n/2}(\lambda) W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1/\lambda, \dots, x_n/\lambda) \right] \\ = D_{\text{RG}} W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1/\lambda, \dots, x_n/\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, puisque dans la nouvelle équation  $\lambda$  ne joue plus de rôle explicite, nous spécialisons à  $\lambda = 1$ . L'équation devient une équation aux dérivées partielles pour les fonctions de corrélation :

$$\left[ \sum_{\ell=1}^n x_\ell \cdot \nabla_{x_\ell} + \sum_i \beta_i(\{h\}) \frac{\partial}{\partial h_i} + n D_\sigma(\{h\}) \right] W^{(n)}(\{h\}; x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (9.38)$$

autre forme très fréquente des EGR. Dans ce formalisme, un point fixe est défini par la solution simultanée de toutes les équations

$$\beta_i(\{h^*\}) = 0,$$

et l'équation (9.38) implique alors le comportement d'échelle déjà obtenu directement puisque

$$\left( \sum_{\ell=1}^n x_\ell \cdot \nabla_{x_\ell} + n d_\sigma \right) W^{(n)}(\{h^*\}; x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (9.39)$$

De même, partant de l'équation (9.14), on déduit

$$\left[ \sum_{\ell=1}^n p_\ell \cdot \nabla_{p_\ell} - \sum_i \beta_i(\{h\}) \frac{\partial}{\partial h_i} + n D_\sigma(\{h\}) - d \right] \hat{\Gamma}^{(n)}(\{h\}; p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (9.40)$$

#### 9.4.4 Le domaine critique : propriétés d'échelle

Nous avons montré que le modèle quasi-gaussien implique des propriétés d'universalité non seulement à la température critique où la longueur de corrélation est infinie, mais aussi dans un voisinage du point critique, appelé domaine critique. Le domaine critique est caractérisé par la propriété que la longueur de corrélation est grande par rapport à l'échelle microscopique, et donc  $|T - T_c| \ll 1$  et champ magnétique  $|H| \ll 1$ .

On s'attend qu'une telle universalité apparaisse aussi pour des points fixes généraux du GR. En effet, si la longueur de corrélation  $\xi$  est finie, on peut

faire des transformations d'échelle jusqu'à des  $\lambda$  d'ordre  $\xi$ . Après ces transformations, la longueur de corrélation est ramenée à une taille d'ordre 1. L'hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda$  transformé n'est plus critique, et le modèle peut être résolu de façon perturbative. Mais en même temps, toutes les composantes de  $\mathcal{H}_\lambda$  sur des vecteurs propres inessentiels s'annulent asymptotiquement pour  $\xi \rightarrow \infty$ . Ainsi,  $\mathcal{H}_\lambda$  ne dépend plus que d'un nombre de paramètres égal au nombre de vecteurs propres essentiels indépendants (*cf.* aussi les sections 4.7.2 et 7.4).

L'universalité est la conséquence de la disparition, pour  $\lambda = O(\xi) \gg 1$ , de toutes les composantes sur les vecteurs inessentiels. Par ailleurs, nous supposons l'absence de perturbations marginales qui exigent une analyse spéciale.

Techniquement, comme nous l'avons déjà montré sur des exemples, cette limite asymptotique universelle est obtenue en renormalisant les coefficients des perturbations essentielles de façon à compenser l'effet de la dilatation.

Récrivons pour cela, l'équation (9.9) sous la forme

$$W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1, \dots, x_n) = Z^{-n/2}(\lambda) W^{(n)}(\{h(1)\}; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \quad (9.41)$$

Quand  $\lambda \rightarrow \infty$ , les composantes sur les perturbations inessentielles tendent vers zéro. Par ailleurs, faisons varier les composantes initiales sur les perturbations essentielles, en fonction de  $\lambda$ , pour compenser le facteur de dilatation :

$$h_i(1) \mapsto (h_i)_r \lambda^{-l_i} \quad \forall i \in E,$$

où  $E$  est l'ensemble des composantes essentielles.

Dans ces conditions,  $W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1, \dots, x_n)$  tend asymptotiquement vers une fonction  $W_r^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1, \dots, x_n)$  qui ne dépend plus que des coefficients  $(h_i)_r$ . On en déduit la relation asymptotique

$$\begin{aligned} & \lambda^{d_\sigma} W^{(n)}(h_j(1), j \notin E; (h_i)_r \lambda^{-l_i}, i \in E; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \\ & \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\propto} W_r^{(n)}((h_i)_r; x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Cette équation s'applique directement à la forme asymptotique et donc

$$W_r^{(n)}((h_i)_r; x_1, \dots, x_n) = \lambda^{d_\sigma} W_r^{(n)}((h_i)_r \lambda^{-l_i}; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \quad (9.42)$$

Cette loi de transformation par dilatation des fonctions de corrélations asymptotiques universelles dans le domaine critique  $W_r^{(n)}$  est aussi appelée propriété d'échelle.

## 9.5 Le point fixe gaussien

Dans un cadre assez général, nous avons montré que l'existence de points fixes du GR, dans l'espace des hamiltoniens, entraîne des propriétés d'universalité du comportement critique. Il reste maintenant à construire explicitement ces transformations et déterminer leurs points fixes. Dans un nombre

limité de modèles (mais qui appartiennent à des classes d'universalité importantes du point de vue physique), il a été possible de montrer des points fixes et d'étudier leur stabilité locale. En revanche, même dans ces exemples, une analyse globale du flot de GR reste à faire.

Il existe cependant un sous-espace de l'espace des hamiltoniens qui peut être exploré complètement et dans lequel les transformations du GR peuvent être construites explicitement : le sous-espace des hamiltoniens quadratiques qui correspond aux modèles gaussiens. Dans ce cas, on peut prendre  $R^{(n)} \equiv 0$  dans les transformations de GR.

Les points fixes peuvent alors être identifiés : les hamiltoniens critiques convergent vers le *point fixe gaussien* dont les prédictions au-dessus de  $T_c$  coïncident avec l'approximation de champ moyen. Comme nous allons le montrer, la discussion a beaucoup de points en commun avec celle de la marche au hasard en section 3.3.10. Notons, enfin, qu'une seule fonction de corrélation connexe est différente de zéro, la fonction à deux points, ce qui simplifie notablement l'analyse.

### 9.5.1 Le point fixe gaussien

En section 8.4, nous avons montré que les prédictions universelles du modèle gaussien peuvent être déduites du hamiltonien

$$\mathcal{H}_G(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x \left[ \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \sigma(x))^2 + m^2 \sigma^2(x) \right], \quad m^2 \propto T - T_c$$

et  $(\partial_\mu \equiv \partial/\partial_\mu)$  est défini dans l'espace continu à  $d$  dimensions.

À  $T_c$ , l'hamiltonien se réduit à

$$\mathcal{H}_G(\sigma)|_{m=0} = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \sigma(x))^2,$$

et la fonction à deux points est donnée par l'équation (8.38) :

$$W^{(2)}(x) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \frac{1}{|x|^{d-2}}.$$

Elle a un comportement d'échelle (9.21) caractéristique d'un hamiltonien de point fixe. En effet, la transformation de la fonction dans une dilatation  $x \mapsto \lambda x$  prend la forme

$$W^{(2)}(\lambda x) = \lambda^{2-d} W^{(2)}(x).$$

Des équations (9.9) et (9.20), on déduit alors la renormalisation du champ

$$Z(\lambda) = \lambda^{-(d-2)} \quad (9.43)$$

et la dimension du champ gaussien critique

$$d_\sigma = \frac{1}{2}(d-2). \quad (9.44)$$

L'hamiltonien

$$\mathcal{H}_G^*(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma)|_{m=0}, \quad (9.45)$$

dont la seule fonction de corrélation connexe non nulle a un comportement d'échelle, est donc un hamiltonien de point fixe : le *point fixe gaussien*. Il est invariant dans les transformations d'un GR qui est dans ce cas, linéaire :

$$\sigma(x) \mapsto Z^{1/2}(\lambda)\sigma(x/\lambda) = \lambda^{(2-d)/2}\sigma(x/\lambda). \quad (9.46)$$

En effet, la substitution entraîne  $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu/\lambda$ , et donc

$$\lambda^{2-d} \int d^d x \sum_{\mu=1}^d \lambda^{-2} (\partial_\mu \sigma(x/\lambda))^2 = \int d^d x \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \sigma(x))^2,$$

après le changement de variables  $x_\mu \mapsto \lambda x_\mu$ .

Nous avons donc exhibé un point fixe, le point fixe gaussien, dont les prédictions coïncident avec les prédictions universelles de l'approximation de champ moyen.

### 9.5.2 Hamiltonien quadratique isotrope général

Nous considérons maintenant un hamiltonien général quadratique en  $\sigma$ , du type envisagé en section 8.2. Dans le cas de forces à courte portée, la transformée de Fourier du coefficient du terme quadratique en  $\sigma$  est régulière et peut être développée en série de Taylor. Dans l'espace direct, cela signifie que le terme quadratique en  $\sigma$  peut être développé en puissances de l'opérateur dérivée. Dans l'espace continu, un hamiltonien invariant par rotations-réflexions d'espace ne peut dépendre que du carré scalaire de l'opérateur gradient  $\nabla_x$  et prend donc la forme

$$\mathcal{H}_G(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{r=0} u_r^{(2)} \sigma(x) (-\nabla_x^2)^r \sigma(x), \quad (9.47)$$

où les coefficients  $u_r^{(2)}$  sont des constantes et le carré scalaire de  $\nabla_x$  est le laplacien à  $d$  dimensions :

$$\nabla_x^2 \equiv \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu^2.$$

Un hamiltonien de réseau peut contenir aussi des termes ayant la symétrie du réseau mais non isotrope de type  $\sum_\mu \partial_\mu^4$  par exemple.

Les transformations de GR (9.46), qui ont conduit au point fixe gaussien, après le changement de variables  $x_\mu \mapsto \lambda x_\mu$  entraînent maintenant

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\lambda(\sigma) &= \frac{1}{2} Z(\lambda) \int \lambda^d d^d x \sum_{r=0} u_r^{(2)} \sigma(x) (-\nabla_x^2 / \lambda^2)^r \sigma(x) \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{r=0} u_r^{(2)} \lambda^{2-2r} \sigma(x) (-\nabla_x^2)^r \sigma(x).\end{aligned}$$

Cette expression est donc directement un développement sur les vecteurs propres. Le coefficient du terme avec  $2r$  dérivées se transforme comme

$$u_r^{(2)} \mapsto u_r^{(2)}(\lambda) = \lambda^{2-2r} u_r^{(2)}. \quad (9.48)$$

Enfin, dérivant  $u_r^{(2)}(\lambda)$  (équation (9.48)) par rapport à  $\lambda$ , on trouve l'équivalent de l'équation (9.23), qui est aussi l'équation (9.27) car la transformation  $\mathcal{T}$  est linéaire, sous la forme (9.30) :

$$\lambda \frac{du_r^{(2)}(\lambda)}{d\lambda} = (2 - 2r) u_r^{(2)}(\lambda).$$

Le flot complet du GR s'en déduit. En particulier, pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , ce sont les vecteurs propres avec le moins de dérivées qui dominent.

*Perturbation essentielle.* Le coefficient du terme  $r = 0$  croît ce qui n'est pas surprenant. Le vecteur propre est essentiel pour le point fixe gaussien car il induit une longueur de corrélation finie, qui éloigne du point fixe.

*Perturbation redondante.* Le terme  $r = 1$ , dont le coefficient est invariant, est proportionnel à l'hamiltonien de point fixe. Il correspond à une simple changement de la normalisation de  $\sigma$ , sans effet physique et est donc redondant.

*Perturbations inessentiels.* Tous les termes avec  $r > 1$  décroissent pour  $\lambda \rightarrow \infty$  et sont donc inessentiels.

La conclusion est la suivante : le point fixe gaussien est stable dans la classe des modèles critiques gaussiens. Dans la classe générale des modèles gaussiens, il n'y a qu'une seule direction d'instabilité, qui correspond à la déviation de la température critique.

*Brisure de la symétrie de réflexion.* Notons enfin que si l'on élargit la discussion à des termes linéaires en  $\sigma$  qui brise la symétrie d'Ising, on peut ajouter un terme  $H \int d^d x \sigma(x)$ . Ce terme de champ magnétique dans une dilatation devient

$$H \int d^d x \sigma(x) \mapsto H \lambda^{(2-d)/2} \lambda^d \int d^d x \sigma(x) = H \lambda^{d/2+1} \int d^d x \sigma(x), \quad (9.49)$$

et est donc également essentiel avec valeur propre  $d/2 + 1$ .

*Opérateurs.* Dans le cadre de la théorie quantique des champs, aux polynômes dans le champ  $\sigma(x)$  sont associés des *opérateurs* quantiques. Pour cette raison, on appelle souvent ces polynômes opérateurs, bien qu'ici les champs soient classiques. Ainsi, on parle d'opérateurs essentiels, marginaux, inessentiels, un langage traditionnel que nous utiliserons parfois aussi.

*Domaine critique.* La théorie dans le domaine critique est obtenue en renormalisant les coefficients des perturbations essentielles, de façon à ce que les coefficients transformés restent constants. Par exemple,

$$u_0^{(2)} \mapsto \lambda^{-2} u_0^{(2)}, \quad H \mapsto H \lambda^{-d/2-1}.$$

Dans ce point de vue, les coefficients à l'échelle  $\lambda$  sont fixes, et il existe un flot des paramètres initiaux du hamiltonien. Dans la théorie de la renormalisation en théorie quantique des champs, cela correspond à fixer les paramètres de la théorie renormalisée.

## 9.6 Perturbations propres : analyse générale

Nous étudions maintenant les propriétés de transformation de fonctions locales générales, paires (c'est-à-dire ayant la symétrie du modèle d'Ising), du champ. Il n'est plus question ici d'étudier le GR général, mais seulement la version linéarisée au voisinage du point fixe gaussien.

### 9.6.1 Perturbations propres

L'analyse de la section précédente ainsi que l'hypothèse d'interactions de courte portée permet de faire un développement en dérivées. On considère donc une perturbation de la forme générale

$$\Delta \mathcal{H}(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma),$$

où les  $\mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma)$  sont des intégrales de monômes  $V_{\alpha}^{n,r}(\sigma)$  dans  $\sigma(x)$  et ses dérivées, de degré  $n$  (pair) en  $\sigma$  et avec exactement  $r$  dérivées ( $r$  également pair) :

$$\mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma) = \int d^d x V_{\alpha}^{n,r}(\sigma(x), \partial_{\mu} \sigma(x), \dots).$$

L'indice  $\alpha$  est là pour rappeler qu'il existe, en général, plusieurs polynômes homogènes à  $n, r$  fixés.

En plus des termes quadratiques déjà étudiés, les termes  $V_{\alpha}^{n,r}(\sigma)$  de degré le moins élevé sont, par exemple,

$$\sigma^4(x), \quad \sigma^6(x), \quad \sigma^2(x) (\partial_{\mu} \sigma(x))^2, \quad \sigma^5(x) \nabla_x^2 \sigma(x), \dots$$

Appliquant la transformation (9.46) du GR et après le changement  $x \mapsto \lambda x$ , on trouve

$$\mathcal{O}_\alpha^{n,r}(\lambda, \sigma) = Z^{n/2}(\lambda) \lambda^{d-r} \mathcal{O}_\alpha^{n,r}(\sigma) = \lambda^{d-n(d-2)/2-r} \mathcal{O}_\alpha^{n,r}(\sigma). \quad (9.50)$$

Nous voyons que les  $\mathcal{O}_\alpha^{n,r}(\sigma)$  sont des vecteurs propres que nous pouvons classer suivant les valeurs décroissantes de  $l_{n,r} = d - n(d-2)/2 - r$  :

- (i) Pour  $n = 2$  et  $r = 0$ ,  $l_{2,0} = 2$ . Ainsi, la perturbation  $\int \sigma^2(x) d^d x$  est essentielle, et correspond à une déviation de la température critique.
- (ii) La perturbation quadratique  $n = 2$ ,  $r = 2$  est redondante ; elle ne correspond qu'à une simple renormalisation du champ  $\sigma$ .
- (iii) Au-dessus de la dimension 4, toutes les autres perturbations sont inessentiels (*irrelevant*) : sur la surface critique ( $T = T_c$ ), le point fixe gaussien est donc stable.

En dimension 4, la perturbation  $n = 4$ ,  $r = 0$ , c'est-à-dire  $\int \sigma^4(x) d^d x$  devient marginale et toutes les autres perturbations restent inessentiels. L'analyse linéaire ne permet pas de déterminer les propriétés de stabilité du point fixe gaussien. Pour cela, il faut construire un GR qui prenne en compte les déviations à la théorie gaussienne de façon à pouvoir aller au-delà de l'approximation linéaire. Si le point fixe gaussien est stable, on s'attend à une convergence logarithmique.

Au-dessous de la dimension 4,  $l_{4,0} = 4 - d > 0$  et donc  $\int \sigma^4(x) d^d x$  est essentielle : le point fixe gaussien est instable. Quand la dimension décroît, de nouvelles perturbations deviennent également essentielles. Par exemple en dimension 3,  $\int \sigma^6(x) d^d x$  est marginale et pour  $d < 3$  essentielle. Toutefois, il faut noter que cette classification est spécifique du point fixe gaussien et n'a aucune raison d'être valable pour un autre point fixe.

Nous remarquons enfin que cette analyse conduit aux mêmes conclusions que le calcul des corrections dominantes à l'approximation gaussienne en section 8.9.2.

*Forme différentielle du flot.* Une autre façon d'écrire l'équation (9.50) est de développer  $\Delta \mathcal{H}_\lambda$  sur une base fixe, par exemple les vecteurs propres  $\mathcal{O}_\alpha^{n,r}(\sigma)$ , avec des coefficients variables :

$$\Delta \mathcal{H}_\lambda(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\alpha} h_{\alpha}^{(n,r)}(\lambda) \mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma),$$

où les coefficients  $h_{\alpha}^{(n,r)}(\lambda)$ , comme conséquence de l'équation (9.50), satisfont

$$h_{\alpha}^{(n,r)}(\lambda) = \lambda^{d-n(d-2)/2-r} h_{\alpha}^{(n,r)}(1).$$

La forme différentielle

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_{\alpha}^{(n,r)} = L^* h_{\alpha}^{(n,r)} = l_{n,r} h_{\alpha}^{(n,r)}, \quad (9.51)$$

avec

$$l_{n,r} = d - \frac{1}{2}n(d-2) - r \quad (9.52)$$

est un exemple de l'équation (9.30).

### 9.6.2 Représentation de Fourier

En passant en représentation de Fourier, on obtient une autre expression des EGR sous forme différentielle. Introduisons la représentation de Fourier du champ

$$\sigma(x) = \int d^d k \, e^{ikx} \tilde{\sigma}(k).$$

Nous développons  $\Delta\mathcal{H}$  alors en puissances de  $\tilde{\sigma}$  (cf. équation (9.4)) :

$$\Delta\mathcal{H}(\sigma) = \sum_2^\infty \frac{1}{n!} \int d^d k_1 \dots d^d k_n \tilde{\sigma}(k_1) \dots \tilde{\sigma}(k_n) (2\pi)^d \delta^{(d)}\left(\sum k_i\right) u^{(n)}(k_i). \quad (9.53)$$

Répétant le raisonnement précédent, on vérifie que l'équation (9.9) mène aux transformations  $k_i \mapsto k_i/\lambda$  et donc

$$u^{(n)}(k_i) \delta^d\left(\sum k_i\right) \mapsto u^{(n)}(k_i/\lambda) \lambda^d \delta^{(d)}\left(\sum k_i\right),$$

ainsi que

$$\tilde{\sigma}(k) \mapsto Z^{1/2}(\lambda) \tilde{\sigma}(k) = \lambda^{-(d-2)/2} \tilde{\sigma}(k).$$

On en déduit

$$u_\lambda^{(n)}(k_i) = \lambda^d Z^{n/2}(\lambda) u^{(n)}(k_i/\lambda) = \lambda^{d-n(d-2)/2} u^{(n)}(k_i/\lambda). \quad (9.54)$$

Dérivant par rapport à  $\lambda$ , on trouve l'équivalent de l'équation (9.27), développée en puissances de  $\tilde{\sigma}(k)$ . Utilisant

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} u^{(n)}(k/\lambda) = - \sum_i k_i \frac{d}{dk_i} u^{(n)}(k/\lambda),$$

on obtient

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} u_\lambda^{(n)}(k) = \left( - \sum_i k_i \frac{\partial}{\partial k_i} + d - \frac{1}{2}n(d-2) \right) u_\lambda^{(n)}(k). \quad (9.55)$$

Cette équation est écrite pour la transformation du GR qui admet le point fixe (9.43 et 9.45). L'équation aux valeurs propres est alors

$$L^* u_\lambda^{(n)}(k) = \left( - \sum_i k_i \frac{\partial}{\partial k_i} + d - \frac{1}{2}n(d-2) \right) u_\lambda^{(n)}(k) = l u_\lambda^{(n)}(k). \quad (9.56)$$

L'équation (9.56) montre que les vecteurs propres sont des fonctions homogènes des variables dynamiques  $\sigma$  (les  $u_\lambda^{(n)}(k)$  pour différentes valeurs de  $n$  ne sont pas couplés) et des impulsions  $k_i$  (la représentation de Fourier des dérivées dans l'espace direct).

Nous avons supposé que les fonctions  $u_\lambda^{(n)}(k)$  sont régulières (hypothèse de courte portée des interactions). Elles peuvent donc être développées sur une base de polynômes homogènes  $P_\alpha^{(n,r)}$  de degré  $r$  en  $k$  :

$$\sum_i k_i \frac{\partial}{\partial k_i} P_\alpha^{(n,r)}(k) = r P_\alpha^{(n,r)}(k),$$

l'indice  $\alpha$  rappelant qu'il existe, en général, plusieurs polynômes homogènes de degré  $r$ . Posant

$$u_\lambda^{(n)}(k) = \sum_{r,\alpha} h_\alpha^{(n,r)}(\lambda) P_\alpha^{(n,r)}(k),$$

on trouve alors que les coefficients  $h_\alpha^{(n,r)}$  satisfont l'équation (9.51) avec les valeurs propres  $l_{n,r}$  données par l'équation (9.52).

## 9.7 Un point fixe non gaussien : le développement en $\varepsilon$

Nous avons montré que le point fixe gaussien est instable pour  $d < 4$ . Nous supposons maintenant, qu'au moins au sens d'un développement perturbatif autour du point fixe gaussien, nous avons le droit de considérer la dimension  $d$  de l'espace comme un paramètre continu (pour plus de détails, voir la section 12.5). Nous nous plaçons alors dans le voisinage immédiat de la dimension 4, considérant la déviation  $\varepsilon = 4 - d$  de la dimension 4 comme un paramètre de développement. Par ailleurs, nous ajustons un paramètre pour que le système que nous étudions reste critique ( $T = T_c$ ) ce qui a comme effet de supprimer la perturbation essentielle qui engendre une longueur de corrélation finie ( $n = 2, r = 0$  pour le point fixe gaussien).

Nous faisons une hypothèse supplémentaire, dont nous vérifierons par des calculs explicites au moins la cohérence :

Nous avons déjà supposé que l'EGR (9.23) était développable dans les perturbations au point fixe, et donc ici, dans les déviations à la théorie gaussienne. Nous supposons, de plus, que l'EGR est développable dans le paramètre  $\varepsilon = 4 - d$ .

### 9.7.1 Points fixes

Nous supposons que l'hamiltonien initial est critique ( $T = T_c$ ) et appartient à un voisinage du point fixe gaussien tel que pour des dilatations  $\lambda$  pas

trop grandes, l'équation (9.23) puisse être approximée par la forme linéarisée (9.27), où  $\Delta\mathcal{H}$  est la déviation par rapport au point fixe gaussien. En particulier, les composantes  $h_\alpha(\lambda)$  sur tous les vecteurs propres inessentiels décroissent. Seule la composante sur  $\int d^d x \sigma^4(x)$ , que nous notons maintenant  $g(\lambda)$ , croît. Cependant, pour  $\varepsilon \ll 1$ ,  $g(\lambda) \sim g(1)\lambda^\varepsilon$  croît lentement. Il existe donc des valeurs de  $\lambda$  suffisamment grandes telles que toutes les composantes  $h_\alpha(\lambda)$  deviennent négligeables par rapport à  $g(\lambda)$  avant que  $g(\lambda)$  lui-même ne devienne si grand que le développement de l'équation (9.23) ne soit plus utilisable.

Remarquons que pour de telles valeurs de  $\lambda$ ,  $g(\lambda)$  doit être positif pour que  $\mathcal{H}(\sigma)$  soit positif pour  $\sigma$  grand et que la mesure sur  $\sigma$  soit définie.

Nous pouvons donc développer l'équation (9.23), projetée sur le vecteur propre correspondant, en puissances de  $g(\lambda)$  :

$$\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = (4-d)g(\lambda) - \beta_2(d)g^2(\lambda) + O(gh_\alpha, g^3), \quad (9.57)$$

et nous redéfinissons  $\lambda$  de telle sorte que pour  $\lambda = 1$ , ces équations asymptotiques soient déjà valables. Les termes négligés les plus importants sont le terme d'ordre  $g^3$  et des termes quadratiques proportionnels à  $h_\alpha g$ . Avec nos hypothèses, les termes proportionnels à  $h_\alpha h_\beta$  sont encore plus petits.

En particulier, si les coefficients  $h_\alpha$  sont initialement nuls, leurs dérivées sont dominées par des termes d'ordre  $g^2$  ou plus. Les termes négligés  $gh_\alpha$  sont donc au moins d'ordre  $g^3$ .

Le coefficient  $\beta_2$  dépend de la dimension  $d$ . Nous avons supposé qu'il était régulier au voisinage de la dimension 4 et donc, à l'ordre dominant pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous pouvons le remplacer par sa valeur à  $d = 4$ .

Nous remarquons immédiatement que le signe de  $\beta_2(4)$  joue un rôle crucial. Examinons les différents cas :

- (i)  $\beta_2(4) < 0$ . Dans ce cas, pour  $d \leq 4$ , les deux termes ont le même signe, la dérivée de  $g(\lambda)$  est positive et le point fixe gaussien est instable. Si initialement  $g(1)$  n'est pas nul,  $g(\lambda)$  croît avec  $\lambda$  jusqu'à ce que le développement en  $g(\lambda)$  ne soit plus valable, et on ne peut rien conclure de plus. En dimension 4, cependant, le flot est plus lent qu'en dimensions inférieures. Si initialement  $g(1)$  est voisin de zéro,  $g(\lambda)$  n'augmente d'abord que logarithmiquement :

$$g(\lambda) = g(1) + |\beta_2(4)| g^2(1) \ln \lambda + O(g^3(1)).$$

Pour  $d > 4$ , et donc  $\varepsilon < 0$ , on trouve un point fixe non gaussien

$$g^* = \varepsilon / \beta_2(4) + O(\varepsilon^2),$$

qui est un point fixe instable. Si initialement  $g(1) < g^*$ ,  $g(\lambda)$  converge vers le point fixe gaussien. Si  $g(1) = g^*$ ,  $g(\lambda) = g^*$  pour tout  $\lambda$ .

Si  $g(1) > g^*$ ,  $g(\lambda)$  croît et de nouveau, nous ne pouvons rien conclure de plus dans ce cadre.

Un cas particulièrement intéressant est  $g(1) < g^*$  avec  $g^* - g(1) \ll 1$ . Le couplage effectif  $g(\lambda)$  s'éloigne d'abord très lentement du point fixe instable. On trouve, dans ces conditions, une transition lente (en anglais *crossover*) entre un comportement des fonctions de corrélations dominé par le point fixe instable, et un comportement dominé par le point fixe stable.

Le cas  $\beta_2 < 0$  n'est pas réalisé dans le problème statistique que nous étudions ici, mais important pour la physique des interactions microscopiques fondamentales ( $d = 4$  dans ce cas). Par ailleurs, un exemple de cette situation, mais où la dimension 4 est remplacée par la dimension 2, sera rencontré en section 15.7.1 dans le cadre de l'étude du modèle  $\sigma$  non linéaire.

- (ii)  $\beta_2(4) = 0$ . Dans ce cas exceptionnel, il faut aller à l'ordre suivant et prendre en compte le terme d'ordre  $g^3$ .
- (iii)  $\beta_2(4) > 0$ . Dans ce cas, pour  $d > 4$ , on ne trouve que le point fixe gaussien qui est stable.

En dimension 4,  $\int d^4x \sigma^4(x)$  est marginal. Le point fixe gaussien est maintenant stable car  $g(1)$  est positif et l'approche au point fixe est alors logarithmique,

$$g(\lambda) \sim \frac{1}{\beta_2(4) \ln \lambda},$$

en accord avec la discussion générale du GR.

En revanche, pour  $d < 4$  (le cas physique), le point fixe gaussien est instable, mais, pour  $\varepsilon$  petit, un autre point fixe apparaît,

$$g^* = \varepsilon / \beta_2(4) + O(\varepsilon^2),$$

qui lui, est stable. En effet, si initialement  $g < g^*$ , alors  $g(\lambda)$  croît, et si au contraire  $g > g^*$ , alors  $g(\lambda)$  décroît. Cette situation est particulièrement intéressante car elle permet d'envisager le calcul des quantités universelles sous forme d'un développement en  $\varepsilon$ . En fait, pour les modèles que nous avons étudiés, les modèles de type Ising et les modèles avec symétries  $O(N)$ , c'est la situation qui est réalisée (Wilson et Fisher, 1972). On peut s'en convaincre en calculant les premières corrections à la théorie quasi-gaussienne des fonctions à deux et quatre points (*cf.* section 10).

Linéarisant l'équation (9.57) au voisinage du point fixe, on trouve

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} (g(\lambda) - g^*) \sim -\omega (g(\lambda) - g^*), \quad (9.58)$$

avec (propriété de la parabole)

$$\omega = \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (9.59)$$

Ainsi, au moins pour  $\varepsilon$  petit,  $\omega$  est positif et

$$g(\lambda) - g^* \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\propto} \lambda^{-\omega}$$

tend vers zéro pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , ce qui confirme que le nouveau point fixe est stable par rapport à une perturbation de type  $\int d^d x \sigma^4(x)$ , à la différence du point fixe gaussien.

L'exposant  $\omega$  caractérise la décroissance des corrections les plus importantes au comportement universel prédit par l'hamiltonien de point fixe. C'est aussi une quantité universelle.

Enfin, dans l'approximation quadratique, l'équation de flot (9.57) s'intègre exactement :

$$\frac{dg}{\varepsilon g - \beta_2 g^2} = \frac{d\lambda}{\lambda} \Rightarrow \ln \lambda = \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\varepsilon g' - \beta_2 g'^2},$$

et donc, pour  $g^* \propto \varepsilon \ll 1$ ,

$$g(\lambda) = \frac{g^* g}{g + \lambda^{-\varepsilon}(g^* - g)}.$$

*Dimension du champ ou paramètre d'ordre.* Une fois la valeur de point fixe  $g^*$  déterminée, on obtient la dimension du paramètre d'ordre  $d_\sigma = D_\sigma(g^*)$ . Le calcul de la fonction à deux points au second ordre dans le paramètre  $g$  montre que la déviation

$$\eta(g) = 2D_\sigma(g) - d + 2 \quad (9.60)$$

à la valeur gaussienne commence à l'ordre  $g^2$  et, donc, la déviation  $\eta \equiv \eta(g^*)$  à la dimension gaussienne (ou de champ moyen) du champ commence à l'ordre  $\varepsilon^2$ .

### 9.7.2 Autres vecteurs propres

Nous avons montré que, pour  $\beta_2(4) > 0$ , il existe un point fixe stable avec  $g^* = O(\varepsilon)$ . Mais dans l'analyse nous avons négligé les composantes sur les vecteurs propres inessentiels au sens du point fixe gaussien. Les plus importants près de la dimension 4 sont tels que le total du nombre de dérivées et de facteurs  $\sigma$  est 6, comme  $\int d^d x \sigma^6(x)$ . Pour montrer la cohérence de l'analyse, nous examinons maintenant l'effet de ces composantes sur le flot.

Les équations correspondant aux composantes des vecteurs propres inessentiels  $h_\alpha^{(n,r)}$  peuvent dépendre de  $g$  à partir de l'ordre quadratique. Considérons un paramètre  $h_\alpha$  pour lequel c'est le cas. L'équation d'évolution prend

alors la forme

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_\alpha(\lambda) \equiv B_\alpha(g(\lambda), \{h(\lambda)\}) = l_\alpha h_\alpha(\lambda) - \beta_{h_\alpha g^2} g^2(\lambda) + \dots, \quad (9.61)$$

( $l_\alpha < 0$ ) où les termes négligés les plus importants sont proportionnels à  $h_\alpha g$ . À l'ordre dominant en  $\varepsilon$ , on trouve la solution de point fixe

$$h_\alpha^* = \frac{\beta_{h_\alpha g^2} \varepsilon^2}{\beta_2^2 l_\alpha} + O(\varepsilon^3),$$

où  $\beta_{h_\alpha g^2}$ ,  $\beta_2$  et la valeur propre gaussienne  $l_\alpha$  peuvent être remplacés par leurs valeurs en dimension 4. Ainsi, les coefficients des termes inessentiels au point fixe sont au moins d'ordre  $\varepsilon^2$ . Revenant à l'équation (9.57), qui prend la forme plus générale

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\beta(g(\lambda), \{h(\lambda)\}),$$

on remarque que les termes négligés comme  $g^3$  et  $gh_\alpha$  sont tous au moins d'ordre  $\varepsilon^3$  et donc les corrections à  $g^*$  et à la pente  $\omega$  sont d'ordre  $\varepsilon^2$  : le développement en  $\varepsilon$  est au moins une procédure cohérente, et le point fixe peut être déterminé comme un développement en  $\varepsilon$ .

On note cependant que l'hamiltonien de point fixe ne se réduit à une combinaison du terme gaussien et du terme  $\int d^d x \sigma^4(x)$  qu'à l'ordre dominant en  $\varepsilon$  puisque les autres coefficients  $h_\alpha$  ne s'annulent pas au point fixe.

On peut calculer ensuite les valeurs propres correspondant au flot dans le voisinage de ce nouveau point fixe. On vérifie que les valeurs propres diffèrent des valeurs propres associées au point fixe gaussien à l'ordre  $\varepsilon$ . Donc, pour  $0 \leq \varepsilon \ll 1$ , la classification des perturbations propres reste celle du cas gaussien à  $d = 4$  pour toutes les perturbations sauf une. Une seule perturbation propre est très sensible au changement de dimension : la perturbation qui à l'ordre dominant est  $\int d^d x \sigma^4(x)$ , parce qu'elle est marginale à  $d = 4$ . Essentielle du point de vue du point fixe gaussien, elle devient inessentielle pour le nouveau point fixe.

*Groupe de renormalisation perturbatif.* Cette analyse suggère qu'il doit être possible de déterminer les équations de flot par un développement perturbatif autour du modèle gaussien, alors que nous avons vérifié que c'est impossible pour les fonctions de corrélation.

*Flot entre points fixes.* En particulier, il est alors possible de déterminer de façon perturbative la trajectoire du GR qui relie le point fixe gaussien au point fixe stable non gaussien. Supposant que la fonction  $g(\lambda)$  soit inversible,  $g \mapsto \lambda = \lambda(g)$ , ce qui est réalisé au moins pour  $\varepsilon \ll 1$ , on peut éliminer, dans les équations de flot des paramètres  $h_\alpha$ , le paramètre de dilatation  $\lambda$  au profit de la constante  $g$ .

Reprenons l'exemple de l'équation (9.61). Sur une trajectoire du GR,  $h_\alpha$  peut être considéré comme une fonction de  $g$  et donc, en utilisant la propriété de dérivée en chaîne

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_\alpha = B_\alpha(g, \{h\}) = \lambda \frac{d}{d\lambda} g \frac{\partial}{\partial g} h_\alpha = -\beta(g, \{h\}) \frac{\partial}{\partial g} h_\alpha.$$

Le membre de gauche de l'équation (9.61) est d'ordre  $\varepsilon^2$  puisque la fonction  $\beta$  est d'ordre  $\varepsilon^2$ ,  $\partial/\partial g$  d'ordre  $1/\varepsilon$  et  $h_\alpha$  d'ordre  $\varepsilon^2$  au moins. À l'ordre dominant, on peut le négliger et on trouve simplement

$$h_\alpha(\lambda) = \beta_{h_\alpha g^2} g^2(\lambda)/l_\alpha + O(\varepsilon^3).$$

La dérivée ne contribue qu'à l'ordre suivant. Il est ainsi possible de déterminer les amplitudes des perturbations propres inessentiels sous la forme d'un développement en puissances de  $g$ . Substituant les développements correspondants dans la fonction  $\beta$ , on trouve une équation unique pour  $g(\lambda)$  :

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\beta(g(\lambda)), \quad (9.62)$$

où  $\beta(g)$  est maintenant une série formelle en  $g$  seulement. La solution de cette dernière équation détermine complètement le flot de l'hamiltonien. Cette solution ne dépend que d'un paramètre puisque les conditions aux limites, à  $\lambda = 1$  pour les amplitudes des termes inessentiels, sont toutes reliées à la valeur de  $g(1)$ .

Le zéro  $g^*$  de la fonction  $\beta$  détermine alors le point fixe et sa dérivée au point fixe  $\omega$  est une quantité universelle qui caractérise les corrections les plus importantes au comportement d'échelle.

C'est une stratégie de ce type qui est utilisée dans les calculs pratiques.

## 9.8 Valeurs propres et dimensions des polynômes locaux

Une fois le comportement asymptotique des fonctions de corrélation déterminé, on pourrait croire qu'on connaît aussi le comportement de valeurs moyennes de polynômes locaux dans les champs, comme par exemple  $\sigma^k(x)$  ou  $[\nabla\sigma(x)]^2$ , qu'on peut obtenir en prenant la limite d'un produit de champs. Par exemple,

$$\langle \sigma^2(y) \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle = \lim_{y' \rightarrow y} \langle \sigma(y) \sigma(y') \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle.$$

Il n'en est rien car les fonctions de corrélation correspondant à l'hamiltonien de point fixe (équation (9.21)) sont en général singulières quand des arguments coïncident comme des exemples le montreront (*cf.* aussi la remarque de la fin de la section 8.4.3).

Cependant, il existe un point fixe exceptionnel pour lequel cette propriété est vraie, c'est le point fixe gaussien que nous avons étudié en section 9.6.

En général, les valeurs moyennes de  $\sigma^2(y)$  ne sont pas définies, et il faut soustraire au produit  $\sigma(y)\sigma(y')$  une fonction singulière de  $y - y'$  pour obtenir une limite finie (on parle de renormalisation). Cette procédure se généralise à des puissances supérieures, ou des fonctions locales impliquant des dérivées de  $\sigma$ .

En section 9.4, nous avons discuté les perturbations propres du GR en un point fixe. L'étude du cas gaussien indique que ces perturbations propres ont la forme d'une intégrale d'une fonction locale des champs. En fait, à cause de la localité de la théorie, il existe aussi des perturbations propres locales  $\mathcal{O}_\alpha(\sigma, x)$  de la forme de séries en  $\sigma(x)$  et ses dérivées. Ils correspondent à des perturbations qui brisent l'invariance par translation. Leurs intégrales sur tout l'espace redonnent les perturbations propres que nous avons discutées. Ces fonctions locales  $\mathcal{O}(\sigma, x)$  des champs ont la propriété suivante : les fonctions de corrélation

$$W_{\mathcal{O}}^{(n)}(y; x_1, \dots, x_n) = \langle \mathcal{O}(\sigma, y) \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle_{\text{conn.}},$$

ont un comportement en loi de puissance asymptotique de la forme

$$W_{\mathcal{O}}^{(n)}(\lambda y; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\propto} \lambda^{-nd_\sigma - d_{\mathcal{O}}} W_{\mathcal{O}}^{*(n)}(y; x_1, \dots, x_n), \quad (9.63)$$

où par définition,  $d_{\mathcal{O}}$  est la *dimension* de l'opérateur  $\mathcal{O}(\sigma, x)$ .

Considérons alors l'intégrale d'espace

$$\mathcal{V}(\sigma) = \int d^d x \mathcal{O}(\sigma, x).$$

Ses fonctions de corrélation sont obtenues par intégration :

$$\int d^d y W_{\mathcal{O}}^{(n)}(y; x_1, \dots, x_n) = \langle \mathcal{V}(\sigma) \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle_{\text{conn.}}.$$

Avec des hypothèses raisonnables, mais à vérifier explicitement dans les exemples, de la relation

$$\int d^d y W_{\mathcal{O}}^{(n)}(\lambda y; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{-d} \int d^d y W_{\mathcal{O}}^{(n)}(y; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

on déduit, en utilisant le comportement asymptotique (9.63),

$$\langle \mathcal{V}(\sigma) \sigma(\lambda x_1) \dots \sigma(\lambda x_n) \rangle_{\text{conn.}} \propto \lambda^{d - nd_\sigma - d_{\mathcal{O}}}.$$

Le membre de droite est la variation de la fonction à  $n$  points au premier ordre quand on ajoute un terme proportionnel à  $\mathcal{V}$  à l'hamiltonien :

$$\int [d\sigma] \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) e^{-\mathcal{H} - \theta \mathcal{V}} = \int [d\sigma] \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) e^{-\mathcal{H}} (1 - \theta \mathcal{V} + O(\theta^2)).$$

Comparant ce terme au terme d'ordre zéro, nous observons que la perturbation  $\mathcal{V}$  a engendré un facteur  $\lambda^{d-d_{\mathcal{O}}}$  supplémentaire dans le comportement à grande distance. Ce facteur est donc lié à la valeur propre  $l_{\mathcal{V}}$  associée à la perturbation propre  $\mathcal{V}$ . Nous obtenons ainsi une relation générale entre dimension d'un opérateur propre local et valeur propre de la perturbation à l'hamiltonien correspondante :

$$l_{\mathcal{V}} + d_{\mathcal{O}} = d. \quad (9.64)$$

# Chapitre 10

## Groupe de renormalisation perturbatif : calculs explicites

AU CHAPITRE 9, NOUS AVONS MONTRÉ qu'au moins dans le voisinage de la dimension 4, avec certaines hypothèses sur l'existence et les propriétés d'un groupe de renormalisation et l'existence d'un prolongement dimensionnel, on peut ramener l'étude du flot d'un hamiltonien général, dans un voisinage du point fixe gaussien, au flot du coefficient  $g$  du terme essentiel :  $\int d^d x \sigma^4(x)$ . Nous supposons dans ce chapitre que l'analyse du chapitre 9 est pertinente. Nous montrons alors comment ces hypothèses permettent de déterminer le coefficient  $\beta_2$  du développement de la fonction  $\beta(g)$ , qui gouverne le flot de  $g$  (*cf.* équation (9.62)) et dont le signe est déterminant pour l'existence d'un point fixe, à partir d'un calcul perturbatif des fonctions de vertex à deux et quatre points au premier ordre en  $g$  au-delà de l'approximation quasi-gaussienne. Ces contributions correspondent à l'intégration gaussienne dans la méthode du col (*cf.* l'expression (6.31)) et donc à des diagrammes de Feynman à une boucle.

Au chapitre 13, nous justifierons de façon générale que les développements perturbatifs combinés avec le prolongement dimensionnel, permettent d'étendre ces calculs à tous les ordres en  $g$  et en  $\varepsilon = 4 - d$ .

Dans la dernière partie du chapitre, nous généralisons le calcul à une boucle aux modèles avec symétrie orthogonale  $O(N)$  et nous concluons le chapitre en présentant quelques résultats numériques obtenus à partir de calculs d'ordre supérieur.

## 10.1 Hamiltonien critique et développement perturbatif

Nous considérons les fonctions de corrélation d'un champ réel  $\sigma(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , associées à la mesure  $e^{-\mathcal{H}(\sigma)} / \mathcal{Z}$  :

$$\mathcal{Z} = \int [\mathrm{d}\sigma] \exp [-\mathcal{H}(\sigma)],$$

où l'hamiltonien  $\mathcal{H}$ , ou énergie de configuration, ne prend en compte que la correction indispensable au modèle gaussien, qui est aussi la perturbation dominante près de la dimension 4 :

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma) + \int \mathrm{d}^d x \left( \frac{1}{2} r_c(g) \sigma^2(x) + \frac{1}{4!} g \sigma^4(x) \right), \quad (10.1)$$

avec

$$\mathcal{H}_G(\sigma) = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^d x \left( \sum_{\mu} (\partial_{\mu} \sigma(x))^2 + \sum_{k=1} u_{k+1} \sum_{\mu} \partial_{\mu} \sigma(x) (-\nabla_x^2)^k \partial_{\mu} \sigma(x) \right). \quad (10.2)$$

Le paramètre  $g$  caractérise l'amplitude de la perturbation gaussienne et le paramètre

$$r_c(g) = \sum_{\ell=1} (r_c)_{\ell} g^{\ell},$$

est déterminé, ordre par ordre en  $g$ , par la condition que le modèle reste critique pour toute valeur de  $g$ , c'est-à-dire

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p=0, g) = 0, \quad (10.3)$$

où  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  est la transformée de Fourier de la fonction de vertex à deux points. L'introduction du paramètre  $r_c$ , appelé renormalisation de masse en théorie quantique des champs, est nécessaire car, comme nous l'avons déjà noté, la perturbation quartique modifie la température critique.

En termes des composantes de Fourier du champ  $\sigma$ ,

$$\sigma(x) = \int \mathrm{d}^d p \, e^{ipx} \tilde{\sigma}(p),$$

$\mathcal{H}_G$  prend la forme

$$\mathcal{H}_G(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{2} (2\pi)^d \int \mathrm{d}^d p \, \tilde{\sigma}(p) \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) \tilde{\sigma}(-p) \quad (10.4)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) = p^2 + \sum_{k=2} u_k p^{2k}. \quad (10.5)$$

La fonction  $\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p)$  doit être positive pour tout  $p \neq 0$  pour que l'intégrale sur les champs existe en toute dimension  $d > 2$ .

*Comportement à courte distance ou à grande impulsion : divergences « ultraviolettes ».* L'hamiltonien (10.2) diffère du hamiltonien du point fixe gaussien (9.45) par l'ajout de termes quadratiques en  $\sigma$  avec plus de deux dérivées du type  $\sigma(x)\nabla^{2k}\sigma(x)$ , qui sont inessentiels à grande distance. Dans le continu, c'est un substitut nécessaire à la structure de réseau qui borne les composantes de Fourier du champ à une zone de Brillouin. En effet, pour pouvoir définir, au moins perturbativement, des valeurs moyennes de monômes locaux dans les champs, il faut que les limites de fonctions de corrélation de produits de champs à points coïncidents existent (*cf.* la discussion en section 9.8). Ceci implique que  $\Delta(x - y)$ , la fonction à deux points gaussienne appelée aussi *propagateur*, soit suffisamment régulière à courte distance et donc, que sa transformée de Fourier  $\hat{\Delta}(p)$  décroisse suffisamment vite à grande impulsion.

Or, comme nous l'avons déjà remarqué en fin de section 8.4.3, le choix correspondant au point fixe gaussien,

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \frac{e^{-ipx}}{p^2},$$

conduit à des singularités de courte distance puisque

$$\langle \sigma(x)\sigma(y) \rangle_{\text{gaus.}} \propto_{|x-y| \rightarrow 0} |x - y|^{2-d}.$$

En représentation de Fourier, cette difficulté se traduit par une divergence à grande impulsion (appelée ultraviolette pour des raisons historiques liées à la théorie quantique des champs) :

$$\langle \sigma(x)\sigma(x) \rangle_{\text{gaus.}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{p^2}.$$

Ce problème est engendré par le passage au continu puisque, sur le réseau, les points sont séparés au moins d'une maille et, en représentation de Fourier, les impulsions sont bornées par la zone de Brillouin. Le propagateur modifié coupe les contributions des grandes impulsions, introduisant une échelle de coupure dans le continu (*cut-off* en anglais).

La nécessité de considérer des propagateurs ainsi modifiés est un autre signe du non découplage de la physique aux différentes échelles de distance. Il est impossible d'ignorer l'échelle microscopique et d'utiliser directement le propagateur qui a une forme d'échelle asymptotique.

L'hamiltonien gaussien (10.2) correspond à une fonction à deux points de la forme

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \, e^{-ipx} \tilde{\Delta}(p) \quad (10.6a)$$

$$\tilde{\Delta}^{-1}(p) = \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) = p^2 + \sum_{k=2} u_k p^{2k}. \quad (10.6b)$$

Pour les calculs perturbatifs qui suivent une décroissance de  $\tilde{\Delta}(p)$  en  $1/p^6$  suffit. Si l'on veut construire un groupe de renormalisation perturbatif exact, il est nécessaire de prendre des fonctions à deux points gaussiennes régulières pour  $p$  réel et décroissant plus vite que toute puissance pour  $|p| \rightarrow \infty$  (cf. section 16.2).

*Groupe de renormalisation perturbatif asymptotique.* Nous utilisons maintenant l'analyse de la section 9.7. De plus, nous exprimons les équations de groupe de renormalisation (EGR) sous la forme (9.14), c'est-à-dire en termes des transformées de Fourier  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  des fonctions de vertex. Nous partons donc de l'équation (9.14), où nous négligeons dans le membre de gauche toute dépendance autre que le coefficient  $g(\lambda)$  de  $\sigma^4$ . Dans le voisinage du point fixe gaussien et dans la logique du développement en  $\varepsilon$ , cela correspond à négliger les contributions au comportement asymptotique des termes inessentiels au sens du point fixe gaussien, c'est-à-dire qui décroissent relativement au terme principal au moins comme  $1/\lambda^2$  à des puissances de  $\ln \lambda$  près, à tout ordre fini en  $g$  et  $\varepsilon$ . L'équation (9.14) se simplifie alors en

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &\sim \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; g(\lambda)) \\ &\underset{|p_i| \rightarrow 0}{\sim} Z^{n/2}(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1/\lambda, \dots, p_n/\lambda; g), \end{aligned} \quad (10.7)$$

où ces relations ne sont valables que dans le régime asymptotique  $p_i \rightarrow 0$  après une première dilatation  $p_i \mapsto \lambda_1 p_i$ ,  $\lambda_1 \gg 1$ , qui a éliminé les termes inessentiels (cf. la discussion de la section 9.7). Par ailleurs (équation (9.37)),

$$-\lambda \frac{d \ln Z}{d \lambda} = 2D_\sigma(g(\lambda)). \quad (10.8)$$

## 10.2 Diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle

Dans l'exercice 6.1, nous avons décrit le calcul des premières corrections à la méthode du col (les diagrammes 1-irréductibles à une boucle) contribuant aux fonctions de vertex à partir de la contribution (6.31) à la fonction génératrice. Ce calcul a été fait sur réseau et nous en présentons maintenant la version continue. En particulier, l'expression (6.31) prend alors la forme (cf.

aussi la section A.3 et l'équation (12.26))

$$\Gamma_1(M) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta M(x_1) \delta M(x_2)}. \quad (10.9)$$

Écrivons l'hamiltonien symboliquement

$$\mathcal{H}(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \sigma(x) \mathcal{H}^{(2)}(x-y) \sigma(y) + \frac{g}{4!} \int d^d x \sigma^4(x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \sigma(x_1) \delta \sigma(x_2)} &= \mathcal{H}^{(2)}(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} g \sigma^2(x_2) \delta(x_1 - x_2) \\ &= \int d^d y \mathcal{H}^{(2)}(x_1 - y) [\delta(y - x_2) + \frac{1}{2} g \Delta(y - x_2) \sigma^2(x_2)], \end{aligned}$$

où  $\Delta$  est l'inverse de  $\mathcal{H}^{(2)}$  au sens des opérateurs (équation (10.6)) :

$$\int d^d y \mathcal{H}^{(2)}(x_1 - y) \Delta(y - x_2) = \delta^{(d)}(x_1 - x_2).$$

Ainsi,

$$\det \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \sigma(x_1) \delta \sigma(x_2)} = \det \mathcal{H}^{(2)} \det(1 + \frac{1}{2} g \mathcal{K}),$$

où  $\mathcal{K}$  est l'opérateur associé au noyau

$$\mathcal{K}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) \sigma^2(x_2).$$

Utilisant la relation  $\ln \det = \operatorname{tr} \ln$  et développant le logarithme, on en déduit

$$\ln \det(1 + \frac{1}{2} g \mathcal{K}) = \operatorname{tr} \ln(1 + \frac{1}{2} g \mathcal{K}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{g}{2}\right)^n \operatorname{tr} \mathcal{K}^n.$$

Plus explicitement,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathcal{K} &= \int d^d x \mathcal{K}(x, x) = \Delta(0) \int d^d x \sigma^2(x), \\ \operatorname{tr} \mathcal{K}^2 &= \int d^d x d^d y \mathcal{K}(x, y) \mathcal{K}(y, x) = \int d^d x d^d y \sigma^2(x) \Delta^2(x-y) \sigma^2(y). \end{aligned}$$

Substituant  $\sigma \mapsto M$ , on en conclut

$$\begin{aligned} \Gamma_1(M) - \Gamma_1(0) &= \frac{1}{4} g \Delta(0) \int d^d x M^2(x) \\ &\quad - \frac{1}{16} g^2 \int d^d x d^d y M^2(x) \Delta^2(x-y) M^2(y) + O(g^3). \end{aligned}$$

On en déduit alors les contributions à une boucle aux fonctions à deux et quatre points par dérivées fonctionnelles successives par rapport à  $M(x)$ . Par exemple, en posant

$$G_4 = \int d^d x d^d y M^2(x) \Delta^2(x-y) M^2(y),$$

on obtient successivement,

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_4}{\delta M(x_1)} &= 4 \int d^d y M(x_1) \Delta^2(x_1-y) M^2(y), \\ \frac{\delta^2 G_4}{\delta M(x_1) \delta M(x_2)} &= 8 M(x_1) \Delta^2(x_1-x_2) M(x_2) \\ &\quad + 4 \delta(x_1-x_2) \int d^d y \Delta^2(x_1-y) M^2(y), \\ \frac{\delta^3 G_4}{\delta M(x_1) \delta M(x_2) \delta M(x_3)} &= 8 \Delta^2(x_1-x_2) M(x_1) \delta(x_2-x_3) + \text{deux termes} \end{aligned}$$

qui sont obtenus en permutant  $x_1, x_2, x_3$ .

Complétant le calcul, on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(2)}(x_1, x_2) &= \left. \frac{\delta^2 \Gamma_1}{\delta M(x_1) \delta M(x_2)} \right|_{M=0} = \frac{1}{2} g \Delta(0) \delta(x_1-x_2), \\ \Gamma_1^{(4)}(x_1, \dots, x_4) &= -\frac{1}{2} g^2 [\Delta^2(x_1-x_2) \delta(x_1-x_3) \delta(x_2-x_4) + 2 \text{ termes}]. \end{aligned}$$

Après transformation de Fourier (cf. aussi équation (6.38a)),

$$\tilde{\Gamma}_1^{(2)}(p) = \int d^d x e^{ipx} \Gamma_1^{(2)}(x, 0) = \frac{1}{2} g \Delta(0) = \frac{1}{2} g \int d^d p \tilde{\Delta}(p), \quad (10.10)$$

où nous avons inversé la relation (10.6a). De même (cf. équations (6.14) et (6.38b)),

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1^{(4)}(p_i) &= \int \prod_{i=1}^3 d^d x_i e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)} \Gamma_1^{(4)}(x_1, x_2, x_3, 0) \\ &= -\frac{1}{2} g^2 \int d^d x \left[ e^{i(p_1+p_3)x} + e^{i(p_1+p_4)x} + e^{i(p_1+p_2)x} \right] \Delta^2(x) \\ &= -\frac{1}{2} g^2 [B(p_1+p_2) + B(p_1+p_3) + B(p_1+p_4)], \quad (10.11) \end{aligned}$$

avec la définition

$$B(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q) \tilde{\Delta}(p-q).$$

*Prolongement dimensionnel.* Le prolongement dimensionnel peut être défini à partir des intégrales gaussiennes. Ici, nous n'utiliserons que la propriété

$$\int d^d x e^{-x^2} = \pi^{d/2}.$$

En passant alors en coordonnées radiale et angulaires,

$$\int d^d x e^{-x^2} = A_d \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} = \frac{1}{2} A_d \Gamma(d/2),$$

on en déduit la surface de la sphère  $S_{d-1}$  :  $A_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ .

## 10.3 Point fixe et comportement critique

Puisqu'il n'y a que deux fonctions inconnues,  $\beta(g)$  gouvernant le flot de  $g(\lambda)$  et

$$\eta(g) = 2D_\sigma(g) - d + 2$$

(introduit en (9.60)) reliée à  $Z(\lambda)$ , il suffit de calculer deux fonctions de vertex. Il est commode de choisir les fonctions à deux et quatre points. Plus de détails sur les calculs perturbatifs peuvent être trouvés au chapitre 12.

### 10.3.1 La fonction à deux points

Le calcul de la fonction de vertex à deux points de la section 8.9 reste valable (*cf.* équation (8.72)), à condition d'utiliser le propagateur  $\tilde{\Delta}(q)$  du continu et d'intégrer sur les variables de Fourier sans restriction. Une autre forme du calcul sur le réseau a été présentée en section 6.5 (équation (6.38a)). Directement dans le continu, la première correction à la forme gaussienne a été calculée en section 10.2, et est donnée par l'équation (10.10). La fonction à l'ordre  $g^2$  s'en déduit :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g) &= \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) + r_c(g) + \frac{g}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q) + O(g^2) \\ &= p^2 + O(p^4) + g(r_c)_1 + \frac{g}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q) + O(g^2). \end{aligned} \quad (10.12)$$

La première correction à la fonction de vertex à deux points  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  est une constante. La condition de criticalité (10.3) fixe la valeur de  $(r_c)_1$  :

$$(r_c)_1 = -\frac{1}{2(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q). \quad (10.13)$$

La fonction à deux points devient

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g) = p^2 + O(p^4) + O(g^2),$$

et garde donc, à l'ordre  $g$  pour  $p \rightarrow 0$ , son comportement gaussien. Utilisant, pour  $p \rightarrow 0$ , l'EGR (10.7) pour  $n = 2$ ,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g(\lambda)) \sim Z(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; g),$$

qui donne à cet ordre

$$p^2 = Z(\lambda)\lambda^d p^2/\lambda^2 + O(g^2),$$

on trouve que la renormalisation  $Z(\lambda)$  garde sa forme gaussienne

$$Z(\lambda) = \lambda^{2-d} + O(g^2),$$

et donc, en utilisant l'équation (10.8),

$$2D_\sigma(g) = d - 2 + \eta(g) = -\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = d - 2 + O(g^2).$$

La fonction  $\eta(g)$  est au moins d'ordre  $g^2$ .

### 10.3.2 La fonction à quatre points

La partie algébrique des calculs conduisant à la première correction à l'approximation quasi-gaussienne, ou de champ moyen, de la fonction de vertex à quatre points a été présentée en section 6.5 sur le réseau (équation (6.38b)) et en section 10.2 directement dans le continu (équation (10.11)). En représentation de Fourier

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g - \frac{1}{2}g^2(B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) + B(p_1 + p_4)) + O(g^3) \quad (10.14)$$

avec

$$B(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q) \tilde{\Delta}(p - q). \quad (10.15)$$

Cette expression peut aussi être obtenue en développant la version continue de l'équation (6.31) (cf. section 6.5).

À  $T_c$  pour  $q \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\Delta}(q)$  qui est la transformée de Fourier de la fonction à deux points gaussienne, se comporte comme  $1/q^2$ . C'est pourquoi, pour  $d \leq 4$ , la fonction  $B(p)$  tend vers l'infini pour  $p \rightarrow 0$ .

En section 10.3.3, nous aurons besoin de la quantité  $\lambda \partial B(p/\lambda)/\partial \lambda$  pour  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Décomposons alors

$$B(p/\lambda) = B_+(p/\lambda) + B_-(p/\lambda),$$

avec

$$B_+(p/\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q|>\delta} d^d q \tilde{\Delta}(q) \tilde{\Delta}(q + p/\lambda),$$

$$B_-(p/\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q|\leq\delta} d^d q \tilde{\Delta}(q) \tilde{\Delta}(q + p/\lambda),$$

où  $\delta$  est fixé, mais peut être choisi arbitrairement petit.

Pour  $B_+$ , l'intégrand est analytique dans le domaine d'intégration. L'intégrale peut être développée en puissance de  $1/\lambda$ . Le terme principal est une constante et donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \frac{\partial B_+(p/\lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

Pour  $B_-$ , on peut remplacer  $\tilde{\Delta}(q)$  par sa forme asymptotique pour  $|q| \rightarrow 0$  :

$$\tilde{\Delta}(q) \sim 1/q^2,$$

et donc

$$B_-(p/\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q| \leq \delta} \frac{d^d q}{q^2(q+p/\lambda)^2}.$$

Après le changement de variables  $q \mapsto q' = \lambda q$ , on obtient

$$B_-(p/\lambda) \sim \lambda^\varepsilon \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q| \leq \lambda\delta} \frac{d^d q}{q^2(q+p)^2},$$

où nous avons posé

$$\varepsilon = 4 - d.$$

Alors,

$$\lambda \frac{\partial B_-(p/\lambda)}{\partial \lambda} \sim \varepsilon \lambda^\varepsilon \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q| \leq \lambda\delta} \frac{d^d q}{q^2(q+p)^2} + \lambda^\varepsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q| \leq \lambda\delta} \frac{d^d q}{q^2(q+p)^2}. \quad (10.16)$$

Dans le deuxième terme, la dépendance en  $\lambda$  n'apparaît que dans la borne d'intégration. Pour  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{|q| \leq \lambda\delta} \frac{d^d q}{q^2(q+p)^2} &\sim \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{1 < |q| \leq \lambda\delta} \frac{d^d q}{q^4} \\ &\sim A_d \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{1 < q \leq \lambda\delta} dq q^{d-3} \sim \frac{A_d}{(\lambda\delta)^\varepsilon}, \end{aligned}$$

où nous avons introduit des variables radiale et angulaires. L'intégrale sur les variables angulaires donne l'aire  $A_d$  de la sphère  $S_{d-1}$  à  $d$  dimensions qui, par les règles du prolongement dimensionnel (cf. section 12.5.1), vaut

$$A_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = 2\pi^2 + O(\varepsilon).$$

Dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le premier terme dans (10.16) tend vers zéro et le second terme donne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \frac{\partial B_-(p/\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{8\pi^2}.$$

En conclusion,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \frac{\partial B(p/\lambda)}{\partial \lambda} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{1}{8\pi^2} + O(\varepsilon), \quad (10.17)$$

un résultat indépendant de la forme explicite de  $\tilde{\Delta}$ .

### 10.3.3 Point fixe

Nous appliquons maintenant, à la fonction à quatre points, la relation (10.7) entre fonctions de vertex des hamiltoniens initial et effectif à l'échelle  $\lambda$  :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, \dots, p_4; g(\lambda)) \sim Z^2(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1/\lambda, \dots, p_4/\lambda; g), \quad (10.18)$$

où le développement de  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  est donné par l'expression (10.14) :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4; g) = g - \frac{1}{2}g^2 [B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) + B(p_1 + p_4)] + O(g^3).$$

Comme nous venons de le voir (section 10.3.1),  $Z(\lambda) = \lambda^{2-d} + O(g^2)$  et donc

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, \dots, p_4; g(\lambda)) \sim \lambda^\varepsilon \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1/\lambda, \dots, p_4/\lambda, g) + O(g^3), \quad (10.19)$$

( $\varepsilon = 4 - d$ ) où l'erreur est d'ordre  $g^3$  puisque la fonction  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  est d'ordre  $g$ .

Dérivant les membres par rapport à  $\lambda$ , on trouve

$$\begin{aligned} \lambda \frac{dg}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, \dots, p_4; g(\lambda)) &= \varepsilon \lambda^\varepsilon \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1/\lambda, \dots, p_4/\lambda, g) \\ &+ \lambda^\varepsilon \lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1/\lambda, \dots, p_4/\lambda, g) + O(g^3). \end{aligned}$$

Nous développons les deux membres en  $g$  et  $\varepsilon$  avec  $g = O(\varepsilon)$ . Dans le membre de droite, le premier terme est d'ordre  $\varepsilon g$  et le second d'ordre  $g^2$ . Comme  $\partial \tilde{\Gamma}^{(4)} / \partial g$  est d'ordre 1,  $\lambda dg/d\lambda$  est d'ordre  $g^2$  ou  $\varepsilon g$ . Nous pouvons donc omettre tous les termes d'ordre supérieur. À l'ordre principal,

$$\begin{aligned} \lambda \frac{dg}{d\lambda} &= \varepsilon g - \frac{1}{2}g^2 \lambda \frac{d}{d\lambda} [B((p_1 + p_2)/\lambda) + B((p_1 + p_3)/\lambda) + B((p_1 + p_4)/\lambda)] \\ &+ O(g^3, g^2\varepsilon). \end{aligned}$$

Utilisant alors l'évaluation (10.17), on trouve

$$\lambda \frac{dg}{d\lambda} = \varepsilon g - \frac{3}{16\pi^2} g^2 + O(g^3, g^2\varepsilon).$$

La dépendance possible dans les variables  $p_i$  a donc disparu.

À l'ordre principal, l'équation implique que la dérivée de  $g(\lambda)$  s'annule et donc

$$g(\lambda) = g(1) = g + O(g^2, g\varepsilon).$$

On en déduit

$$\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = \varepsilon g(\lambda) - \frac{3}{16\pi^2} g^2(\lambda) + O(g^3(\lambda), g^2(\lambda)\varepsilon).$$

En particulier, on vérifie que le membre de droite ne dépend de  $\lambda$  qu'à travers  $g(\lambda)$ , en accord avec l'hypothèse (9.23).

Introduisant la notation traditionnelle (9.62), on définit la fonction

$$\beta(g(\lambda)) = -\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda}. \quad (10.20)$$

Alors,

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \frac{3}{16\pi^2} g^2 + O(g^3, g^2 \varepsilon). \quad (10.21)$$

On se trouve donc dans le cas (iii) envisagé en section 9.7.1 : le coefficient de  $g^2$  est positif. Pour  $d < 4$ , il existe un point fixe stable non gaussien, correspondant au zéro d'ordre  $\varepsilon$  de la fonction  $\beta(g)$  :

$$g^* = \frac{16\pi^2 \varepsilon}{3} + O(\varepsilon^2). \quad (10.22)$$

L'existence de ce point fixe peut être confirmée à tous les ordres en  $\varepsilon$ , et permet alors de démontrer des propriétés d'universalité des fonctions de corrélation et fonctions thermodynamiques. Les quantités universelles peuvent être calculées sous forme d'un développement en puissances de  $\varepsilon$  déduit du développement perturbatif autour du modèle gaussien, suivant la méthode introduite par Wilson et Fisher (*cf.* chapitre 13).

### 10.3.4 La dimension du champ à l'ordre $\varepsilon^2$

La première correction à la dimension  $d_\sigma$  du champ  $\sigma$  nécessite un calcul de la fonction à deux points à l'ordre  $g^2$  (deux boucles au sens des diagrammes de Feynman, figure 2.5 de la section 2.5.1). La fonction à deux points, à l'ordre suivant sur le réseau, est alors donnée par l'expression (6.38a). Dans la notation de ce chapitre et en ajustant  $r_c(g)$  à l'ordre  $g^2$ , on trouve (*cf.* aussi expression (12.18))

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g) = \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) - \frac{1}{6} g^2 [C(p) - C(0)] + O(g^3),$$

où  $C(p)$ , qui correspond au diagramme (e) de la figure 2.5, est donné par l'équation (6.39c) :

$$C(p) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int d^d k_1 d^d k_2 \tilde{\Delta}(k_1) \tilde{\Delta}(k_2) \tilde{\Delta}(p - k_1 - k_2).$$

Il est alors nécessaire d'évaluer  $C(p) - C(0)$  pour  $p \rightarrow 0$  et  $d \rightarrow 4$ . On trouve (*cf.* équation (12.37))

$$C(p) - C(0) = -K p^2 \ln(\Lambda/p) + o(1) \quad \text{avec} \quad K = \frac{1}{4(8\pi^2)^2},$$

où la constante  $\Lambda$  dépend de la forme spécifique de  $\Delta$ .

L'EGR (10.7) pour  $n = 2$ , dans la limite  $p \rightarrow 0$ , s'écrit à cet ordre

$$p^2 + \frac{1}{6} K g^2(\lambda) p^2 \ln(\Lambda/p) = Z(\lambda) \lambda^d \left[ p^2 / \lambda^2 + \frac{1}{6} K g^2 \ln(\Lambda \lambda / p) p^2 / \lambda^2 \right].$$

On en déduit

$$Z(\lambda) = \lambda^{2-d} \left(1 - \frac{1}{6} K g^2 \ln \lambda\right) + O(g^3),$$

et donc,

$$\lambda \frac{\partial \ln Z(\lambda)}{\partial \lambda} = 2 - d - \frac{1}{6} K g^2(\lambda) + O(g^3).$$

De façon générale, nous avons défini (équations (9.24 et 9.60))

$$\lambda \frac{\partial \ln Z(\lambda)}{\partial \lambda} = -2D_\sigma(g(\lambda)) = 2 - d - \eta(g(\lambda)).$$

Ainsi,

$$\eta(g) = \frac{1}{6} \frac{1}{(4\pi)^4} g^2 + O(g^3).$$

*Dimension du champ : correction à la valeur gaussienne.* Dans la limite  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $g(\lambda)$  tend vers  $g^*$ . La déviation à la valeur gaussienne est alors caractérisée par la valeur de l'exposant

$$\eta \equiv \eta(g^*) = \frac{1}{54} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

On en déduit le comportement asymptotique

$$Z(\lambda) \propto \lambda^{-2d_\sigma},$$

avec

$$d_\sigma \equiv D_\sigma(g^*) = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{108}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

L'application de ce résultat à la relation (10.7) détermine le comportement à grande distance des fonctions de vertex :

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1/\lambda, \dots, p_n/\lambda; g) \sim \lambda^{-d+nd_\sigma} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; g^*).$$

Dans le cas particulier de la fonction à deux points, on obtient

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; g) \sim \lambda^{-2+\eta} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g^*) \Rightarrow \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g) \underset{|p| \rightarrow 0}{\propto} p^{2-\eta}, \quad (10.23)$$

ce qui est en accord avec le comportement de la fonction de corrélation connexe (*cf.* équation (9.21))

$$W^{(2)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \, e^{-ipx} \left[ \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g) \right]^{-1} \underset{|x| \rightarrow \infty}{\propto} \int d^d p \, e^{-ipx} p^{\eta-2} \propto \frac{1}{|x|^{2d_\sigma}}. \quad (10.24)$$

## 10.4 Le domaine critique

Dans la discussion générale du GR, nous avons souligné que si des points fixes existent, des propriétés d'universalité apparaissent non seulement pour le hamiltonien critique mais aussi dans le cas des hamiltoniens critiques perturbés de façon infinitésimale par des opérateurs essentiels. Dans le système ferromagnétique que nous étudions ici, les deux opérateurs essentiels correspondent à  $\int \sigma(x)dx$  qui est couplé au champ magnétique, et brise la symétrie de réflexion  $\sigma \mapsto -\sigma$ , et à l'opérateur  $\int \sigma^2(x)dx$  qui est couplé à la température. Nous considérons ici le second exemple et ajoutons au hamiltonien critique (10.1) un terme proportionnel à  $\int \sigma^2(x)d^d x$  :

$$\mathcal{H}_t(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma) + \frac{t}{2} \int \sigma^2(x) d^d x, \quad (10.25)$$

où le paramètre  $t$ , qui caractérise la déviation à la température critique est infinitésimal, dans un sens que nous avons déjà expliqué : sa valeur initiale est telle qu'après une grande dilatation  $\lambda$ , sa valeur effective  $t(\lambda)$  soit d'ordre 1. Nous choisissons  $t \propto T - T_c$  positif dans ce qui suit, ce qui correspond à la phase de haute température.

### 10.4.1 Fonction à deux points

La transformée de Fourier de la fonction à deux points gaussienne  $\tilde{\Delta}(q, t)$  est maintenant donnée par

$$1/\tilde{\Delta}(q, t) = t + \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(q) = t + q^2 + O(q^4),$$

où  $\tilde{\Delta}(q) \equiv \tilde{\Delta}(q, 0)$  est la fonction définie par l'équation (10.6b).

À l'ordre  $g$ , le calcul est presque identique, à la paramétrisation près, au calcul de la section 8.9. La fonction de vertex à deux points devient

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = t + p^2 + O(p^4) + \frac{g}{2(2\pi)^d} \int d^d q (\tilde{\Delta}(q, t) - \tilde{\Delta}(q, 0)) + O(g^2),$$

où  $(r_c)_1$  a été remplacé par sa valeur donnée par l'équation (10.13).

La quantité utile est la dérivée (*cf.* section 8.9.2)

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(2)}(p)}{\partial t} = 1 - \frac{g}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}^2(q, t) + O(g^2). \quad (10.26)$$

Par ailleurs, dans la suite nous aurons besoin de la fonction

$$F(t, \lambda) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} [\tilde{\Delta}^2(q, t) - \tilde{\Delta}^2(q, \lambda^2 t)]$$

avec  $\lambda > 0$ , dans la limite  $t \rightarrow 0$ ,  $d \rightarrow 4$ .

Dans l'intégrale, nous faisons le changement de variable  $q = q'\sqrt{t}$  et faisons tendre  $t$  vers zéro. Alors,

$$1/\tilde{\Delta}(q\sqrt{t}, t) = t(1 + q^2) + O(t^2).$$

L'intégrale, obtenue en ne retenant que le terme principal, converge pour  $|q| \rightarrow \infty$  et donc on peut prendre la limite  $t \rightarrow 0$  dans l'intégrant :

$$F(t, \lambda) \sim t^{-\varepsilon/2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{(q^2 + 1)^2} - \frac{1}{(q^2 + \lambda^2)^2} \right].$$

Cette expression a une limite pour  $d \rightarrow 4$  :

$$\begin{aligned} F(t, \lambda) &\sim \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{(q^2 + 1)^2} - \frac{1}{(q^2 + \lambda^2)^2} \right] \\ &= \int_0^\infty \frac{q^3 dq}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{(q^2 + 1)^2} - \frac{1}{(q^2 + \lambda^2)^2} \right] = \frac{1}{8\pi^2} \ln \lambda. \end{aligned}$$

Nous concluons

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \tilde{\Delta}^2(q, t) - \tilde{\Delta}^2(q, t\lambda^2) \right] \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{8\pi^2} \ln \lambda. \quad (10.27)$$

### 10.4.2 Groupe de renormalisation

À l'ordre dominant en  $\varepsilon$ , il faut maintenant prendre en compte le flot de  $g$  et  $t$  et donc l'équation (9.15) devient

$$\tilde{\Gamma}_\lambda^{(2)}(p) \equiv \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t(\lambda); g(\lambda)) = Z(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; t; g). \quad (10.28)$$

À l'ordre  $g$ ,  $Z(\lambda)$  est gaussien et l'équation de GR se réduit à

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t(\lambda); g(\lambda)) = \lambda^2 \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; t; g) + O(g^2).$$

À l'ordre  $g^0$  (l'approximation gaussienne),

$$t(\lambda) = t\lambda^2.$$

Ce résultat est en accord avec l'analyse de la section 9.6.

Soulignons qu'en accord avec l'analyse générale de la section 9.4.4, nous supposons ici que  $t$  tend vers zéro avant que  $\lambda$  ne tende vers l'infini de sorte que  $t(\lambda)$  tende vers zéro.

Dérivant l'équation par rapport à  $t$ , on trouve

$$\frac{\partial t(\lambda)}{\partial t} \partial_t \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t(\lambda); g(\lambda)) = \lambda^2 \partial_t \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; t; g) + O(g^2).$$

À l'ordre  $g$ , pour  $p = 0$ , la relation devient (équation (10.26))

$$\frac{\partial t(\lambda)}{\partial t} \left[ 1 - \frac{g(\lambda)}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}^2(q, t\lambda^2) \right] = \lambda^2 \left[ 1 - \frac{g}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}^2(q, t) \right] + O(g^2),$$

ou, en divisant et en notant qu'à cet ordre  $g(\lambda) = g$ ,

$$\frac{\partial t(\lambda)}{\partial t} = \lambda^2 \left\{ 1 - \frac{g}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \tilde{\Delta}^2(q, t) - \tilde{\Delta}^2(q, t\lambda^2) \right] \right\} + O(g^2).$$

Utilisant l'équation (10.27), on en déduit

$$\frac{\partial t(\lambda)}{\partial t} = \lambda^2 - \frac{g}{16\pi^2} \lambda^2 \ln \lambda + O(g^2, g\varepsilon).$$

Notons que le membre de droite ne dépend plus de  $t$ . En intégrant, on trouve

$$t(\lambda) = \lambda^2 t \left( 1 - \frac{g}{16\pi^2} \ln \lambda \right) + O(g^2, g\varepsilon).$$

Sous forme différentielle, cette équation de flot peut s'écrire

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} t(\lambda) = t(\lambda) \left( 2 - \frac{g(\lambda)}{16\pi^2} + O(g^2(\lambda)) \right).$$

Sous cette forme, le second membre ne dépend donc de  $\lambda$  qu'à travers les fonctions  $g(\lambda)$  et  $t(\lambda)$ , ce qui est cohérent avec l'hypothèse (9.23).

Notons que l'équation de flot est linéaire en  $t$  parce que  $t$  est le coefficient d'une perturbation essentielle et nous ne considérons que des valeurs de  $t$  infinitésimales.

Introduisant la notation traditionnelle

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} t(\lambda) = t(\lambda) [2 + \eta_2(g(\lambda))],$$

on trouve

$$\eta_2(g) = -\frac{g}{16\pi^2} + O(g^2). \quad (10.29)$$

Pour  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $g(\lambda)$  tend vers  $g^*$  et donc

$$t(\lambda) \propto t \lambda^{d_t}, \quad (10.30)$$

où  $d_t$  est la valeur propre correspondant à l'opérateur propre  $\int d^d x \sigma^2(x)$  (à l'ordre dominant) associé à une déviation à la température critique :

$$d_t = 2 - \frac{1}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (10.31)$$

Nous remarquons que le résultat est *universel*, en ce sens qu'il est indépendant de tous les paramètres du hamiltonien comme les coefficients  $u_k$  de l'expression (10.2) et  $g$ .

La relation générale (9.64) permet d'en déduire la dimension de l'opérateur  $\sigma^2(x)$  :

$$d_{\sigma^2} = d - d_t = 2 - \frac{2}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (10.32)$$

On note, en particulier

$$d_{\sigma^2} - 2d_\sigma = \frac{1}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \neq 0,$$

ce qui confirme que pour un point fixe non-gaussien les dimensions des polynômes locaux dans les champs ne sont plus liées de façon simple à la dimension des champs (*cf.* section 9.8).

### 10.4.3 Fonction à deux points : comportement d'échelle dans le domaine critique

Le résultat (10.30) combiné avec le comportement général attendu (9.20) :

$$Z(\lambda) \propto \lambda^{-2d_\sigma} = \lambda^{-(d-2+\eta)},$$

et l'équation de GR (10.28) pour  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ , entraîne

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t(\lambda); g^*) \propto \lambda^{2-\eta} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; t; g)$$

ou, en changeant  $p$  en  $\lambda p$ ,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t; g) \propto \lambda^{\eta-2} \tilde{\Gamma}^{(2)}(\lambda p; t(\lambda); g^*).$$

Choisissant le paramètre de dilatation tel que

$$t(\lambda) = 1 \Rightarrow \lambda \propto t^{-1/d_t} \quad (10.33)$$

(équation (10.30)), ce qui correspond à la stratégie expliquée en section 9.4.4, on obtient la relation

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t; g) \underset{t \rightarrow 0; |p| \rightarrow 0}{\propto} t^\gamma F^{(2)}(pt^{-\nu}), \quad (10.34)$$

où

$$F^{(2)}(p) = \tilde{\Gamma}^{(2)}(\text{const.} \times p; 1; g^*),$$

et où apparaissent les exposants  $\nu$  et  $\gamma$  :

$$\nu = 1/d_t = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon/6) + O(\varepsilon^2), \quad \gamma = \nu(2 - \eta) = 1 + \frac{1}{6}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Nous obtenons le résultat remarquable qu'une fonction de trois variables  $p$ ,  $t$  et  $g$  s'exprime en termes d'une fonction d'une seule variable. On appelle cette propriété *comportement d'échelle*.

Comme  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p = 0; t; g)$  est l'inverse de la susceptibilité magnétique,  $\gamma$  est l'exposant de susceptibilité magnétique défini en (7.35).

Par ailleurs, la forme (10.34) entraîne pour la fonction de corrélation connexe

$$W^{(2)}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p \, e^{ipx}}{\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t; g)} \\ \underset{|x| \rightarrow \infty}{\propto} t^{-\gamma} \int \frac{d^d p \, e^{ipx}}{F^{(2)}(pt^{-\nu})} = t^{\nu d_\sigma} \int \frac{d^d p \, e^{ipx t^\nu}}{F^{(2)}(p)}.$$

Elle ne dépend de la distance  $x$  qu'à travers le produit  $xt^\nu$ . La fonction  $t^{-\nu}$  est donc proportionnelle à la longueur de corrélation  $\xi(t)$  :

$$\xi(t) \propto t^{-\nu}.$$

Suivant la définition (8.25), cette divergence de la longueur de corrélation implique que  $\nu$  est l'exposant de corrélation.

En particulier, nous vérifions que la dilatation maximum (10.33) est de l'ordre de grandeur de la longueur de corrélation, en accord avec des arguments intuitifs.

## 10.5 Modèle avec symétrie orthogonale $O(N)$

L'analyse précédente se généralise directement à un modèle avec un champ ou paramètre d'ordre à  $N$  composantes,  $\sigma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , invariant par le groupe orthogonal  $O(N)$  (groupe des rotations-réflexion dans l'espace à  $N$  dimensions). En effet, la symétrie  $O(N)$  entraîne qu'il n'existe, sur la surface critique  $T = T_c$ , qu'un seul opérateur essentiel pour  $d = 4 - \varepsilon$ .

Les propriétés de modèles avec symétrie  $O(N)$  ont déjà été étudiées dans le cadre de l'approximation quasi-gaussienne en section 7.8.

Le hamiltonien effectif avec symétrie  $O(N)$  a la forme

$$\mathcal{H}(\sigma) = \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu} [\partial_{\mu} \sigma(x)]^2 + \frac{1}{2} (r_c + t) \sigma^2(x) + \frac{1}{4!} g (\sigma^2)^2(x) \right\} d^d x, \quad (10.35)$$

où les termes quadratiques avec plus de deux dérivées sont implicites et  $r_c$  est déterminé par la condition (10.3).

Dans le cas d'une aimantation nulle ( $T > T_c$ ,  $H = 0$ ), les EGR ont exactement la même forme que pour les modèles  $N = 1$  de type Ising. Les résultats explicites ne diffèrent du cas  $N = 1$  que par des facteurs polynomiaux en  $N$  devant les différentes contributions.

Ainsi, la fonction à deux points dans le domaine critique prend la forme

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(p) = \delta_{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p),$$

avec

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = t + p^2 + O(p^4) + \frac{N+2}{6}g \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q (\tilde{\Delta}(q, t) - \tilde{\Delta}(q, 0)) + O(g^2),$$

et donc  $Z(\lambda)$  garde sa forme gaussienne à cet ordre.

La fonction à quatre points critique avec quatre indices égaux s'écrit

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g - \frac{N+8}{18}g^2 (B(p_1+p_2) + B(p_1+p_3) + B(p_1+p_4)) + O(g^3).$$

*Fonction  $\beta$  et point fixe.* Dans les calculs de la section 10.3.3, il suffit de changer le coefficient de  $g^2$ . On en déduit la fonction  $\beta$  qui décrit le flot du paramètre  $g(\lambda)$  à l'ordre  $g^2$  :

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \frac{N+8}{48\pi^2}g^2 + O(g^3, g^2\varepsilon). \quad (10.36)$$

Au premier ordre en  $\varepsilon$ , le zéro non trivial de la fonction  $\beta(g)$  est alors

$$g^* = \frac{48\pi^2}{N+8}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \Rightarrow \omega \equiv \beta'(g^*) = \varepsilon + O(\varepsilon^2) > 0. \quad (10.37)$$

Le point fixe correspondant est donc stable. Des propriétés d'universalité pour tous les modèles à  $N$  composantes avec symétrie  $O(N)$  s'en déduisent.

*Domaine critique.* De nouveau, le calcul du cas  $N = 1$  se généralise en changeant le coefficient du terme d'ordre  $g$ . Le flot du coefficient  $t$  de la perturbation essentielle  $\int d^d x \sigma^2(x)$  est décrit par la fonction

$$\frac{1}{\nu(g)} = 2 + \eta_2(g) = 2 - \frac{(N+2)}{48\pi^2}g + O(g^2),$$

et, donc,

$$d_t = \frac{1}{\nu} = 2 - \frac{N+2}{N+8}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \Rightarrow d_{\sigma^2} = d - d_t = 2 - \frac{6}{N+8}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

*Dimension du champ : correction à la valeur gaussienne.* Le diagramme (e) de la figure 2.5 (section 2.5.1) qui détermine la déviation à la valeur gaussienne est maintenant affecté d'un facteur  $(N+2)/18$ . De son comportement pour  $p \rightarrow 0$  et  $d \rightarrow 4$ , on déduit

$$\eta(g) = \frac{N+2}{18} \frac{1}{(4\pi)^4} g^2 + O(g^3) \quad (10.38)$$

et, donc,

$$\eta \equiv \eta(g^*) = \frac{N+2}{2(N+8)^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$d_\sigma = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{N+2}{4(N+8)^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

## 10.6 Groupe de renormalisation près de la dimension 4

Pour pousser plus loin l'analyse, il faut utiliser les méthodes de théorie quantique des champs que nous décrivons brièvement aux chapitres 12 et 13. Ces méthodes permettent, dans le cadre du développement en  $\varepsilon = 4 - d$  basé sur un développement autour du modèle gaussien, de démontrer des EGR asymptotiques, de confirmer l'existence d'un point fixe stable non gaussien au-delà du calcul du premier ordre que nous avons présenté ici. Un ensemble de propriétés d'universalité s'en déduisent, comme les relations d'échelle dans le domaine critique (par exemple, la forme (10.34) de la fonction à deux points) ou les relations entre exposants critiques, qui avaient été proposées comme une conjecture dans le cadre de relations d'échelle phénoménologiques : tous les exposants critiques qui avaient été introduits auparavant comme  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu$  ne sont fonctions que de deux d'entre eux. Par exemple,

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad \beta = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta), \quad \gamma = \nu(2 - \eta), \quad \beta(\delta - 1) = \gamma,$$

relations valables uniquement pour un point fixe non-gaussien, donc pour  $d < 4$ .

Nous décrivons brièvement dans cette section les EGR satisfaites par les fonctions de corrélation connexes, formes asymptotiques à grande distance, dans le cadre d'un développement double dans le coefficient  $g$  de  $\int d^d x \sigma^4(x)$  et  $\varepsilon$ , des équations générales (9.38). Plus de détails seront donnés au chapitre 13.

### 10.6.1 Hamiltonien critique et EGR

On définit d'abord un développement perturbatif autour de la théorie gaussienne, à partir de l'hamiltonien (10.1),

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma) + \int d^d x \left( \frac{1}{2} r_c(g) \sigma^2(x) + \frac{1}{4!} g \sigma^4(x) \right),$$

c'est-à-dire un développement en puissances du paramètre  $g$ , en dimensions non entières quelconques. Pour le hamiltonien critique on démontre alors, à tous les ordres dans un développement double en puissances de  $g$  et  $\varepsilon = 4 - d$ , des équations de la forme (9.38) mais avec un seul paramètre  $g$  qui décrit la trajectoire qui interpole entre le point fixe gaussien et le point fixe  $g^*$  stable :

$$\left[ \sum_{\ell} x_{\ell} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2} D_{\sigma}(g) \right] W^{(n)}(g; x_1, \dots, x_n) \sim 0, \quad (10.39)$$

où le symbole  $\sim$  signifie que des contributions qui tendent plus vite vers zéro, à grande distance, ont été négligées.

L'EGR (9.9) exacte, le paramètre  $g(\lambda)$  et la renormalisation  $Z(\lambda)$  à l'échelle  $\lambda$  solutions de

$$\beta(g(\lambda)) = -\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda), \quad (10.40)$$

$$-2D_\sigma(g(\lambda)) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda), \quad (10.41)$$

apparaissent alors dans la solution de l'équation (10.39) par la méthode des caractéristiques (cf. section 13.3.1).

La solution de l'équation  $\beta(g^*) = 0$  donne la valeur de point fixe et  $d_\sigma = D_\sigma(g^*)$  la dimension du paramètre d'ordre.

Dans le cas d'un point fixe attractif ( $\omega = \beta'(g^*) > 0$ ), le comportement asymptotique des fonctions de corrélations est déterminé par les fonctions de la théorie de point fixe  $g = g^*$ , qui satisfont

$$\left( \sum_\ell x_\ell \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell} + n d_\sigma \right) W^{(n)}(g^*; x_1, \dots, x_n) = 0$$

et, donc,

$$W^{(n)}(g^*; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \frac{1}{\lambda^{n d_\sigma}} W^{(n)}(g^*; x_1, \dots, x_n).$$

### 10.6.2 Domaine critique

Cependant, comme nous l'avons déjà indiqué, tout le domaine critique  $\xi \gg 1$  exhibe des propriétés d'universalité. Les quantités universelles sont obtenues à partir de l'hamiltonien

$$\mathcal{H}_t(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma) + \frac{t}{2} \int d^d x \sigma^2(x), \quad (10.42)$$

où le paramètre  $|t| \ll 1$  représente la déviation par rapport à la température critique. On démontre alors une équation plus générale :

$$D_{\text{RG}} W^{(n)}(g, t; x_1, \dots, x_n) \sim 0, \quad (10.43)$$

$$D_{\text{RG}} = \sum_\ell x_\ell \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - (2 + \eta_2(g)) t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{2} D_\sigma(g), \quad (10.44)$$

où la fonction supplémentaire  $\eta_2(g)$  est directement liée au flot du coefficient  $t(\lambda)$  du terme  $\int d^d x \sigma^2(x)$ . Au point fixe  $g = g^*$ , l'équation se simplifie puisque

$$D_{\text{RG}} = \sum_\ell x_\ell \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell} - d_t t \frac{\partial}{\partial t} + n d_\sigma$$

avec

$$d_t = 2 + \eta_2(g^*) \equiv \frac{1}{\nu}.$$

Elle implique la propriété d'homogénéité plus générale

$$W^{(n)}(g^*, t\lambda^{d_l}; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \frac{1}{\lambda^{nd_\sigma}} W^{(n)}(g^*, t; x_1, \dots, x_n).$$

Choisissant  $\lambda$  tel que  $t\lambda^{d_l} = 1$ , on peut écrire cette relation

$$W^{(n)}(g^*, t; x_1, \dots, x_n) = t^{n\nu d_\sigma} W^{(n)}(g^*, 1; t^\nu x_1, \dots, t^\nu x_n).$$

Cette relation démontre que les fonctions de corrélation au point fixe, et donc toutes les fonctions de corrélation asymptotiquement dans le domaine critique, ne dépendent pas des  $x_i$  et du paramètre  $t$  indépendamment mais uniquement à travers le produit  $xt^\nu$ . C'est la forme générale de la loi d'échelle que nous avons déjà exhibée dans le cas de la fonction à deux points :

$$W^{(2)}(g^*, t; x) = t^{2\nu d_\sigma} W^{(2)}(g^*, 1; t^\nu x),$$

comme conséquence directe de l'équation (10.34). En représentation de Fourier,

$$\tilde{W}^{(2)}(g, t; p) \sim t^{-\gamma} \tilde{W}^{(2)}(g^*, 1; p/t^\nu)$$

avec

$$\gamma = \nu(2 - \eta).$$

Au-dessus de  $T_c$ , la fonction à deux points décroît exponentiellement et cette relation d'homogénéité entraîne que la longueur de corrélation  $\xi$  est proportionnelle à  $t^{-\nu}$ . Elle diverge donc à  $T_c$  comme

$$\xi(t) \underset{t \rightarrow T - T_c \rightarrow 0_+}{\propto} t^{-\nu}.$$

*Équations en champ ou en dessous de  $T_c$ .* Il est encore possible d'inclure les effets d'un faible champ magnétique, opérateur essentiel qui détruit la symétrie de réflexion, ou d'une aimantation finie. Les équations correspondantes permettent alors de relier de façon continue les phases ordonnées et la phase désordonnée, et de démontrer les mêmes lois d'échelle en dessous de  $T_c$ . À aimantation  $M$  fixée, on trouve

$$D_{\text{RG}} = \sum_{\ell} x_{\ell} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - (2 + \eta_2(g)) t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} D_{\sigma}(g) \left( n + M \frac{\partial}{\partial M} \right).$$

*Chaleur spécifique.* Une différence qualitative avec le modèle quasi-gaussien est le comportement de la chaleur spécifique  $\mathcal{C}$  qui est la somme d'une partie régulière non universelle et d'une partie singulière universelle

$$\mathcal{C}_{\text{sing.}} \sim A^{\pm} |t|^{-\alpha}, \quad (10.45)$$

où  $\alpha = 2 - d\nu$  est l'exposant de chaleur spécifique.

## 10.7 Quantités universelles : résultats numériques

Au-delà de résultats généraux sur les propriétés d'universalité, les méthodes de théorie des champs et le groupe de renormalisation ont aussi permis des calculs précis d'un certain nombre de quantités universelles, comme les exposants critiques du modèle avec symétrie  $O(N)$ , des rapports d'amplitude, et l'équation d'état dans la limite d'échelle pour les modèles à symétrie d'Ising.

Il importe de signaler ici que les résultats les plus précis ne proviennent pas du développement en  $\varepsilon$ , mais directement de la théorie des perturbations non-critiques à  $d = 3$  (suivant une suggestion de Parisi, 1973), parce que les calculs analytiques et numériques des termes successifs du développement perturbatif sont plus simples. Ainsi, les fonctions  $\beta(g)$ ,  $\eta(g)$  et  $\eta_2(g)$  sont connues jusqu'à l'ordre  $g^7$  à  $d = 3$ , alors que les exposants ne sont connus que jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^5$  dans le développement en  $\varepsilon$ . Cette méthode repose sur une hypothèse supplémentaire, que nous ne décrivons pas ici. Elle suppose, en particulier, de résoudre d'abord l'équation de point fixe  $\beta(g) = 0$  numériquement.

Par ailleurs, quelle que soit la méthode, il faut affronter le problème de la divergence du développement perturbatif en théorie des champs (*cf.* tableau 10.1), un problème générique des développements engendrés par la méthode du col. On dit que le développement perturbatif est un développement *asymptotique*. On note, ce qui est typique d'un développement asymptotique, que les sommes partielles semblent d'abord converger, avant de diverger avec des oscillations d'amplitude croissante.

TAB. 10.1 – Sommes partielles du développement en  $\varepsilon$  pour les exposants  $\gamma$  et  $\eta$  pour  $\varepsilon = 1$ ,  $N = 1$ .

$k$	0	1	2	3	4	5
$\gamma$	1,000	1,1667	1,2438	1,1948	1,3384	0,8918
$\eta$	0,0...	0,0...	0,0185	0,0372	0,0289	0,0545

Des méthodes de sommation sont nécessaires pour extraire de ces développements des suites convergentes. Les résultats les plus précis ont été obtenus en appliquant une transformation de Borel sur le développement, suivi d'un prolongement analytique basé sur une transformation conforme (*cf.* tableau 10.2).

Dans les tableaux 10.3 et 10.4, nous présentons les valeurs des exposants critiques obtenues par des méthodes de théorie des champs, en fonction de l'entier  $N$  correspondant au groupe de symétrie  $O(N)$ . Les résultats que nous présentons sont les valeurs obtenues par Guida et Zinn-Justin (1998), améliorant les résultats plus anciens de Le Guillou et Zinn-Justin (1977–1980).

TAB. 10.2 – Résultats successifs obtenus par transformation de Borel et transformation conforme : le zéro  $\tilde{g}^*$  de la fonction  $\beta(g)$  et les exposants  $\gamma$  et  $\nu$  pour  $d = 3$ ,  $N = 1$ .

$k$	2	3	4	5	6	7
$\tilde{g}^*$	1,8774	1,5135	1,4149	1,4107	1,4103	1,4105
$\nu$	0,6338	0,6328	0,62966	0,6302	0,6302	0,6302
$\gamma$	1,2257	1,2370	1,2386	1,2398	1,2398	1,2398

Signalons quelques exemples de modèles ou systèmes physiques correspondant aux différentes valeurs de  $N$ . Ainsi  $N = 0$  correspond aux propriétés statistiques des polymères ou des chemins aléatoires avec auto-évitement,  $N = 1$  à la transition liquide-vapeur, aux transitions de séparation de fluides miscibles ou aux transitions anti-ferromagnétiques uniaxes. Le représentant le plus important du cas  $N = 2$  est la transition superfluide de l'hélium. Enfin,  $N = 3$  correspond à des transitions ferromagnétiques.

Le tableau 10.3 est basé sur le développement perturbatif à dimension  $d = 3$  fixé. C'est pourquoi nous présentons les valeurs successives de  $g^*$  obtenues par solution numérique de l'équation  $\beta(g) = 0$ . Par ailleurs, pour donner une meilleure idée de la grandeur du paramètre de développement, les valeurs de la combinaison

$$\tilde{g}_{Ni}^* = (N + 8)g/(48\pi),$$

qui est ajustée pour que les deux premiers termes du développement soient égaux, sont aussi reproduites.

TAB. 10.3 – Exposants critiques du modèle  $O(N)$ ,  $d = 3$ , obtenus par la théorie des champs  $\sigma_3^4$ .

$N$	0	1	2	3
$\tilde{g}_{Ni}^*$	$1,413 \pm 0,006$	$1,411 \pm 0,004$	$1,403 \pm 0,003$	$1,390 \pm 0,004$
$g^*$	$26,63 \pm 0,11$	$23,64 \pm 0,07$	$21,16 \pm 0,05$	$19,06 \pm 0,05$
$\gamma$	$1,1596 \pm 0,0020$	$1,2396 \pm 0,0013$	$1,3169 \pm 0,0020$	$1,3895 \pm 0,0050$
$\nu$	$0,5882 \pm 0,0011$	$0,6304 \pm 0,0013$	$0,6703 \pm 0,0015$	$0,7073 \pm 0,0035$
$\eta$	$0,0284 \pm 0,0025$	$0,0335 \pm 0,0025$	$0,0354 \pm 0,0025$	$0,0355 \pm 0,0025$
$\beta$	$0,3024 \pm 0,0008$	$0,3258 \pm 0,0014$	$0,3470 \pm 0,0016$	$0,3662 \pm 0,0025$
$\alpha$	$0,235 \pm 0,003$	$0,109 \pm 0,004$	$-0,011 \pm 0,004$	$-0,122 \pm 0,010$
$\omega$	$0,812 \pm 0,016$	$0,799 \pm 0,011$	$0,789 \pm 0,011$	$0,782 \pm 0,0013$
$\theta = \omega\nu$	$0,478 \pm 0,010$	$0,504 \pm 0,008$	$0,529 \pm 0,009$	$0,553 \pm 0,012$

À titre de comparaison, nous donnons aussi dans le tableau 10.4 les résultats tirés du développement en  $\varepsilon$  après sommation. Les deux versions « libre » et « cont. » correspondent l'une à une sommation libre, l'autre à une méthode de sommation où des informations sur les comportements exacts quand  $d \rightarrow 2$ , déduites du modèle  $\sigma$  non linéaire (*cf.* chapitre 15) ont été utilisées explicitement.

TAB. 10.4 – Exposants critiques du modèle  $O(N)$ ,  $d = 3$ , obtenus par le développement en  $\varepsilon$ .

$N$	0	1	2	3
$\gamma$ (libre)	$1,1575 \pm 0,0060$	$1,2355 \pm 0,0050$	$1,3110 \pm 0,0070$	$1,3820 \pm 0,0090$
$\gamma$ (cont.)	$1,1571 \pm 0,0030$	$1,2380 \pm 0,0050$	1,317	1,392
$\nu$ (libre)	$0,5875 \pm 0,0025$	$0,6290 \pm 0,0025$	$0,6680 \pm 0,0035$	$0,7045 \pm 0,0055$
$\nu$ (cont.)	$0,5878 \pm 0,0011$	$0,6305 \pm 0,0025$	0,671	0,708
$\eta$ (libre)	$0,0300 \pm 0,0050$	$0,0360 \pm 0,0050$	$0,0380 \pm 0,0050$	$0,0375 \pm 0,0045$
$\eta$ (cont.)	$0,0315 \pm 0,0035$	$0,0365 \pm 0,0050$	0,0370	0,0355
$\beta$ (libre)	$0,3025 \pm 0,0025$	$0,3257 \pm 0,0025$	$0,3465 \pm 0,0035$	$0,3655 \pm 0,0035$
$\beta$ (cont.)	$0,3032 \pm 0,0014$	$0,3265 \pm 0,0015$		
$\omega$	$0,828 \pm 0,023$	$0,814 \pm 0,018$	$0,802 \pm 0,018$	$0,794 \pm 0,018$
$\theta$	$0,486 \pm 0,016$	$0,512 \pm 0,013$	$0,536 \pm 0,015$	$0,559 \pm 0,017$

La comparaison avec les valeurs obtenues par d'autres méthodes, numériques (séries de haute température, simulations numériques de type Monte-Carlo), ou extraites d'expériences, montrent un excellent accord général. À titre d'illustration, nous présentons donc une courte compilation de résultats tirés de l'étude numérique de modèles particuliers sur réseau dans le tableau 10.5.

TAB. 10.5 – Exposants critiques du modèle  $O(N)$  à partir de modèles sur réseau.

$N$	0	1	2	3
$\gamma$	$1,1575 \pm 0,0006$	$1,2385 \pm 0,0025$	$1,322 \pm 0,005$	$1,400 \pm 0,006$
$\nu$	$0,5877 \pm 0,0006$	$0,631 \pm 0,002$	$0,674 \pm 0,003$	$0,710 \pm 0,006$
$\alpha$	$0,237 \pm 0,002$	$0,103 \pm 0,005$	$-0,022 \pm 0,009$	$-0,133 \pm 0,018$
$\beta$	$0,3028 \pm 0,0012$	$0,329 \pm 0,009$	$0,350 \pm 0,007$	$0,365 \pm 0,012$
$\theta$	$0,56 \pm 0,03$	$0,53 \pm 0,04$	$0,60 \pm 0,08$	$0,54 \pm 0,10$

Enfin, citons quelques résultats expérimentaux particulièrement précis :

De l'étude des propriétés des longues chaînes polymériques, qui correspond au cas  $N = 0$ , a été déduit

$$\nu = 0,586 \pm 0,004.$$

Des mesures sur les transitions de séparation de mélanges binaires de liquides ( $N = 1$ ), on conclut par exemple que

$$\nu = 0,625 \pm 0,010, \quad \beta = 0,325 \pm 0,005.$$

C'est dans le cas de la transition superfluide de l'hélium, correspondant à  $N = 2$ , que les résultats les plus précis ont pu être obtenus (par des expériences en micro-gravité), par exemple,

$$\nu = 0,6807 \pm 0,0005.$$

TAB. 10.6 – Rapports d'amplitude pour  $N = 1$ , la classe du modèle d'Ising.

	$A^+/A^-$	$C^+/C^-$	$R_c$	$R_\chi$
devt. en $\varepsilon$ ,	$0,527 \pm 0,037$	$4,73 \pm 0,16$	$0,0569 \pm 0,0035$	$1,648 \pm 0,036$
$d = 3$	$0,537 \pm 0,019$	$4,79 \pm 0,10$	$0,0574 \pm 0,0020$	$1,669 \pm 0,018$
séries de HT	$0,523 \pm 0,009$	$4,95 \pm 0,15$	$0,0581 \pm 0,0010$	1,75
	$0,560 \pm 0,010$	$4,75 \pm 0,03$		
mél. bin.	$0,56 \pm 0,02$	$4,3 \pm 0,3$	$0,050 \pm 0,015$	$1,75 \pm 0,30$
liqu. – vap.	0,48–0,53	4,8–5,2	$0,047 \pm 0,010$	$1,69 \pm 0,14$
syst. magn.	0,49–0,54	$4,9 \pm 0,5$		

*Rapports universels d'amplitudes critiques.* Le tableau 10.6 présente un certain nombre de rapports universels d'amplitudes critiques pour  $v - v_c \sim t \rightarrow 0$ , dans le cas de la classe d'universalité du modèle d'Ising ( $N = 1$ ) à trois dimensions (Guida et Zinn-Justin 1996), et une comparaison avec d'autres résultats disponibles. Les différentes définitions ont été données en (7.35 et 10.45) et en sections 8.6 et 10.6.1. De plus,  $R_c = \alpha A^+ C^+ / M_0^2$ .

Les deux premières lignes correspondent à des calculs de théorie des champs. Les séries de haute température (HT) sont obtenues à partir de modèles sur réseau. Les trois dernières lignes correspondent à des résultats expérimentaux, transition de séparation de mélanges binaires de liquides, transitions liquide-vapeur et de systèmes magnétiques anisotropes.



# Chapitre 11

## Théories des champs $\sigma^4$ : champ à $N$ composantes

DANS CE CHAPITRE, nous étudions le flot des paramètres essentiels à  $T_c$ , en dimension  $d = 4 - \varepsilon$ , engendré par le groupe de renormalisation (GR) dans des modèles plus généraux avec un champ (ou paramètre d'ordre)  $\sigma_\alpha$  à  $N$  composantes. Il existe en effet des systèmes physiques intéressants pour lesquels le hamiltonien n'a pas la symétrie orthogonale  $O(N)$  du modèle étudié en section 10.5.

Une première catégorie de tels modèles est caractérisée par la présence de plusieurs longueurs de corrélation indépendantes : par exemple, dans le modèle gaussien les termes en  $\sigma_\alpha^2$  ont plusieurs coefficients distincts indépendants. De manière générique, dans de telles situations, lorsque la température varie, une seule longueur de corrélation devient infinie à la fois. Alors, les composantes du paramètre d'ordre qui ne sont pas critiques se découplent et peuvent être ignorées dans l'étude du comportement asymptotique à longue distance. On peut donc se restreindre aux modèles qui, comme le modèle  $O(N)$ , n'ont qu'une seule longueur de corrélation dans la phase désordonnée.

*Modèles à une seule longueur de corrélation.* Les modèles génériques avec une seule longueur de corrélation correspondent tous à des hamiltoniens invariants par un groupe de symétrie  $G$  agissant sur le champ  $\sigma$ , sous-groupe du groupe  $O(N)$ , tel que  $\sigma^2$  soit le seul invariant quadratique. Ceci implique, en particulier, que le champ  $\sigma$  se transforme par une représentation irréductible du groupe  $G$ .

En conséquence, la fonction à deux points dans la phase désordonnée est proportionnelle à l'identité :

$$\langle \sigma_\alpha(x) \sigma_\beta(y) \rangle = \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^N \langle \sigma_\gamma(x) \sigma_\gamma(y) \rangle. \quad (11.1)$$

Nous supposons, de plus, que le groupe  $G$  contient le groupe de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\sigma \mapsto -\sigma$ , comme sous-groupe et qu'il admet plusieurs invariants quartiques indépendants de type  $\sigma^4$  comme l'illustrera l'exemple de l'anisotropie cubique étudié en section 11.3. Les hamiltoniens effectifs de ces modèles ont donc la même partie quadratique que l'hamiltonien (10.35), mais en diffèrent par les termes quartiques : ils contiennent plusieurs termes de type  $\int d^d x \sigma^4(x)$  indépendants, l'un d'entre eux étant toujours le terme isotrope figurant dans l'hamiltonien (10.35).

## 11.1 GR : remarques générales

Nous établissons d'abord quelques propriétés générales des théories des champs de type  $\sigma^4$  dans lesquelles le paramètre d'ordre est un vecteur  $\sigma(x)$  à  $N$  composantes et qui admettent une seule longueur de corrélation.

*Flot du hamiltonien.* Nous supposons que l'hamiltonien contient  $p > 1$  termes quartiques de type  $\sigma^4(x)$  linéairement indépendants avec des coefficients  $g_a$ ,  $a = 1, \dots, p$ . Les équations de flot à l'ordre  $g^2$ , qui remplacent l'équation de flot unique (9.62), prennent alors la forme générale

$$\lambda \frac{dg_a}{d\lambda} = -\beta_a(g(\lambda)). \quad (11.2)$$

Avec ces conventions, une dilatation  $\lambda \rightarrow \infty$  correspond au comportement à longue distance.

Le vecteur tangent à une trajectoire du GR en un point  $g_a$  est proportionnel à  $\beta_a(g)$ . Il est donc unique en tout point où il est défini. Les trajectoires du GR ne peuvent donc se croiser qu'en un point fixe, c'est-à-dire en un point solution de  $\beta_a(g) = 0$ .

Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$  avec  $g_a = O(\varepsilon)$ , à l'ordre principal, les fonctions  $\beta$  peuvent s'écrire

$$\beta_a(g) = -\varepsilon g_a + B_a(g), \quad (11.3)$$

où  $B_a(g)$  est un polynôme homogène du second degré. Il satisfait donc l'identité

$$\sum_{b=1}^p g_b \frac{\partial B_a(g)}{\partial g_b} = 2B_a(g). \quad (11.4)$$

*Points fixes et stabilité.* Dans le cas de  $p$  paramètres  $g_a$ , le nombre maximum de solutions  $g_a^*$  des équations de point fixe

$$\beta_a(g^*) \equiv -\varepsilon g_a^* + B_a(g^*) = 0, \quad (11.5)$$

est  $2^p$ . La stabilité locale de ces points fixes peut être étudiée en linéarisant les équations (11.2) :

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} (g_a - g_a^*) = \sum_b L_{ab}^* (g_b - g_b^*)$$

avec

$$L_{ab}^* = -\frac{\partial \beta_a(g^*)}{\partial g_b} = \varepsilon \delta_{ab} - \frac{\partial B_a(g^*)}{\partial g_b}.$$

Elle dépend donc des signes des valeurs propres (dont on démontre qu'elles sont réelles, voir section 11.2.2) de la matrice des dérivées  $\mathbf{L}^*$ . Si toutes les valeurs propres de  $\mathbf{L}^*$  sont négatives, le point fixe est localement stable. Les propriétés globales dépendent des solutions complètes de l'équation (11.2) qui déterminent, dans l'espace des paramètres  $g$ , le bassin d'attraction de chaque point fixe stable.

*Valeur propre  $-\varepsilon$ .* De la propriété d'homogénéité (11.4) et de l'équation de point fixe (11.5), on déduit

$$\sum_b L_{ab}^* g_b^* = \varepsilon g_a^* - 2B_a(g^*) = -\varepsilon g_a^*.$$

On en conclut que tous les points fixes non gaussiens ont au moins une direction de stabilité correspondant au vecteur propre  $g_a^*$ , avec valeur propre  $-\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ .

On peut encore obtenir un résultat plus précis. Cherchons des solutions particulières de l'équation (11.5) de la forme

$$g_a(\lambda) = \rho(\lambda)g_a^*, \quad g^* \neq 0.$$

Introduisant cet Ansatz dans l'équation (11.2), utilisant l'équation de point fixe (11.5) et l'homogénéité de  $B$ , on en déduit

$$\begin{aligned} g_a^* \lambda \frac{d}{d\lambda} \rho(\lambda) &= \varepsilon \rho(\lambda) g_a^* - B_a(g^* \rho(\lambda)) = \varepsilon \rho(\lambda) g_a^* - \rho^2(\lambda) B_a(g^*) \\ &= \varepsilon \rho(\lambda) g_a^* - \varepsilon g_a^* \rho^2(\lambda). \end{aligned}$$

L'équation de flot est donc compatible avec l'Ansatz et la fonction  $\rho(\lambda)$  satisfait

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \rho(\lambda) = \varepsilon \rho(\lambda) (1 - \rho(\lambda)).$$

Dans l'approximation (11.3), les demi-droites joignant le point fixe gaussien aux autres points fixes sont des trajectoires du GR, et sur ces trajectoires les points fixes non gaussiens sont stables.

## 11.2 Flots de gradient

Il a été vérifié jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^5$  (c'est-à-dire à tous les ordres connus) que les fonctions  $\beta$  du modèle  $\sigma^4$  général peuvent s'écrire (cf. section 11.4.3 pour l'ordre principal)

$$\beta_a(g) = \sum_b T_{ab}(g) \frac{\partial U}{\partial g_b}, \quad (11.6)$$

où la matrice  $\mathbf{T}$  d'éléments  $T_{ab}$  est une matrice symétrique positive, fonction régulière des  $g_a$ . L'équation (11.2) définit alors un flot de gradient. Soulignons, cependant, que certaines propriétés de la matrice  $\mathbf{T}$  ne peuvent être vérifiées dans ce cadre qu'au voisinage du point fixe gaussien  $g_a = 0$ .

### 11.2.1 Reparamétrisation

La forme générale (11.6) est la seule forme d'un flot de gradient compatible avec les propriétés de transformations par reparamétrisation de l'espace des coefficients  $g_a$  (des difféomorphismes). En effet, introduisons de nouveaux paramètres  $\theta_a$  et faisons le changement  $g_a = g_a(\theta)$  dans les équations de flot. Pour que la reparamétrisation soit compatible avec le développement en  $\varepsilon$ , il faut que la matrice  $\partial\theta_b/\partial g_a$  soit inversible pour  $g = 0$ .

Les règles de dérivées en chaîne conduisent alors à

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g_a = \sum_b \frac{\partial g_a}{\partial \theta_b} \lambda \frac{d}{d\lambda} \theta_b, \quad \frac{\partial U}{\partial g_a} = \sum_b \frac{\partial \theta_b}{\partial g_a} \frac{\partial U}{\partial \theta_b}.$$

Par ailleurs, les matrices  $\partial\theta_b/\partial g_a$  et  $\partial g_a/\partial \theta_b$  sont inverses l'une de l'autre et donc

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \theta_a = - \sum_b T'_{ab} \frac{\partial U}{\partial \theta_b},$$

avec

$$T'_{ab} = \sum_{c,d} \frac{\partial \theta_a}{\partial g_d} T_{dc} \frac{\partial \theta_b}{\partial g_c}.$$

On vérifie que si la matrice  $\mathbf{T}$  est symétrique positive, la matrice transformée  $\mathbf{T}'$  d'éléments  $T'_{ab}$  est également symétrique et positive.

En particulier, même si la matrice  $\mathbf{T}$  est identique à la matrice identité dans une paramétrisation particulière, cela n'est plus vrai dans une paramétrisation générale.

Enfin, on note que  $\mathbf{T}$ , à cause de sa positivité et de ses propriétés de transformation par reparamétrisation, a les propriétés d'un tenseur métrique.

### 11.2.2 Flots et variation du potentiel

La propriété de flot de gradients a des conséquences importantes :

- (i) Le potentiel diminue le long d'une trajectoire du GR et donc les points fixes sont des extrema du potentiel, les points fixes stables étant des minima locaux.
- (ii) Les valeurs propres de la matrice des dérivées partielles premières en un point fixe sont *réelles*.

*Démonstration.* Calculons la variation du potentiel  $U$  le long d'une trajectoire :

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} U(g(\lambda)) = \sum_a \frac{\partial U}{\partial g_a} \lambda \frac{dg_a}{d\lambda} = - \sum_b \frac{\partial U}{\partial g_a} T_{ab} \frac{\partial U}{\partial g_b}.$$

Comme la matrice  $\mathbf{T}$  est positive, le membre de droite, qui est la valeur moyenne d'une matrice négative, est négatif. Donc le potentiel diminue le long d'une trajectoire. Les points fixes  $g^*$  sont des extrema de la fonction  $U$  :

$$\beta_a(g^*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(g^*)}{\partial g_a} = 0.$$

Un point fixe stable est un minimum local de  $U(g)$ .

À un point fixe, les éléments de la matrice  $\mathbf{L}^*$  des dérivées des fonctions  $-\beta$  sont donnés par

$$L_{ab}^* = - \frac{\partial \beta_a(g^*)}{\partial g_b} = - \sum_c T_{ac}(g^*) \frac{\partial^2 U(g^*)}{\partial g_c \partial g_b}, \quad (11.7)$$

relation que nous écrivons symboliquement

$$\mathbf{L}^* = -\mathbf{T}\mathbf{U}''. \quad (11.8)$$

Comme la matrice  $\mathbf{T}$  est positive, elle peut s'écrire comme le carré d'une matrice  $\mathbf{X}$  également symétrique et positive :

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}^2, \quad \mathbf{X} > 0.$$

La matrice

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{L}^* \mathbf{X} = -\mathbf{X} \mathbf{U}'' \mathbf{X},$$

a les mêmes valeurs propres que  $\mathbf{L}^*$ , mais comme les matrices  $\mathbf{U}''$  et  $\mathbf{X}$  sont symétriques, c'est une matrice symétrique. La matrice  $\mathbf{L}^*$ , qui a donc les mêmes valeurs propres qu'une matrice symétrique réelle, a donc des valeurs propres *réelles*.

Cette relation montre aussi que si la matrice  $\mathbf{U}''$  est positive, la matrice  $\mathbf{X} \mathbf{U}'' \mathbf{X}$  l'est aussi (et réciproquement), et le point fixe correspondant est donc localement stable.

### 11.2.3 Points fixes et stabilité

Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , nous démontrons maintenant deux autres conséquences de la propriété de flot de gradient : il existe, au plus, un point fixe stable ; le point fixe stable correspond à la plus petite valeur du potentiel.

En effet, supposons l'existence de deux points fixes  $g^*$  et  $g'^*$ . Considérons alors des paramètres  $g$  de la forme

$$g(s) = sg^* + (1-s)g'^*, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

et le potentiel correspondant

$$u(s) = U(g(s)).$$

Notons que la condition de positivité (11.11) que doit satisfaire le terme quartique en  $\sigma$  dans l'hamiltonien, qui est vérifiée pour tout point fixe et donc pour  $s = 0$  et  $s = 1$ , est alors aussi vérifiée pour tous les paramètres  $g(s)$  tels que  $0 \leq s \leq 1$ .

Comme la forme explicite (11.27) le montre, l'ordre principal  $u(s)$  est un polynôme du troisième degré. La dérivée

$$u'(s) = \sum_a g'_a(s) \frac{\partial U}{\partial g_a} = \sum_a (g_a^* - g'^*_a) \frac{\partial U}{\partial g_a} = \sum_{a,b} (g_a^* - g'^*_a) T_{ab}^{-1} \beta_b(g(s))$$

s'annule à cause des conditions de point fixe pour  $s = 0$  et  $s = 1$  :

$$u'(0) = u'(1) = 0.$$

Comme  $u'(s)$  est un polynôme du second degré, il est nécessairement de la forme

$$u'(s) = As(1-s).$$

La dérivée seconde  $u''(s)$  est donnée en termes de la matrice des dérivées partielles secondes de  $U$ , et donc des dérivées partielles des fonctions  $\beta$ , par

$$u''(s) = \sum_{a,b} (g_a^* - g'^*_a) \frac{\partial^2 U(g(s))}{\partial g_a \partial g_b} (g_b^* - g'^*_b) = A(1-2s).$$

En particulier, pour  $s = 0$  et  $s = 1$ ,

$$A = \sum_{a,b} (g_a^* - g'^*_a) \frac{\partial^2 U(g^*)}{\partial g_a \partial g_b} (g_b^* - g'^*_b), \quad -A = \sum_{a,b} (g_a^* - g'^*_a) \frac{\partial^2 U(g^*)}{\partial g_a \partial g_b} (g_b^* - g'^*_b).$$

Comme nous l'avons montré en section 11.2.2, en tout point fixe stable, la matrice  $\mathbf{U}''$  des dérivées partielles secondes de  $U$  est positive. Donc si  $g^*$  et  $g'^*$  sont des points fixes stables, les valeurs moyennes  $A$  et  $-A$  sont positives, ce qui est exclu : les deux points fixes ne peuvent être tous deux stables.

De façon générale, le signe de  $A$  caractérise en quelque sorte la stabilité relative de ces deux points fixes. Supposons, par exemple,  $A < 0$  ce qui est cohérent avec l'hypothèse que  $g^*$  est stable. Alors,  $u'(s) < 0$  sur  $[0, 1]$  et  $U(g(s))$  est décroissant. Donc,

$$U(g^*) < U(g'^*).$$

En particulier si  $g^*$  est un point fixe stable, il correspond, parmi tous les points fixes, à la plus petite valeur du potentiel.

### 11.3 Modèle avec anisotropie cubique

Pour illustrer les résultats précédents et avant d'étudier d'autres propriétés des modèles généraux avec paramètre d'ordre à  $N$  composantes, nous examinons un modèle simple mais d'intérêt physique.

Nous considérons un hamiltonien dépendant d'un champ  $\sigma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , invariant par le groupe cubique, le groupe fini des transformations engendré par

$$\sigma_\alpha \mapsto -\sigma_\alpha, \quad \sigma_\alpha \leftrightarrow \sigma_\beta \quad \text{pour tous } \alpha \text{ et } \beta.$$

On espère ainsi modéliser un système de spins classiques dont les interactions sont modulées par un réseau cubique sous-jacent (*cf.* section 3.3.7).

Le groupe de symétrie cubique admet un seul invariant quadratique mais deux invariants indépendants de type  $\sigma^4$ . Utilisant les propriétés de symétrie, il est facile de vérifier que le hamiltonien critique dans l'espace continu, et tronqué à l'ordre  $\sigma^4$  comme conséquence de l'analyse des opérateurs essentiels au voisinage de la dimension 4, a la forme générale

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c(\sigma) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_\alpha [\nabla \sigma_\alpha(x)]^2 + \dots + \frac{1}{2} r_c(g, h) \sum_\alpha \sigma_\alpha^2(x) \right. \\ \left. + \frac{g}{24} \left( \sum_\alpha \sigma_\alpha^2(x) \right)^2 + \frac{h}{24} \sum_\alpha \sigma_\alpha^4(x) \right\}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Comme il n'existe qu'un invariant quadratique, la condition (11.1) est satisfaite, la fonction à deux points dans la phase désordonnée est proportionnelle à l'identité et  $r_c$  est déterminé par la condition (10.3) :  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p=0) = 0$ .

L'apparition de deux termes de degré 4 entraîne que, sur la surface critique, le GR en dimension  $d = 4 - \varepsilon$  fait maintenant intervenir deux paramètres  $g$  et  $h$  correspondant aux deux opérateurs essentiels quartiques.

*Positivité.* On notera que les deux constantes  $g$  et  $h$  doivent satisfaire les deux conditions  $g + h \geq 0$  et  $Ng + h \geq 0$  pour que l'hamiltonien soit positif pour  $\sigma \rightarrow \infty$  et donc que la transition puisse être du second ordre. La première condition est obtenue en prenant tous les  $\sigma_\alpha$  nuls sauf un, la deuxième en les prenant tous égaux.

Ces conditions impliquent, en particulier, que si le flot du GR entraîne les paramètres  $g(\lambda)$  et  $h(\lambda)$  en dehors de cette région, les termes de degré supérieur, *a priori* négligeables, du développement du potentiel thermodynamique deviennent importants et la transition, en désaccord avec l'approximation quasi-gaussienne ou de champ moyen, est en fait génériquement faiblement du premier ordre.

### 11.3.1 Groupe de renormalisation et points fixes

Les équations de flot ont la forme générale

$$\begin{aligned}\lambda \frac{dg}{d\lambda} &= -\beta_g(g(\lambda), h(\lambda)), \\ \lambda \frac{dh}{d\lambda} &= -\beta_h(g(\lambda), h(\lambda)).\end{aligned}$$

Un calcul simple, analogue au calcul présenté en section 10.3, détermine les deux fonctions  $\beta$  à l'ordre principal pour  $g$  et  $h = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned}\beta_g(g, h) &= -\varepsilon g + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{N+8}{6} g^2 + gh \right), \\ \beta_h(g, h) &= -\varepsilon h + \frac{1}{8\pi^2} \left( 2gh + \frac{3}{2} h^2 \right).\end{aligned}$$

Il s'agit alors d'étudier le flot des paramètres  $g$  et  $h$  en fonction du paramètre de dilatation  $\lambda$ . En particulier, il faut trouver les différents points fixes pour  $\varepsilon = 4 - d > 0$  et déterminer la symétrie des hamiltoniens correspondants, discuter leur stabilité pour  $\lambda \rightarrow \infty$  comme fonction de l'entier  $N$  et en déduire la symétrie de l'hamiltonien de point fixe stable et enfin, déterminer la nature de la transition en fonction des valeurs initiales de  $g$  et  $h$ .

*Points fixes.* Les équations  $\beta_g = \beta_h = 0$  se factorisent chacune en deux équations linéaires. Les combinant des quatre façons possibles, on trouve :

- (i) Le point fixe gaussien

$$g = h = 0.$$

- (ii) Le point fixe découplé

$$g = 0, \quad h = 16\varepsilon\pi^2/3,$$

qui correspond à  $N$  copies identiques et découplées du modèle avec symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$  de type Ising.

- (iii) Le point fixe isotrope

$$h = 0, \quad g = 48\varepsilon\pi^2/(N+8),$$

qui a une symétrie  $O(N)$  plus étendue que la symétrie cubique du hamiltonien initial.

- (iv) Enfin, le dernier point fixe

$$g = \frac{16\pi^2\varepsilon}{N}, \quad h = \frac{16\pi^2(N-4)\varepsilon}{3N},$$

est nouveau et est appelé point fixe *cubique*.

Tous les points fixes sont dans le demi-plan  $g \geq 0$ . Seul le point fixe cubique pour  $N < 4$  est tel que  $h < 0$ . Cependant, pour  $N \geq 1$ , il satisfait la condition de positivité  $g + h \geq 0$  (et donc aussi  $Ng + h \geq 0$ ). Donc, tous les points fixes satisfont à la condition de positivité (11.11), en accord avec le résultat général démontré en section 11.4.1.

### 11.3.2 Flot linéarisé et valeurs propres

Les propriétés de stabilité locale des quatre points fixes sont déterminées par les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{L}^*$  des dérivées partielles par rapport à  $g$  et  $h$  des fonctions  $-\beta_g, -\beta_h$ . On trouve

$$\mathbf{L}^* = \varepsilon \mathbf{1} - \frac{1}{8\pi^2} \begin{pmatrix} \frac{N+8}{3}g + h & g \\ 2h & 2g + 3h \end{pmatrix}.$$

Pour les différents points fixes, les valeurs propres correspondantes de la matrice  $\mathbf{L}^*$  sont

$$\begin{aligned} \text{Point fixe gaussien : } & \varepsilon, & \varepsilon, \\ \text{Point fixe découplé (Ising) : } & \frac{1}{3}\varepsilon, & -\varepsilon, \\ \text{Point fixe isotrope : } & \frac{N-4}{N+8}\varepsilon, & -\varepsilon, \\ \text{Point fixe cubique : } & \frac{4-N}{3N}\varepsilon, & -\varepsilon. \end{aligned}$$

L'existence d'une valeur propre  $-\varepsilon$  est une propriété générale de tous les points fixes non gaussiens (*cf.* section 11.1).

Le point fixe gaussien a deux directions d'instabilité. Le point fixe de type Ising a toujours une direction d'instabilité.

Pour le point fixe isotrope, on trouve un exemple particulier d'un résultat général (*cf.* section 11.4.2) : le point fixe isotrope est stable pour  $N < N_c$  avec  $N_c = 4 + O(\varepsilon)$ . Enfin, le point fixe cubique n'est stable que si  $N > N_c$ . À  $N = N_c$ , les deux points fixes se rencontrent et ensuite échangent leur rôle.

*Remarque.* Pour  $N < N_c$ , le point fixe stable a une symétrie  $O(N)$ . Le comportement asymptotique des fonctions de corrélations dans le domaine critique, les singularités des quantités thermodynamiques à  $T_c$ , exhibent donc plus de symétrie que le modèle microscopique initial.

Nous avons déjà rencontré un phénomène similaire : la symétrie cubique du réseau engendre une symétrie spatiale  $O(d)$  continue à grande distance ou dans le domaine critique (*cf.* sections 3.3.9 et 8.2). Seul un examen des corrections au comportement critique asymptotique révèle la symétrie plus restreinte du modèle microscopique.

*Le flot du GR.* Les trajectoires du GR ne peuvent se couper qu'en un point fixe. Les droites  $h = 0$  et  $g = 0$  et la droite joignant l'origine au point fixe cubique sont des droites stables par le GR, un cas particulier d'une propriété

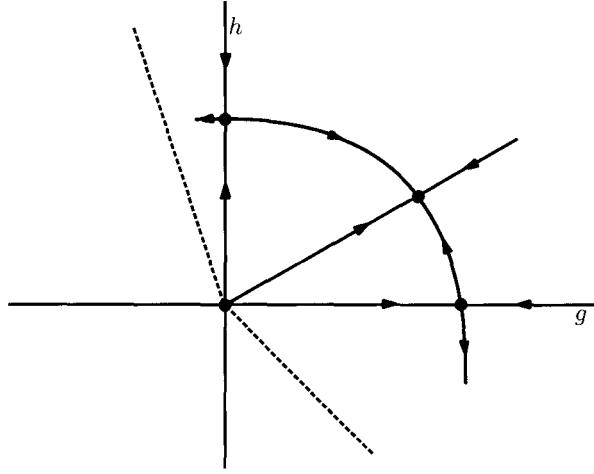


FIG. 11.1 – Anisotropie cubique : flot du groupe de renormalisation pour  $N > 4$ .

générale démontrée en section 11.1, et ne peuvent donc pas être traversées. Dans ce cas planaire, ces conditions fixent complètement la topologie des trajectoires du GR (figure 11.1).

En particulier, il existe des paramètres initiaux  $g$  et  $h$  pour lesquels les trajectoires du GR ne peuvent atteindre aucun point fixe, mais au contraire évoluent vers des régions non physiques, comme  $g < 0$  pour tout  $N$  et  $h < 0$  pour  $N > 4$  ou  $h < (N - 4)/3g$  pour  $N < 4$ . Ces paramètres correspondent génériquement à des transitions faiblement du premier ordre : la longueur de corrélation reste finie quand  $T \rightarrow T_{c+}$  et, dans l'unité de l'échelle microscopique, prend une valeur qui est de l'ordre du paramètre de dilatation maximum tel que les paramètres  $g$  et  $h$  soient encore dans la région permise.

## 11.4 Expressions générales explicites : étude détaillée

Un hamiltonien général satisfaisant aux hypothèses peut s'écrire

$$\mathcal{H}(\sigma) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{\mu=1}^d (\partial_{\mu} \sigma_i)^2 + (r_c + t) \sigma_i^2 \right] + \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N g_{ijkl} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \right\}, \quad (11.10)$$

où  $g_{ijkl}$  est un tenseur symétrique dans ses quatre indices  $ijkl$ .

De plus, la condition de positivité de  $\mathcal{H}$  pour  $|\sigma| \rightarrow \infty$  s'écrit

$$\sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l > 0 \quad \forall \sigma_i \text{ tel que } |\sigma| = 1. \quad (11.11)$$

La condition de positivité donne à l'espace des paramètres  $g$  admissibles une structure de cône convexe.

À cause de la condition (11.1), qui exprime que la fonction de corrélation à deux points connexe dans la phase désordonnée est proportionnelle à la matrice identité,

$$\langle \sigma_i(x) \sigma_j(y) \rangle_{\text{conn.}} = W_{ij}^{(2)}(x, y) = \delta_{ij} W^{(2)}(x, y), \quad (11.12)$$

le tenseur  $g_{ijkl}$  a des propriétés spéciales qui se traduisent par des contraintes successives sur le tenseur  $g_{ijkl}$  dans le développement perturbatif.

### 11.4.1 Groupe de renormalisation

L'équation de flot des paramètres  $g_{ijkl}(\lambda)$  dans l'hamiltonien (11.10) s'écrit maintenant

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g_{ijkl}(\lambda) = -\beta_{ijkl}(g(\lambda)). \quad (11.13)$$

Les comportements à longue distance de la théorie des champs sont gouvernés par les points fixes solutions de l'équation

$$\beta_{ijkl}(g^*) = 0. \quad (11.14)$$

Les propriétés de stabilité locale des points fixes sont reliées aux valeurs propres de la matrice

$$L_{ijkl, i' j' k' l'}^* = -\frac{\partial \beta_{ijkl}(g^*)}{\partial g_{i' j' k' l'}}. \quad (11.15)$$

*Les fonctions du GR dans le développement en  $\varepsilon$ .* Il n'est pas difficile de calculer les fonctions de GR correspondant à une théorie  $\sigma^4$  générale. Comme dans le cas avec symétrie  $O(N)$ , les calculs ne diffèrent du cas  $N = 1$  que par des facteurs géométriques.

La fonction  $\beta$ , à l'ordre dominant, est donnée par

$$\begin{aligned} \beta_{ijkl}(g) = & -\varepsilon g_{ijkl} + \frac{1}{16\pi^2} \sum_{m,n} (g_{ijmn} g_{mnkl} + g_{ikmn} g_{mnjl} + g_{ilmn} g_{mnkj}) \\ & + O(g^3). \end{aligned} \quad (11.16)$$

La dimension du champ se déduit de la fonction

$$\eta(g) = \frac{1}{6N(4\pi)^4} \sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} g_{ijkl} + O(g^3), \quad (11.17)$$

et l'équation de flot pour la déviation  $t$  de la température critique peut s'écrire

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln t(\lambda) = \frac{1}{\nu(g(\lambda))}$$

avec

$$\frac{1}{\nu(g)} = 2 - \frac{1}{16\pi^2 N} \sum_{i,j} g_{iijj} + O(g^2). \quad (11.18)$$

Dans les deux équations (11.17, 11.18), nous avons explicité la condition (11.12) qui entraîne

$$\sum_k g_{ijkk} = \frac{\delta_{ij}}{N} \sum_{k,l} g_{kkll}, \quad \sum_{k,l,m} g_{iklm} g_{jklm} = \frac{\delta_{ij}}{N} \sum_{k,l,m,n} g_{klmn} g_{klmn}. \quad (11.19)$$

Par ailleurs, en un point fixe

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l &= \frac{3}{16\pi^2} \sum_{i,j,k,l,m,n} \sigma_i \sigma_j g_{ijmn} g_{mnkl} \sigma_k \sigma_l \\ &= \frac{3}{16\pi^2} \sum_{m,n} \left( \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j g_{ijmn} \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, tout point fixe non gaussien satisfait à la condition de positivité (11.11).

### 11.4.2 Stabilité du point fixe isotrope

Parmi les points fixes possibles, on trouve toujours, en plus du point fixe gaussien, le point fixe invariant par le groupe  $O(N)$ . Il est possible d'étudier sa stabilité locale, à l'ordre dominant, en  $\varepsilon$ .

On peut tout d'abord spécialiser les expressions (11.16)–(11.18) au cas de la théorie des champs  $(\sigma^2)^2$  de symétrie  $O(N)$ . Pour cela, on substitue dans ces équations

$$g_{ijkl} = \frac{g}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (11.20)$$

Après un bref calcul, on retrouve les expressions (10.36) et (10.38) des fonctions  $\beta(g)$  et  $\eta(g)$  et la valeur de  $g^*$  correspondante.

Les conditions de stabilité sont données par les valeurs propres de la matrice  $L^*$  (équation (11.15)). Posant

$$g_{ijkl} = g_{ijkl}^* + s_{ijkl}, \quad (11.21)$$

on trouve à l'ordre dominant

$$(L^* s)_{ijkl} = \varepsilon s_{ijkl} - \frac{\varepsilon}{N+8} \left( \delta_{ij} \sum_m s_{mmkl} + 5 \text{ termes} + 12 s_{ijkl} \right), \quad (11.22)$$

où les cinq termes sont obtenus par permutation des indices  $i, j, k, l$ .

En prenant  $s_{ijkl}$  proportionnel à  $g_{ijkl}^*$ , on retrouve l'exposant  $\omega = \beta'(g^*)$  du modèle isotrope. Plus généralement, les vecteurs propres peuvent être classés suivant leurs propriétés de trace. Nous paramétrons donc  $s_{ijkl}$  sous la forme

$$s_{ijkl} = u g_{ijkl}^* + (v_{ij} \delta_{kl} + 5 \text{ termes}) + w_{ijkl}, \quad (11.23)$$

où les tenseurs  $v_{ij}$  et  $w_{ijkl}$  sont de trace nulle :

$$\sum_i v_{ii} = 0, \quad \sum_k w_{ijkk} = 0. \quad (11.24)$$

Les trois valeurs propres correspondant aux composantes  $u, w, v$  sont, respectivement,  $-\omega$ ,  $-\omega_{\text{anis.}}$  et  $-\omega'$  avec

$$\omega = \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \omega_{\text{anis.}} = \varepsilon \frac{4-N}{N+8} + O(\varepsilon^2), \quad \omega' = \frac{8\varepsilon}{N+8} + O(\varepsilon^2). \quad (11.25)$$

La perturbation proportionnelle à  $v_{ij}$  ne satisfait pas la première condition (11.19). Elle lève donc la dégénérescence entre les longueurs de corrélation des différentes composantes du champ. Ceci induit une transition vers une situation où quelques composantes se découplent. Cependant, on vérifie facilement que la valeur propre correspondante  $\omega'$  produit, pour  $\varepsilon$  petit, des effets sous-dominants par rapport à la valeur propre correspondant à l'opérateur quadratique en  $\sigma$ .

Pour l'ensemble des modèles satisfaisant la condition (11.19), la valeur propre dominante est  $\omega_{\text{anis.}}$ . On trouve alors le résultat très intéressant suivant (qui généralise un résultat obtenu pour l'anisotropie cubique) : le point fixe, invariant par le groupe  $O(N)$ , est stable par rapport à toutes les perturbations pour  $N$  plus petit qu'une certaine valeur  $N_c$ . Le calcul de  $\omega_{\text{anis.}}$  à l'ordre  $\varepsilon$  fournit

$$N_c = 4 - 2\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (11.26)$$

C'est un nouvel exemple de symétrie engendrée dynamiquement : pour  $N < N_c$ , dans le domaine critique, les fonctions de corrélation du point fixe stable exhibent plus de symétrie que dans la théorie microscopique initiale.

### 11.4.3 Flots de gradients : points fixes, stabilité et dimension du champ

On vérifie que l'expression (11.16) de la fonction  $\beta$  dérive d'un potentiel. En effet,

$$\beta_{ijkl}(g) = \frac{\partial U(g)}{\partial g_{ijkl}}$$

avec

$$U(g) = -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} g_{ijkl} + \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{i,j,k,l,m,n} g_{ijkl} g_{klmn} g_{mnij}. \quad (11.27)$$

*Stabilité du point fixe et exposant  $\eta$ .* Nous montrons maintenant que, dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , le *point fixe stable* (ou du moins le plus stable) correspond à la plus grande valeur de l'exposant  $\eta$  et donc aux *fonctions de corrélation qui décroissent le plus vite à grande distance*.

Pour tout point fixe  $g^*$ , l'annulation des fonctions  $\beta$  implique la relation

$$\sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} \beta_{ijkl} = 0 \Rightarrow \varepsilon \sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} g_{ijkl} = \frac{3}{(4\pi)^2} \sum_{i,j,k,l,m,n} g_{ijkl} g_{klmn} g_{mnij},$$

et donc

$$U(g^*) = -\frac{1}{6}\varepsilon \sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} g_{ijkl} + O(g^4),$$

une valeur négative et donc inférieure à celle du point fixe gaussien

$$g^* \neq 0 \Rightarrow U(g^*) < U(0),$$

en accord avec l'analyse de la section 11.2.3.

Par ailleurs, pour un système avec une seule longueur de corrélation, à l'ordre dominant, l'exposant  $\eta$  est donné par l'équation (11.17) et donc

$$\eta = \frac{1}{6N} \frac{1}{(4\pi)^4} \sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} g_{ijkl} = -\frac{1}{N\varepsilon} U(g^*), \quad (11.28)$$

ce qui est, en particulier, en accord avec le résultat général de théorie quantique des champs  $\eta \geq 0$ .

Comme nous l'avons montré, le point fixe stable correspond à la plus petite valeur de  $U$ . Il correspond donc aussi à la plus grande valeur de l'exposant  $\eta$ , c'est-à-dire de la dimension  $d_\sigma$  du champ  $\sigma$  : ce sont donc les fonctions de corrélations correspondant au point fixe stable qui décroissent le plus rapidement.

La validité de cette propriété au-delà du développement en  $\varepsilon$  reste une conjecture.

*Une borne sur l'exposant  $\eta$ .* Démontrons, en exercice, une borne générale sur le coefficient dominant d'ordre  $\varepsilon^2$  de  $\eta$ .

La première condition (11.19) peut s'écrire

$$\sum_k g_{ijkk} = 8\pi^2 G \delta_{ij}, \quad G = \frac{1}{8\pi^2 N} \sum_{j,k} g_{jjkk}. \quad (11.29)$$

La fonction  $\nu(g)$  s'exprime à cet ordre en fonction de  $G$  (équation (11.18)) :

$$\frac{1}{\nu(g)} = 2 - \frac{1}{2}G + O(g^2). \quad (11.30)$$

Prenant une moyenne gaussienne de l'inégalité (11.11) avec la mesure  $e^{-\sum \sigma_i^2/2}$ , on obtient (en utilisant le théorème de Wick)

$$\sum_{i,j,k,l} g_{ijkl} \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \rangle = 3 \sum_{i,k} g_{ikik} > 0,$$

et donc

$$G > 0. \quad (11.31)$$

Par ailleurs,  $\eta$  est donné par l'équation (11.17) :

$$\eta = \frac{1}{6N(4\pi)^4} \sum_{i,j,k,l} (g_{ijkl})^2. \quad (11.32)$$

De l'équation de point fixe  $\beta_{ijkl}(g^*) = 0$ , où  $\beta_{ijkl}$  est donné à l'ordre dominant par l'équation (11.16), on déduit

$$0 = \frac{1}{8\pi^2} \sum_k \beta_{ijkk}(g) = -\varepsilon G \delta_{ij} + \frac{1}{2} G^2 \delta_{ij} + \frac{1}{(8\pi^2)^2} \sum_{k,l,m} g_{iklm} g_{jklm}. \quad (11.33)$$

Ainsi, à cet ordre, l'exposant  $\eta$  s'exprime aussi uniquement en fonction de  $G$  (et donc de  $\nu$ ) :

$$\eta = \frac{1}{24} (\varepsilon G^* - \frac{1}{2} G^{*2}) + O(\varepsilon^3).$$

Cette expression entraîne en particulier que le coefficient d'ordre  $\varepsilon$  de  $G^*$  est borné,  $0 < G^* < 2\varepsilon$ . On peut améliorer cette borne en posant

$$g_{ijkl}^* = \frac{8\pi^2 G^*}{N+2} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) + \tilde{g}_{ijkl}^*,$$

où  $\sum_i \tilde{g}_{iikl} = 0$ . Alors,

$$\sum_{i,j,k,l} g_{ijkl}^* g_{ijkl}^* = \frac{3N(8\pi^2)^2}{N+2} G^{*2} + \sum_{i,j,k,l} \tilde{g}_{ijkl}^* \tilde{g}_{ijkl}^*,$$

et combinant cette expression avec l'équation (11.33) :

$$\varepsilon G^* - \frac{1}{2} G^{*2} - \frac{3}{N+2} G^{*2} \geq 0.$$

On en déduit

$$0 < G^* \leq \frac{2(N+2)}{N+8} \varepsilon \leq 2\varepsilon. \quad (11.34)$$

La borne supérieure correspond à un point fixe tel que  $\tilde{g}_{ijkl}^* = 0$  et donc au point fixe avec symétrie  $O(N)$ .

Enfin, l'expression (11.32) montre que  $\eta$  est borné par sa valeur pour  $G^* = \varepsilon$ , si cette valeur est permise, sinon par la valeur correspondant à la valeur maximale de  $G^*$ . On en conclut que

$$\begin{cases} \eta \leq \frac{N+8}{2(N+8)^2} \varepsilon^2 & \text{pour } N \leq 4, \\ \eta \leq \frac{\varepsilon^2}{48} & \text{pour } N \geq 4. \end{cases}$$

La borne pour  $N \leq 4$  correspond au point fixe isotrope, c'est-à-dire avec symétrie  $O(N)$ . Elle découle aussi directement des propriétés de stabilité du point fixe isotrope (section 11.4.2) et de la correspondance entre point fixe stable et plus grande valeur de  $\eta$ .

## 11.5 Exercice : modèle général à deux paramètres

Pour vérifier les résultats précédents dans une situation plus simple, nous considérons un modèle général à deux paramètres, dont un exemple particulier est le modèle avec anisotropie cubique examiné en section 11.3. Nous supposons, de plus, que nous avons trouvé deux points fixes non gaussiens  $g_1^*$  et  $g_2^*$ , dont l'un, nécessairement, est le point fixe isotrope avec symétrie  $O(N)$ , par exemple  $g_1^*$ . L'espace des paramètres  $g$  étant linéaire,  $g$  peut prendre toutes les valeurs contenues dans le plan  $sg_1^* + tg_2^*$ . Les conditions de positivité sont au moins satisfaites dans le quart de plan  $s, t \geq 0$ .

À l'ordre  $\varepsilon^3$ , le potentiel  $U(g(s, t))$  dépend *a priori* de sept paramètres. Les conditions de point fixe pour  $s = 1, t = 0$  et  $s = 0, t = 1$ ,

$$\begin{aligned}\partial_s U(s = 1, t = 0) &= \partial_t U(s = 1, t = 0) = 0, \\ \partial_s U(s = 0, t = 1) &= \partial_t U(s = 0, t = 1) = 0,\end{aligned}$$

fixent quatre paramètres. Il prend alors la forme générale

$$U(s, t) = -\left(\frac{1}{2}as^2 + bst + \frac{1}{2}ct^2\right) + \frac{1}{3}as^3 + bst(s + t) + \frac{1}{3}ct^3, \quad (11.35)$$

où  $a, b, c$  sont trois constantes qui, à cause de la positivité de

$$\sum_{i,j,k,l} g_{ijkl}g_{ijkl} > 0 \quad \text{pour } g_{ijkl} \not\equiv 0,$$

satisfont les conditions

$$a > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - ac < 0.$$

Par exemple, pour le modèle avec anisotropie cubique, on trouve

$$a = (8\pi^2)^2 \frac{12N(N+2)\varepsilon^3}{(N+8)^2}, \quad b = (8\pi^2)^2 \frac{4N\varepsilon^3}{N+8}, \quad c = (8\pi^2)^2 \frac{4N\varepsilon^3}{9},$$

et donc

$$ac - b^2 = (8\pi^2)^4 \frac{16N^2(N-1)\varepsilon^6}{3(N+8)^2}.$$

Exprimant qu'au point fixe gaussien la valeur propre dégénérée est  $\varepsilon$ , on obtient la matrice  $\mathbf{T}$ , qui est ici une matrice constante car la transformation  $g \mapsto \{s, t\}$  est linéaire et dans la paramétrisation (11.10)  $\mathbf{T} = \mathbf{1}$ . Ici

$$\mathbf{T} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

est bien une matrice positive. Son action sur le vecteur  $(\partial_s U, \partial_t U)$  conduit aux équations de flot

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon} \lambda \frac{ds}{d\lambda} &= s - s^2 + \frac{2b(b-c)}{ac-b^2} st, \\ \frac{1}{\varepsilon} \lambda \frac{dt}{d\lambda} &= t - t^2 + \frac{2b(b-a)}{ac-b^2} st.\end{aligned}$$

Posons

$$\alpha_1 = \frac{2b(c-b)}{ac-b^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2b(a-b)}{ac-b^2}.$$

Dans le modèle avec anisotropie cubique

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{12}{N+8}.$$

On trouve alors un quatrième point fixe

$$s = s_4 \equiv \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2}, \quad t = t_4 \equiv \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}.$$

La matrice des dérivées partielles des fonctions  $-\beta$  est

$$\mathbf{L}^* = \varepsilon \begin{pmatrix} 1-2s-\alpha_1 t & -\alpha_1 s \\ -\alpha_2 t & 1-2t-\alpha_2 s \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres aux différents points fixes sont

$$\varepsilon \times \begin{cases} 1, 1 & \text{pour } s = t = 0 \\ -1, 1 - \alpha_2 & \text{pour } s = 1, t = 0 \\ -1, 1 - \alpha_1 & \text{pour } s = 0, t = 1 \\ -1, 1 - \alpha_3 & \text{pour } s = s_4, t = t_4, \end{cases}$$

où nous avons posé

$$1 - \alpha_3 = -\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{1-\alpha_1\alpha_2} \Leftrightarrow 2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0. \quad (11.36)$$

On voit que, du point de vue algébrique, les trois points fixes jouent un rôle complètement symétrique.

La condition de stabilité d'un point fixe est

$$\alpha_i > 1.$$

Vérifions, qu'en accord avec le résultat général, les conditions  $\alpha_1 > 1$  et  $\alpha_2 > 1$  sont incompatibles. Par exemple,  $\alpha_1 > 1$  implique

$$2b(c-b) > ac-b^2 \Rightarrow c(c-a) > (b-c)^2 \Rightarrow c > a.$$

Il est clair que la condition  $\alpha_2 > 1$  implique  $a > c$ , ce qui est incompatible.

Par ailleurs les valeurs du potentiel aux points fixes  $g_1^*$  et  $g_2^*$  sont respectivement,  $-a/6$  et  $-c/6$ , et donc le point fixe stable correspond bien au potentiel le plus bas.

Nous utilisons maintenant la propriété que le point fixe isotrope est toujours présent. Supposons que ce soit  $g_1^*$ . Alors

$$(g_1^*)_{ijkl} = \frac{16\pi^2\varepsilon}{N+8} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}).$$

La valeur de  $a$  est celle du modèle avec anisotropie cubique. Le paramètre  $b$  est donné par

$$b = \varepsilon \sum_{i,j,k,l} (g_1^*)_{ijkl} (g_2^*)_{ijkl} = (8\pi^2)^2 \frac{6\varepsilon^2}{N+8} N G_2^*,$$

et enfin

$$c = \varepsilon \sum_{i,j,k,l} (g_2^*)_{ijkl} (g_2^*)_{ijkl} = (8\pi^2)^2 N \varepsilon \left( \varepsilon G_2^* - \frac{1}{2} G_2^{*2} \right).$$

À cet ordre, tout s'exprime en fonction de  $G_2^*$ . Les paramètres  $\alpha_i$  deviennent

$$\alpha_1 = G_2^*/\varepsilon, \quad \alpha_2 = \frac{12}{N+8}$$

On voit que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont positifs et, à cause de la borne (11.34),

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 2.$$

Ensuite, l'équation (11.36) implique

$$\alpha_3 > 0, \quad \alpha_i + \alpha_j < 2 \text{ pour } i \neq j.$$

Enfin, l'équation (11.36) montre réciproquement que  $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$  entraîne  $\alpha_3 > 1$ . Donc il existe toujours un point fixe stable. Comme dans le cas du modèle avec anisotropie cubique, si le quatrième point fixe est stable,  $s_4$  et  $t_4 > 0$ .

Notons enfin que la plupart de ces considérations se généralise à l'ordre suivant en  $\varepsilon$ .

## Exercice

*Anisotropie cubique.* Partant des expressions explicites des fonctions  $\beta$  de la section 11.3, trouver les matrices  $\mathbf{M}$  telles qu'on puisse écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial g} &= M_{11}\beta_g + M_{12}\beta_h \\ \frac{\partial U}{\partial h} &= M_{21}\beta_g + M_{22}\beta_h, \end{aligned}$$

et déterminer la fonction potentiel  $U$  correspondante. Calculer les valeurs du potentiel pour les différents points fixes.

*Solution.* Toutes les matrices sont proportionnelles à

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(N+2) & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est bien une matrice positive pour  $N > 1$ , et avec ce choix

$$8\pi^2 U(g, h) = -8\pi^2 \varepsilon \left[ \frac{1}{6}(N+2)g^2 + gh + \frac{1}{2}h^2 \right] + \frac{1}{54}(N+8)(N+2)g^3 \\ + \frac{1}{6}(N+8)g^2h + \frac{3}{2}gh^2 + \frac{1}{2}h^3.$$

Les valeurs sont

$$U_{\text{gaus}} = 0, \quad U_{\text{Is.}} = -(8\pi^2)^2 \frac{2}{27} \varepsilon^3, \quad U_{O(N)} = -(8\pi^2)^2 \frac{2(N+2)}{(N+8)^2} \varepsilon^3, \\ U_{\text{cub.}} = -(8\pi^2)^2 \frac{2(N-1)(N+2)}{27N^2} \varepsilon^3.$$

En particulier, on vérifie que

$$U_{O(N)} - U_{\text{cub.}} = (8\pi^2)^2 \frac{2(N+2)(N-4)^3}{27N^2(N+8)^2} \varepsilon^3$$

change de signe à  $N = 4$ , en correspondance avec le changement de stabilité.



## Chapitre 12

# Théorie statistique des champs : développement perturbatif

L'ANALYSE DES CORRECTIONS DOMINANTES à l'approximation quasi-Gaussienne, ou de champ moyen, ainsi que des arguments de groupe de renormalisation, ont montré qu'au moins en dimension  $d = 4 - \varepsilon$ , c'est-à-dire dans un voisinage infinitésimal de la dimension 4, les propriétés universelles des transitions de phase du second ordre peuvent être entièrement décrites par une théorie statistique des champs dans l'espace continu. Au chapitre 10, nous avons utilisé cette idée pour déterminer les fonctions de groupe de renormalisation au premier ordre non trivial en  $\varepsilon$ . Ce calcul était basé sur des hypothèses qu'il est nécessaire de justifier. Nous donnons donc dans ce chapitre, consacré au calcul perturbatif, et dans le suivant où nous relierons théorie de la renormalisation et équations de groupe de renormalisation, un bref aperçu des méthodes de théorie des champs qui permettent de démontrer, dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , c'est-à-dire au sens des séries formelles, les résultats du groupe de renormalisation et de calculer les quantités universelles.

Dans ce chapitre, nous discutons donc le calcul perturbatif des fonctions de corrélation ou des fonctions de vertex exprimées en termes d'intégrales de champ ou intégrales fonctionnelles. Les contributions successives au développement perturbatif sont des valeurs moyennes gaussiennes qui s'obtiennent, par exemple, par le théorème de Wick et qui ont une représentation graphique sous forme de diagrammes de Feynman (définis en section 2.4). Nous illustrons ainsi, de façon diagrammatique, les relations entre les premières fonctions de corrélation connexes et les fonctions de vertex correspondantes.

Bien entendu, ces calculs ont une structure algébrique qui se distingue peu de celle des calculs présentés en sections 2.3 et 2.5 pour les intégrales ordinaires, et en section 5.3 dans le cas de l'intégrale de chemin.

Nous montrons aussi que le calcul de l'intégrale de champ par la méthode du col organise le développement perturbatif comme un développement en nombre de boucles au sens des diagrammes de Feynman.

Enfin, nous avons déjà introduit l'idée de prolongement dimensionnel des diagrammes de Feynman. Nous précisons ici la définition du prolongement dimensionnel et définissons la régularisation dimensionnelle.

## 12.1 Fonctionnelles génératrices

Au chapitre 6 sur le réseau et en sections 9.1.1 et 9.2 dans le continu, nous avons déjà introduit les fonctionnelles génératrices des fonctions de corrélation. Nous nous contentons donc de rappeler par commodité les définitions ici.

Soit  $\sigma(x)$  un champ classique aléatoire muni d'une loi de probabilité, une mesure positive normalisée sur l'espace des champs  $[d\sigma] e^{-\mathcal{H}(\sigma)} / \mathcal{Z}$ , où  $\mathcal{H}(\sigma)$  est le hamiltonien et  $\mathcal{Z}$  la fonction de partition associée.

La fonction de corrélation à  $n$  points,

$$\langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \dots \sigma(x_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int [d\sigma] \sigma(x_1) \sigma(x_2) \dots \sigma(x_n) e^{-\mathcal{H}(\sigma)}, \quad (12.1)$$

peut se déduire de la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\sigma] \exp \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \int d^d x H(x) \sigma(x) \right] \quad (12.2a)$$

$$= \mathcal{Z}(0) \left\langle \exp \int d^d x \sigma(x) H(x) \right\rangle \quad (12.2b)$$

( $\mathcal{Z}$  dans (12.1) est identique à  $\mathcal{Z}(0)$ ). En effet,

$$\langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \dots \sigma(x_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}(0)} \left( \prod_i \frac{\delta}{\delta H(y_i)} \right) \mathcal{Z}(H) \Big|_{H=0}. \quad (12.3)$$

La fonctionnelle

$$\mathcal{W}(H) = \ln \mathcal{Z}(H), \quad (12.4)$$

engendre les fonctions de corrélation connexes :

$$\mathcal{W}(H) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) H(x_1) \dots H(x_n).$$

Dans les théories des champs locales (limites continues de systèmes statistiques avec forces à courte portée), les fonctions connexes satisfont à la propriété d'amas :  $W^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  décroît, de façon algébrique ou exponentielle, quand les points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont séparés en deux sous-ensembles non vides qu'on éloigne l'un de l'autre (section 6.2.1).

*Fonctionnelle génératrice des fonctions de vertex.* En section 9.2, nous avons aussi défini la fonctionnelle génératrice  $\Gamma(M)$  des *fonctions de vertex* (cf. aussi section 6.3) :

$$\Gamma(M) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) M(x_1) \dots M(x_n).$$

$\Gamma(M)$  est la transformée de Legendre de  $\mathcal{W}(H)$  (équations (9.7)) :

$$\mathcal{W}(H) + \Gamma(M) = \int d^d x H(x) M(x), \quad M(x) = \frac{\delta \mathcal{W}(H)}{\delta H(x)}.$$

## 12.2 Théorie des champs gaussienne. Théorème de Wick

En théorie des champs, comme pour d'autres processus aléatoires, la mesure la plus simple est la mesure gaussienne, dont un exemple a été discuté en section 8.4.

*Théorie gaussienne.* Dans le cas gaussien, un hamiltonien invariant par translation peut s'écrire en toute généralité

$$\mathcal{H}_G(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \sigma(x) \mathcal{H}^{(2)}(x-y) \sigma(y). \quad (12.5)$$

Le noyau  $\mathcal{H}^{(2)}(x-y)$  est symétrique, positif et local. Dans les cas les plus simples,  $\mathcal{H}^{(2)}(x-y)$  est un opérateur différentiel polynôme en  $\nabla_x^2$  :

$$\mathcal{H}^{(2)}(x-y) \equiv \mathcal{K}(-\nabla_x^2) \delta^{(d)}(x-y).$$

Plus précisément, nous pouvons écrire l'expression (12.5) sous la forme (cf. expression (10.2))

$$\begin{aligned} & \int d^d x d^d y \sigma(x) \mathcal{H}^{(2)}(x-y) \sigma(y) \\ & \equiv \int d^d x \left\{ \sum_{\mu} \partial_{\mu} \sigma(x) \left( 1 + \sum_{k=1} u_{k+1} (-\nabla_x^2)^k \right) \partial_{\mu} \sigma(x) + m^2 \sigma^2(x) \right\}. \end{aligned}$$

La limite  $m = 0$  correspond à une théorie critique (ou théorie de masse nulle au sens des interactions fondamentales). Pour  $m > 0$  (théorie massive), la longueur de corrélation  $\xi$  est finie :  $\xi \propto 1/m$ .

La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation est alors donnée par l'intégrale de champ

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_G(H) &= \int [d\sigma] \exp[-\mathcal{H}_G(\sigma)] \exp \left[ \int d^d x \sigma(x) H(x) \right] \\ &= \int [d\sigma] \exp \left[ -\mathcal{H}_G(\sigma) + \int d^d x \sigma(x) H(x) \right]. \end{aligned}$$

Le calcul de cette intégrale de champ est une simple généralisation du calcul présenté en section 8.4. En particulier, nous pouvons translater  $\sigma(x)$  d'un champ indépendant de  $\sigma$ , pour éliminer le terme linéaire en  $\sigma$ . Nous notons  $\Delta$  l'inverse de  $\mathcal{H}^{(2)}$  :

$$\int d^d z \Delta(x-z) \mathcal{H}^{(2)}(z-y) = \delta^{(d)}(x-y). \quad (12.6)$$

Nous posons

$$\sigma(x) = \sigma'(x) + \int d^d y \Delta(x-y) H(y). \quad (12.7)$$

La mesure est invariante dans ce changement de variable et l'intégrand devient

$$\mathcal{Z}_G(H) = \int [d\sigma'] \exp[-\mathcal{H}_G(\sigma')] \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^d y H(x) \Delta(x-y) H(y) \right].$$

La dépendance en  $H$  est maintenant explicite. L'intégrale résiduelle ne donne que la normalisation. Son calcul peut être source de difficulté mais est également sans intérêt pour le calcul des fonctions de corrélation. En effet, la mesure doit être normalisée de telle sorte que  $\langle 1 \rangle_G = 1$ , où  $\langle \bullet \rangle_G$  signifie valeur moyenne gaussienne (ou de champ libre dans le contexte de la théorie quantique des champs). Nous concluons

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left[ \int d^d x \sigma(x) H(x) \right] \right\rangle_G &= \mathcal{Z}_G(H) / \mathcal{Z}_G(0) \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^d x d^d y H(x) \Delta(x-y) H(y) \right], \end{aligned} \quad (12.8)$$

Le noyau  $\Delta$ , inverse de  $\mathcal{H}^{(2)}$ , est donc la fonction à deux points gaussienne, et est aussi appelé *propagateur*. Dans une théorie invariante par translation, il est commode d'introduire la représentation de Fourier :

$$\mathcal{H}^{(2)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{-ip \cdot x} \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p), \quad \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) = \int d^d x e^{ip \cdot x} \mathcal{H}^{(2)}(x), \quad (12.9a)$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{ip \cdot x} \tilde{\Delta}(p), \quad \tilde{\Delta}(p) = \int d^d x e^{ip \cdot x} \Delta(x), \quad (12.9b)$$

et donc

$$\tilde{\Delta}(p) \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) = 1.$$

Pour que l'intégrale fonctionnelle existe, il faut que  $\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p)$  soit positif pour  $p \neq 0$ . Si  $\mathcal{H}^{(2)}(x)$  est invariant par rotation d'espace (par le groupe  $O(d)$ ), la fonction  $\Delta(x)$  n'est fonction que de  $|x|$  et  $\tilde{\Delta}(p)$  que de  $|p|$ .

*Fonctions connexes.* La fonctionnelle  $\mathcal{W}_G = \ln \mathcal{Z}_G$  est alors particulièrement simple, comme nous l'avons déjà noté :

$$\mathcal{W}_G(H) - \mathcal{W}_G(0) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y H(x) \Delta(x - y) H(y).$$

Dans le cas gaussien, les fonctions connexes à plus de deux points sont nulles.

*Fonctions de vertex.* Enfin la transformée de Legendre  $\Gamma_G(M)$  est directement liée à l'hamiltonien (section 6.1) puisque

$$\Gamma_G(M) = \Gamma_G(0) + \mathcal{H}_G(M).$$

*Théorème de Wick.* L'expression (12.8) combinée avec les arguments du chapitre 2.2, conduit à une généralisation immédiate des équations (2.13–2.18) ou (5.19), qui exprime le théorème de Wick en théorie des champs :

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^{2s} \sigma(z_i) \right\rangle_G &= \left[ \prod_{i=1}^{2s} \frac{\delta}{\delta H(z_i)} \exp[\mathcal{W}_G(H) - \mathcal{W}_G(0)] \right] \Big|_{H \equiv 0} \\ &= \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{de } \{1, 2, \dots, 2s\}}} \Delta(z_{i_1} - z_{i_2}) \dots \Delta(z_{i_{2s-1}} - z_{i_{2s}}). \end{aligned} \quad (12.10)$$

## 12.3 Développement perturbatif

Nous considérons maintenant un hamiltonien plus général de la forme

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma) + \mathcal{V}_I(\sigma), \quad (12.11)$$

où  $\mathcal{H}_G(\sigma)$  est la forme quadratique (12.5) et  $\mathcal{V}_I(\sigma)$  est un polynôme dans le champ, qui dans le contexte de la théorie quantique des champs est appelé interaction. Dans une théorie locale, c'est-à-dire de la classe que nous avons introduit dans les chapitres précédents,  $\mathcal{V}_I(\sigma)$  est l'intégrale d'une fonction du champ et de ses dérivées :

$$\mathcal{V}_I(\sigma) = \int d^d x V_I[\sigma(x), \partial_\mu \sigma(x), \dots]. \quad (12.12)$$

Notons qu'en théorie quantique des champs, l'hamiltonien  $\mathcal{H}(\sigma)$  est parfois appelé *action euclidienne* en ce sens qu'il est formellement obtenu à partir d'une action classique par le passage à une variable de temps imaginaire.

Bien que la plupart des résultats présentés dans ce chapitre ne soient illustrés que par des hamiltoniens de type (10.1), ces résultats s'appliquent à des théories plus générales.

La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation est donnée par

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\sigma] \exp \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \int d^d x H(x) \sigma(x) \right]. \quad (12.13)$$

### 12.3.1 Développement perturbatif

Le développement perturbatif des fonctions de corrélation s'obtient en développant l'expression (12.13) en puissances de  $H$  et de  $\mathcal{V}_1$ , ne gardant que le terme quadratique  $\mathcal{H}^{(2)}$  dans l'exponentielle. L'interaction (12.12) est une somme de monômes appelés *vertex d'interaction*. Ce développement se réduit alors au calcul de valeurs moyennes gaussiennes de produits de champs de la forme

$$\left\langle \sigma(x_1) \cdots \sigma(x_n) \int d^d y_1 \sigma^{p_1}(y_1) \int d^d y_2 \sigma^{p_2}(y_2) \cdots \int d^d y_k \sigma^{p_k}(y_k) \right\rangle_G. \quad (12.14)$$

(les dérivées possibles n'ont pas été indiquées) et donc au théorème de Wick. Le théorème de Wick fait intervenir la fonction à deux points gaussienne ou propagateur  $\Delta$  (équation (12.6)). Chaque contribution prend la forme d'un produit de propagateurs intégrés sur tous les points qui correspondent à des vertex d'interaction et a une représentation graphique en termes de diagrammes de Feynman (cf. section 2.4).

Le développement perturbatif a une représentation globale formelle. Utilisant la propriété (9.1),

$$\frac{\delta}{\delta H(x)} \exp \left[ \int d^d y H(y) \sigma(y) \right] = \sigma(x) \exp \left[ \int d^d y H(y) \sigma(y) \right],$$

il est possible d'exprimer  $\mathcal{Z}(H)$  en termes de la fonctionnelle gaussienne  $\mathcal{Z}_G(H)$  sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(H) &= \exp \left[ -\mathcal{V}_1 \left( \frac{\delta}{\delta H} \right) \right] \mathcal{Z}_G(H) = \exp \left[ -\mathcal{V}_1 \left( \frac{\delta}{\delta H} \right) \right] \exp [\mathcal{W}_G(H)] \\ &= \mathcal{Z}_G(0) \exp \left[ -\mathcal{V}_1 \left( \frac{\delta}{\delta H} \right) \right] \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^d x d^d y H(x) \Delta(x-y) H(y) \right]. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Combinant les identités (12.3) et (12.15), on peut calculer toutes les fonctions de corrélation du champ  $\sigma$  comme des séries formelles en puissances de l'interaction  $\mathcal{V}_1$ , pour utiliser le langage de la théorie quantique des champs. À chaque monôme contribuant à  $\mathcal{V}_1$ , correspond un opérateur différentiel : un produit de dérivées  $\delta/\delta H$  qui engendre un produit de propagateurs  $\Delta$ .

*Remarque.* Comme nous l'avons déjà noté dans le chapitre 10, le noyau  $\mathcal{H}^{(2)}(x-y)$  ne peut pas être celui du point fixe gaussien  $-\nabla^2 \delta^{(d)}(x-y)$ , car le développement perturbatif contient alors des divergences de courte distance. C'est de nouveau une manifestation de couplage entre les différentes échelles de physique. Ces divergences n'ont pas de signification physique dans la théorie des transitions de phase puisque la fonction à deux points du point fixe n'est qu'une forme asymptotique à grande distance et le réseau, ou plus généralement la structure microscopique, régularise la théorie à courte distance.

Dans le continu, il faut donc ajouter des termes inessentiels correspondant à des dérivées d'ordre supérieur, de façon à ce que le propagateur  $\Delta(x - y)$  soit suffisamment régulier quand  $|x - y| \rightarrow 0$ , en contraste avec la fonction à deux points gaussienne (section 8.4.3), une opération appelée *régularisation*.

En représentation de Fourier, les divergences de courte distance deviennent des divergences de grande impulsion, ou *ultraviolettes* (en théorie quantique des champs les arguments de la transformée de Fourier sont des impulsions ou des énergies). Sur le réseau, elles n'existent pas puisque les impulsions varient dans un domaine borné, une zone de Brillouin. Pour que la théorie des perturbations existe, il faut que  $\tilde{\Delta}(p)$  décroisse suffisamment vite quand  $p \rightarrow \infty$ . Nous supposons donc, dans la suite de ce chapitre, que la décroissance à grande impulsion du propagateur, en représentation de de Fourier, est suffisamment rapide pour rendre le développement perturbatif convergent à tous les ordres.

### 12.3.2 Diagrammes de Feynman : boucles

Les diagrammes de Feynman ont déjà été définis en section 2.4. À chaque monôme contribuant à l'interaction on associe un vertex, c'est-à-dire un point d'où part un nombre de lignes égal au degré du monôme. Un propagateur est représenté par une ligne qui joint les points qui correspondent à ses arguments. Ces points sont soit des vertex, soit un point correspondant aux arguments de la fonction de corrélation. Dans ce qui suit, on appelle *ligne interne* toute ligne qui relie deux vertex. Au contraire, une ligne *externe* joint un vertex à un point de la fonction de corrélation.

Dans une théorie des champs locale, chaque vertex correspond à une intégrale d'espace d'un produits de champs et de leurs dérivées (représentation (12.12)). Chaque vertex correspond à un argument sur lequel il faut intégrer.

Après transformation de Fourier, à chaque ligne est attachée une impulsion, argument du propagateur en représentation de Fourier. Ceci suppose de définir une orientation des lignes : changer l'orientation change le signe de l'impulsion attachée à la ligne. En représentation de Fourier, à cause de l'invariance par translation, à chaque vertex, la somme des impulsions entrantes est nulle : on retrouve les lois de Kirchoff pour les intensités de courant dans un circuit électrique. Enfin, on intègre sur toutes les impulsions libres.

*Remarque.* Pour tout diagramme connexe, on démontre la relation entre nombre de *boucles*  $L$ , nombre  $I$  de lignes internes, ou de propagateurs reliant des vertex, et nombre de vertex  $n$  :

$$L = I - n + 1. \quad (12.16)$$

Une façon d'établir cette relation est de procéder de la manière suivante :

- (i) Si on coupe une ligne interne, on supprime aussi une boucle, donc  $L - I$  est une constante.

- (ii) Un diagramme sans boucle est un arbre. Chaque fois qu'on supprime un vertex sur la frontière d'un arbre, on transforme une ligne interne en ligne externe, donc  $I - n$  est constant. Enfin, tout diagramme se réduit de cette manière à un vertex, donc si  $L = I = 0$ ,  $n = 1$ .

En représentation de Fourier,  $L$  est aussi le nombre d'impulsions libres sur lesquelles il reste à intégrer. En effet, ce nombre est égal au nombre de propagateurs moins le nombre de vertex à cause de la conservation de l'impulsion à chaque vertex plus un, car la conservation de l'impulsion totale rentrant dans le diagramme est déjà satisfaite.

*Remarque.* Des interactions locales peuvent aussi contenir des dérivées du champ  $\sigma(x)$ . Dans ce cas, l'évaluation de l'expression (12.14) fait apparaître aussi des dérivées du propagateur. La représentation en termes de diagrammes de Feynman tels que nous les avons définis ici n'est plus fidèle puisqu'elle n'indique pas l'emplacement des dérivées. Il existe une représentation plus fidèle qui est obtenue en séparant les points aux vertex et en plaçant des flèches sur les lignes.

### 12.3.3 Diagrammes connexes et 1-irréductibles

Dans la représentation en diagrammes de Feynman, le développement perturbatif de  $\mathcal{Z}(H)$  contient des contributions non connexes au sens des graphes. Il découle des arguments de la section 2.3 que  $\mathcal{W}(H)$ , en revanche, est la somme des contributions connexes. Enfin, la fonctionnelle  $\Gamma(M)$  a les propriétés perturbatives les plus simples : on démontre, en effet, que son développement ne contient que des diagrammes 1-irréductibles, c'est-à-dire qu'il est impossible de séparer en plusieurs composantes connexes en ne coupant qu'une ligne. Ce sont ces diagrammes qui sont à la base de la théorie de la renormalisation.

Représentons de manière graphique les premières relations entre fonctions connexes et fonctions de vertex. Nous définissons :

$$W^{(2)} = \text{---} \bigcirc \text{---}, \quad \Gamma^{(n)} = \text{---} \bigcirc \text{---}$$

FIG. 12.1 - Représentations de la fonction de corrélation à deux points connexe et de la fonction de vertex à  $n$  points.

Dans la représentation graphique de  $\Gamma^{(n)}$ , nous avons mis en évidence la propriété qu'aux points de la frontière du graphe ne sont pas attachés des propagateurs, à la différence des fonctions connexes.

Explicitons d'abord la relation entre fonctions à deux points :

$$\int d^d z W^{(2)}(x-z) \Gamma^{(2)}(z-y) = \delta^{(d)}(x-y).$$

Il est commode de poser

$$\Gamma^{(2)}(x-y) = \mathcal{H}^{(2)}(x-y) + \Sigma(x-y),$$

où nous avons séparé la contribution gaussienne  $\mathcal{H}^{(2)}$  de la somme  $\Sigma$  des contributions dues aux interactions engendrées par  $\mathcal{V}_1$ , appelée aussi opérateur de masse. En terme de  $\Sigma$ , le développement perturbatif de  $W^{(2)}$  peut être organisé comme une série géométrique (figure 12.2) :

$$W^{(2)}(x-y) = \Delta(x-y) - \int d^d z_1 d^d z_2 \Delta(x-z_1) \Sigma(z_1-z_2) \Delta(z_2-y) + \dots$$

La figure 12.1 donne la représentation d'un terme de la somme en termes de  $\Sigma$ , c'est-à-dire de somme de termes 1-irréductibles.

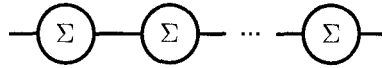


FIG. 12.2 – Contribution à la fonction à deux points connexe  $W^{(2)}$ .

Les représentations graphiques des fonctions de corrélation  $W^{(3)}$  et  $W^{(4)}$ , par exemple, en termes des fonctions de vertex correspondantes et de  $W^{(2)}$  sont alors données par les figures 12.3 et 12.4, respectivement.

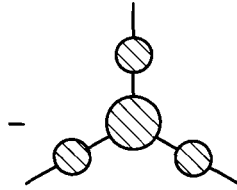
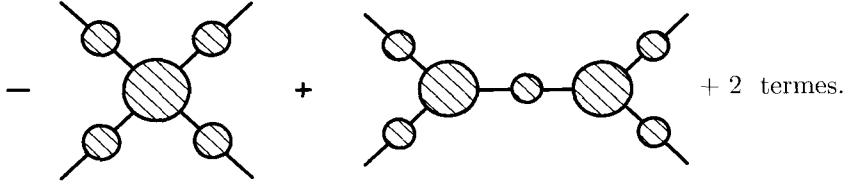


FIG. 12.3 – La fonction connexe à trois points  $W^{(3)}$ .

#### 12.3.4 Exemple : l'interaction $\sigma^4$

Considérons l'exemple particulièrement utile, du point de vue des phénomènes critiques, de l'interaction

$$\mathcal{V}_1(\sigma) \equiv \frac{1}{4!} g \int d^d x \sigma^4(x). \quad (12.17)$$

FIG. 12.4 – La fonction connexe à quatre points  $W^{(4)}$ .

Pour déterminer le premier ordre non trivial en  $g$  des fonctions de groupe de renormalisation, il faut développer les fonctions à deux et quatre points jusqu'à l'ordre  $g^2$ . On trouve alors des expressions directement adaptées des résultats (2.28) et (2.33) (*cf.* aussi section 5.4.2).

*Fonction à deux points.* La fonction à deux points à l'ordre  $g^2$  est donnée par

$$\langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle = (a) - \frac{1}{2}g(b) + \frac{1}{4}g^2(c) + \frac{1}{4}g^2(d) + \frac{1}{6}g^2(e) + O(g^3).$$

Notons que trois contributions supplémentaires qui se factorisent en

$$\begin{aligned} &\langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle_G \langle \sigma^4(y) \rangle_G, \quad \langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \sigma^4(y_1) \rangle_G \langle \sigma^4(y_2) \rangle_G \text{ et} \\ &\langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle_G \langle \sigma^4(y_1) \sigma^4(y_2) \rangle_G, \end{aligned}$$

se compensent après division par la fonction de partition  $\mathcal{Z}$ . En théorie quantique des champs, les diagrammes connexes contribuant à  $\ln \mathcal{Z}$  sont aussi appelés diagrammes du vide, dans la mesure où du point de vue quantique ils contribuent à l'énergie de l'état fondamental, appelé aussi vide (*cf.* équation (4.48)).

Dans ce développement (a) est le propagateur et (b) le diagramme de Feynman qui apparaît à l'ordre  $g$ , et tous deux sont exhibés en figure 2.4 (section 2.5.1). Les diagrammes (c), (d) et (e) sont exhibés en figure 2.5 (section 2.5.1). De façon plus explicite, on trouve donc (ici  $W^{(2)} = Z^{(2)}$ ) (*cf.* équation (2.28))

$$\begin{aligned} W^{(2)}(x_1 - x_2) &= \Delta(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}g \int d^d y \Delta(x_1 - y) \Delta(0) \Delta(y - x_2) \\ &\quad + g^2 \int d^d y_1 d^d y_2 \left[ \frac{1}{4} \Delta^2(0) \Delta(x_1 - y_1) \Delta(y_1 - y_2) \Delta(y_2 - x_2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \Delta(0) \Delta^2(y_1 - y_2) \Delta(x_1 - y_2) \Delta(x_2 - y_2) \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \Delta(x_1 - y_1) \Delta^3(y_1 - y_2) \Delta(y_2 - x_2) \right] + O(g^3). \end{aligned}$$

Seul le diagramme (c) est 1-réductible et il disparaît dans la transformation de Legendre. Par ailleurs, il faut ôter les propagateurs externes. On trouve

alors (cf. section 6.5)

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(x_1 - x_2) &= \mathcal{H}^{(2)}(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}g\delta(x_1 - x_2)\Delta(0) \\ &\quad - \frac{1}{4}g^2\Delta(0) \int d^d y \Delta^2(y)\delta(x_1 - x_2) - \frac{1}{6}g^2\Delta^3(x_1 - x_2) + O(g^3),\end{aligned}$$

qui est une expression plus simple.

*Transformée de Fourier.* Comme nous l'avons déjà noté, dans une théorie invariante par translation les relations entre différents types de fonctions de corrélation ont des formes plus simples en représentation de Fourier. Nous introduisons donc les fonctions définies en (9.6) et (9.8) et les représentations (12.9b) et (12.9a) du propagateur et de son inverse. Avec ces notations, la fonction de vertex à deux points devient

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) &= \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) + \frac{g}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(q) - \frac{g^2}{4} \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(q_1) \int \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}^2(q_2) \\ &\quad - \frac{g^2}{6} \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(q_1) \tilde{\Delta}(q_2) \tilde{\Delta}(p - q_1 - q_2) + O(g^3).\end{aligned}\quad (12.18)$$

La fonction à deux points s'en déduit alors en développant la relation

$$\widetilde{W}^{(2)}(p)\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = 1.$$

*La fonction à quatre points.* La fonction à quatre points à l'ordre  $g^2$  est donnée par (cf. équation (2.33))

$$\begin{aligned}\langle \sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma(x_3)\sigma(x_4) \rangle &= [(a)_{12} (a)_{34} + 2 \text{ termes}] - \frac{g}{2} [(a)_{12} (b)_{34} \\ &\quad + 5 \text{ termes}] - g(f) + g^2 \left\{ (a)_{12} \left[ \frac{1}{4} ((c)_{34} + (d)_{34}) + \frac{1}{6} (e)_{34} \right] + 5 \text{ termes} \right\} \\ &\quad + \frac{g^2}{4} [(b)_{12} (b)_{34} + 2 \text{ termes}] + \frac{g^2}{2} [(g) + 3 \text{ termes}] + \frac{g^2}{2} [(h) + 2 \text{ termes}] \\ &\quad + O(g^3).\end{aligned}$$

Les diagrammes (f), (g) et (h) sont exhibés en figure 2.6 (section 2.5.2). La notation, par exemple,  $(a)_{12}$  signifie le diagramme (a), contribuant à la fonction à deux points, avec comme arguments  $x_1$  et  $x_2$ . Enfin, les termes qu'il faut ajouter sont obtenus en échangeant les arguments externes de façon à restaurer la symétrie par permutation de la fonction à quatre points.

Les diagrammes tels  $a_{12}a_{34}$ , qui s'expriment en termes de la fonction à deux points, ne sont pas connexes et se factorisent en un produit de fonctions qui dépendent de sous-ensembles disjoints de variables. L'origine de cette propriété a déjà été indiquée en section 2.3.

De nouveau, comme dans le cas de la fonction à deux points, nous avons omis les diagrammes non connexes dans lesquels un facteur n'a pas d'arguments externes. Ces diagrammes sont compensés par les contributions perturbatives de la fonction de partition  $\mathcal{Z}$  dans l'expression (12.3).

La fonction à quatre points connexe en notation plus explicite se réduit à

$$\begin{aligned}
W^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -g \int d^d y \Delta(x_1 - y) \Delta(y - x_2) \Delta(x_3 - y) \Delta(x_4 - y) \\
& + \frac{1}{2} g^2 \int d^d y_1 d^d y_2 \Delta(x_1 - y_1) \Delta(x_2 - y_1) \Delta(x_3 - y_2) \Delta(x_4 - y_2) \Delta^2(y_1 - y_2) \\
& + 2 \text{ termes} \\
& + \frac{1}{2} g^2 \int d^d y_1 d^d y_2 \Delta(y_1 - y_1) \Delta(y_1 - y_2) \Delta(x_1 - y_1) \Delta(x_2 - y_2) \Delta(x_3 - y_2) \\
& \times \Delta(x_4 - y_2) + 3 \text{ termes} + O(g^3).
\end{aligned}$$

La transformation de Legendre est simple aussi pour les fonction à quatre points dans cette théorie : il suffit ici d'enlever les contributions aux fonctions à deux points sur les lignes externes, et de changer de signe. On trouve (*cf.* section 6.5)

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & g \delta^{(d)}(x_1 - x_2) \delta^{(d)}(x_1 - x_3) \delta^{(d)}(x_1 - x_4) \\
& - \frac{1}{2} g^2 \delta^{(d)}(x_1 - x_2) \delta^{(d)}(x_3 - x_4) \Delta^2(x_1 - x_3) + 2 \text{ termes} + O(g^3).
\end{aligned}$$

Les transformées de Fourier respectives sont alors données par

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = & \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) \left[ -g \right. \\
& + \frac{g^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(p_1 + p_2 - q) \tilde{\Delta}(q) + 2 \text{ termes} \\
& \left. + \frac{g^2}{2} \tilde{\Delta}(p_1) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(q) + 3 \text{ termes} \right] + O(g^3),
\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g - \frac{g^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(p_1 + p_2 - q) \tilde{\Delta}(q) + 2 \text{ termes} + O(g^3). \quad (12.19)$$

## 12.4 Développement en nombre de boucles

Il existe une autre manière d'organiser le développement perturbatif de l'intégrale de champ qui est basée sur son calcul par la méthode du col (*cf.* section 2.6). Dans l'exemple de l'intégrale (12.2a), le col est donné par le minimum  $\sigma_c$  de la fonctionnelle

$$\mathcal{H}(\sigma, H) = \mathcal{H}(\sigma) - \int d^d x H(x) \sigma(x),$$

qui est solution de l'équation

$$\frac{\delta \mathcal{H}(\sigma, H)}{\delta \sigma(x)} = 0.$$

Faisant le changement de variables  $\sigma \mapsto \chi$  :

$$\sigma(x) = \sigma_c(H; x) + \chi(x),$$

on développe  $\mathcal{H}(\sigma, H)$  autour de la solution  $\sigma_c$  :

$$\mathcal{H}(\sigma, H) = \mathcal{H}(\sigma_c, H) + \frac{1}{2!} \int d^d x_1 d^d x_2 \chi(x_1) \frac{\delta^2 \mathcal{H}(\sigma)}{\delta \sigma(x_1) \delta \sigma(x_2)} \Big|_{\sigma=\sigma_c} \chi(x_2) + O(\chi^3).$$

On garde le terme quadratique en  $\chi$  dans l'exponentielle et développe les termes d'ordre supérieur en  $\chi$ . On ramène ainsi le calcul à des intégrales gaussiennes. Les deux premiers termes d'un tel développement ont déjà été donnés dans le formalisme avec variables discrètes en section 6.4.

### 12.4.1 Ordre dominant : diagrammes en arbre

En approximant l'intégrale de champ par sa valeur au col, on trouve la contribution dominante à la fonctionnelle connexe

$$\mathcal{W}_0(H) = -\mathcal{H}(H, \sigma_c) = -\mathcal{H}(\sigma_c) + \int d^d x H(x) \sigma_c(x). \quad (12.20)$$

On vérifie alors que la transformée de Legendre  $\Gamma_0$  de  $\mathcal{W}_0(H)$  est donnée par (section 6.4)

$$\Gamma_0(M) = \mathcal{H}(M). \quad (12.21)$$

La théorie des perturbations ordinaire est obtenue en développant la solution  $\sigma_c(H)$  en puissance de  $H$ . Les diagrammes ainsi obtenus sont des diagrammes en arbre (sans boucle). Pour l'hamiltonien (12.11), le développement prend la forme

$$\begin{aligned} \sigma_c(x) &= \int d^d y \Delta(x-y) H(y) - \int d^d y \Delta(x-y) \frac{\delta \mathcal{V}_1(\sigma_c)}{\delta \sigma(y)} \\ &= \int d^d y \Delta(x-y) H(y) - \int d^d y \Delta(x-y) \frac{\delta \mathcal{V}_1}{\delta \sigma_c(y)}(\Delta H) + \dots, \end{aligned} \quad (12.22)$$

où l'argument  $\Delta H$  de  $\mathcal{V}_1$  représente la substitution

$$\sigma_c(x) \mapsto \Delta H \equiv \int d^d y \Delta(x-y) H(y).$$

Si, par exemple,

$$\mathcal{V}_1(\sigma) = \frac{g}{4!} \int d^d x \sigma^4(x),$$

le développement de  $\sigma_c$  en puissances de  $H$  prend la forme diagrammatique :

$$\sigma_c(x) = x \text{ --- } H - \frac{g}{3!} x \text{ --- } \begin{array}{c} \diagup H \\ \text{--- } H \\ \diagdown H \end{array} + \dots$$

FIG. 12.5 – Développement de  $\sigma_c$  en puissances de  $H$ .

### 12.4.2 Ordre suivant : diagrammes à une boucle

Ne gardant que le terme quadratique en  $\chi$  dans le développement de  $\mathcal{H}(\sigma)$ , on calcule l'intégrale gaussienne et on trouve

$$\mathcal{Z}(H) \propto \mathcal{Z}_0(H) \left[ \det \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \sigma_c(x_1) \delta \sigma_c(x_2)} \right]^{-1/2}, \quad (12.23)$$

où la normalisation indépendante de  $H$  dépend du processus limite qui fait passer du réseau au continu. Posant

$$\mathcal{W}(H) = \mathcal{W}_0(H) + \mathcal{W}_1(H) + \dots, \quad (12.24)$$

on trouve la contribution suivante à la fonctionnelle connexe (cf. expression (2.49))

$$\mathcal{W}_1(H) = -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \sigma_c(x_1) \delta \sigma_c(x_2)}, \quad (12.25)$$

où l'identité  $\ln \det = \text{tr} \ln$  a été utilisée. On remarque que la fonctionnelle  $\mathcal{W}_1(H)$  développée en puissances de  $H$  engendre tous les diagrammes connexes à une boucle. La figure 12.6 montre une contribution typique à  $\mathcal{W}_1(H)$ .

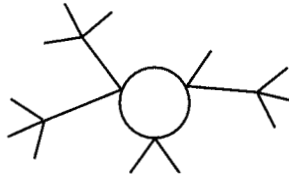


FIG. 12.6 – Exemple de contribution connexe à une boucle.

Enfin, comme conséquence de la propriété (6.20), les corrections dominantes à  $\mathcal{W}$  et  $\Gamma$  sont opposées. Les contributions à une boucle à la fonctionnelle  $\Gamma$  sont donc engendrées par (cf. équations (6.31) et (10.9))

$$\Gamma_1(M) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta M(x_1) \delta M(x_2)}, \quad (12.26)$$

où  $M$  est l'aimantation locale.

Plus généralement, le développement par la méthode du col organise les diagrammes de Feynman par nombre de boucles croissantes. On l'appelle d'ailleurs développement en nombre de boucles.

Pour établir cette propriété, on introduit un paramètre  $\hbar$  et remplace  $\mathcal{H}(\sigma, H)$  par  $\mathcal{H}(\sigma, H)/\hbar$ . La méthode du col produit un développement en puissances de  $\hbar$ . Il est commode de définir  $\mathcal{W} = \hbar \ln \mathcal{Z}$  de façon à ce que les contributions en arbre à  $\mathcal{W}$  et  $\Gamma$  soient d'ordre  $\hbar^0$ . L'introduction du paramètre  $\hbar$  a pour effet de remplacer le propagateur  $\Delta$  par  $\hbar\Delta$  (on inverse le coefficient de  $\sigma^2$ ) et de diviser tous les vertex par  $\hbar$ . Pour un diagramme 1-irréductible et en appelant  $I$  le nombre de propagateurs,  $n$  le nombre total de vertex, on trouve donc un facteur  $\hbar^{I-n+1}$ , le dernier facteur  $\hbar$  venant de la définition de  $\mathcal{W}$ . Utilisant la relation (12.16), on reconnaît le facteur  $\hbar^L$  où  $L$  est le nombre de boucles.

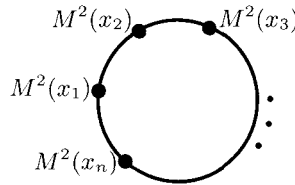


FIG. 12.7 – Contribution à la fonctionnelle 1-irréductible à une boucle.

*Exemple.* Considérons de nouveau la théorie  $\sigma^4$  (équation (12.17)). Les deux premiers termes du développement ont déjà été donnés en section 10.2. Dans ce cas, symboliquement,

$$\Gamma_1(M) - \Gamma_1(0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln \left( \mathbf{1} + \frac{1}{2} g \Delta M^2 \right),$$

où  $\Delta M^2$  est l'opérateur associé au noyau

$$[\Delta M^2](x, y) = \Delta(x - y) M^2(y).$$

En développant en puissances de  $M^2$  (cf. aussi section A.3),

$$\Gamma_1(M) - \Gamma_1(0) = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{g^n}{n 2^{n+1}} \operatorname{tr} (\Delta M^2)^n,$$

on engendre les diagrammes à une boucle 1-irréductibles de la figure 12.7 :

$$\operatorname{tr} (\Delta M^2)^n = \int \prod_{i=1}^n d^d x_i M^2(x_i) \Delta(x_i - x_{i-1}) \quad \text{avec} \quad x_n = x_0. \quad (12.27)$$

Introduisant les représentations de Fourier (12.9b) et

$$M(x) = \int d^d p e^{ipx} \tilde{M}(p),$$

on peut récrire ce développement

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\Delta M^2)^n \\
&= \int \left( \prod_{i=1}^{2n} d^d p_i \tilde{M}(p_i) \right) \left( \prod_{j=1}^n d^d x_j \frac{d^d q_j}{(2\pi)^d} e^{i(x_j(p_{2j}+p_{2j-1}) - x_{j-1}x_j)} \tilde{\Delta}(q_j) \right) \\
&= \int \left( \prod_{i=1}^{2n} d^d p_i \tilde{M}(p_i) \right) \delta^{(d)}\left(\sum_i p_i\right) \int d^d q \prod_{j=1}^n \tilde{\Delta}(q_j) \tag{12.28}
\end{aligned}$$

avec

$$q_1 = q, \quad q_{j+1} - q_j = p_{2j-1} + p_{2j}, \quad q_{n+1} = q_1.$$

## 12.5 Prolongement et régularisation dimensionnels

Une technique s'est révélée particulièrement utile autant dans l'étude de la théorie quantique des champs telle qu'elle s'applique à la théorie des interactions fondamentales, que dans celle des phénomènes critiques, le prolongement dimensionnel des diagrammes de Feynman. Il conduit à une définition, mais qui est purement perturbative, d'une théorie des champs en dimension  $d$  non entière. La régularisation dimensionnelle et par conséquent, la soustraction minimale en sont issues, mais aussi les formes variées du développement en  $\varepsilon$  que nous avons discutées au chapitre 10.

### 12.5.1 Prolongement dimensionnel

L'idée essentielle, qui permet d'aboutir à un prolongement dimensionnel des diagrammes de Feynman, consiste à représenter le propagateur comme une transformée de Laplace de la forme

$$\tilde{\Delta}(p) = \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) e^{-t(p^2+m^2)}, \tag{12.29}$$

où  $\Lambda$  est un paramètre caractérisant l'échelle de courte distance et la fonction  $\varrho(t)$  est positive et satisfait la condition

$$|1 - \varrho(t)| < C e^{-\sigma t} \quad (\sigma > 0) \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty.$$

Un exemple simple est

$$\begin{cases} \varrho(t) = 0 & \text{pour } t < 1, \\ \varrho(t) = 1 & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

Dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on retrouve la fonction à deux points du point fixe gaussien pour  $m = 0$  et en général la fonction à deux points gaussienne dans le domaine critique correspondant à l'hamiltonien (8.29).

De plus, on suppose que, pour  $|p| \rightarrow \infty$ , le propagateur  $\tilde{\Delta}(p)$  tend vers zéro suffisamment vite (c'est-à-dire plus vite que toute puissance) pour que les diagrammes de Feynman soient finis en toute dimension pour  $m \neq 0$  et au dessus d'une dimension  $d_{\min} > 2$  pour la théorie critique. Ceci implique que la fonction  $\varrho(t)$  s'annule plus vite que toute puissance pour  $t \rightarrow 0$ .

Dans les diagrammes de Feynman, les intégrations sur les impulsions libres correspondant aux boucles deviennent des intégrations gaussiennes qui peuvent être effectuées en toute dimension  $d$ . La dépendance dans la variable  $d$  devient alors explicite.

À cause de la condition de décroissance rapide du propagateur, on obtient des fonctions méromorphes de  $d$ , analytiques pour  $\text{Re } d > d_{\min}$  pour des théories critiques ( $m = 0$ ) et entières si la longueur de corrélation est finie (théories massives).

### 12.5.2 Régularisation dimensionnelle

Après prolongement dimensionnel, on choisit  $d$  complexe,  $\text{Re } d < d_c$  tel que naïvement toutes les intégrales convergent au sens du comptage de puissances. Alors, les intégrales ont des limites *indépendantes de la fonction  $\varrho(t)$*  pour  $\Lambda \rightarrow \infty$  et définissent des fonctions méromorphes de la dimension, qui ont des pôles simples ou multiples sur l'axe réel, correspondant aux divergences des diagrammes avec propagateur de la forme  $1/(p^2 + m^2)$ . Cette construction est appelée *régularisation dimensionnelle*.

Prolongement et régularisation dimensionnels satisfont aux importantes propriétés formelles suivantes :

- (i)  $\int d^d p F(p+q) = \int d^d p F(p)$  translation
- (ii)  $\int d^d p F(\lambda p) = |\lambda|^{-d} \int d^d p F(p)$  dilatation
- (iii)  $\int d^d p d^{d'} q f(p)g(q) = \int d^d p f(p) \int d^{d'} q g(q)$  factorisation

Les deux premières conditions impliquent l'invariance par changement de variables affine. Cette invariance joue un rôle essentiel dans la préservation des symétries de certaines théories des champs.

Dans le cas de la théorie  $\sigma^4$  en dimension  $d$ , la régularisation dimensionnelle élimine, en particulier, automatiquement les déviations au point critique. Elle élimine aussi tous les contributions inessentiels. Mais elle introduit des divergences sous forme de pôles simples ou multiples quand  $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$ , qui remplacent des contributions qui divergent logarithmiquement quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , et qu'il faut éliminer par une opération de *renormalisation*, un sujet discuté au chapitre 13.

*Une conséquence curieuse.* On rencontre parfois l'intégrale

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k k^{-2\alpha},$$

en particulier, dans les théories de masse nulle. Les propriétés de la régularisation dimensionnelle (invariance par dilatation) impliquent

$$\int d^d k k^{-2\alpha} = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq d/2 \Rightarrow \int d^d k k^{-2\alpha} \equiv 0.$$

Examinons l'intégrale avec un facteur de coupure  $\varrho(t)$  qui la rend initialement convergente :

$$D_\alpha(\Lambda, d) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int d^d k \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) t^{\alpha-1} e^{-tk^2}.$$

On voit qu'en remplaçant  $\varrho(t)$  par 1, on retrouve bien l'intégrale de départ après intégration sur  $t$ . En intégrant sur  $k$  d'abord, on trouve

$$D_\alpha(\Lambda, d) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) t^{\alpha-1-d/2}.$$

On voit maintenant que l'intégrale converge pour  $\text{Re } d > 2\alpha$ , domaine dans lequel la fonction de  $d$  est holomorphe. Changeant  $t\Lambda^2$  en  $t$ , on obtient

$$D_\alpha(\Lambda, d) = \Lambda^{d-2\alpha} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \varrho(t) t^{\alpha-1-d/2}.$$

La singularité de l'intégrale est due au comportement à  $t \rightarrow \infty$ . On peut séparer les différentes contributions

$$\begin{aligned} D_\alpha(\Lambda, d) &= \frac{\Lambda^{d-2\alpha}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ \int_0^1 dt \varrho(t) t^{\alpha-1-d/2} + \int_1^\infty dt (\varrho(t) - 1) t^{\alpha-1-d/2} \right] \\ &+ \frac{\Lambda^{d-2\alpha}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2}{d-2\alpha}. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Les deux intégrales sont des fonctions entières de  $d$  et donc cette représentation définit la fonction dans tout le plan complexe. La seule singularité est le pôle simple à  $d = 2\alpha$ . Suivant la procédure indiquée plus haut, nous choisissons  $d$  complexe,  $\text{Re } d < 2\alpha$  et faisant tendre  $\Lambda \rightarrow \infty$  : la limite est alors nulle.

On peut vérifier sur un exemple que ce résultat, qui peut paraître quelque peu étrange, est bien cohérent avec la régularisation dimensionnelle. L'intégrale

$$I = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{p^2(p^2 + 1)}$$

peut être calculée de deux façons différentes. La première s'appuie sur la décomposition

$$\int d^d p \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) = - \int \frac{d^d p}{p^2 + 1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \int_0^\infty dt e^{-t(p^2+1)} \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt t^{-d/2} e^{-t} = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1-d/2). \end{aligned}$$

On peut aussi faire le calcul direct. Le résultat se déduit immédiatement du premier calcul de la section 12.5.3 et est en accord avec le résultat ci-dessus.

*Régularisation dimensionnelle et théories critiques.* Cette propriété doit inciter à une certaine prudence dans l'utilisation de la régularisation dimensionnelle dans des théories critiques, c'est-à-dire de masse nulle. Dans ces modèles (comme le modèle  $\sigma$  non linéaire du chapitre 15), on rencontre une intégrale de ce type :  $\int d^d k/k^2$ . En dimension 2, cette intégrale est à la fois divergente pour  $k \rightarrow 0$  et  $k \rightarrow \infty$ . Dans ce cas, une utilisation naïve de la régularisation dimensionnelle conduit à un résultat indésirable.

Pour s'en convaincre, prenons le point de vue du prolongement dimensionnel et partons de  $d > 2$  avec un facteur de coupure (12.29). De l'expression (12.30), on déduit

$$\int \frac{d^d k}{k^2} \propto \frac{\Lambda^{d-2}}{d-2}.$$

Quand  $d \rightarrow 2$ , cette intégrale diverge. Cette divergence, pour  $k \rightarrow 0$ , a un sens physique : elle interdit l'existence de bosons de Goldstone (des champs de masse nulle) à deux dimensions, et donc d'une brisure de symétrie continue (section 7.7).

Si, au contraire, on introduit une masse  $m$  et on part de  $d < 2$ , quand  $d \rightarrow 2$  on trouve

$$\int^\Lambda \frac{d^d k}{k^2 + m^2} = A_d \frac{\pi}{2 \sin(\pi d/2)} m^{d-2} \underset{d \rightarrow 2}{\sim} -A_d \frac{m^{d-2}}{d-2}, \quad A_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Cette fois, nous avons procédé à une régularisation dimensionnelle et le pôle à  $d = 2$  est une divergence pour  $k \rightarrow \infty$ , d'ailleurs de signe opposé à la divergence précédente. En dimension 2, la régularisation dimensionnelle naïve conduit à compenser une divergence UV ( $k \rightarrow \infty$ ) par une divergence IR ( $k \rightarrow 0$ ) ce qui est physiquement absurde. Dans les théories critiques, il ne faut utiliser la régularisation dimensionnelle que pour des dimensions où il n'apparaît pas de divergences de longue distance ou d'impulsion nulle.

### 12.5.3 Exemples

*Fonction à deux points à une boucle.* Le seul diagramme à une boucle qui contribue à la fonction de vertex à deux points dans la théorie  $\sigma^4$  est le diagramme (b) de la figure 2.4 (section 2.5.1) :

$$(b) \equiv \Omega_d(m) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{k^2 + m^2}. \quad (12.31)$$

À ce diagramme, il faut soustraire sa valeur à  $m = 0$  de façon à ce que la théorie reste critique pour  $m = 0$ . Par ailleurs, on modifie le propagateur à courte distance comme indiqué en (12.29) :

$$\Omega_d(m) - \Omega_d(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) e^{-tk^2} (e^{-tm^2} - 1). \quad (12.32)$$

Après intégration sur  $k$ , on obtient la forme prolongée en dimension :

$$\Omega_d(m) - \Omega_d(0) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) t^{-d/2} (e^{-tm^2} - 1).$$

Cette intégrale converge pour  $\text{Re } d > 2$  où elle définit une fonction analytique. Nous ne nous intéressons qu'au comportement dans la limite  $m \rightarrow 0$ , qui est aussi le comportement  $\Lambda \rightarrow \infty$ , pour  $d = 4 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  positif et infinitésimal. Pour  $d < 4$  fixé, la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  existe et on peut donc remplacer  $\varrho$  par 1. Mais la correction dominante est d'ordre  $\Lambda^{-\varepsilon}$  qu'on ne peut pas négliger dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il nous faut donc les deux premiers termes du développement :

$$\begin{aligned} \Omega_d(m) - \Omega_d(0) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt t^{-d/2} (e^{-tm^2} - 1) \\ &+ \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt (\varrho(t\Lambda^2) - 1) t^{-d/2} (e^{-tm^2} - 1). \end{aligned}$$

La première intégrale converge pour  $2 < \text{Re } d < 4$  et, après intégration par parties, se ramène à une fonction  $\Gamma$ . La deuxième intégrale est une fonction de  $m^2$  holomorphe à  $m = 0$ . Nous n'avons besoin que du premier terme et, donc,

$$\Omega_d(m) - \Omega_d(0) = \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2} + a(d) m^2 \Lambda^{d-4} + O(m^4 \Lambda^{d-6}), \quad (12.33)$$

avec

$$a(d) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt (1 - \varrho(t)) t^{1-d/2}. \quad (12.34)$$

Le terme dominant pour  $m \rightarrow 0$  ne dépend pas de la fonction  $\varrho$  et donc de la structure de courte distance. La fonction  $a(d)$  dépend de la fonction  $\varrho$  explicite, mais, pour  $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$ , elle a un pôle dont le résidu est indépendant de  $\varrho$ , qui compense le pôle du coefficient de  $m^{d-2}$  :

$$a(d) \underset{d \rightarrow 4}{\sim} \frac{1}{8\pi^2 \varepsilon}.$$

Dans un développement en  $\varepsilon$ , on trouve

$$\begin{aligned} \Omega_d(m) - \Omega_d(0) &\underset{m \rightarrow 0, d \rightarrow 4}{\sim} \frac{N_d m^2}{\varepsilon} (\Lambda^{-\varepsilon} - m^{-\varepsilon} + \text{const.}) \\ &\underset{m \rightarrow 0, d \rightarrow 4}{\sim} N_d m^2 \ln(m/\Lambda) + O(\varepsilon) + O(m^4), \end{aligned}$$

où

$$N_d = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} = \frac{1}{8\pi^2} + O(\varepsilon),$$

est un facteur fonction entière de  $d$  qu'il n'est pas utile de développer. En effet, le rapport  $N_d/N_4$  peut être absorbé dans une redéfinition du paramètre de développement.

Le facteur  $\ln(\Lambda/m)$  est directement lié au facteur  $\ln \lambda$  de l'équation (10.27).

Enfin, notons qu'en régularisation dimensionnelle l'expression se réduit à

$$\Omega_d(m) = \Omega_d(m) - \Omega_d(0) = \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2}. \quad (12.35)$$

La fonction  $\Gamma$  est méromorphe et cette expression est donc bien une fonction méromorphe de  $d$  avec un pôle simple à  $d = 2$  correspondant à la soustraction du terme avec propagateur critique, et des pôles à  $d = 4, 6, \dots$  qui sont conséquences directes de la divergence à grande impulsion (ultraviolette, UV), ou courte distance du diagramme de Feynman limite pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Dans le développement en  $\varepsilon$ , le terme  $m^2 \ln m$  n'est pas affecté, mais un terme singulier en  $m^2/\varepsilon$  s'y ajoute, qu'il faut compenser par *renormalisation*.

*Fonction à quatre points à une boucle.* Considérons le diagramme à une boucle contribuant à la fonction de vertex à quatre points dans la théorie  $\sigma^4$  (diagramme (g) de la figure 2.6, section 2.5.2). En régularisation dimensionnelle, on trouve

$$\begin{aligned} B_d(p) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(q^2 + m^2)[(p - q)^2 + m^2]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_0^\infty dt_1 dt_2 \exp[-t_1(q^2 + m^2) - t_2((p - q)^2 + m^2)] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 + t_2)^{d/2}} \exp[-p^2 t_1 t_2 / (t_1 + t_2) - m^2(t_1 + t_2)]. \end{aligned}$$

La dépendance en  $d$  est maintenant explicite et l'intégrand défini pour tout  $d$ . En revanche, l'intégrale sur les variables restantes, ne converge que pour  $\text{Re } d < 4$  en l'absence de facteurs de convergence.

Nous pouvons faire le calcul explicite pour  $m = 0$ . Après le changement de variables  $t_1, t_2 \mapsto t, s$  :

$$t_1 = ts, \quad t_2 = (1 - t)s,$$

l'expression devient

$$B_d(p) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dt \int_0^\infty ds s^{1-d/2} e^{-st(1-t)\mathbf{p}^2},$$

expression définie pour  $2 < d < 4$ . L'intégrale sur  $s$  donne

$$B_d(p) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (\mathbf{p}^2)^{(d/2)-2} \Gamma(2 - d/2) \int_0^1 dt [t(1 - t)]^{(d/2)-2},$$

et enfin, l'intégrale sur  $t$  conduit au résultat explicite

$$B_d(p) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \frac{\Gamma^2(d/2 - 1)}{\Gamma(d - 2)} (\mathbf{p}^2)^{(d/2)-2}. \quad (12.36)$$

De nouveau, cette expression est une fonction méromorphe de  $d$ . Elle a un pôle à  $d = 2$  correspondant à des divergences de longue distance ou à impulsion nulle car nous avons spécialisé le calcul à la théorie critique  $m = 0$ , et des pôles à  $d = 4, 6, \dots$  qui sont conséquences directes de la divergence à grande impulsion du diagramme de Feynman.

Le développement en  $\varepsilon$  conduit à

$$B_d(p) \sim N_d \left( \frac{1}{\varepsilon} - \ln p \right) + O(\varepsilon).$$

De nouveau, le simple prolongement dimensionnel avec propagateur modifié conduit à compenser le pôle en  $\varepsilon$  et à le remplacer par  $\ln \Lambda$ , à une constante numérique dépendant de  $\varrho$  près.

Le résultat obtenu ici permet de retrouver le résultat (10.17).

*Fonction à deux points à deux boucles : régularisation dimensionnelle.* Pour obtenir la correction dominante à la dimension du champ  $\sigma$ , il faut calculer le diagramme (e) de la figure 2.5 (section 2.5.1), contribuant à la fonction à deux points  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$ , dans la théorie critique :

$$(e) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \frac{d^d q_1 d^d q_2}{q_1^2 q_2^2 (p - q_1 - q_2)^2}.$$

Ce diagramme de Feynman se calcule plus facilement en utilisant les variables de position. En dimension  $d$ , comme fonction des variables de position, le propagateur est donné par l'expression (8.38) :

$$\Delta(x) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) |x|^{2-d}.$$

Par ailleurs,

$$(e) = \int e^{ipx} \Delta^3(x) d^d x.$$

Il faut donc calculer une intégrale de la forme

$$\Phi(p) = \int d^d x \frac{e^{ipx}}{|x|^\alpha}$$

avec ici  $\alpha = 3d - 6$ . On utilise la représentation

$$\frac{1}{|x|^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty dt t^{\alpha/2-1} e^{-tx^2}.$$

Successivement, après intégration sur  $x$  et le changement de variables  $s = p^2/4t$ , qui ramène l'intégrale à une représentation de la fonction  $\Gamma$ , on trouve

$$\Phi(p) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty dt t^{\alpha/2-1-d/2} e^{-p^2/4t} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \Gamma((d-\alpha)/2) \left(\frac{p}{2}\right)^{\alpha-d}.$$

Le résultat final est

$$(e) = -N_d^2 \frac{3\Gamma(d/2-1)\Gamma(2-d)}{2\Gamma(3d/2-2)} |p|^{2d-6} = N_d^2 p^2 \left( -\frac{1}{8\varepsilon} + \frac{1}{4} \ln p \right) + O(\varepsilon). \quad (12.37)$$

Le diagramme est une fonction méromorphe de  $d$ , avec un pôle double à  $d = 2$  qui correspond à des singularités de longue distance, et des pôles simples à  $d = 3, 4, \dots$  correspondant à des singularités de courte distance.

*Facteur de coupure.* En présence d'un facteur de convergence  $\varrho$ , le pôle est remplacé par une constante non universelle.

## Exercice

**Exercice 12.1.** Retrouver le résultat (12.36) en utilisant la méthode du calcul du diagramme (e).



# Chapitre 13

## Théorie des champs $\sigma^4$ près de la dimension 4

AU CHAPITRE 10, nous avons montré comment des calculs perturbatifs basés sur une théorie statistique locale des champs de type  $\int d^d x \sigma^4(x)$ , combinés avec l'hypothèse de l'existence d'un groupe de renormalisation de la forme postulée en section 9.7, permettent de déterminer certaines propriétés universelles de modèles statistiques critiques, au moins dans un voisinage de la dimension 4. Utilisant l'idée du développement en  $\varepsilon = 4 - d$ , où  $d$  est la dimension d'espace, introduite par Wilson et Fisher, nous avons ainsi exposé un point fixe non gaussien et calculé les exposants critiques correspondants au premier ordre, dans la déviation  $\varepsilon > 0$ , à la dimension 4.

Dans ce chapitre, nous expliquons comment les équations de groupe de renormalisation (EGR) asymptotiques, introduites sans justification précise en section 10.6, peuvent être démontrées dans le cadre de la théorie statistique (ou quantique) des champs à tous les ordres d'un développement double dans le coefficient de  $\int d^d x \sigma^4(x)$  et  $\varepsilon = 4 - d$ . La démonstration s'appuie sur les méthodes de la théorie statistique des champs perturbative introduites au chapitre 12, et sur certaines hypothèses qu'il est ainsi possible d'explicitier clairement.

Les EGR qui sont satisfaites par les fonctions de corrélation de la théorie statistique des champs, sont une forme particulière des EGR générales (9.38) introduites en section 9.1, dans la limite asymptotique où l'hamiltonien peut être décrit par un petit nombre de paramètres. Elles apparaissent comme une conséquence de la renormalisabilité de certaines théories locales des champs.

La renormalisabilité d'une théorie des champs exprime, d'une manière un peu formelle, sa relative insensibilité à la structure de courte distance dans un voisinage du point fixe gaussien et est, donc, assez directement liée à l'universalité des phénomènes critiques. Elle est liée à la nature des divergences des diagrammes de Feynman calculés avec le propagateur critique. La dimension 4 trouve une interprétation simple dans ce cadre. En effet, pour  $d < 4$ , le point

fixe gaussien est stable pour le comportement à grande impulsion (comportement ultraviolet). Ce phénomène cesse à  $d = 4$ , dimension où, par définition, la théorie des champs  $\sigma^4$  est *renormalisable*.

Quand il existe un point fixe stable, les EGR de la théorie des champs permettent de démontrer les propriétés d'universalité des phénomènes critiques, de déterminer le comportement à grande distance des fonctions de corrélation connexes ou les singularités des fonctions thermodynamiques.

Dans le chapitre 10, postulant l'existence d'un groupe de renormalisation, nous avons déterminé le point fixe non trivial du groupe de renormalisation au premier ordre en  $\varepsilon$ .

La solution de ces EGR permet de confirmer ces résultats, de les généraliser à tous les ordres dans un développement en  $\varepsilon$ , et conduisent alors au calcul des quantités universelles sous la forme d'un développement en  $\varepsilon$ .

Dans ce chapitre, nous nous restreignons à des systèmes de type Ising et le champ  $\sigma$  n'a qu'une composante. La généralisation au modèle à  $N$  composantes de symétrie  $O(N)$  est simple.

*Remarques.*

- (i) La limitation de ces méthodes utilisées pour démontrer les propriétés d'universalité résident dans leur caractère perturbatif : elles ne sont applicables que lorsqu'il existe un point fixe qui, dans un sens qui deviendra progressivement plus clair, est proche du point fixe gaussien.
- (ii) Par ailleurs, la physique que l'on essaie de décrire correspond à des valeurs entières de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = 1, 2$ . Bien qu'on ne sache démontrer la validité des résultats du groupe de renormalisation que dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , on fait donc l'hypothèse que leur validité s'étend au-delà du voisinage infinitésimal de la dimension 4. On est alors confronté à une autre difficulté : le développement en  $\varepsilon$  est divergent pour toute valeur de  $\varepsilon$ . Il est nécessaire d'introduire des méthodes de sommation appropriées pour en extraire les estimations précises des quantités universelles. Alternativement, il est également possible de sommer le développement perturbatif à dimension fixée.

La comparaison des résultats obtenus, après sommation, avec des données expérimentales ou numériques pour une large classe de modèles statistiques (*cf.* section 10.7), fournit alors un test crucial pour la théorie.

## 13.1 Hamiltonien effectif. Renormalisation

Nous poursuivons donc l'étude de la théorie statistique des champs (TSC) dont le hamiltonien prend la forme (10.1) de la section 10.1, et plus généralement la forme (10.25) de la section 10.4. Cette TSC est *locale*, c'est-à-dire que le hamiltonien ne dépend que du champ et de ses dérivées, comme conséquence de l'hypothèse de forces de courte portée.

Nous décrivons d'abord les propriétés de renormalisabilité d'une telle théorie, qui sont à la base de la démonstration perturbative des EGR.

### 13.1.1 Hamiltonien effectif

Le hamiltonien effectif a la structure générale (12.11),

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma) + \mathcal{V}_1(\sigma), \quad (13.1)$$

mais avec des formes plus spécifiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G(\sigma) &= \frac{1}{2} \int d^d x \left[ \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu \sigma(x) \left( 1 + \sum_{k=1} u_{k+1} (-\nabla_x^2)^k \right) \partial_\mu \sigma(x) + u_0 \sigma^2(x) \right], \\ \mathcal{V}_1(\sigma) &= \frac{1}{4!} g \int d^d x \sigma^4(x). \end{aligned}$$

Il est la somme du hamiltonien de point fixe gaussien, des deux perturbations au modèle gaussien paires et essentielles, et de termes quadratiques dans le champ avec un nombre suffisant de dérivées, destinés à régulariser les divergences à grande impulsion, ou à courte distance (hamiltonien dit de Landau–Ginzburg–Wilson). Ces divergences ne sont pas présentes dans les modèles sur réseau parce que les impulsions sont bornées par la zone de Brillouin. Le paramètre  $u_0$  est ici la somme de la contribution  $r_c(g)$  qui assure que le hamiltonien reste critique, et d'une déviation essentielle infinitésimale  $t \propto T - T_c$  à la théorie critique. Basée sur les analyses des chapitres précédents, nous supposons que tous les paramètres  $u_k$  et  $g$  sont les fonctions *régulières* de la température pour  $T$  proche de  $T_c$ .

À l'ordre dominant, un tel hamiltonien reproduit tous les résultats du modèle quasi-gaussien ou de l'approximation de champ moyen. Au-delà, il conduit à un développement double, perturbatif et dimensionnel des quantités thermodynamiques. En particulier, les fonctions de corrélation ont un *développement fini à tous les ordres en  $\varepsilon = 4 - d$  et  $g$  sauf à  $T_c$* , à impulsion nulle.

On appelle aussi une telle théorie des champs, *théorie des champs effective* pour souligner qu'il ne s'agit pas d'un modèle microscopique, mais seulement d'un modèle qui reproduit correctement les comportements asymptotiques à longue distance (cette dénomination est aujourd'hui presque un pléonasme dans la mesure où presque toutes les théories des champs qui apparaissent en physique ont cette interprétation).

### 13.1.2 Renormalisation gaussienne

Dans le hamiltonien (13.1), il est commode de faire le changement d'échelle

$$x = \Lambda x', \quad (13.2)$$

où  $\Lambda$  est un paramètre qui a les dimensions d'une impulsion. Le but de ce changement est de faire apparaître, comme échelle de distance de référence, l'échelle macroscopique pertinente pour la physique de longue distance, plutôt que l'échelle microscopique initiale. Celle-ci est maintenant caractérisée par le paramètre  $1/\Lambda$  (relié, par exemple, à la maille du réseau d'un modèle statistique initial). Au lieu d'étudier la limite de longue distance, on étudie alors la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Nous avons vu que la dimension du  $\sigma(x)$  dans le modèle gaussien est  $(d-2)/2$ . Nous changeons donc la normalisation du champ de façon correspondante :

$$\sigma(x) \mapsto \sigma'(x) = \Lambda^{(d-2)/2} \sigma(\Lambda x) \Rightarrow \frac{\partial \sigma'(x)}{\partial x_\mu} = \Lambda^{d/2} \frac{\partial \sigma(\Lambda x)}{\partial x_\mu}, \quad (13.3)$$

de façon à ce que l'hamiltonien du point fixe gaussien reste inchangé. On reconnaît les transformations (9.46) du groupe de renormalisation qui conduisent au point fixe gaussien.

Dans ces nouvelles variables, l'hamiltonien s'écrit alors (en omettant maintenant les primes)

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma) + \frac{1}{4!} g \Lambda^{4-d} \int d^d x \sigma^4(x), \quad (13.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G(\sigma) = & \frac{1}{2} \int d^d x \sum_\mu (\partial_\mu \sigma(x))^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 u_0 \int d^d x \sigma^2(x) \\ & + \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{k=1} u_{k+1} \Lambda^{-2k} \sum_\mu \partial_\mu \sigma(x) (-\nabla^2)^k \partial_\mu \sigma(x). \end{aligned} \quad (13.5)$$

Dans le contexte de la théorie quantique des champs, le paramètre  $\Lambda$ , qui est le reflet de la structure microscopique initiale, est appelé paramètre ou échelle de coupure (*cut-off* en anglais).

En fait, cette opération correspond à la première phase de la construction de la section 9.7.1, où une première dilatation supprime (à l'ordre dominant) les termes qui sont inessentiels du point de vue du point fixe gaussien, dans la mesure où, pour  $g \ll 1$ , le flot du groupe de renormalisation est d'abord dominé par le flot local auprès du point fixe gaussien.

### 13.1.3 Analyse dimensionnelle et dimension critique

Après l'introduction du paramètre  $\Lambda$ , toutes les quantités ont une dimension en unité  $\Lambda$ . Les impulsions ont dimension 1, les coordonnées d'espace dimension -1, le champ  $\sigma$  a une dimension  $\frac{1}{2}(d-2)$  qui est égale à sa dimension du point de vue du point fixe gaussien. De façon générale, tous les monômes de l'hamiltonien ont comme dimensions les valeurs propres des vecteurs propres correspondant au flot du groupe de renormalisation dans l'approximation linéaire au voisinage du point fixe gaussien.

Il est facile de vérifier que cette propriété s'étend à des interactions avec des puissances plus élevées de  $\sigma$  et plus de dérivées, que nous avons omises puisque les transformations (13.2) et (13.3) sont analogues aux transformations (9.46). Par l'introduction du paramètre  $\Lambda$ , nous avons ramené le calcul de la dimension du champ et l'analyse de la stabilité du point fixe gaussien à de l'*analyse dimensionnelle*. En particulier, le point fixe gaussien est stable et le modèle quasi-gaussien valable si les coefficients de tous les termes du hamiltonien, sauf les deux premiers dans l'expression (13.5), tendent vers zéro pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Pour les termes quadratiques à plus de deux dérivées, cette condition est toujours vérifiée.

De plus, nous posons

$$\Lambda^2 u_0 = \Lambda^2 u_{0c}(g) + t,$$

où  $u_{0c}(g)$  correspond à la valeur de  $u_0$  pour laquelle la théorie est critique ( $T = T_c$ ), c'est-à-dire à laquelle la longueur de corrélation diverge ou la masse s'annule :

$$u_0 = u_{0c}(g) \Leftrightarrow \tilde{\Gamma}^{(2)}(p=0) = 0.$$

La paramétrisation

$$u_0 - u_{0c} \mapsto t/\Lambda^2,$$

correspond à faire une renormalisation de la déviation à la température critique adaptée au voisinage du point fixe gaussien. En effet, le terme en  $\sigma^2$  est essentiel et a dimension 2 et cette renormalisation compense donc le facteur d'échelle engendré par le groupe de renormalisation dans l'approximation linéaire.

Après ce changement, les fonctions de corrélations ont une limite finie quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  à  $\{p_i, t\}$  fixés si le point fixe gaussien est stable. Cette propriété s'étend aux fonctions de corrélation à aimantation fixée. Pour  $d > 4$ , on peut vérifier cette propriété par le calcul perturbatif. Par exemple, reprenons le calcul du diagramme (b) de la figure 2.4 (section 2.5.1) soustrait de sa valeur à  $t = 0$  (équation (12.32)). Pour  $d > 4$ , la contribution principale est maintenant linéaire en  $t$  (cf. aussi équation (12.33)) :

$$\Omega_d(\sqrt{t}) - \Omega_d(0) = -\frac{t\Lambda^{d-4}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty ds \varrho(s) s^{1-d/2} + O\left(t^{d/2-1}\right).$$

Cette contribution est multipliée par  $\frac{1}{2}g\Lambda^{4-d}$  et donc (équation (12.18))

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)_{\Lambda \rightarrow \infty} = p^2 + t - gt \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty ds \varrho(s) s^{1-d/2} + O(g^2).$$

De la même façon, on vérifie que la contribution d'ordre  $g^2$  à la fonction à quatre points tend vers une limite finie. Pour  $d > 4$ , l'effet de l'interaction quartique est de modifier les paramètres du modèle quasi-gaussien et d'engendrer les corrections dues aux opérateurs inessentiels, mises en évidence par l'étude du groupe de renormalisation local.

Pour  $d < 4$ , au contraire, on ne s'attend pas à ce que la limite soit finie puisque les dimensions du champ ainsi que celle de  $u_0 - u_{0c}$  changent. C'est ce qu'on observe puisque, par exemple,  $\Omega_d(\sqrt{t}) - \Omega_d(0)$  a une limite finie quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , mais le diagramme est multiplié par  $g\Lambda^{4-d}$  qui diverge.

À quatre dimensions (la dimension critique) dans un développement en puissances de  $g$  et, plus généralement en dimension  $d < 4$ , dans un développement double en  $g$  et  $\varepsilon = 4 - d$ , ces divergences prennent la forme de puissances de  $\ln \Lambda$ , le degré augmentant avec l'ordre en  $g$  et en  $\varepsilon$ .

*Fonctions de vertex.* Nous avons aussi besoin des dimensions des composantes de Fourier des fonctions de vertex. Pour les calculer, les remarques suivantes sont utiles. La dimension  $[\tilde{\sigma}]$  des composantes de Fourier  $\tilde{\sigma}$  du champ se déduit de

$$\sigma(x) = \int d^d p e^{ipx} \tilde{\sigma}(p) \Rightarrow [\tilde{\sigma}] = -(d+2)/2.$$

Les fonctions de vertex  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ , sont obtenues en développant le potentiel thermodynamique en puissances de l'aimantation locale  $M(x) = \langle \sigma(x) \rangle$  ou plutôt de sa transformée de Fourier  $\tilde{M}(p)$  :

$$\Gamma(M) = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^d p_1 \dots d^d p_n \delta^{(d)} \left( \sum_i p_i \right) \tilde{M}(p_1) \dots \tilde{M}(p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n).$$

On en déduit les dimensions

$$[\tilde{\Gamma}^{(n)}] = -nd + n(d+2)/2 + d = d - n(d-2)/2. \quad (13.6)$$

En comparant ce résultat avec l'équation (9.14) pour  $Z(\lambda) = \lambda^{2-d}$ , la forme gaussienne, on vérifie de nouveau que cette analyse dimensionnelle reconstitue les facteurs de dilatation engendrés par le groupe de renormalisation adapté au point fixe gaussien.

### 13.1.4 Théorème de renormalisation

Nous explicitons d'abord le théorème de renormalisation pour la théorie critique  $t = 0$ . Il s'applique, au sens des séries formelles, au développement double en série de puissances du coefficient  $g$  du terme quartique (l'interaction) et de  $\varepsilon = 4 - d$ .

Pour formuler le théorème de renormalisation, on introduit une impulsion  $\mu$ , dite échelle de renormalisation, et le paramètre d'interaction effective  $g_r$  à l'échelle  $\mu$  appelé interaction renormalisée. Il existe alors deux fonctions  $Z(\Lambda/\mu, g_r)$  et  $Z_g(\Lambda/\mu, g_r)$  qui satisfont

$$\Lambda^{4-d} g = \mu^{4-d} Z_g(\Lambda/\mu, g_r) g_r = \mu^{4-d} g_r + O(g_r^2), \quad (13.7)$$

$$Z(\Lambda/\mu, g_r) = 1 + O(g_r), \quad (13.8)$$

calculables ordre par ordre dans un développement double en puissances de  $g_r$  et  $\varepsilon$ , telles que toutes les fonctions de corrélation

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; g_r, \mu, \Lambda) = Z^{n/2}(g_r, \Lambda/\mu) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda), \quad (13.9)$$

dites *renormalisées*, ont, ordre par ordre, des limites finies  $\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; g_r, \mu)$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  à  $p_i, \mu, g_r$  fixés.

*Remarques.*

- (i) Il y a un certain arbitraire dans le choix des *constantes de renormalisation*  $Z$  et  $Z_g$  puisqu'elles peuvent être multipliées par des fonctions de  $g_r$  arbitraires. Ces constantes peuvent être complètement déterminées par des *conditions de renormalisation*, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p = \mu, \mu, g_r) &= 1, \\ \tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p_i = \mu \theta_i, \mu, g_r) &= \mu^{4-d} g_r, \end{aligned}$$

où les  $\theta_i$  sont quatre vecteurs de somme nulle et tels que

$$\theta_i \cdot \theta_j = \frac{4}{3} \delta_{ij} - \frac{1}{3}.$$

On démontre alors, ordre par ordre, dans un développement en puissances de  $g$  et  $\varepsilon$ , que les fonctions  $\tilde{\Gamma}_r^{(n)}$  sont uniques, c'est-à-dire indépendantes du choix particulier de la forme de  $\mathcal{H}_G(\sigma)$  et donc des coefficients des termes quadratiques inessentiels au sens du point fixe gaussien. Ce résultat peut être généralisé : on peut démontrer qu'au sens des séries formelles, les contributions de toutes les perturbations inessentielles, du point de vue du point fixe gaussien, tendent vers zéro.

- (ii) Dans le langage de la théorie quantique des champs, les paramètres ou fonctions de corrélation de la théorie initiale sont les paramètres ou fonctions de corrélation *nus*.
- (iii) Physiquement, l'impulsion  $\mu$  est l'inverse de l'échelle de distance macroscopique et le paramètre  $g_r$  joue le rôle de  $g(\Lambda/\mu)$ , où  $\Lambda/\mu$  est le paramètre de dilatation (pour plus de détails cf. section 13.4).
- (iv) Au-delà du développement perturbatif, l'interprétation des fonctions de corrélation renormalisées est un peu subtile. Dans la théorie formelle de la renormalisation, ce sont les paramètres de la théorie renormalisée qui sont fixés, et les paramètres initiaux, qui sont les coefficients de tous les opérateurs essentiels ou marginaux par rapport au point fixe gaussien, qui sont des paramètres ajustables et qui donc varient quand le facteur d'échelle  $\Lambda/\mu$  varie. Ceci correspond à appliquer, au voisinage du point fixe gaussien et pour  $d = 4 - \varepsilon$ , une généralisation de la stratégie que nous avons déjà utilisée pour le coefficient de  $\sigma^2$  et qui nous a permis de définir des propriétés d'universalité dans le domaine critique.

En ce sens, l'existence de fonctions renormalisées impliquent des propriétés d'universalité dans le domaine critique le plus général possible autour du point fixe gaussien.

Cependant, il n'est pas sûr qu'un tel domaine critique existe toujours, au-delà du développement perturbatif. L'étude des EGR nous donnera quelques informations sur ce problème.

Enfin, bien sûr, le théorème de renormalisation n'a d'implication physique pour le comportement à longue distance des modèles statistiques que si la propriété de renormalisabilité reste vraie à dimension fixée.

*Théories des champs super-renormalisables.* À dimension  $d < 4$  fixée, la théorie des perturbations n'a pas de sens pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ce qui se reflète dans le coefficient  $\Lambda^{4-d}$  de l'interaction essentielle  $\sigma^4$ . En fait, on peut facilement montrer que, même à  $\Lambda$  fixé, la théorie critique ou de masse nulle n'a pas de développement perturbatif (on parle de divergences infrarouges). Ainsi, pour  $d = 3$ , la contribution d'ordre  $g^4$  à la fonction à deux points diverge. Dans le cadre du prolongement dimensionnel, quel que soit  $\varepsilon = 4 - d > 0$ , il existe un ordre  $k = O(1/\varepsilon)$  du développement en puissances de  $g$  tel que certains diagrammes divergent.

En revanche, pour  $t > 0$  et  $g_0 = g\Lambda^{4-d}/t^{2-d/2} \sim g\Lambda^{4-d}\xi^{4-d}$  fixé ( $\xi$  est la longueur de corrélation), les fonctions de corrélation ont une limite pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Cette condition conduit à faire tendre  $g$  vers zéro en fonction du paramètre de dilatation avec une puissance appropriée au point fixe gaussien, de façon à compenser le facteur de dilatation, comme nous l'avons fait systématiquement pour la déviation à la théorie critique due à l'opérateur  $\sigma^2$ . On obtient alors un développement perturbatif fini, et la TSC correspondante est appelée *super-renormalisable*.

La théorie intéressante, du point de vue de la physique statistique, correspond alors, en général, à la limite  $g_0 \rightarrow \infty$ . Cependant, il existe des situations exceptionnelles où une telle TSC trouve une application pratique, par exemple dans la physique des gaz ultra-froids et très dilués, où le paramètre  $g$  est naturellement très petit et en même temps, les coefficients de tous les termes d'interaction de degré plus élevé dans le champ sont encore plus négligeables.

*Renormalisation et régularisation dimensionnelle.* Dans le cadre de la régularisation dimensionnelle, la renormalisation du champ comme les relations entre paramètres initiaux et paramètres renormalisés ont une limite finie pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Les constantes de renormalisation correspondantes deviennent ainsi des fonctions méromorphes de la dimension, singulières aux dimensions correspondant à des divergences logarithmiques en  $\Lambda$  (section 12.5.2).

## 13.2 Équations de groupe de renormalisation

Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , c'est-à-dire dans un développement double en série de puissances de paramètre  $g$  et de  $\varepsilon$ , le comportement

critique ne diffère du comportement quasi-gaussien que par des puissances de logarithme. Ce sont ces logarithmes qu'organisent les EGR.

### 13.2.1 EGR pour la théorie critique

De l'équation (13.9) et de l'existence de la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , nous déduisons une nouvelle équation obtenue en dérivant l'équation par rapport à  $\Lambda$ , à  $\mu$  et  $g_r$  fixés :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g_r, \mu \text{ fixés}} Z^{n/2}(g, \Lambda/\mu) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = o(\Lambda^{-2+v}), \quad v > 0, \quad (13.10)$$

où nous avons exprimé le facteur de renormalisation  $Z$  en fonction de  $g$  plutôt que  $g_r$ .

En accord avec la philosophie perturbative, nous négligeons dans un premier temps toutes les contributions qui, ordre par ordre, décroissent comme des puissances de  $\Lambda$ . Nous définissons donc les fonctions asymptotiques  $\tilde{\Gamma}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \Lambda)$  et  $Z_{\text{as.}}(g, \Lambda/\mu)$  comme les sommes des contributions perturbatives aux fonctions  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda)$  et  $Z(g, \Lambda/\mu)$ , respectivement, qui ne tendent pas vers zéro quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . On peut montrer que de telles fonctions de corrélations peuvent aussi être obtenues en ajoutant au hamiltonien tous les termes inessentiels possibles et en ajustant, ordre par ordre, leurs coefficients comme fonction de  $g$ , de façon à éliminer systématiquement les contributions qui tendent vers zéro. Ceci correspond à la stratégie évoquée en fin de la section 9.7 et qui conduit à l'équation unique (9.62).

Les fonctions asymptotiques satisfont alors l'équation (13.10) avec un membre de droite qui s'annule exactement. Utilisant la règle de dérivées en chaîne, on déduit de l'équation (13.10)

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g, \Lambda/\mu) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \eta(g, \Lambda/\mu) \right] \tilde{\Gamma}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = 0, \quad (13.11)$$

où les fonctions  $\beta$  et  $\eta$  sont définies par

$$\beta(g, \Lambda/\mu) = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g_r, \mu} g, \quad (13.12a)$$

$$\eta(g, \Lambda/\mu) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g_r, \mu} \ln Z_{\text{as.}}(g, \Lambda/\mu). \quad (13.12b)$$

Comme elles sont sans dimension, elles ne peuvent dépendre de  $g, \Lambda$  ou  $\mu$  qu'à travers les combinaisons sans dimension  $g$  et  $\Lambda/\mu$ . De plus, les fonctions  $\beta$  et  $\eta$  peuvent aussi être calculées directement en utilisant l'équation (13.11) en termes des fonctions de vertex initiales qui ne dépendent pas de  $\mu$ . Les fonctions  $\beta$  et  $\eta$  ne peuvent donc pas dépendre du rapport  $\Lambda/\mu$ . L'équation (13.11) prend alors la forme plus simple (Zinn-Justin, 1973)

$$\left( \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \eta(g) \right) \tilde{\Gamma}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = 0. \quad (13.13)$$

Traduit dans le formalisme avec paramètre de coupure  $\Lambda$ , l'idée fondamentale du groupe de renormalisation devient la suivante : il est possible de modifier le paramètre  $\Lambda$ , et de façon corrélée, la normalisation du champ  $\sigma$ , et les coefficients de toutes les interactions de telle sorte que les fonctions de corrélations ne soient pas changées.

L'équation (13.13) est satisfaite par les fonctions  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  asymptotiquement dans la limite  $|p_i| \ll \Lambda$ . Il est possible de vérifier qu'à tout ordre fini du développement en  $g$  et  $\varepsilon$ , les termes négligés sont de la forme  $(\ln \Lambda)^L / \Lambda^2$ , où le degré  $L$  augmente avec l'ordre.

*Notation.* Dans ce qui suit, les fonctions de vertex sont implicitement les fonctions  $\tilde{\Gamma}_{\text{as.}}^{(n)}$  sans corrections qui satisfont les EGR exactement et nous omettons l'indice as.

*Remarque.* L'équation (13.13) est équivalente à l'équation (10.39), que nous avons postulé au chapitre 10. En effet, la relation dimensionnelle (13.6) entraîne

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial p_i} = d - \frac{n}{2}(d-2)$$

et donc

$$\left( d - \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2}[d-2+\eta(g)] \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = 0.$$

Après transformation de Fourier et transformation de Legendre, on retrouve bien l'équation (10.39).

### 13.2.2 Solution perturbative de l'EGR

Au vu de la discussion qui précède, il est instructif de résoudre perturbativement l'EGR (13.13) pour la fonction de vertex à deux points  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$ , à  $d = 4$  pour simplifier. Il est commode d'introduire la fonction

$$\zeta(g) = \exp \left[ \int_0^g dg' \frac{\eta(g')}{\beta(g')} \right].$$

Comme on le verra plus loin, les fonctions  $\eta$  et  $\beta$  sont d'ordre  $g^2$  et donc cette fonction est développable en puissances de  $g$ .

Nous posons alors

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 \zeta(g) \mathcal{G}^{(2)}(g, p/\Lambda).$$

La fonction  $\mathcal{G}^{(2)}$  satisfait l'équation

$$\left( \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \mathcal{G}^{(2)}(g, p/\Lambda) = 0, \quad (13.14)$$

qui exprime que c'est un invariant du GR. Nous développons  $\mathcal{G}^{(2)}$  et  $\beta(g)$  en puissances de  $g$ , posant

$$\mathcal{G}^{(2)}(g, p/\Lambda) = 1 + \sum_1^\infty g^n \gamma_n(p/\Lambda), \quad \beta(g) = \sum_2^\infty \beta_n g^n. \quad (13.15)$$

Introduisant ces développements dans l'équation (13.14), on trouve pour  $n \geq 2$ ,

$$-z\gamma'_n(z) + \sum_{m=1}^{n-1} m\beta_{n-m+1}\gamma_m(z) = 0. \quad (13.16)$$

L'équation  $n = 1$  est spéciale :

$$-z\gamma'_1(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1(z) = C_1.$$

Examinons le cas  $n = 2$  :

$$-z\gamma'_2(z) + C_1\beta_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2(z) = C_1\beta_2 \ln z + C_2.$$

Cet exemple exhibe la structure générale.  $\gamma_n(z)$  est un polynôme de degré  $(n-1)$  en  $\ln z$ ,

$$\gamma_n(z) = P_{n-1}(\ln z),$$

qui satisfait la relation de récurrence

$$P'_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^{n-1} mP_{m-1}(x)\beta_{n-m+1}. \quad (13.17)$$

Soulignons, en particulier, que la nouvelle information spécifique à l'ordre  $n$  est caractérisée par deux constantes,  $\beta_n$  qui entre dans le coefficient de  $\ln z$ , et  $C_n$ , qui est une constante d'intégration (auxquelles il faut ajouter un coefficient de  $\eta(g)$ , qui est caché dans la fonction  $\zeta(g)$ ). De plus, le terme de degré le plus élevé de  $P_n$  est entièrement déterminé par le calcul à une boucle, le terme suivant par le calcul à deux boucles, etc. Enfin,  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  est entièrement déterminée par les fonctions  $\beta(g)$  et  $\eta(g)$  et, par exemple,  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(1, g)/\Lambda^2$  qui est une troisième fonction de  $g$ .

Enfin, soulignons, que si  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  a une limite pour  $p = 0$  :

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p=0) = 0, \quad (13.18)$$

il n'en est pas de même pour sa dérivée  $\partial\tilde{\Gamma}^{(2)}/\partial p^2$  qui diverge à  $p = 0$ . Il est simple de vérifier qu'aucune autre fonction de vertex n'a de limite finie à impulsion nulle.

*Fonctions de corrélation renormalisées et groupe de renormalisation.* Les fonctions de corrélation renormalisées (13.9) et les fonctions physiques initiales sont par construction proportionnelles et, par conséquent, ont les mêmes

comportements pour  $|p_i| \rightarrow 0$ . On peut donc étudier le comportement asymptotique en utilisant les fonctions renormalisées. Grâce à la régularisation dimensionnelle et la renormalisation par soustraction minimale des pôles en  $1/\varepsilon$ , les fonctions renormalisées sont les plus faciles à calculer. Par ailleurs, les fonctions renormalisées satisfont aussi à des EGR obtenues à partir de l'équation (13.9) (qui fait jouer un rôle symétrique aux fonctions de corrélation asymptotiques de la théorie initiale et aux fonctions renormalisées) en dérivant par rapport à  $\mu$ , à  $\Lambda$  et  $g$  fixés. On trouve

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_r(g_r) \frac{\partial}{\partial g_r} - \frac{1}{2} n \eta_r(g_r) \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g_r, \mu) = 0. \quad (13.19)$$

Une fois la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  prise, cette équation est exacte. Son étude est très semblable à celle de l'équation (13.13) que nous présentons ci-dessous.

Mais l'étude des seules fonctions renormalisées ne permet pas de déterminer le comportement des paramètres de la théorie renormalisée en termes des paramètres initiaux, ou la nature des corrections au comportement asymptotique.

### 13.3 Solution des EGR : le développement en $\varepsilon$

L'équation (13.13) peut, par exemple, être résolue par la méthode des caractéristiques. Sa solution, combinée avec des calculs perturbatifs à une boucle, permet de démontrer l'universalité du comportement asymptotique à grande distance des fonctions de corrélations et de déterminer ce comportement au premier ordre en  $\varepsilon$ .

#### 13.3.1 Solution générale

L'équation (13.13) peut être résolue par la méthode des caractéristiques. On introduit un paramètre de dilatation  $\lambda$  et on cherche des fonctions  $g(\lambda)$  et  $Z(\lambda)$  telles que

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda/\lambda) \right] = 0. \quad (13.20)$$

En dérivant explicitement par rapport à  $\lambda$ , on trouve que l'équation (13.20) est compatible avec l'équation (13.13) à condition que

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\beta(g(\lambda)), \quad g(1) = g; \quad (13.21a)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = -\eta(g(\lambda)), \quad Z(1) = 1. \quad (13.21b)$$

Les équations (13.20) et (13.21) impliquent alors

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda/\lambda). \quad (13.22)$$

*Remarque.* Nous observons la similarité entre cette équation et l'équation (13.9) si l'on choisit  $\lambda = \Lambda/\mu$  et si l'on identifie  $g_r$  avec  $g(\Lambda/\mu)$ , qui est le couplage effectif à l'échelle  $\mu$ , et  $Z(\Lambda/\mu)$  avec la renormalisation du champ. On peut alors se demander quel est l'intérêt du détour par l'équation aux dérivées partielles. La raison principale est la suivante : cela permet de montrer que les coefficients de l'EGR ne dépendent pas du rapport  $\mu/\Lambda$ , contrairement aux constantes de renormalisation. Cette propriété des constantes de renormalisation n'est contenue dans l'équation (13.9) que de façon implicite. Elle démontre le caractère indépendant de  $\lambda$  des équations de flot (13.21), que nous avons postulé pour les EGR générales (9.23) et (9.24).

*Autres formes.* Il est d'abord commode de multiplier  $\Lambda$  par un facteur  $\lambda$  dans l'équation (13.22) :

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda\lambda) = Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda). \quad (13.23)$$

Les considérations dimensionnelles de la section 13.1.3, en particulier la relation (13.6), impliquent alors

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda\lambda) = \lambda^{d-(n/2)(d-2)} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i/\lambda; g, \Lambda), \quad (13.24)$$

de sorte que l'équation (13.23) peut se récrire

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i/\lambda; g, \Lambda) = \lambda^{-d+(n/2)(d-2)} Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda), \quad (13.25)$$

qui est identique à l'équation (9.14), après la *substitution*  $Z \mapsto Z\lambda^{2-d}$ .

Les équations (13.21) et (13.25) réalisent asymptotiquement (parce que les termes sous-dominants en puissances de  $\Lambda$  ont été négligés) les idées générales du groupe de renormalisation. Le paramètre  $g(\lambda)$  définit l'hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_\lambda$  à l'échelle  $\lambda$ . Ainsi, l'équation (13.21a) caractérise le flot des hamiltoniens. Cependant, la fonction  $Z(\lambda)$  définie en (13.21b) diffère de la fonction (9.24) par un facteur  $\lambda^{d-2}$ . Ceci correspond à la renormalisation initiale du champ  $\sigma$  effectuée en section 13.1.2, qui a la forme de la transformation du champ par le groupe de renormalisation adapté au point fixe gaussien. La fonction définie ici correspond au rapport entre la renormalisation générale (9.24) et la renormalisation gaussienne. Cette factorisation est bien adaptée à une situation où un opérateur est marginal ou faiblement essentiel (du point de vue du point fixe gaussien), comme c'est le cas dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ .

*Discussion.* Les équations (13.21) s'intègrent sous la forme

$$\int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} = -\ln \lambda, \quad (13.26a)$$

$$\int_1^\lambda \frac{ds}{s} \eta(g(s)) = -\ln Z(\lambda). \quad (13.26b)$$

L'équation (13.13) est l'EGR sous sa forme différentielle. Les équations (13.25) et (13.26) sont les EGR intégrées. Dans ce qui suit, nous supposons explicitement que les fonctions du GR,  $\beta(g)$  et  $\eta(g)$ , sont des fonctions *régulières* de  $g$ , pour  $g > 0$ .

Dans l'équation (13.23), on remarque qu'il est équivalent d'augmenter  $\Lambda$  ou  $\lambda$ . Afin d'étudier la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , il faut donc déterminer le comportement de l'amplitude  $g(\lambda)$  de l'interaction effective lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini. L'équation (13.26a) montre que  $g(\lambda)$  augmente si la fonction  $\beta$  est négative, ou diminue dans le cas contraire. Les points fixes correspondent aux zéros  $g^*$  de la fonction  $\beta$  qui, par conséquent, jouent un rôle essentiel dans l'étude du comportement critique. Ceux pour lesquels la fonction  $\beta$  a une pente négative sont des points fixes répulsifs dans l'IR :  $g(\lambda)$  s'éloigne de tels zéros, sauf si initialement  $g(1) = g^*$ . Au contraire, ceux pour lesquels la pente est positive, sont des points fixes attractifs du point de vue du comportement à longue distance.

### 13.3.2 Calculs à l'ordre d'une boucle : point fixe et lois d'échelle

*Les fonctions  $\beta$  et  $\eta$ .* Les fonctions du groupe de renormalisation  $\beta$  et  $\eta$  peuvent être calculées perturbativement en exprimant que les fonctions à deux et quatre points satisfont aux EGR (il suffit de calculer les diagrammes (e) et (g) des figures 2.5 et 2.6, section 2.5). La correction à la fonction à deux points est une constante et n'induit qu'une modification du paramètre critique  $u_{0c}$  de sorte que

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 + O(g^2) \Rightarrow \eta(g) = O(g^2). \quad (13.27)$$

Les facteurs combinatoires de la fonction de vertex à quatre points ont été expliqués au chapitre 12. Avec les normalisations de la théorie des champs, on trouve (cf. équation (10.11))

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = & \Lambda^\varepsilon g - \frac{1}{2} g^2 \Lambda^{2\varepsilon} [B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) + B(p_1 + p_4)] \\ & + O(g^3), \end{aligned}$$

avec

$$B(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q) \tilde{\Delta}(p - q).$$

À cet ordre, nous n'avons besoin de cette fonction que pour  $d = 4$ . Alors, dans la limite qui nous intéresse, il est commode d'exprimer  $B$  en terme des variables de position sous la forme

$$B(p) = \int d^4 x e^{ipx} \Delta^2(x).$$

En dimension 4, comme fonction des variables de position, le propagateur avec facteur de coupure peut s'écrire

$$\Delta(x) = \frac{\vartheta(\Lambda x)}{4\pi^2 x^2}, \quad (13.28)$$

où le comportement à longue distance est déterminé par l'expression (8.38) et le facteur de coupure assure la régularité à courte distance :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x) = 1, \quad \vartheta(x) \underset{x \rightarrow 0}{\propto} x^2.$$

Pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,

$$B(p) \sim K_B \ln \Lambda$$

et le coefficient  $K_B$  est donné par

$$\begin{aligned} K_B &= \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} B(0) = \int d^4x \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Delta^2(x) = \frac{1}{16\pi^4} \int \frac{d^4x}{x^4} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \vartheta^2(\Lambda x) \\ &= \frac{1}{16\pi^4} \int \frac{d^4x}{x^4} x \frac{\partial}{\partial x} \vartheta^2(\Lambda x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{\partial}{\partial x} \vartheta^2(\Lambda x) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} [\vartheta^2(\infty) - \vartheta^2(0)] = \frac{1}{8\pi^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{=} \Lambda^\varepsilon g - \frac{3g^2}{16\pi^2} \ln \Lambda + O(g^2 \times 1, g^2 \varepsilon),$$

et, donc,

$$\varepsilon \Lambda^\varepsilon g - \frac{3g^2}{16\pi^2} + \beta(g) \Lambda^\varepsilon = O(g^3, g^2 \varepsilon),$$

un résultat cohérent avec l'expression (10.21) :

$$\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + \frac{3g^2}{16\pi^2} + O(g^3, g^2 \varepsilon).$$

En dessous de quatre dimensions, si  $g$  est initialement petit, l'expression (10.21) montre que  $g(\lambda)$  augmente dans un premier temps, reflétant l'instabilité du point fixe gaussien. Mais, au sens du développement en  $\varepsilon$ ,  $\beta(g)$  a un autre zéro  $g^*$  (équation (10.22)) :

$$\beta(g^*) = 0 \quad \text{pour} \quad g^* = \frac{16\pi^2}{3} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Alors, l'équation (13.26a) montre que la limite asymptotique de  $g(\lambda)$  est  $g^*$ . Notons  $\omega$  la pente de  $\beta(g)$  au point fixe  $g^*$  :

$$\omega = \beta'(g^*) = \varepsilon + O(\varepsilon^2) > 0, \quad (13.29)$$

(équation (9.59)) et linéarisons l'équation (13.26a) autour du point fixe :

$$\int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\omega(g' - g^*)} \sim -\ln \lambda. \quad (13.30)$$

En intégrant, on obtient

$$|g(\lambda) - g^*| \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\propto} \lambda^{-\omega}. \quad (13.31)$$

En-dessous de quatre dimensions, au moins pour des  $\varepsilon$  infinitésimaux, ce point fixe non gaussien est stable dans l'IR. À quatre dimensions, ce point fixe est confondu avec le point fixe gaussien et la valeur propre  $\omega$  s'annule indiquant l'apparition d'un opérateur marginal.

De l'équation (13.26b), on déduit alors le comportement de  $Z(\lambda)$  pour  $\lambda \rightarrow \infty$ . L'intégrale dans le membre de droite de l'égalité est dominée par le voisinage de  $s = 0$ . Par conséquent,

$$\ln Z(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} -\eta \ln \lambda, \quad (13.32)$$

où l'on a posé

$$\eta = \eta(g^*).$$

*Fonctions de corrélation.* Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ ,  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(g^*)$  est fini. Bien entendu, là aussi il faut supposer que cette propriété reste satisfaite au-delà du développement en  $\varepsilon$ . L'équation (13.25) détermine alors le comportement de  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda)$  pour  $\Lambda \rightarrow \infty$  ou  $p_i \rightarrow 0$  :

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; \lambda; g, \Lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{-d+(n/2)(d-2+\eta)} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g^*, \Lambda). \quad (13.33)$$

Cette équation montre que les fonctions de corrélation critiques ont un comportement asymptotique en loi de puissances qui ne dépend pas de la valeur initiale du coefficient  $g$  de  $\sigma^4$ .

En particulier, pour  $n = 2$ , l'équation (13.33) donne le comportement de l'inverse de la fonction à deux points connexe  $\widetilde{W}^{(2)}(p)$ . En inversant, on en déduit

$$\widetilde{W}^{(2)}(p) \equiv \left[ \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \right]^{-1} \underset{|p| \rightarrow 0}{\propto} 1/p^{2-\eta}. \quad (13.34)$$

On vérifie que la définition de l'équation (13.32) coïncide avec la définition usuelle (8.21) de l'exposant critique  $\eta$ . La représentation spectrale de la fonction à deux points implique que  $\eta > 0$ .

### 13.3.3 La fonction $\eta(g)$ à deux boucles et l'exposant $\eta$

Pour déterminer la première correction à la dimension du champ  $\sigma$ , il faut calculer la fonction à deux points  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  à l'ordre  $g^2$  pour  $d = 4$  et donc le

diagramme (e) de la figure 2.5 (section 2.5.1) :

$$(e) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 q_1 d^4 q_2 \tilde{\Delta}(q_1) \tilde{\Delta}(q_2) \tilde{\Delta}(p - q_1 - q_2).$$

(Certains éléments du calcul peuvent être trouvés en section 12.5.3.) Ce diagramme de Feynman se calcule plus facilement en utilisant les variables de position où il prend la forme

$$(e) = \int e^{ipx} \Delta^3(x) d^4 x.$$

En dimension 4, comme fonction des variables de position, nous représentons le propagateur avec facteur de coupure sous la forme (13.28).

La condition  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(0) = 0$  détermine  $u_{0c}$  à l'ordre  $g^2$ . La fonction de vertex prend alors la forme

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 - \frac{g^2}{6} K p^2 \ln(\Lambda/p) + O(g^2 \times 1, g^2 \varepsilon).$$

Le coefficient  $K$  est donné par

$$K = \frac{\partial}{\partial p^2} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \int e^{ipx} \Delta^3(x) d^4 x \Big|_{p=0}.$$

Remarquons que

$$\sum_{\mu=1}^4 \left( \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^2 \Phi(p^2) = 8\Phi'(p^2) + 4p^2 \Phi''(p^2).$$

Ainsi,

$$K = -\frac{1}{8(4\pi^2)^3} \int \frac{d^4 x}{x^4} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \vartheta^3(\Lambda x) = -\frac{1}{(4\pi)^4} \int_0^\infty dx \frac{\partial}{\partial x} \vartheta^3(\Lambda x).$$

L'intégrant est une dérivée. Seul l'infini contribue et le résultat est indépendant de la fonction  $\vartheta$ . On trouve

$$K = -\frac{1}{(4\pi)^4}.$$

On en déduit

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 + \frac{1}{24} \frac{g^2}{(8\pi^2)^2} p^2 \ln(\Lambda/p) + O(g^2 \times 1, g^2 \varepsilon).$$

L'EGR (13.13) implique alors

$$\frac{g^2}{6(4\pi)^4} p^2 - \eta(g) p^2 = 0,$$

et donc

$$\eta(g) = \frac{1}{6(4\pi)^4} g^2 + O(g^3),$$

en accord avec l'expression (10.38) pour  $N = 1$ .

Substituant la valeur de  $g^*$ , on trouve la première correction à la valeur gaussienne de l'exposant  $\eta$  (cf. aussi section 10.3.4) :

$$\eta = \frac{\varepsilon^2}{54} + O(\varepsilon^3). \quad (13.35)$$

Le champ  $\sigma(x)$ , qui au point fixe gaussien a la dimension *canonique*  $(d-2)/2$ , a acquis maintenant une dimension dite *anormale*

$$d_\sigma = \frac{1}{2}(d-2+\eta).$$

*Universalité.* Ces résultats appellent quelques commentaires. Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , on démontre que toutes les fonctions de corrélation ont, pour  $d < 4$ , un comportement à longue distance différent de celui prédit par le modèle quasi-gaussien. De plus, le comportement critique ne dépend pas de la valeur initiale du coefficient  $g$  de  $\sigma^4$ . Au moins pour  $\varepsilon \ll 1$ , on peut espérer que l'analyse des singularités IR dominantes reste valable et, par conséquent, qu'il ne dépend d'aucun autre paramètre du hamiltonien. Le comportement critique est donc *universel*, quoique moins universel que dans le modèle quasi-gaussien ou dans l'approximation de champ moyen, dans la mesure où il dépend d'un nombre limité de caractéristiques qualitatives du système statistique considéré.

Par ailleurs, les fonctions de corrélation obtenues en négligeant, dans le développement double en  $g$  et en  $\varepsilon$ , les corrections en loi de puissances lorsque le cut-off est grand, et qui satisfont exactement aux EGR (13.13), définissent implicitement une famille à un paramètre d'hamiltoniens critiques. Ils correspondent à une trajectoire du GR qui va d'un voisinage du point fixe gaussien  $g = 0$ , qui est instable pour des dimensions plus petites que 4, à un point fixe  $g^*$  non trivial et stable.

Enfin, la cohérence de cette analyse basée sur le développement en  $\varepsilon$  repose sur l'observation suivante. Les divergences trouvées dans le développement perturbatif à dimension fixée sont engendrées par un développement autour d'un point fixe inadapté, puisqu'il est répulsif. Le développement en  $\varepsilon$  nous permet d'échanger les limites et de suivre perturbativement le point fixe stable.

## 13.4 Interaction effective et interaction renormalisée

Nous avons indiqué que le paramètre renormalisé  $g_r$  (équation (13.7)) caractérisait l'intensité de l'interaction effective à l'échelle  $\mu$ . Nous pouvons

maintenant rendre cette remarque plus précise. Récrivons l'équation (13.7) sous la forme

$$g_r = G(\Lambda/\mu, g). \quad (13.36)$$

Alors, en dérivant par rapport à  $\Lambda$  à  $g_r, \mu$  fixés, on trouve

$$\left( \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) G(\Lambda/\mu, g) = 0,$$

où les mêmes contributions que dans le cas des fonctions de corrélation ont été négligées : dans le développement de  $G(\Lambda/\mu, g)$ , on ne retient que les contributions qui divergent ou qui restent finies quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

En introduisant un paramètre de dilatation  $\lambda$ , on en déduit

$$G(\Lambda/\mu, g) = G(\Lambda/\mu\lambda, g(\lambda)).$$

Pour  $\lambda = \Lambda/\mu$ , cette relation devient

$$g_r = G(\Lambda/\mu, g) = G(1, g(\lambda)),$$

avec, pour  $g \rightarrow 0$ ,

$$g_r = g(\lambda) + O(g^2).$$

Ainsi,  $g_r$  n'est pas identique à  $g(\lambda)$  sauf pour  $g \rightarrow 0$ , mais c'est une fonction de  $g(\lambda)$ .

Dans la limite  $\Lambda/\mu \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  tend vers l'infini et  $g(\lambda)$  vers  $g^*$ . On conclut que

$$\Lambda/\mu \rightarrow \infty \Rightarrow g_r = G(\Lambda/\mu, g) \rightarrow G(1, g^*).$$

Pour toute valeur initiale de  $g > 0$  fixée, le paramètre renormalisé prend la même valeur de point fixe. Puisqu'à  $g^*$  la théorie est invariante d'échelle, on déduit de l'EGR (13.19) de la théorie renormalisée que la valeur de  $g_r$  est aussi solution de

$$\beta_r(g_r^*) = 0 \Leftrightarrow g_r^* = G(1, g^*).$$

Plus précisément,

$$g_r - g_r^* = O((\mu/\Lambda)^\omega).$$

En particulier, à quatre dimensions, le point fixe reste gaussien, et donc  $g_r \rightarrow 0$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ce qui conduit au problème dit de *trivialité* dans le cadre de la théorie quantique des champs.

*Paramètre renormalisé fixé.* Réciproquement on peut se demander s'il est réellement possible, au-delà de la théorie des perturbations, de trouver une valeur de  $g$  pour toute valeur de  $g_r$ . Cela conduit à remplacer l'équation (13.26a) par

$$\int_{g(\mu/\Lambda)}^{g(1)} \frac{dg'}{\beta(g')} = \ln(\mu/\Lambda).$$

À  $g_r$  fixé, cette équation implique que pour  $\Lambda/\mu \rightarrow \infty$ , le paramètre initial  $g$  s'éloigne du point fixe de longue distance (ou IR). S'il existe un point fixe dit UV, c'est-à-dire un zéro de  $\beta(g)$  avec une pente négative,  $g$  converge vers cet autre point fixe.

Si initialement  $g(1) < g^*$ ,  $g(\mu/\Lambda)$  converge vers  $g = 0$ , ce qui n'est pas surprenant puisque cela consiste à compenser l'effet des dilatations sur un paramètre essentiel au voisinage du point fixe gaussien :

$$g(\mu/\Lambda) \propto (\mu/\Lambda)^\varepsilon.$$

Notons que  $g(1) < g^*$  implique aussi  $g_r < g_r^*$ . En revanche, si initialement  $g_r > g_r^*$ ,  $g(\mu/\Lambda)$  croît et l'existence de solutions dépend de la possibilité de continuer à utiliser un groupe de renormalisation à un seul paramètre, et de l'existence d'un éventuel point fixe UV supplémentaire. Comme des arguments empiriques confortés par des analyses numériques semblent exclure un tel point fixe, on est tenté de conclure que  $g_r$  est toujours plus petit ou égal à  $g_r^*$ . En particulier, à quatre dimensions, cela semble exclure une solution au problème de la trivialité ( $g_r = 0$ ) basée sur une valeur exceptionnelle de  $g$ .

## 13.5 Le domaine critique au-dessus de $T_c$

Nous étudions maintenant le domaine critique  $t \neq 0$ . Nous modifions donc l'hamiltonien :

$$\mathcal{H}(\sigma) \mapsto \mathcal{H}(\sigma) + \frac{t}{2} \int d^d x \sigma^2(x),$$

où  $t$ , le coefficient de  $\sigma^2$ , caractérise la déviation à la température critique :  $t \propto T - T_c$ .

Le théorème de renormalisation s'étend aux fonctions de corrélation de  $\sigma(x)$  et de  $\sigma^2(x)$ , et entraîne l'apparition d'un nouveau facteur de renormalisation  $Z_2(\Lambda/\mu, g_r)$  associé au paramètre  $t$ . Par les mêmes arguments que dans le cas critique, on en déduit une EGR plus générale, de la forme

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \eta(g) - \eta_2(g) t \frac{\partial}{\partial t} \right] \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, g, \Lambda) = 0, \quad (13.37)$$

où une nouvelle fonction  $\eta_2(g)$  apparaît. Le terme additionnel est proportionnel à  $t$  car il doit s'annuler pour  $t = 0$ . La fonction sans dimension  $\eta_2$  pourrait encore dépendre de façon régulière du rapport  $t/\Lambda^2$ , mais nous négligeons cette dépendance éventuelle comme nous avons négligé toutes les autres contributions du même ordre.

Pour déterminer  $\eta_2(g)$ , on peut calculer la fonction à deux points et lui appliquer l'EGR. À l'ordre  $g$ , on trouve

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 + t + \frac{g}{32\pi^4} \int^\Lambda d^4 q \left( \frac{1}{q^2 + t} - \frac{1}{q^2} \right) + \dots$$

En utilisant

$$\frac{1}{32\pi^2} \int^\Lambda d^4q \left( \frac{1}{q^2 + t} - \frac{1}{q^2} \right) \sim -\frac{t}{16\pi^2} \ln(\Lambda/\sqrt{t}),$$

et en appliquant l'EGR, on trouve

$$-\frac{gt}{16\pi^2} - \eta_2(g)t = 0,$$

et donc (cf. équation (10.29))

$$\eta_2(g) = -\frac{g}{16\pi^2}. \quad (13.38)$$

### 13.5.1 Solution des EGR

Examinons le comportement critique au-dessus de  $T_c$ . Comme on l'a déjà fait pour les EGR précédentes, on intègre l'équation (13.37) par la méthode des caractéristiques. En plus des fonctions  $g(\lambda)$  et  $Z(\lambda)$  des équations (13.26), il est maintenant nécessaire d'introduire une fonction  $t(\lambda)$  qui est déterminée en imposant que l'équation (13.37) soit compatible avec l'équation

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t(\lambda), g(\lambda), \Lambda/\lambda) \right] = 0. \quad (13.39)$$

La condition de compatibilité est équivalente à l'ensemble des équations

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\beta(g(\lambda)), \quad g(1) = g, \quad (13.40)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln t(\lambda) = \eta_2(g(\lambda)), \quad t(1) = t, \quad (13.41)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = -\eta(g(\lambda)), \quad Z(1) = 1. \quad (13.42)$$

L'analyse dimensionnelle (cf. section 13.1.3) montre que

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t(\lambda), g(\lambda), \Lambda/\lambda) = (\Lambda/\lambda)^{d-n(d-2)/2} \tilde{\Gamma}^{(n)}(\lambda p_i/\Lambda; \lambda^2 t(\lambda)/\Lambda^2, g(\lambda), 1). \quad (13.43)$$

La région critique est définie en particulier par  $|t| \ll \Lambda^2$ , et ceci est la source du comportement singulier IR qui apparaît dans la théorie des perturbations. Supposons que l'équation

$$t(\lambda) = \Lambda^2/\lambda^2, \quad (13.44)$$

possède une solution en  $\lambda$ . Alors, après cette dilatation  $\lambda$ , la longueur de corrélation est d'ordre unité. Ceci correspond aussi, en reliant le paramètre de dilatation  $\lambda$  et  $t$ , à choisir la valeur initiale (pour  $\lambda = 1$ ) du coefficient du terme essentiel  $\sigma^2$  pour que la valeur, après cette dilatation, soit d'ordre unité.

En combinant les équations (13.39)–(13.44), on trouve

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, g, \Lambda) = Z^{-n/2}(\lambda) m^{(d-n(d-2)/2)} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i/m; 1, g(\lambda), 1), \quad (13.45)$$

où l'on a introduit la notation

$$m = \Lambda/\lambda. \quad (13.46)$$

La solution de l'équation (13.41) peut être écrite

$$t(\lambda) = t \exp \left[ \int_1^\lambda \frac{d\sigma}{\sigma} \eta_2(g(\sigma)) \right]. \quad (13.47)$$

En substituant cette relation dans l'équation (13.44), on obtient

$$\ln(t/\Lambda^2) = - \int_1^\lambda \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{1}{\nu(g(\sigma))}, \quad (13.48)$$

où, pour relier la fonction  $\eta_2(g)$  aux exposants standards, nous avons introduit la fonction

$$\nu(g) = [\eta_2(g) + 2]^{-1}. \quad (13.49)$$

On cherche une solution  $\lambda$  dans la limite  $t/\Lambda^2 \ll 1$ . Puisque  $\nu(g)$  est une fonction positive, au moins pour  $g$  assez petit, comme les équations (13.38) et (13.49) le montrent, l'équation (13.48) implique que la valeur du paramètre  $\lambda$  tend vers l'infini et, donc, que  $g(\lambda)$  tend vers le point fixe IR  $g^*$ . Dans cette limite,  $\nu(g(\sigma))$  peut être remplacé, à l'ordre dominant, par l'exposant critique

$$\nu = \nu(g^*) = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{6}\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (13.50)$$

(en utilisant le développement (13.38)). L'équation (13.48) entraîne

$$\ln t/\Lambda^2 \sim -\frac{1}{\nu} \ln \lambda. \quad (13.51)$$

La forme asymptotique de  $Z(\lambda)$  est donnée par l'équation (13.32) :

$$Z(\lambda) \propto \lambda^{-\eta}. \quad (13.52)$$

Enfin, dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ou bien  $\lambda \rightarrow \infty$ , utilisant les équations (13.51) et (13.52) ainsi que (13.45), on obtient un comportement asymptotique de la forme

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, g, \Lambda = 1) \underset{\substack{t \ll 1 \\ |p_i| \ll 1}}{\sim} m^{d-n(d-2+\eta)/2} F_+^{(n)}(p_i/m), \quad (13.53)$$

où

$$m(\Lambda = 1) = \xi^{-1} \propto t^\nu. \quad (13.54)$$

En plus du comportement général d'échelle, un autre résultat a été obtenu. De l'équation (13.53), on déduit que la quantité  $m$  est proportionnelle à la masse physique ou à l'inverse de la longueur de corrélation. L'équation (13.54) montre alors que la divergence de la longueur de corrélation  $\xi = m^{-1}$  à  $T_c$  est caractérisée par l'exposant  $\nu$ .

Pour  $t \neq 0$ , les fonctions de corrélation sont finies à impulsion nulle et se comportent comme

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(0; t, g, \Lambda) \propto t^{\nu(d-n(d-2+\eta)/2)}. \quad (13.55)$$

En particulier, pour  $n = 2$ , on obtient l'inverse de la susceptibilité magnétique

$$\chi^{-1} = \tilde{\Gamma}^{(2)}(p = 0; t, g, \Lambda) \propto t^{\nu(2-\eta)}. \quad (13.56)$$

La divergence de  $\chi$  est caractérisée par un exposant qui est noté habituellement  $\gamma$  (cf. équation (7.35)). L'équation (13.55) établit la relation entre exposants

$$\gamma = \nu(2 - \eta). \quad (13.57)$$

Enfin, notons que puisque nous avons supposé que la théorie critique existe lorsque  $t$  tend vers zéro, les différentes puissances de  $t$  doivent se compenser dans l'équation (13.53). À partir de cette observation, on retrouve l'équation (13.33) sous la forme

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i/\lambda; t, g, \Lambda = 1) \underset{t^\nu \ll |p_i|/\lambda \ll 1}{\propto} \lambda^{-d+n(d-2+\eta)/2}. \quad (13.58)$$

### 13.5.2 Fonctions à aimantation fixée ou au-dessous de $T_c$

Il est facile de généraliser les EGR aux fonctions de corrélation en champ extérieur  $H$  fixé, ou aux fonctions de vertex à aimantation  $M = \langle \sigma(x) \rangle$  fixée. En particulier, en présence d'un champ extérieur uniforme  $H$ , il existe une relation (l'équation d'état) entre champ extérieur  $H$ , aimantation  $M$ , et déviation de la température critique  $t$ . Dans le domaine critique, elle satisfait l'EGR

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} \eta(g) \left( 1 + M \frac{\partial}{\partial M} \right) - \eta_2(g) t \frac{\partial}{\partial t} \right] H(M, t, g, \Lambda) = 0. \quad (13.59)$$

L'équation peut se résoudre par les mêmes méthodes. Comme il n'y a pas de fonction coefficient nouvelle, la solution peut s'exprimer entièrement en terme des fonctions (13.40), (13.41) et (13.42). Asymptotiquement, dans la limite  $M, t$  et  $H \ll 1$ , on peut remplacer  $g$  par  $g^*$ . Par ailleurs, l'analyse dimensionnelle nous apprend que  $H$  a dimension  $\frac{1}{2}(d+2)$  et donc

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} = \frac{d+2}{2} - 2t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{d-2}{2} M \frac{\partial}{\partial M},$$

de sorte qu'asymptotiquement  $H$  est solution de

$$\left[ (2 + \eta_2)t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}(d - 2 + \eta)M \frac{\partial}{\partial M} \right] H(M, t) = \frac{1}{2}(d + 2 - \eta)H(M, t).$$

Cette équation implique la propriété d'homogénéité, ou forme d'échelle, asymptotique universelle de l'équation d'état

$$H = M^\delta f(t/M^{1/\beta}),$$

où la fonction  $f(x)$  est universelle, aux normalisations de  $f$  et  $x$  près, et les exposants  $\beta$  et  $\delta$  sont reliés à  $\eta$  et  $\nu$  par

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} = \frac{d}{d_\sigma} - 1, \quad \beta = \nu d_\sigma = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta).$$

La variation du champ externe  $H$  permet, ensuite, de passer de manière continue de la phase désordonnée ( $T > T_c, H = 0$ ) à la phase ordonnée ( $T < T_c, H = 0$ ). Les EGR satisfaites par les fonctions de corrélation,

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2}\eta(g) \left( n + M \frac{\partial}{\partial M} \right) - \eta_2(g)t \frac{\partial}{\partial t} \right] \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, M, g, \Lambda) = 0, \quad (13.60)$$

permettent ainsi de démontrer des lois d'échelle en champ ou aimantation et, dans la limite  $H \rightarrow 0, T < T_c$ , toutes les lois d'échelles dans la phase ordonnée.

# Chapitre 14

## Théorie $(\phi^2)^2$ avec symétrie $O(N)$ : limite $N \rightarrow \infty$

AU CHAPITRE 13, nous avons indiqué comment on peut établir, par des méthodes de théorie statistique ou quantique des champs, les propriétés universelles des systèmes critiques dans le cadre du développement formel en  $\varepsilon = 4-d$  où  $d$  est la dimension d'espace. Il est encourageant de pouvoir vérifier par des méthodes analytiques, au moins dans une limite particulière, que les résultats ainsi obtenus restent valables même quand  $\varepsilon$  n'est plus infinitésimal. Dans ce chapitre, nous étudions la théorie statistique des champs avec symétrie orthogonale  $O(N)$  et interaction  $(\phi^2)^2$  (nous notons ici,  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$  le champ à  $N$  composantes plutôt que  $\sigma$  à la différence des chapitres précédents), à dimension fixée, dans le cadre d'un autre schéma d'approximation, la limite  $N \rightarrow \infty$ . Nous vérifions qu'elle possède les propriétés universelles démontrées dans le cadre du développement formel en  $\varepsilon$ . Plus généralement, mais nous ne le ferons pas ici, on peut démontrer toutes les propriétés déduites du groupe de renormalisation, ordre par ordre, dans un développement en  $1/N$ .

Enfin, soulignons qu'il est aussi possible d'étudier directement un modèle de spins à  $N$  composantes sur réseau, dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Le choix de l'espace continu est une simplification technique mais n'affecte pas les résultats universels.

*Hamiltonien symétrique général.* Dans un premier temps, nous étudions un problème plus général et considérons un hamiltonien de la forme

$$\mathcal{H}(\phi) = \mathcal{H}^{(2)}(\phi) + N \int d^d x U(\phi^2(x)/N), \quad (14.1)$$

où

$$\mathcal{H}^{(2)}(\phi) = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{\mu} \partial_{\mu} \phi(x) \cdot D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) \partial_{\mu} \phi(x).$$

Cet hamiltonien est invariant par le groupe  $O(N)$  agissant sur le vecteur  $\phi$ .

La fonction  $D(s)$  satisfait aux conditions usuelles. Elle est normalisée :  $D(0) = 1$ , strictement positive et analytique pour  $s \geq 0$ . Enfin, pour  $s \rightarrow +\infty$ , elle croît plus vite que  $s^{(d-2)/2}$  de façon à ce que le développement perturbatif soit défini. Le paramètre  $\Lambda$  est le facteur de coupure. Par ailleurs,  $U(\rho)$  est un polynôme en  $\rho$  avec, pour  $\rho \geq 0$ , un minimum unique à  $\rho \neq 0$  où sa dérivée seconde ne s'annule pas.

En termes des composantes de Fourier du champ définies par

$$\phi(x) = \int d^d p \, e^{ipx} \tilde{\phi}(p),$$

$\mathcal{H}^{(2)}(\phi)$  s'écrit aussi

$$\mathcal{H}^{(2)}(\phi) = (2\pi)^d \int d^d p \, \tilde{\phi}(p) D(p^2/\Lambda^2) \tilde{\phi}(-p). \quad (14.2)$$

Nous voulons déterminer le comportement de la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi(x)] \exp[-\mathcal{H}(\phi)] \quad (14.3)$$

et des fonctions de corrélation pour  $N \rightarrow \infty$  (à  $U$  fixé).

## 14.1 Préliminaires algébriques

Pour  $N \rightarrow \infty$ , l'étude des modèles spécifiés par un hamiltonien de type (14.1) repose sur une idée du type théorème de la limite centrale (section 3.1) ou de champ moyen (section 8.10). On s'attend, en effet, à ce que les quantités invariantes par le groupe  $O(N)$  comme

$$\phi^2(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i^2(x),$$

s'auto-moyennent et donc, fluctuent peu, ce qui signifie par exemple que,

$$\langle \phi^2(x) \phi^2(y) \rangle \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \langle \phi^2(x) \rangle \langle \phi^2(y) \rangle.$$

Par conséquent, il paraît judicieux d'essayer de prendre  $\rho(x) = \phi^2(x)$  comme variable dynamique plutôt que  $\phi(x)$ . Dans ce but, nous introduisons deux champs supplémentaires  $\lambda(x)$  et  $\rho(x)$  (cf. aussi section 8.10) et imposons la contrainte  $\rho(x) = \phi^2(x)/N$  par une intégrale sur  $\lambda(x)$ . En chaque point  $x$  de l'espace, nous utilisons l'identité

$$\frac{N}{4\pi} \int d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \, e^{i\lambda(\phi^2 - N\rho)/2} = N \int d\rho \, \delta(\phi^2 - N\rho) = 1,$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. L'insertion de cette identité dans l'intégrale (14.3) conduit à la nouvelle représentation de la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi][d\rho][d\lambda] \exp[-\mathcal{H}(\phi, \rho, \lambda)], \quad (14.4)$$

avec

$$\mathcal{H}(\phi, \rho, \lambda) = \mathcal{H}^{(2)}(\phi) + \int [NU(\rho(x)) - \frac{1}{2}i\lambda(x)(\phi^2(x) - N\rho(x))] d^d x. \quad (14.5)$$

L'intégrale de champ (14.4) est alors gaussienne en  $\phi$ . Les intégrales sur les différentes composantes de  $\phi$  se factorisent et chaque intégrale donne le même résultat. Donc,

$$\int [d\phi] \exp \left[ -\mathcal{H}^{(2)}(\phi) + \frac{1}{2}i \int d^d x \lambda(x) \phi^2(x) \right] \propto \{ \det [-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) - i\lambda(\bullet)] \}^{-N/2},$$

ce qui rend la dépendance en  $N$  de la fonction de partition explicite.

En fait, il est commode de séparer les composantes de  $\phi$  en une composante  $\sigma$ , et  $N-1$  composantes  $\pi$ , et de n'intégrer que sur  $\pi$  (pour  $T < T_c$  on peut même avoir intérêt à n'intégrer que sur  $N-2$  composantes). Cette modification n'affecte pas la limite  $N \rightarrow \infty$  mais permet de calculer directement les fonctions de corrélation de la composante  $\sigma$  du champ  $\phi$ . Dans ce but, nous ajoutons un terme de champ extérieur à l'hamiltonien. La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélations de  $\sigma$  est alors donnée par

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\sigma][d\rho][d\lambda] \exp \left[ -\mathcal{H}_N(\sigma, \rho, \lambda) + \int d^d x H(x)\sigma(x) \right] \quad (14.6)$$

avec ( $\text{tr} \ln = \ln \det$ ). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(\sigma, \rho, \lambda) &= \mathcal{H}^{(2)}(\sigma) + \int d^d x [NU(\rho) - \frac{1}{2}i\lambda(x)(\sigma^2(x) - N\rho(x))] \\ &\quad + \frac{1}{2}(N-1) \text{tr} \ln [-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) - i\lambda(\bullet)]. \end{aligned} \quad (14.7)$$

*Fonctions de corrélation du champ  $\phi^2(x)$ .* Dans ce formalisme, il est facile d'engendrer aussi les fonctions de corrélation impliquant le champ  $\rho$  qui, par construction, sont proportionnelles aux fonctions de corrélation de  $\phi^2$ . Le champ  $\phi^2(x)$ , qui est couplé à la variation de température, est la partie dominante de l'énergie locale.

## 14.2 Intégrale sur le champ $\phi$ : le déterminant

Dans le calcul de la section 14.1, l'intégrale sur chaque composante de  $\phi$  a engendré le déterminant d'un opérateur différentiel, qui n'est pas un objet

simple puisque  $\lambda(x)$  est un champ fluctuant. Heureusement, les calculs qui suivent n'en nécessitent qu'une définition perturbative, que nous précisons maintenant, valable quand  $\lambda(x)$  fluctue peu autour d'une valeur constante imaginaire.

### 14.2.1 Le déterminant : définition perturbative

Supposant que  $\lambda(x)$  fluctue peu autour d'une valeur moyenne constante  $im^2$ ,  $m > 0$ , on pose

$$\lambda(x) = im^2 + \mu(x), \quad m > 0,$$

et on définit le déterminant par (*cf.* sections 10.2, 12.4)

$$\begin{aligned} \ln \det [-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) - i\lambda(\bullet)] &= \text{tr} \ln [-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) - i\lambda(\bullet)] \\ &= \text{tr} \ln [-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) + m^2] \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \text{tr}(\Delta\mu)^n, \end{aligned} \quad (14.8)$$

où  $\Delta$  est le propagateur, inverse de l'opérateur  $-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) + m^2$  :

$$[-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) + m^2] \Delta(x-y) = \delta^{(d)}(x-y).$$

Cette équation se résout en introduisant la représentation de Fourier

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \, e^{-ipx} \tilde{\Delta}(p).$$

On trouve

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{1}{m^2 + p^2 D(p^2/\Lambda^2)}. \quad (14.9)$$

Dans le développement (14.8), on reconnaît une somme de diagrammes à une boucle du type discuté en section 12.4.2 et

$$\text{tr}(\Delta\mu)^n \equiv \int \prod_{i=1}^n d^d x_i \, \mu(x_i) \Delta(x_i - x_{i-1}) \quad \text{avec} \quad x_n = x_0.$$

Introduisant la représentation de Fourier du champ

$$\mu(x) = \int d^d p \, e^{ipx} \tilde{\mu}(p),$$

on peut réécrire l'expression

$$\text{tr}(\Delta\mu)^n = \int \left( \prod_{i=1}^n d^d p_i \tilde{\mu}(p_i) \right) \delta^{(d)} \left( \sum_i p_i \right) \int d^d q \prod_{i=1}^n \tilde{\Delta}(q_i), \quad (14.10)$$

avec

$$q_{i+1} - q_i = p_i, \quad q_{n+1} = q_1 = q.$$

Les trois premiers termes du développement vont jouer un rôle particulier. Pour  $n = 1, 2$ ,

$$\text{tr } \Delta \mu = \Delta(0) \int d^d x \mu(x) = (2\pi)^d \tilde{\mu}(0) \Omega_d(m),$$

$$\text{tr}(\Delta \mu)^2 = \int d^d x d^d y \Delta^2(x-y) \mu(x) \mu(y) = (2\pi)^d \int d^d p \tilde{\mu}(p) \tilde{\mu}(-p) B_\Lambda(p, m),$$

où nous avons défini

$$\Omega_d(m) = \Delta(0) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(q), \quad (14.11)$$

$$B_\Lambda(p, m) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(q) \tilde{\Delta}(p-q). \quad (14.12)$$

La fonction  $\Omega_d$  correspond au diagramme à une boucle (b) de la figure 2.4 sous sa forme 1-irréductible. Ce diagramme est déjà apparu dans les équations (6.39a), (10.10), et a été discuté dans une forme identique, après l'identification  $m^2 \mapsto t$ , en section 10.4.

La fonction  $B_\Lambda$  fait intervenir le diagramme (g) de la figure 2.6, sous sa forme 1-irréductible, représenté de façon plus précise dans la figure 14.1. Pour  $m = 0$ , la fonction  $B_\Lambda(p, m)$  se réduit à la fonction  $B(p)$  définie en (10.15) dont le comportement asymptotique pour  $p \rightarrow 0$  et  $d \rightarrow 4$  est discuté en section 10.3.2.

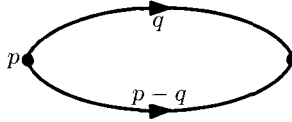


FIG. 14.1 – Le diagramme « bulle »  $B_\Lambda(p, m)$ .

### 14.2.2 Premiers diagrammes à une boucle : discussion

Pour la suite, nous avons besoin de quelques propriétés asymptotiques des fonctions  $\Omega_d(m)$  et  $B_\Lambda(p, m)$  qui, pour  $\Lambda = \infty$ , ont déjà été étudiées dans le cadre de la régularisation dimensionnelle en section 12.5.3.

La fonction  $\Omega_d$ . La fonction (14.11) s'écrit de façon plus explicite,

$$\Omega_d(m) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{m^2 + q^2 D(q^2/\Lambda^2)}. \quad (14.13)$$

Le changement de variables  $q/\Lambda \mapsto q$  montre que  $\Omega_d$  est de la forme

$$\Omega_d(m) = \Lambda^{d-2} \omega_d(m/\Lambda). \quad (14.14)$$

Les premiers termes du développement de  $\Omega_d(m)$  pour  $m^2 \rightarrow 0$  se déduisent du développement de  $\omega_d(z)$  pour  $z \rightarrow 0$ . Pour  $d > 2$ , ce développement a la forme (pour plus de détails, voir l'appendice C.1)

$$\omega_d(z) = \omega_d(0) - K(d)z^{d-2} + a(d)z^2 + O(z^4, z^d). \quad (14.15)$$

La constante  $K(d)$  est universelle, c'est-à-dire indépendante de la fonction de coupure  $D$  :

$$N_d = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)}, \quad (14.16a)$$

$$K(d) = -\frac{\pi}{2 \sin(\pi d/2)} N_d = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2), \quad (14.16b)$$

où nous avons introduit, de nouveau, le facteur de boucle  $N_d$ .

La constante  $a(d)$  qui caractérise, pour  $d < 4$ , la correction dominante dans l'équation (14.15), est donnée par

$$a(d) = N_d \int_0^\infty k^{d-5} dk \left( 1 - \frac{1}{D^2(k^2)} \right) \quad (14.17)$$

(forme valable pour  $2 < d < 4$ ). Elle dépend de la forme explicite du propagateur et donc de la régularisation. Cependant, pour  $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$ , elle diverge de façon universelle comme

$$a(d) \underset{\varepsilon=4-d \rightarrow 0}{\sim} N_d \int_1^\infty k^{d-5} dk \sim 1/(8\pi^2 \varepsilon). \quad (14.18)$$

Pour  $d = 4$ , le comportement de  $\omega_d(z)$  fait intervenir un logarithme :

$$\omega_d(z) - \omega_d(0) \sim \frac{1}{8\pi^2} z^2 \ln z. \quad (14.19)$$

La fonction  $B_\Lambda(p, m)$ . Le développement de  $B_\Lambda(0, m)$  pour  $m \rightarrow 0$  peut être déduit du développement (14.15). En effet,

$$\begin{aligned} B_\Lambda(0, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}^2(q) \\ &= -\frac{\partial}{\partial m^2} \Omega_d(m) \underset{m \ll \Lambda}{=} (d/2 - 1) K(d) m^{-\varepsilon} - a(d) \Lambda^{-\varepsilon} + \dots \end{aligned} \quad (14.20)$$

Dans la théorie critique (à cet ordre,  $m = 0$ ), pour  $2 \leq d \leq 4$ ,

$$B_\Lambda(p, 0) \underset{2 < d < 4}{=} b(d) p^{-\varepsilon} - a(d) \Lambda^{-\varepsilon} + O(\Lambda^{d-6} p^2, \Lambda^{-2} p^{d-2}), \quad (14.21)$$

où

$$b(d) = -\frac{\pi}{\sin(\pi d/2)} \frac{\Gamma^2(d/2)}{\Gamma(d-1)} N_d. \quad (14.22)$$

Pour  $d = 4$ , la fonction a un comportement logarithmique de la forme (cf. section 10.3.2)

$$B_\Lambda(p, 0) \underset{p \ll \Lambda}{\sim} \frac{1}{8\pi^2} \ln(\Lambda/p) + \text{const.} \quad (14.23)$$

*Contribution à l'énergie libre.* Le premier terme dans le développement (14.8),  $\text{tr} \ln[-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) + m^2]$ , est proportionnel au volume et diverge quand le volume tend vers l'infini. De plus, il diverge aussi parce que l'intégrale sur le champ  $\phi$  n'a pas été normalisée. La normalisation de la fonction de partition a comme effet de multiplier le déterminant par une constante qui doit être choisie pour que le produit soit fini. Cela correspond à soustraire, à son logarithme, une constante pour le rendre fini. Il est commode de choisir la normalisation indépendante de  $m^2$ . Nous définissons donc

$$\mathcal{D}(m^2) = \{\text{tr} \ln[-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) + m^2] - \text{tr} \ln[-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2)]\} / \text{volume}. \quad (14.24)$$

La variation du déterminant, quand  $m^2$  varie de  $\delta m^2$ , se déduit du second terme du développement (14.8), en posant  $\mu(x) = i\delta m^2$  :

$$-i \text{tr} \Delta \mu = \delta m^2 \Delta(0) \int d^d x = \delta m^2 \Delta(0) \times \text{volume}.$$

En conséquence,

$$\frac{\partial \mathcal{D}(m^2)}{\partial m^2} = \Delta(0) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(k) = \Omega_d(m).$$

En intégrant  $\Omega_d(m)$  sur  $m^2$ , on trouve l'expression finie

$$\mathcal{D}(m^2) = \int_0^m 2s ds \Omega_d(s). \quad (14.25)$$

Pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ , la fonction  $\mathcal{D}$  peut être évaluée en utilisant l'expression régularisée (14.25), et exprimée en termes des quantités définies en (14.15). On trouve

$$\mathcal{D}(m^2) = -2 \frac{K(d)}{d} m^d + \Omega_d(0) m^2 + \frac{a(d)}{2} m^4 \Lambda^{4-d} + O(m^6 \Lambda^{d-6}, m^{d+2} \Lambda^{-2}). \quad (14.26)$$

### 14.3 Limite $N \rightarrow \infty$ : le domaine critique

Nous étudions maintenant la limite  $N \rightarrow \infty$ , la fonction  $U(\rho)$  étant supposée indépendante de  $N$ . Avec l'Ansatz  $\sigma = O(N^{1/2})$ ,  $\rho = O(1)$ ,  $\lambda = O(1)$ ,

tous les termes dans  $\mathcal{H}_N$  sont d'ordre  $N$  et l'intégrale peut s'évaluer par la méthode du col. Nous cherchons un col qui correspond à des champs classiques  $\sigma(x), \rho(x), \lambda(x)$  constants :

$$\sigma(x) = \sigma, \quad \rho(x) = \rho, \quad \lambda(x) = im^2, \quad (14.27)$$

où nous avons explicité la positivité de  $-i\lambda$  au col (cf. (14.9)).

Pour  $H = 0$ , la densité du hamiltonien s'écrit alors

$$\mathcal{E} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} NU(\rho) + \frac{1}{2}m^2(\sigma^2 - N\rho) + \frac{1}{2}N\mathcal{D}(m^2), \quad (14.28)$$

où la représentation (14.25) a été utilisée. En dérivant  $\mathcal{E}$  par rapport à  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $m^2$ , on trouve les équations de col (en utilisant la définition (14.11))

$$m^2\sigma = 0, \quad (14.29a)$$

$$\frac{1}{2}m^2 = U'(\rho), \quad (14.29b)$$

$$\sigma^2/N - \rho + \Omega_d(m) = 0. \quad (14.29c)$$

*Discussion.* Dans l'expression (14.7), le terme  $\text{tr} \ln$  provient de l'intégration sur les  $N - 1$  composantes  $\pi$ . La valeur moyenne  $m^2$  du champ  $\lambda$  provient du terme de masse du champ  $\pi$  et donc, à l'ordre dominant,  $m$  est la masse des  $N - 1$  composantes  $\pi$ . L'équation (14.29a) implique soit  $\sigma = 0$ , soit  $m = 0$ . Cette alternative est une manifestation du phénomène de Goldstone (section 7.8) : si  $\sigma = 0$ , la symétrie  $O(N)$  n'est pas brisée et les  $N$  composantes du champ ont la même masse  $m$  ; au contraire, si  $\sigma \neq 0$ , la symétrie  $O(N)$  est brisée spontanément,  $m = 0$  et donc la masse du champ  $\pi$  s'annule, les  $N - 1$  composantes de  $\pi$  correspondant aux  $N - 1$  modes de Goldstone attendus.

Nous considérons maintenant les équations de col dans les deux phases.

- (i) *Phase ordonnée (symétrie brisée spontanément).* Notons que l'équation (14.29c) n'est compatible avec une solution  $m = 0$  que pour  $d > 2$  puisque, pour  $d \leq 2$ , l'intégrale diverge à  $m = 0$ . Cette propriété est directement liée au théorème de Mermin–Wagner–Coleman : dans un modèle statistique n'impliquant que des forces à courte portée, une symétrie continue ne peut pas être brisée pour  $d \leq 2$ , dans la mesure où la moyenne  $\sigma$  du paramètre d'ordre s'annule nécessairement (voir aussi la discussion de la section 7.7). Dans le présent contexte, les modes de Goldstone sont à l'origine de cette propriété : étant de masse nulle, comme on le sait par des arguments généraux et comme le calcul à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$  l'a confirmé, leur présence induirait des divergences à impulsion nulle pour  $d \leq 2$ .

Les équations de col (14.29) se réduisent alors à

$$U'(\rho) = 0 \text{ et } (d > 2),$$

$$\sigma^2/N - \rho + \Omega_d(0) = 0.$$

La première équation exprime que  $\rho$  est donné par le minimum de  $U$ , que nous avons supposé unique, et la deuxième équation détermine alors la valeur moyenne du champ. Une solution n'existe que si la position  $\rho$  du minimum satisfait

$$\rho > \rho_c = \Omega_d(0), \quad (14.30)$$

et alors

$$\sigma = \sqrt{N(\rho - \rho_c)}. \quad (14.31)$$

- (ii) *La phase désordonnée (symétrique)*. Dans le cas  $\sigma = 0$ , les équations de col (14.29) peuvent s'écrire

$$m^2 = 2U'(\rho), \quad \rho - \rho_c = \Omega_d(m) - \Omega_d(0). \quad (14.32)$$

La deuxième équation implique  $\rho \leq \rho_c$ . La valeur  $\rho = \rho_c$  correspond donc à une transition entre une phase ordonnée  $\rho > \rho_c$  et une phase symétrique  $\rho \leq \rho_c$ . La condition

$$U'(\rho_c) = 0 \quad (14.33)$$

détermine les interactions  $U(\rho)$  critiques.

Le paramètre  $m$  est maintenant la masse du champ  $\phi$  et  $\xi = 1/m$  la longueur de corrélation. La condition  $m \ll \Lambda$ , ce qui est équivalent à  $\xi \gg 1/\Lambda$ , définit le domaine critique. Elle implique que  $\rho$  est proche de  $\rho_c$  par la deuxième équation (14.32). La première équation entraîne que  $U'(\rho)$  est petit et donc que  $\rho$  est proche de la position du minimum de  $U(\rho)$ . Nous posons

$$U'(\rho_c) = \frac{1}{2}\tau, \quad |\tau| \ll 1. \quad (14.34)$$

Nous développons alors  $U(\rho)$  à  $\rho_c$  :

$$U(\rho) = \frac{1}{2}\tau(\rho - \rho_c) + \frac{1}{2}U_c''(\rho - \rho_c)^2 + O((\rho - \rho_c)^3). \quad (14.35)$$

Avec cette paramétrisation,

$$m^2 = 2U_c''(\rho - \rho_c) + \tau + O((\rho - \rho_c)^2).$$

Nous avons supposé que  $U''(\rho)$  ne s'annule pas au minimum et, donc que  $U''$  ne s'annule pas dans un voisinage. Comme  $\rho$  est proche de  $\rho_c$ ,  $U_c''$  est strictement positif. Alors  $\tau$  est positif dans la phase symétrique et négatif dans la phase de symétrie brisée.

Sans cette hypothèse, le point critique pourrait être un point multicritique, une situation que nous n'examinons pas dans ce contexte.

Pour déterminer les comportements au voisinage du point critique, seul le développement jusqu'au second ordre est utile. Nous pouvons donc

réduire  $U(\rho)$  à un polynôme quadratique, comme dans le modèle quasi-gaussien, et le problème se réduit à la discussion de la même théorie des champs  $(\phi^2)^2$  qui, dans le cadre du développement en  $\varepsilon = 4 - d$ , décrit les comportements critiques universels.

## 14.4 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ pour $N \rightarrow \infty$

La discussion qui suit est maintenant spécifique à la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ . Avec le choix

$$U(\rho) = \frac{1}{2}r\rho + \frac{u}{4!}\rho^2, \quad (14.36)$$

l'hamiltonien, exprimé en terme du champ initial à  $N$  composantes  $\phi$ , prend la forme

$$\mathcal{H}(\phi) = \mathcal{H}^{(2)}(\phi) + \int \left\{ \frac{1}{2}r\phi^2(x) + \frac{1}{4!}\frac{u}{N} [\phi^2(x)]^2 \right\} d^d x. \quad (14.37)$$

La limite  $N \rightarrow \infty$  est prise à  $U(\rho)$  fixé et ceci implique, avec nos conventions, que  $u$ , le coefficient de  $(\phi^2)^2/N$ , est fixé.

Le potentiel  $U$  étant quadratique (équation (14.36)), l'intégrale sur  $\rho(x)$  dans (14.6) est gaussienne et peut, dans ce cas, être effectuée explicitement. Notons, toutefois, que le champ  $\rho$  a une interprétation physique plus directe que le champ  $\lambda$ .

L'intégration conduit d'abord à traduire  $\rho(x)$  de sa valeur au minimum de la forme quadratique. Cette valeur est solution de l'équation de champ

$$\frac{\delta \mathcal{H}_N(\sigma, \rho, \lambda)}{\delta \rho(x)} = 0 \Rightarrow \lambda(x) = i \left[ \frac{1}{6}u\rho(x) + r \right]. \quad (14.38)$$

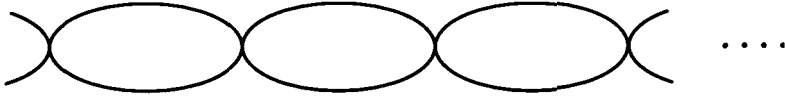
Après cette translation, l'intégration gaussienne résiduelle ne donne qu'un facteur constant. L'intégration correspond donc à remplacer, dans l'hamiltonien,  $\rho$  par la solution de l'équation (14.38). On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(\sigma, \lambda) &= \mathcal{H}^{(2)}(\sigma) - \int d^d x \left[ \frac{1}{2}i\lambda(x)\sigma^2(x) + (3N/2u)(i\lambda(x) + r)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}(N-1) \operatorname{tr} \ln \left[ -\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) - i\lambda(\bullet) \right]. \end{aligned} \quad (14.39)$$

La densité d'hamiltonien au col (14.28) prend la forme

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m^2\sigma^2 - (3N/2u)(r - m^2)^2 + \frac{1}{2}N\mathcal{D}(m^2). \quad (14.40)$$

*Interprétation diagrammatique.* Dans la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ , quand  $N \rightarrow \infty$ , à chaque ordre du développement perturbatif, les termes dominants proviennent des chaînes de diagrammes en « bulle » de la forme représentée dans la figure 14.2. Asymptotiquement, ces diagrammes forment une série géométrique que les techniques algébriques précédentes permettent de sommer.

FIG. 14.2 – Les diagrammes dominants pour  $N \rightarrow \infty$ .

*Phase de basse température en champ nul.* Dans la phase ordonnée  $\rho > \rho_c$ , l'équation (14.31) donne la valeur moyenne non nulle du champ

$$\sigma = \sqrt{N(\rho - \rho_c)},$$

où  $\rho_c = \Omega_d(0)$  (cf. équation (14.30)), et la symétrie  $O(N)$  est brisée spontanément. La constante  $\rho$  est alors donnée par l'équation (14.29b) qui se réduit à  $U'(\rho) = 0$ . La condition (14.33) détermine le potentiel critique  $U$  :

$$U'(\rho_c) = 0 \Rightarrow r = r_c = -u\rho_c/6. \quad (14.41)$$

La valeur moyenne du champ s'annule pour  $r = r_c$ , qui donc correspond à la température critique  $T_c$ . Introduisant le paramètre  $\tau$  qui caractérise la déviation à la température critique (défini par l'équation (14.34)),

$$\tau = 2U'(\rho_c) = r - r_c,$$

on obtient

$$U'(\rho) = 0 \Rightarrow \rho - \rho_c = -(6/u)\tau. \quad (14.42)$$

La symétrie  $O(N)$  est brisée pour  $\tau < 0$ , c'est-à-dire à basse température et l'équation (14.31) peut alors se récrire

$$\sigma^2 = -(6/u)\tau \propto (-\tau)^{2\beta} \quad \text{avec } \beta = \frac{1}{2}. \quad (14.43)$$

Ce comportement montre que, dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , l'exposant  $\beta$  reste quasi-gaussien en toute dimension.

*Phase de haute température en champ nul.* Pour  $\tau > 0$ , c'est-à-dire au-dessus de  $T_c$ ,  $\sigma$  s'annule. De l'expression (14.7), on déduit la fonction à deux points du champ  $\sigma$  qui, dans cette phase, est identique au propagateur (14.9). Asymptotiquement, elle prend la forme (négligeant les corrections venant des termes inessentiels)

$$\tilde{\Delta}_\sigma(p) = \tilde{\Delta}(p) \underset{|p|, m \ll \Lambda}{\sim} \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (14.44)$$

Par conséquent,  $m$  est la masse physique du champ  $\sigma$  (et donc de toutes les composantes du champ  $\phi$ ) et son inverse

$$\xi = 1/m \quad (14.45)$$

est la longueur de corrélation. L'équation (14.29c) implique que  $\partial\rho/\partial m$  est négative et que  $r$  est une fonction croissante de  $m$ . Le minimum de  $r$ , obtenu pour  $m = 0$ , est  $r_c$ . Utilisant les définitions (14.34) et (14.41) dans les équations (14.32), on trouve alors

$$m^2 = (u/6)(\rho - \rho_c) + \tau, \quad (14.46a)$$

$$\rho - \rho_c = \Omega_d(m) - \Omega_d(0). \quad (14.46b)$$

- (i) Pour  $d > 4$ , le développement (14.15) implique que la contribution principale à  $\rho - \rho_c$  est proportionnelle à  $m^2$ , comme le membre de gauche de l'équation (14.46a) et, donc,

$$m^2 = \xi^{-2} \sim \tau \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad (14.47)$$

ce qui est le résultat gaussien ou de champ moyen.

- (ii) Pour  $2 < d < 4$ , en revanche, le terme principal est d'ordre  $m^{d-2}$  et donc,

$$\rho - \rho_c \sim -K(d)m^{d-2}.$$

La contribution dominante pour  $m \rightarrow 0$  dans l'équation (14.46a) provient maintenant de  $\rho - \rho_c$ . Ne gardant que le terme dominant dans (14.15), on en déduit

$$m = \xi^{-1} \sim \tau^{1/(d-2)}, \quad (14.48)$$

ce qui montre que l'exposant de corrélation

$$\nu = \frac{1}{d-2} \quad (14.49)$$

et qu'il n'est donc plus gaussien.

- (iii) Pour  $d = 4$ , la contribution principale dans l'équation (14.46a) provient encore de  $\rho - \rho_c$  et, donc,

$$m^2 \sim \frac{48\pi^2}{u} \frac{\tau}{\ln(\Lambda/m)} \sim \frac{96\pi^2}{u} \frac{\tau}{\ln(\Lambda^2/\tau)}. \quad (14.50)$$

La longueur de corrélation n'a plus un comportement en loi de puissances mais plutôt un comportement de type gaussien modifié par un logarithme. C'est un comportement typique d'une situation où le point fixe gaussien est stable en présence d'un opérateur marginal.

- (iv) Si l'on examine l'équation (14.29b) pour  $\sigma = 0$  et  $d = 2$ , on trouve que la longueur de corrélation ne peut diverger que pour  $r \rightarrow -\infty$ . Cette situation particulière sera étudiée dans le cadre du modèle  $\sigma$  non linéaire en section 14.10.

Enfin, dans la limite critique  $\tau = 0$ ,  $m$  s'annule et donc, de la forme (14.44) de la fonction à deux points du champ  $\sigma$ , on déduit que l'exposant critique  $\eta$  reste gaussien pour tout  $d$  :

$$\eta = 0 \Rightarrow d_\phi = \frac{1}{2}(d - 2). \quad (14.51)$$

On vérifie aussi que, pour  $d \leq 4$ , les exposants  $\beta, \nu, \eta$  satisfont la relation d'échelle démontrée dans le cadre du développement en  $\varepsilon$  :

$$\beta = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta) = \nu d_\phi.$$

## 14.5 Partie singulière de l'énergie libre et équation d'état

En présence d'un champ magnétique constant  $H$  dans la direction  $\sigma$ , la densité d'énergie libre  $W(H)$  (à cet ordre, l'opposée de la densité du hamiltonien (14.40) dans laquelle les équations de col sont utilisées) est donnée par

$$\begin{aligned} W(H) &= \ln \mathcal{Z} / \text{volume} = -\mathcal{E} \\ &= N \left[ \frac{3}{2u}(m^2 - r)^2 - \frac{1}{2}m^2\sigma^2/N + H\sigma/N - \frac{1}{2}\mathcal{D}(m^2) \right], \end{aligned}$$

où  $\rho$  a été éliminé grâce à l'équation (14.29b) (ou (14.38)) et la contribution du déterminant a été exprimée par l'équation (14.25). Les valeurs au col  $m^2$  et  $\sigma$  sont données par l'équation (14.29c) et l'équation de col (14.29a) modifiée

$$m^2\sigma = H. \quad (14.52)$$

L'aimantation, valeur moyenne de  $\phi$ , est

$$M = \frac{\partial W}{\partial H} = \sigma,$$

puisque les dérivées partielles de  $W$  par rapport à  $m^2$  et  $\sigma$  s'annulent comme conséquence des équations de col. La densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$ , transformée de Legendre de  $W(H)$ , est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(M) &= HM - W(H) \\ &= N \left[ -\frac{3}{2u}(m^2 - r)^2 + \frac{1}{2}m^2 M^2/N + \frac{1}{2}\mathcal{D}(m^2) \right]. \end{aligned}$$

Le développement de  $\mathcal{D}(m^2)$  pour  $m \rightarrow 0$  est donné par l'équation (14.26). Le potentiel thermodynamique prend alors la forme

$$\mathcal{G}(M)/N = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{u^*} - \frac{1}{u} \right) m^4 + \frac{3(r - r_c)}{u} m^2 + \frac{1}{2}m^2 M^2/N - \frac{K(d)}{d} m^d - \frac{3r^2}{2u} \quad (14.53)$$

avec la définition

$$u^* = \frac{6}{a(d)} \Lambda^\varepsilon. \quad (14.54)$$

Notons que, pour  $d < 4$ , le terme proportionnel à  $m^4$  est négligeable pour  $m \rightarrow 0$  par rapport au terme singulier  $m^d$ . Donc, à l'ordre dominant dans le domaine critique

$$\mathcal{G}(M)/N = \frac{3}{u} \tau m^2 + \frac{1}{2} m^2 M^2/N - \frac{K(d)}{d} m^d + \text{const.}, \quad (14.55)$$

où  $\tau$  a été défini en (14.34).

Comme conséquence de la propriété (6.9) de la transformation de Legendre, l'équation de col correspondant à  $m^2$  est maintenant obtenue en exprimant que la dérivée de  $\mathcal{G}$  par rapport à  $m^2$  s'annule. On trouve

$$(6/u)\tau + M^2/N - K(d)m^{d-2} = 0,$$

dont la solution est

$$m = \xi^{-1} = [K(d)]^{1/(2-d)} [(6/u)\tau + M^2/N]^{1/(d-2)},$$

une expression qu'on peut comparer à l'expression quasi-gaussienne (8.59).

La contribution dominante au potentiel thermodynamique dans le domaine critique s'en déduit :

$$\frac{1}{N} \mathcal{G}(M) \sim \frac{d-2}{2d(K(d))^{2/(d-2)}} [(6/u)\tau + M^2/N]^{d/(d-2)}. \quad (14.56)$$

Différentes quantités peuvent être calculées à partir de  $\mathcal{G}(M)$ . Par exemple, en dérivant par rapport à  $M$ , on trouve l'équation d'état dans la limite d'échelle

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M} = h_0 M^\delta f(a_0 \tau / M^2), \quad (14.57)$$

où  $h_0$  et  $a_0$  sont deux constantes de normalisation. L'exposant  $\delta$  est donné par

$$\delta = \frac{d+2}{d-2}, \quad (14.58)$$

en accord avec la relation générale entre exposants  $\delta = d/d_\phi - 1$ , et la fonction  $f(x)$  par

$$f(x) = (1+x)^{2/(d-2)}. \quad (14.59)$$

La forme asymptotique de  $f(x)$  pour  $x \rightarrow +\infty$  implique  $\gamma = 2/(d-2)$ , ce qui est à nouveau en accord avec la relations d'échelle  $\gamma = \nu(2-\eta)$ . Enfin, en accord avec des résultats généraux, l'équation d'état peut être mise sous une forme paramétrique  $\{M, \tau\} \mapsto \{R, \theta\}$  :

$$\begin{aligned} M &= (a_0)^{1/2} R^{1/2} \theta, \\ \tau &= 3R(1 - \theta^2), \\ H &= h_0 R^{\delta/2} \theta (3 - 2\theta^2)^{2/(d-2)}. \end{aligned}$$

*Exposant de chaleur spécifique. Rapports d'amplitudes.* En dérivant  $\mathcal{G}(M)$  deux fois par rapport à  $\tau$ , on obtient la partie singulière de la chaleur spécifique à aimantation  $M$  fixée :

$$\mathcal{C}_{\text{sing.}} \propto [(6/u)\tau + M^2/N]^{(4-d)/(d-2)}. \quad (14.60)$$

Pour  $M = 0$ , la partie singulière de la chaleur spécifique s'annule donc comme

$$\mathcal{C}_{\text{sing.}} \propto |\tau|^{-\alpha}, \quad (14.61)$$

avec comme exposant de chaleur spécifique

$$\alpha = \frac{d-4}{d-2}, \quad (14.62)$$

qui est aussi égal à  $2 - d\nu$ , en accord avec les prédictions du groupe de renormalisation.

Notons que, pour  $N \rightarrow \infty$ , le terme dominant de la chaleur spécifique quand  $\tau \rightarrow 0$  n'est pas la partie singulière universelle, qui s'annule, mais la partie régulière en  $\tau$  qui a une limite finie mais dont la valeur n'est pas universelle (par exemple elle dépend de  $u$ ).

Parmi les rapports d'amplitudes critiques, on peut calculer, par exemple,  $R_\xi^+ = f_1^+(\alpha A^+)^{1/d}$  et  $R_c = \alpha A^+ C^+ / M_0^2$  (cf. équation (7.35) et section 8.6)

$$(R_\xi^+)^d = \frac{4N}{(d-2)^3} \frac{\Gamma(3-d/2)}{(4\pi)^{d/2}}, \quad R_c = \frac{4-d}{(d-2)^2}. \quad (14.63)$$

*Corrections dominantes aux lois d'échelles.* Le terme proportionnel à  $m^4$  est la correction dominante à la forme d'échelle asymptotique. Le comparant au terme principal, on trouve

$$m^4/m^d = O(\tau^{(4-d)/(d-2)}).$$

L'exposant qui caractérise les corrections dominantes à la forme asymptotique dans la variable température, est  $\omega\nu$  ( $\omega$  est défini par l'équation (13.29)) et donc

$$\omega\nu = (4-d)/(d-2) \Rightarrow \omega = 4-d. \quad (14.64)$$

Remarquons que pour la valeur particulière  $u = u^*$ , cette correction s'annule.

## 14.6 Les fonctions à deux points $\langle\lambda\lambda\rangle$ et $\langle\phi^2\phi^2\rangle$

Dans la phase de haute température, en dérivant deux fois le hamiltonien (14.39) par rapport à  $\lambda(x)$ , et en remplaçant le champ  $\lambda(x)$  par sa valeur moyenne  $im^2$ , on obtient la fonction à deux points  $\langle\lambda\lambda\rangle$ , qui est aussi le propagateur du champ  $\lambda$  dans le développement en  $1/N$ . Pour la dérivée du  $\text{trln}$ , on

peut utiliser le terme  $n = 2$  du développement (14.8). La partie quadratique en  $\lambda$  du hamiltonien est

$$\mathcal{H}_{\lambda\lambda} = \frac{3N}{2u} \int d^d x \lambda^2(x) + \frac{N}{4} \int d^d x d^d y \Delta^2(x-y) \lambda(x) \lambda(y),$$

une expression qui, en introduisant les composantes de Fourier

$$\lambda(x) = \int d^d p e^{ipx} \tilde{\lambda}(p),$$

peut être réécrite

$$\mathcal{H}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} N (2\pi)^d \int d^d p \tilde{\lambda}(p) \tilde{\lambda}(-p) \left( \frac{3}{u} + \frac{1}{2} B_{\Lambda}(p, m) \right), \quad (14.65)$$

où  $B_{\Lambda}(p, m)$  est la fonction (14.12) correspondant au diagramme de la figure 14.1. On trouve alors

$$\langle \lambda(x) \lambda(0) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{ipx} \tilde{\Delta}_{\lambda}(p), \quad (14.66)$$

où  $\tilde{\Delta}_{\lambda}$  se déduit de l'expression (14.65) :

$$\tilde{\Delta}_{\lambda}(p) = \frac{2}{N} \left( \frac{6}{u} + B_{\Lambda}(p, m) \right)^{-1}. \quad (14.67)$$

Utilisant la relation (14.38), on obtient la fonction à deux points  $\langle \rho \rho \rangle$  (en représentation de Fourier, la translation par une constante ne produit qu'une distribution  $\delta$  à  $p = 0$ ) et donc, suivant la remarque de la section 14.4, la fonction à deux points de  $\phi^2(x)$  (qui est la fonction de corrélation énergie-énergie) en représentation de Fourier :

$$\int d^d x e^{ipx} \langle \phi^2(x) \phi^2(0) \rangle = N^2 \int d^d x e^{ipx} \langle \rho(x) \rho(0) \rangle = - \frac{12N/u}{1 + (u/6)B_{\Lambda}(p, m)}. \quad (14.68)$$

La valeur à impulsion nulle de cette fonction donne la chaleur spécifique. Le développement pour  $m \rightarrow 0$  de  $B_{\Lambda}(0, m)$  est donné par l'équation (14.20). La partie singulière de la chaleur spécifique s'annule donc comme  $m^{4-d}$ , en accord avec l'équation (14.60) pour  $M = 0$ .

Dans la théorie critique ( $m = 0$  à cet ordre), pour  $2 \leq d \leq 4$ , le développement (14.21) montre que, quand l'impulsion  $p$  tend vers zéro, le dénominateur est aussi dominé par la partie singulière de  $B_{\Lambda}(p, 0)$ . On en déduit que

$$\tilde{\Delta}_{\lambda}(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{Nb(d)} p^{4-d}. \quad (14.69)$$

On vérifie à nouveau la cohérence avec les relations d'échelle. De plus, la dimension  $[\lambda]$  du champ  $\lambda$ , et donc de l'opérateur énergie, dans la limite  $N \rightarrow \infty$  est

$$[\lambda] = \frac{1}{2}[d + (4 - d)] = 2, \quad (14.70)$$

un résultat important pour la théorie des perturbations en  $1/N$ . Ce résultat est cohérent avec les propriétés (relations (9.64), (10.32) et (10.34))

$$[\lambda] = [\rho] = [\phi^2] = d - 1/\nu = d - (d - 2).$$

*Remarques.*

- (i) Pour  $d = 4$ ,  $B_\Lambda(p, 0)$  a le comportement logarithmique (14.23) et domine encore le comportement de la fonction à deux points qui devient

$$\tilde{\Delta}_\lambda(p) \sim \frac{16\pi^2}{N \ln(\Lambda/p)}.$$

- (ii) Soulignons qu'en conséquence, pour  $d \leq 4$ , les contributions engendrées par le terme proportionnel à  $\lambda^2(x)$  dans (14.7) ont toujours été négligeables dans le domaine critique.

*La fonction  $\langle \sigma \sigma \rangle$  à basse température.* Dans la phase de symétrie brisée, après translation des valeurs moyennes, l'hamiltonien inclut un terme proportionnel à  $\sigma \lambda$  et donc les propagateurs des champs  $\sigma$  et  $\lambda$  sont les éléments d'une matrice  $\mathbf{M}$   $2 \times 2$ . En représentation de Fourier,

$$\mathbf{M}^{-1}(p) = \begin{pmatrix} p^2 & -i\sigma \\ -i\sigma & 3N/u + \frac{1}{2}NB_\Lambda(p, 0) \end{pmatrix}, \quad (14.71)$$

où  $\sigma = \langle \sigma(x) \rangle$  et  $B_\Lambda$  est donnée par l'équation (14.21). Pour  $d < 4$ , asymptotiquement, le déterminant est donné par

$$1/\det \mathbf{M}(p) \sim N [b(d)p^{d-2} + 6\tau/u].$$

Cette expression définit une échelle de masse

$$m_{\text{cr}} = (-\tau/u)^{1/(d-2)} \propto \Lambda((r_c - r)/\Lambda^2)^{1/(d-2)} = \Lambda((r_c - r)/\Lambda^2)^\nu, \quad (14.72)$$

à laquelle est associée une transition (crossover en anglais) entre un comportement dominé par les modes de Goldstone et un comportement critique.

À  $d = 4$ ,  $B_\Lambda(p, 0)$  est donné par l'expression (14.23) et

$$m_{\text{cr}}^2 \propto \frac{r_c - r}{\ln[\Lambda^2/(r_c - r)]}. \quad (14.73)$$

Enfin, pour  $d > 4$ ,  $B_\Lambda(p, 0)$  a une limite finie à  $p = 0$  et donc

$$m_{\text{cr}} \propto \sqrt{r_c - r}. \quad (14.74)$$

En toute dimension, pour  $|r \rightarrow r_c| \rightarrow 0$ ,  $m_{\text{cr}}$  a donc le même comportement d'échelle que la masse physique.

## 14.7 Groupe de renormalisation et corrections aux lois d'échelles

Pour vérifier plus directement la cohérence de la limite  $N \rightarrow \infty$  avec le schéma du groupe de renormalisation (GR) perturbatif, nous calculons, à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$ , les fonctions du GR et les corrections dominantes aux lois d'échelle.

### 14.7.1 Les fonctions du groupe de renormalisation

Nous posons (cf. équation (14.54))

$$u = Ng\Lambda^{4-d}, \quad g^* = u^*\Lambda^{d-4}/N = 6/(Na), \quad (14.75)$$

où la constante  $a(d)$  a été définie en (14.15) et diverge pour  $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$  comme  $1/(8\pi^2\varepsilon)$  (équation (14.18)).

La masse  $m$  est solution des équations (14.46) qui entraînent

$$m^2 = \frac{1}{6}N\Lambda^{4-d}g[\Omega_d(m) - \Omega_d(0)] + \tau.$$

Pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ , nous retenons, dans l'équation, le terme principal et la correction qui devient marginale à  $d = 4$  (équations (14.14), (14.15) et (14.75)). L'équation devient

$$E(m, \tau, g, \Lambda) \equiv m^2(1 - g/g^*) + \frac{1}{6}NgK(d)m^{d-2}\Lambda^{4-d} - \tau = 0. \quad (14.76)$$

Dérivant l'équation par rapport à  $\Lambda, g, \tau$ , on en déduit

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial m}{\partial \Lambda} \frac{\partial E}{\partial m} + (4-d) \frac{1}{6}NgK(d)m^{d-2}\Lambda^{4-d} &= 0, \\ g \frac{\partial m}{\partial g} \frac{\partial E}{\partial m} - m^2 \frac{g}{g^*} + \frac{1}{6}NgK(d)m^{d-2}\Lambda^{4-d} &= 0, \\ -\tau \frac{\partial m}{\partial \tau} \frac{\partial E}{\partial m} + m^2 \left(1 - \frac{g}{g^*}\right) + \frac{1}{6}NgK(d)m^{d-2}\Lambda^{4-d} &= 0, \end{aligned}$$

où, dans la dernière équation,  $\tau$  a été éliminé en utilisant l'équation  $E = 0$ . En faisant une combinaison linéaire de ces trois équations avec les coefficients  $1, -\varepsilon(1 - g/g^*), -\varepsilon g/g^*$ , respectivement, on vérifie, qu'à cet ordre,  $m$  satisfait une équation qui exprime que c'est un invariant du GR :

$$\left( \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \eta_2(g) \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) m(\tau, g, \Lambda) = 0, \quad (14.77)$$

où, dans le membre de droite, les contributions d'ordre  $1/\Lambda^2$  ont donc été négligées. Les fonctions du GR,  $\beta(g)$  et  $\eta_2(g)$  sont alors

$$\beta(g) = -\varepsilon g(1 - g/g^*), \quad (14.78)$$

$$\eta_2(g) = -\varepsilon g/g^* \Rightarrow \nu^{-1}(g) = 2 + \eta_2(g) = 2 - \varepsilon g/g^*. \quad (14.79)$$

Pour les régularisations les plus simples,  $a(d)$  est positif en toutes dimensions et l'équation de point fixe,  $\beta(g) = 0$  a une solution non-triviale  $g = g^*$  correspondant, pour  $d \leq 4$ , à un point IR. Intégrant l'équation de flot

$$\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = -\beta(g(\lambda)),$$

on obtient

$$\left| \frac{g^*}{g(\lambda)} - 1 \right| = \lambda^{d-4}. \quad (14.80)$$

On trouve alors les exposants  $\nu^{-1} = d - 2$ , ce dernier résultat étant cohérent avec les équations (14.64, 14.49), et  $\omega = \beta'(g^*) = \varepsilon$ . Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ ,  $\omega$  est associée à la correction dominante au comportement d'échelle asymptotique. Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega$  reste plus petit que 2 pour  $\varepsilon < 2$ , ce qui étend cette propriété à toutes les dimensions  $2 \leq d \leq 4$ .

Enfin, en appliquant les équations du GR au propagateur (14.44), on trouve

$$\eta(g) = 0, \quad (14.81)$$

ce qui est cohérent avec la valeur (14.51) de l'exposant  $\eta$ .

Signalons, toutefois, qu'il existe des situations où  $a(d)$  est négatif et dans ce cas, que nous évoquons brièvement plus loin, la méthode du GR est confrontée à une sérieuse difficulté.

### 14.7.2 Corrections dominantes aux relations d'échelle

De l'analyse générale du RG, on s'attend à ce que les corrections principales au comportement d'échelle s'annulent pour  $u = u^*$ . Cette propriété a déjà été vérifiée pour l'énergie libre. Considérons à nouveau la longueur de corrélation ou la masse  $m$  données par les équations (14.46). Gardant la correction dominante à l'intégrale pour  $m \rightarrow 0$ , on obtient l'équation (14.76) qui peut être réécrite

$$1 - \frac{u}{u^*} + (u/6)K(d)m^{d-4} + O(m^{d-2}\Lambda^{-2}) = \frac{\tau}{m^2}.$$

On note que pour la valeur particulière  $u = u^*$  ( $g = g^*$ ), la correction d'échelle dominante, qui devient marginale ou logarithmique à  $d = 4$ , s'annule.

On vérifie que les corrections dues au fait que  $g \neq g^*$  sont proportionnelles à  $(u - u^*)\tau^{\varepsilon/(2-\varepsilon)}$ . On en déduit que  $\omega\nu = \varepsilon/(2 - \varepsilon)$ , ce qui est cohérent avec les équations (14.64) et (14.49).

*La fonction à deux points  $\langle \lambda\lambda \rangle$ .* De la même manière, si l'on garde les corrections dominantes à la fonction  $\langle \lambda\lambda \rangle$  dans la théorie critique (équations (14.67) et (14.21)), on trouve

$$\Delta_\lambda(p) = \frac{2}{N} \left[ \frac{6}{u} - \frac{6}{u^*} + b(d)p^{-\varepsilon} \right]^{-1}, \quad (14.82)$$

où l'on a négligé les corrections d'ordre  $\Lambda^{-2}$ . Les corrections d'échelle dominantes s'annulent à nouveau exactement pour  $u = u^*$  comme attendu.

*Discussion.*

- (i) On peut montrer qu'une perturbation due à des opérateurs inessentiels est équivalente, à l'ordre dominant dans la région critique, à une modification du coefficient de  $(\phi^2)^2$ . Ceci peut être explicitement vérifié ici. L'amplitude de la correction dominante aux relations d'échelle est, comme on l'a vu, proportionnelle à  $6/u - a(d)\Lambda^{-\varepsilon}$  où la valeur de  $a(d)$  dépend de la forme du facteur de coupure et, donc, des contributions inessentiels. Notons  $u'$  le coefficient de  $(\phi^2)^2$  dans un autre schéma où  $a$  est remplacé par  $a'$ . En identifiant la correction d'échelle dominante, on trouve la relation ( $g' = u'\Lambda^{d-4}$ )

$$\frac{1}{g} - \frac{a(d)}{6} = \frac{1}{g'} - \frac{a'(d)}{6},$$

qui est une relation homographique cohérente avec la forme spéciale (14.78) de la fonction  $\beta$ . En effet, utilisant l'équation de flot (14.80) entre deux valeurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on trouve

$$\frac{1}{g(\lambda_1)} - \frac{\lambda_1^{d-4}}{g^*} = \frac{1}{g(\lambda_2)} - \frac{\lambda_2^{d-4}}{g^*}.$$

- (ii) *Le signe de  $a(d)$ .* On suppose généralement que  $a(d)$  est positif. C'est d'ailleurs le cas pour les schémas de régularisation les plus simples. On voit, par exemple sur l'expression (14.17), qu'une condition suffisante est que  $D(k)$ , dans l'expression (14.9), soit croissante monotone. De plus,  $a(d)$  est toujours positif près de la dimension 4 où il diverge comme

$$a(d) \underset{d \rightarrow 4}{\sim} \frac{1}{8\pi^2\varepsilon}.$$

Alors, dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , il existe bien un point fixe  $u = u^*$  pour la physique de longue distance, zéro non trivial de la fonction  $\beta$ . À cette valeur de  $u$ , les corrections principales aux formes asymptotiques d'échelle s'annulent.

Toutefois, à  $d$  fixé,  $d < 4$ , ceci n'est pas la situation générale. Il est facile de trouver des régularisations pour lesquelles, par exemple,  $a(d)$  est négatif à  $d = 3$ .

Si  $a(d)$  est négatif, la méthode de GR, du moins dans sa version simplifiée réduite à un seul paramètre, est confrontée à un sérieux problème pour  $N \rightarrow \infty$ . En effet, le paramètre effectif  $u(\lambda)$  à l'échelle  $\lambda$  croît pour  $\lambda \rightarrow \infty$  jusqu'à ce que le développement en  $1/N$  ne soit plus valable. L'interprétation de ce phénomène n'est pas claire. Cela peut être un effet véritable : les hamiltoniens

de départ de ce type n'appartiennent pas au bassin d'attraction du point fixe. Cela peut être aussi un problème de groupe de renormalisation qu'il faut modifier pour assurer cette convergence. Enfin, cela peut être simplement une pathologie de la limite  $N \rightarrow \infty$ .

Une autre façon de formuler le problème est d'examiner directement la relation entre les interactions nue et renormalisée. Notant  $g_r m^{4-d}$  la fonction à quatre points renormalisée à impulsion nulle, on trouve

$$m^{4-d} g_r = \frac{\Lambda^{4-d} g}{1 + \Lambda^{4-d} g N B_\Lambda(0, m)/6}. \quad (14.83)$$

Dans la limite  $m \ll \Lambda$ , la relation peut s'écrire

$$\frac{1}{g_r} = \frac{(d-2)NK(d)}{12} + \left(\frac{m}{\Lambda}\right)^{4-d} \left(\frac{1}{g} - \frac{Na(d)}{6}\right). \quad (14.84)$$

En conséquence, pour  $a(d) < 0$ , la valeur de point fixe renormalisée ne peut être atteinte en variant  $g > 0$  pour aucune valeur finie de  $m/\Lambda$ . De même, les corrections dominantes au comportement de point fixe ne peuvent plus être annulées.

## 14.8 Le développement en $1/N$

Dans le calcul par la méthode du col de l'intégrale de champ (14.6), les termes d'ordre supérieur engendrent un développement en  $1/N$ . Pour étudier les propriétés de ce développement, il est utile de récrire d'abord l'hamiltonien (14.7) de manière un peu différente, en translatant la valeur du champ  $\lambda(x)$  de sa valeur moyenne  $im^2$  (équation (14.27)),  $\lambda(x) \mapsto im^2 + \lambda(x)$ . On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(\sigma, \lambda) = & \mathcal{H}^{(2)}(\sigma) + \frac{1}{2} \int d^d x \left[ m^2 \sigma^2 - i\lambda \sigma^2 + \frac{3N}{u} \lambda^2 + i \frac{6N}{u} (m^2 - r) \lambda \right] \\ & + \frac{(N-1)}{2} \text{tr} \ln \left[ -\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) + m^2 - i\lambda(\bullet) \right]. \end{aligned} \quad (14.85)$$

### 14.8.1 Analyse dimensionnelle

On peut maintenant analyser l'hamiltonien (14.85) du point de vue du groupe de renormalisation local, autour du point fixe IR. La dimension du champ  $\sigma(x)$  est  $(d-2)/2$ . Les termes quadratiques en  $\sigma$  avec plus de deux dérivées sont toujours inessentiels. La dimension  $[\lambda]$  du champ  $\lambda(x)$ , déduite du comportement critique (14.69) du propagateur, est donnée par l'équation (14.70) :

$$[\lambda] = 2.$$

Ainsi,  $\lambda^2$  a une dimension  $4 > d$  et donc la perturbation  $\int d^d x \lambda^2(x)$ , qui correspond à la valeur propre  $d-4$ , est inessentielle, ce qui est cohérent avec

l'analyse de la section 14.7.2. Le terme d'interaction  $\int \lambda(x) \sigma^2(x) d^d x$  a pour dimension zéro. On peut vérifier que les interactions non locales qui dépendent du champ  $\lambda$  et proviennent du développement (14.8) du déterminant, ont également toutes une dimension nulle quand on ne retient du propagateur que les termes dominants à grande distance :

$$[\text{tr}(\lambda \Delta)^k] = k[\lambda] - 2k = 0.$$

Par conséquent, dans le cadre du développement en  $1/N$ , la théorie a, au sens de l'analyse dimensionnelle, les propriétés d'une théorie renormalisable pour toutes les dimensions  $2 < d \leq 4$ . Contrairement à la théorie des perturbations usuelle, le développement en  $1/N$  ne génère que des corrections logarithmiques au comportement à longue distance dominant. La situation est donc similaire à celle rencontrée pour le développement en  $\varepsilon$  au point fixe et on s'attend à pouvoir calculer des quantités universelles, telles que les exposants critiques par exemple, comme des séries de puissances en  $1/N$ . Toutefois, comme certaines interactions sont non locales, la démonstration de cette propriété n'est pas immédiate car les résultats habituels de la théorie de la renormalisation ne s'appliquent pas. Cependant, il est possible de construire une théorie des champs alternative quasi locale qui a les mêmes comportements asymptotiques à longue distance et à laquelle la théorie de la renormalisation s'applique.

### 14.8.2 Application : développement perturbatif, singularités infrarouges et comportement à grande impulsion

La correction d'ordre  $1/N$  à la fonction à deux points permet de comprendre le problème des divergences perturbatives dans la théorie de masse nulle pour  $d < 4$ .

Nous avons vu que, dans le cadre du développement en  $1/N$ , on peut faire des calculs à dimension fixée  $d < 4$  dans la limite critique ( $T = T_c, m^2 = 0$ ). Ceci implique que les termes du développement en  $1/N$  ne peuvent pas être développés dans une série de puissances du coefficient  $g$  de  $(\phi^2)^2$ , au moins avec des puissances entières. Notons que le point fixe gaussien est un point fixe stable pour le comportement à grande impulsion des fonctions de corrélation renormalisées. Les comportements pour  $g \rightarrow 0$  sont donc liés aux comportements à grande impulsion.

Pour comprendre ce phénomène, on considère la fonction à deux points  $\langle \sigma \sigma \rangle$  à l'ordre  $1/N$ . À cet ordre, un seul diagramme contribue (figure 14.3), contenant deux vertex  $\lambda^2 \sigma$ . Dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , et après une renormalisation de masse (pour que  $\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p=0) = 0$ ), on trouve

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) = p^2 + \frac{2}{N(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(6/u) + b(d)q^{-\varepsilon}} \left( \frac{1}{(p+q)^2} - \frac{1}{q^2} \right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (14.86)$$

Une étude analytique de l'intégrale montre qu'elle a un développement de la forme

$$\sum_{k \geq 1} \alpha_k(\varepsilon) u^k p^{2-k\varepsilon} + \beta_k(\varepsilon) u^{(2+2k)/\varepsilon} p^{-2k}. \quad (14.87)$$

Les coefficients  $\alpha_k, \beta_k$  peuvent être calculés à partir de la transformée de Mellin de l'intégrale considérée comme fonction de  $u$  (cf. appendice C.2). Les termes avec des puissances entières de  $u$  correspondent au développement perturbatif qui existe pour  $\varepsilon$  suffisamment petit en régularisation dimensionnelle.  $\alpha_k$  a des pôles en  $\varepsilon = (2l+2)/k$  pour lesquels la puissance correspondante de  $p^2$  est  $-l$ , c'est-à-dire un entier. On vérifie que  $\beta_l$  a un pôle pour la même valeur de  $\varepsilon$  et que les contributions singulières se compensent dans la somme. Pour les dimensions correspondant aux pôles, des logarithmes de  $u$  apparaissent dans le développement.

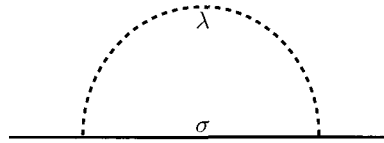


FIG. 14.3 – Le diagramme contribuant à  $\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}$  à l'ordre  $1/N$ .

## 14.9 L'exposant $\eta$ à l'ordre $1/N$

Afin d'illustrer la discussion précédente, calculons l'exposant  $\eta$  à l'ordre  $1/N$  (figure 14.3). Il suffit pour cela d'évaluer la fonction à deux points du champ  $\sigma$  à l'ordre  $1/N$ , à  $T_c$  et au point fixe IR. Dans la limite  $p \rightarrow 0$ , la contribution dominante à l'expression (14.86) se réduit à

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) = p^2 + \frac{2}{Nb(\varepsilon)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^{4-d} \left[ \frac{1}{(p+q)^2} - \frac{1}{q^2} \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (14.88)$$

Comme conséquence de l'analyse dimensionnelle de la section 14.8, on s'attend à ce qu'après une renormalisation de masse, l'intégrale sur  $q$  diverge logarithmiquement pour toute dimension ce qui est bien vérifié ici. On introduit donc un facteur de coupure  $\Lambda$  dont la forme spécifique ne joue aucun rôle à cet ordre. L'intégrale se comporte alors pour les grands  $\Lambda$ , ou les petites impulsions, comme

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^\varepsilon [(p+q)^{-2} - q^{-2}] \sim Ap^2 \ln(\Lambda/p). \quad (14.89)$$

En comparant avec le développement de la fonction à deux points au point fixe IR,

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) \propto p^{2-\eta} = p^2 (1 - \eta \ln p + O(1/N^2)), \quad (14.90)$$

on conclut

$$\eta = 2A/(Nb(\varepsilon)).$$

L'expression (14.89) montre que le coefficient de  $\ln p$  peut être obtenu en évaluant la partie divergente de l'intégrale. Celle-ci correspond à des grandes valeurs de la variable d'intégration  $q$  dans (14.88) et est une fonction régulière de l'impulsion  $p$ . On peut donc la développer pour  $p \rightarrow 0$ . On trouve

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^{4-d} [(p+q)^{-2} - q^{-2}] \sim p^2 \int^\Lambda \frac{d^d q}{q^d (2\pi)^d} \left( \frac{4(p \cdot q)^2}{p^2 q^2} - 1 \right). \quad (14.91)$$

Utilisant l'invariance par rotation, on peut substituer

$$\frac{q_\beta q_\beta}{q^2} \mapsto \frac{1}{d} \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et donc} \quad \frac{4(p \cdot q)^2}{p^2 q^2} \mapsto \frac{4}{d}.$$

La partie divergente de l'intégrale est donc

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^{4-d} [(p+q)^{-2} - q^{-2}] \sim \frac{2(4-d)}{d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} p^2 \ln \Lambda. \quad (14.92)$$

En utilisant la définition (14.22) de  $b(\varepsilon)$ , on en déduit la valeur de l'exposant  $\eta$ . Il est commode de poser

$$X_1 = -\frac{2\Gamma(d-1)}{\Gamma^3(d/2)\Gamma(1-d/2)} = \frac{2\sin(\pi\varepsilon/2)\Gamma(3-\varepsilon)}{\pi\Gamma^2(2-\varepsilon/2)}. \quad (14.93)$$

Après un peu d'algèbre, on obtient

$$\eta = \frac{4-d}{Nd} X_1 + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (14.94)$$

## 14.10 Le modèle $\sigma$ non linéaire

Nous avons souligné que le terme proportionnel à  $\int \lambda^2(x) d^d x$  est négligeable dans le domaine critique pour  $d \leq 4$  et peut donc être omis à l'ordre dominant. En section 14.8, nous avons relié cette observation à la dimension du monôme  $\lambda^2$  dans le cadre du développement en  $1/N$  :  $\lambda^2$  a la dimension 4 en toutes dimensions d'espace et donc est inessentiel pour  $d < 4$ . Pour  $d = 4$ , la situation est plus subtile, parce qu'il est marginal. Cependant, même dans ce cas, il n'introduit que des corrections logarithmiques au comportement dominant. En fait, la partie constante de l'inverse du propagateur, telle qu'elle apparaît dans l'équation (14.82) joue le rôle d'un paramètre de coupure de grande impulsion. Considérons alors l'hamiltonien (14.85) sans le terme en  $\lambda^2$ . Si l'on réintroduit le champ initial  $\phi$  et on intègre sur  $\lambda(x)$ , on trouve

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi(x)] \delta[\phi^2(x) - \phi_0^2] \exp\left[-\mathcal{H}^{(2)}(\phi)\right], \quad (14.95)$$

avec

$$\phi_0^2 = 6(m^2 - r)/u.$$

Sous cette forme, on reconnaît la fonction de partition d'un modèle de théorie des champs appelé modèle  $\sigma$  non linéaire, dans une paramétrisation inhabituelle. Ce modèle sera brièvement discuté au chapitre 15. Cette observation conduit à une correspondance remarquable : à tous les ordres dans le développement en  $1/N$ , les fonctions de corrélation connexes du modèle  $\sigma$  non linéaire et de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  ont le même comportement asymptotique de grande distance.

La limite  $N \rightarrow \infty$ . Le modèle  $\sigma$  non linéaire peut être résolu directement dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . La solution dans une paramétrisation plus naturelle va montrer plus explicitement la correspondance avec la paramétrisation de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ .

La fonction de partition du modèle  $\sigma$  peut s'écrire

$$\mathcal{Z} = \int [\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\lambda(x)] \exp[-\mathcal{H}(\phi, \lambda)], \quad (14.96)$$

avec

$$\mathcal{H}(\phi, \lambda) = \frac{1}{T} \mathcal{H}^{(2)}(\phi) - \frac{i}{2T} \int \mathrm{d}^d x \lambda(x) (\phi^2(x) - 1), \quad (14.97)$$

où l'intégrale sur  $\lambda$  assure la contrainte  $\phi^2 = 1$  et le paramètre  $T$  est la température. En intégrant, comme on l'a fait à la section 14.1, sur  $N - 1$  composantes de  $\phi$  et en notant  $\sigma$  la composante restante, on obtient

$$\mathcal{Z} = \int [\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\lambda(x)] \exp[-\mathcal{H}_N(\sigma, \lambda)], \quad (14.98)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(\sigma, \lambda) &= \frac{1}{T} \mathcal{H}^{(2)}(\sigma) - \frac{i}{2T} \int \mathrm{d}^d x (\sigma^2(x) - 1) \lambda(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} (N - 1) \operatorname{tr} \ln [-\nabla_x^2 D(-\nabla_x^2/\Lambda^2) - i\lambda(\bullet)]. \end{aligned} \quad (14.99)$$

On prend maintenant la limite  $N \rightarrow \infty$  à  $TN$  fixé. Les équations du col qui correspondent aux équations (14.29) sont

$$m^2 \sigma = 0, \quad (14.100a)$$

$$\sigma^2 = 1 - (N - 1)T \Omega_d(m), \quad (14.100b)$$

ou l'on a posé  $im^2 = \langle \lambda(x) \rangle$  et  $\Omega_d$  a été défini en (14.11). À basse température,  $\sigma$  est différent de zéro pour  $d > 2$  et donc  $m$ , qui est la masse du champ  $\pi$ , s'annule. L'équation (14.100b) donne l'aimantation spontanée :

$$\sigma^2 = 1 - (N - 1)T \Omega_d(0). \quad (14.101)$$

Pour  $T = T_c$ , où nous avons défini

$$1/T_c = (N - 1)\Omega_d(0),$$

$\sigma$  s'annule. Par conséquent, l'équation (14.101) peut être réécrite

$$\sigma^2 = 1 - T/T_c, \quad (14.102)$$

en accord, pour  $T \rightarrow T_c$ , avec le résultat (14.43).

Au-dessus de  $T_c$ ,  $\sigma$  s'annule et  $m$ , qui est maintenant la masse commune aux champs  $\pi$  et  $\sigma$ , est donnée pour  $2 < d < 4$  par (équation (14.15))

$$\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T} = m^{d-2}(N - 1)K(d) + O(m^2\Lambda^{d-4}). \quad (14.103)$$

Pour  $T \rightarrow T_c$ , on retrouve la forme d'échelle (14.48) de la longueur de corrélation  $\xi = 1/m$ .

Nous verrons au chapitre 15 que les fonctions de corrélation du modèle  $\sigma$  satisfont des EGR qu'on peut démontrer dans un développement double en  $T$  et  $\varepsilon = d - 2$ . Combinant les résultats (14.102) et (14.103) avec les expressions générales (15.52) et (15.51), on peut en déduire les fonctions du GR à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$  :

$$\beta(T) = (d - 2)T - \frac{(d - 2)}{T_c}T^2, \quad \zeta(T) = \frac{d - 2}{T_c}T. \quad (14.104)$$

La solution de l'équation  $\beta = 0$  est, dans ce contexte, la température critique  $T_c$ ,  $\beta'(T_c) = -1/\nu = 2 - d$  et  $\zeta(T_c) = d_\phi$  (cf. section 15.8).

Le calcul d'autres quantités physiques et le développement en  $1/N$  découlent des considérations des sections 14.1–14.8.

# Chapitre 15

## Le modèle $\sigma$ non linéaire

DANS CE CHAPITRE, nous discutons le modèle  $\sigma$  non linéaire, une théorie des champs caractérisée par une symétrie orthogonale  $O(N)$  réalisée non linéairement. Il existe plusieurs motivations pour entreprendre une telle étude.

Du point de vue de la physique statistique, le modèle apparaît dans l'étude des propriétés de longue distance de la phase ordonnée à basse température de modèles de spins sur réseaux avec symétrie  $O(N)$  et interactions à courte portée. En effet, dans le cas des symétries continues, toute la phase de basse température a une physique à longue distance non triviale due à l'apparition des modes de Goldstone de masse nulle ou de longueur de corrélation infinie.

Par ailleurs, le modèle possède, à deux dimensions, la propriété de *liberté asymptotique* (le point fixe gaussien est marginalement stable pour le comportement à grande impulsion ou à courte distance) et de spectre non perturbatif. Ces propriétés sont partagées, en dimension 4, par la Chromo-Dynamique Quantique (QCD en anglais), une théorie de jauge non abélienne, partie intégrante du Modèle Standard des interactions fondamentales décrivant la physique à l'échelle microscopique.

Du point de vue statistique, les propriétés du modèle  $\sigma$  non linéaire déduites du groupe de renormalisation (GR), fournissent des informations supplémentaires sur les comportements à longues distances des modèles de spin, dans toute la phase ordonnée de basse température. Le GR permet de démontrer des propriétés universelles à température fixée en dessous de  $T_c$ . Ces propriétés sont spécifiques des modèles ayant des symétries continues, puisqu'elles sont des conséquences directes des interactions entre modes de Goldstone.

De façon plus surprenante peut-être, dans le cas non abélien  $N > 2$ , le modèle  $\sigma$  permet d'étudier le comportement critique au voisinage de deux dimensions. Les résultats ainsi obtenus sont basés sur une analyse de l'instabilité de la phase ordonnée à basse température et près de deux dimensions, due aux interactions des modes de Goldstone.

De tels résultats sont plus aisément compréhensibles quand on se réfère à l'étude de la limite  $N \rightarrow \infty$  en section 14.10 : à tous les ordres du développement en  $1/N$ , dans le domaine critique, les modèles  $(\phi^2)^2$  et  $\sigma$  non linéaire sont équivalents.

Enfin, il est nécessaire de souligner, qu'à la différence de la théorie  $(\phi^2)^2$ , le modèle  $\sigma$  non linéaire ne peut être défini perturbativement que sur le réseau ou en utilisant la régularisation dimensionnelle (section 12.5.2).

## 15.1 Le modèle $\sigma$ non linéaire sur réseau

Le modèle  $\sigma$  non linéaire est un modèle invariant par le groupe  $O(N)$  agissant sur un champ (ou spin classique)  $\hat{\phi}(x)$  à  $N$  composantes appartenant à la sphère  $S_{N-1}$  :

$$\hat{\phi}^2(x) = 1. \quad (15.1)$$

Nous définissons d'abord un modèle sur réseau qui, techniquement, peut être considéré comme une version régularisée de la théorie statistique des champs correspondante. Nous introduisons les différences finies

$$D_\mu \hat{\phi}(x) = \frac{1}{a} \left[ \hat{\phi}(x + \epsilon_\mu) - \hat{\phi}(x) \right],$$

où  $x$  appartient au réseau cubique des points de coordonnées entières et  $\epsilon_\mu$  est le vecteur unité dans la direction  $\mu$ . L'énergie de configuration est choisie de la forme

$$\mathcal{E}(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} \left( D_\mu \hat{\phi}(x) \right)^2 = \sum_{x,\mu} \left[ 1 - \hat{\phi}(x + \epsilon_\mu) \cdot \hat{\phi}(x) \right]. \quad (15.2)$$

La fonction de partition est alors donnée par

$$Z = \int \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \delta \left( \hat{\phi}^2(x) - 1 \right) d\hat{\phi}(x) \exp \left[ -\mathcal{E}(\hat{\phi})/T \right], \quad (15.3)$$

où  $T$  est la température du modèle statistique. La mesure et l'intégrant sont explicitement invariants par le groupe  $O(N)$ .

Dans l'expression (15.3), on reconnaît la fonction de partition d'un modèle de spins classiques sur réseau avec des interactions ferromagnétiques entre proches voisins.

*Modèles ferromagnétiques à  $N$  composantes sur réseau.* Le modèle statistique (15.3) fournit un exemple particulier (interaction de proches voisins) d'une classe de modèles à  $N$  composantes sur réseau : des spins  $\mathbf{S}_i$ , vecteurs à  $N$  composantes et de longueur unité, attachés à chaque site  $i$  d'un réseau, interagissent par l'intermédiaire d'une interaction de paire ferromagnétique  $V_{ij}$ ,

à courte portée de la classe définie en section 8.1. En champ nul, la fonction de partition de tels modèles prend la forme générale

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{i \in \mathbb{Z}^d} d\mathbf{S}_i \delta(\mathbf{S}_i^2 - 1) \exp[-\mathcal{E}(\mathbf{S})/T], \quad (15.4)$$

où l'énergie de configuration est

$$\mathcal{E}(\mathbf{S}) = - \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} V_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (15.5)$$

Rappelons que les propriétés critiques de tels modèles peuvent être déduites de l'analyse par le GR d'une théorie des champs  $(\phi^2)^2$  effective. La correspondance entre cette théorie des champs et les modèles sur réseaux est établie par la méthode suivante : on trouve d'abord une approximation pour la fonction de partition, l'approximation du champ moyen, valable pour les dimensions élevées (*cf.* section 8.10). On caractérise les propriétés critiques de toutes les quantités physiques dans le cadre de ce schéma d'approximation. On montre alors que l'approximation du champ moyen est le premier terme dans un développement systématique. En examinant la première correction, on découvre le rôle de la dimension 4 où la validité de la théorie du champ moyen cesse (*cf.* section 8.9.2). Enfin, pour  $d \leq 4$ , une somme, à tous les ordres dans le développement, des divergences IR dominantes mène à une théorie des champs  $\phi^4$  effective dont les propriétés critiques peuvent être analysées par les méthodes du GR pour la dimension  $4 - \varepsilon$ , c'est-à-dire près de la dimension critique supérieure, ainsi que nous l'avons montré dans les sections 13.1.1 et 13.2.1.

Ici, en revanche, nous nous intéressons aux propriétés de ces modèles de spin à basse température dans la phase ordonnée ou en champ uniforme faible, ce qui conduit à un autre type de développement.

## 15.2 Développement de basse température

À basse température, en champ nul, les configurations dominantes sont celles qui minimisent l'énergie de configuration (15.2) et qui, donc, satisfont

$$\left| D_\mu \hat{\phi}(x) \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi}(x) = \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

Les configurations dominantes correspondent donc à tous les spins alignés. Comme conséquence directe de la symétrie, l'énergie de configuration admet un ensemble continu de configurations dominantes équivalentes reliées par des transformations du groupe  $O(N)$ .

Si l'on ne calcule que des fonctions de corrélation invariantes sous  $O(N)$ , tous les minima donnent exactement la même contribution. En sommant sur tous les minima on obtient un facteur, le volume de la sphère  $S_{N-1}$ , qui disparaît dans la normalisation de la fonction de partition.

Cependant, dans le cas de fonctions de corrélation non invariantes sous  $O(N)$ , une somme sur tous les minima est équivalente à une moyenne sur le groupe  $O(N)$ . Par conséquent, il semblerait que seules les fonctions de corrélation invariantes par le groupe  $O(N)$  soient non nulles. Ce problème est directement lié à la possibilité d'une brisure spontanée de symétrie. Dans la phase désordonnée, il est nécessaire de sommer sur toutes les configurations et donc toutes les configurations dominantes. Dans la phase ordonnée, au contraire, le système statistique n'est plus ergodique et, par conséquent, on ne doit sommer que sur un sous-ensemble de configurations de spins fluctuant autour de la direction d'aimantation spontanée. La configuration dominante à basse température est unique.

Toute configuration dominante est le point de départ d'un développement de basse température. Par ailleurs, à cause de la forme (15.3), le développement de basse température est techniquement un développement en nombre de boucles (*cf.* l'argument de la section 12.4.2).

Enfin, en présence d'un champ magnétique uniforme, la dégénérescence est levée, l'aimantation et la configuration dominante à basse température étant alignées le long du champ magnétique.

### 15.2.1 Paramétrisation

Prenons comme configuration minimale le vecteur  $\mathbf{n} = (1, 0)$ . Afin d'engendrer le développement de basse température du modèle statistique, il est nécessaire de paramétrer le vecteur de spin en termes de variables indépendantes. Une paramétrisation de la sphère (15.1) qui est adaptée au développement de basse température est, par exemple,

$$\hat{\phi}(x) = (\sigma(x), \boldsymbol{\pi}(x)), \quad (15.6)$$

où  $\sigma$  est la composante de  $\hat{\phi}$  le long de  $\mathbf{n}$  et  $\boldsymbol{\pi}(x)$  est un vecteur à  $(N-1)$  composantes. La composante  $\sigma(x)$  est alors une fonction de  $\boldsymbol{\pi}(x)$  par l'équation (15.1). L'équation peut être résolue localement. Comme  $1 - \sigma \ll 1$ , la solution est

$$\sigma(x) = (1 - \boldsymbol{\pi}^2(x))^{1/2}. \quad (15.7)$$

La conséquence de la singularité de cette paramétrisation sera discutée plus loin.

*Représentation du groupe  $SO(N)$ .* Dans ce qui suit, nous ne discutons que des transformations du groupe  $O(N)$  voisine de l'identité et donc appartenant au sous-groupe  $SO(N)$  des matrices de déterminant 1 (*cf.* section A.4).

Le sous-groupe  $SO(N-1)$  qui laisse  $\sigma$  invariant agit linéairement sur  $\boldsymbol{\pi}(x)$  :

$$\pi_{\alpha}(x) \mapsto \sum_{\beta=1}^{N-1} O_{\alpha\beta} \pi_{\beta}(x),$$

où  $O_{\alpha\beta}$  est une matrice orthogonale  $(N-1) \times (N-1)$  de déterminant 1.

On peut alors décomposer l'ensemble des générateurs de l'algèbre de Lie de  $SO(N)$  en l'ensemble des générateurs de l'algèbre de Lie de  $SO(N-1)$  et l'ensemble complémentaire. Cet ensemble complémentaire correspond à des transformations infinitésimales qui engendrent les variations

$$\pi \mapsto \pi + \mathcal{D}_\omega \pi \quad \text{avec} \quad [\mathcal{D}_\omega \pi](x) = \omega(1 - \pi^2(x))^{1/2}, \quad (15.8)$$

où les constantes  $\omega_\alpha$  sont les paramètres infinitésimaux de la transformation. Comme le transformé du vecteur  $\pi$  est une fonction non linéaire de  $\pi$ , on parle ici de représentation non-linéaire du groupe  $O(N)$ .

La loi de transformation du champ  $\sigma$  est alors une conséquence de la relation (15.7) et de la transformation (15.8) du champ  $\pi$  :

$$\mathcal{D}_\omega \sigma(x) \equiv \mathcal{D}_\omega(1 - \pi^2(x))^{1/2} = -(1 - \pi^2(x))^{-1/2} \pi \cdot [\mathcal{D}_\omega \pi](x) = -\omega \cdot \pi(x). \quad (15.9)$$

*La fonction de partition et fonction génératrice.* Dans la représentation (15.6), l'énergie de configuration (15.2) prend la forme

$$\mathcal{E}(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} (\mathcal{D}_\mu \hat{\phi}(x))^2 \equiv \mathcal{E}(\pi, \sigma) = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} \left[ (\mathcal{D}_\mu \pi(x))^2 + (\mathcal{D}_\mu \sigma(x))^2 \right]. \quad (15.10)$$

Utilisant la relation (15.7), on trouve

$$\sigma = (1 - \pi^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \pi^2 + O(\pi^4) \Rightarrow \mathcal{D}_\mu \sigma(x) = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_\mu \pi^2 + O(\pi^4),$$

et donc

$$\mathcal{E}(\pi, \sigma) = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} (\mathcal{D}_\mu \pi(x))^2 + O(\pi^4). \quad (15.11)$$

La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation est donnée par

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{d\pi(x)}{(1 - \pi^2(x))^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{T} \left( \mathcal{E}(\pi, \sigma) - \sum_x \mathbf{H}(x) \cdot \hat{\phi}(x) \right) \right], \quad (15.12)$$

où  $d\pi(1 - \pi^2)^{-1/2}$  est la mesure invariante sur la sphère dans la paramétrisation (15.6).

À cause de la paramétrisation (15.6), l'énergie de configuration n'est plus polynomiale, comme envisagée dans les modèles de théorie des champs étudiés jusqu'ici. Par ailleurs, le terme de mesure

$$\prod_x (1 - \pi^2(x))^{-1/2} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_x \ln(1 - \pi^2(x)) \right],$$

développé en puissances de  $\pi$ , engendre des interactions supplémentaires qui ne contribuent pas à l'ordre principal pour  $T \rightarrow 0$ .

Rappelons, enfin, que la forme (15.12), n'a de sens que pour  $\sigma(x) > 0$ , c'est-à-dire dans une phase ordonnée avec aimantation le long du vecteur  $\mathbf{n}$ .

*Remarque mathématique.* Le champ  $\hat{\phi}$  peut aussi être identifié à un élément d'un espace quotient homogène (symétrique)  $O(N)/O(N-1)$ .

### 15.2.2 Développement perturbatif

La paramétrisation (15.6) est adaptée au développement autour de la configuration  $\pi(x) = 0$ . Dans l'intégrale de champ (15.3), la température  $T$  ordonne la théorie des perturbations. Pour  $T \rightarrow 0$ , les champs  $\pi(x)$  qui contribuent à la fonction de partition sont alors tels que

$$|D_\mu \pi(x)| = O(\sqrt{T}),$$

ce qui, combiné avec le choix de développer autour de  $\pi(x) = 0$ , entraîne aussi

$$|\pi(x)| = O(\sqrt{T}). \quad (15.13)$$

La dépendance en  $T$  de l'intégrand est typique des intégrales évaluables par la méthode du col (sections 2.6 et 2.7.1). Les valeurs de  $\pi(x)$  d'ordre 1 donnent des contributions exponentiellement petites à l'intégrale de champ (d'ordre  $\exp(-\text{const.}/T)$ ) qui sont négligeables à tous les ordres de la théorie des perturbations. L'intégrale peut être développée autour de l'approximation gaussienne et le développement perturbatif se ramène à l'évaluation de valeurs moyennes gaussiennes. À tous les ordres dans le développement en puissances de  $T$ , dans les intégrales de champ on peut intégrer librement sur  $\pi(x)$  de  $+\infty$  à  $-\infty$ , les contraintes imposées par la paramétrisation (15.7) ( $\sigma(x) > 0$ ) et par

$$|\pi(x)| \leq 1,$$

correspondant de nouveau à des corrections exponentiellement petites.

Puisque  $\pi$  est d'ordre  $\sqrt{T}$ , il peut donc être commode de normaliser le champ de façon différente :

$$\pi \mapsto \pi \sqrt{T}. \quad (15.14)$$

Alors,

$$\sigma = (1 - T\pi^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}T\pi^2 + O(T^2\pi^4), \quad \mathcal{E}(\pi, \sigma) = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} (D_\mu \pi(x))^2 + O(T\pi^4).$$

Cette normalisation montre que le développement de l'expression (15.10) en puissances de  $T$ , engendre une infinité de vertex différents avec des puissances paires arbitraires de  $\pi$ . Dans la normalisation initiale de  $\pi$ , utilisant la relation entre développement en puissances de  $T$  et développement en nombres de boucles, il est toutefois facile de vérifier qu'à tout ordre fini en  $T$  et pour une fonction de corrélation donnée, seul un nombre fini de vertex contribue.

Notons que le terme de mesure ne contient pas de facteur  $1/T$  et ne commence à contribuer qu'à l'ordre d'une boucle. Il produit des vertex supplémentaires sans dérivées.

Introduisant la représentation de Fourier du champ

$$\pi(x) = \int d^d p \, e^{ipx} \tilde{\pi}(p), \quad (15.15)$$

on note

$$D_\mu \pi(x) = \int d^d p \, e^{ipx} (e^{ip_\mu} - 1) \tilde{\pi}(p).$$

On en déduit

$$\sum_{x,\mu} (D_\mu \pi(x))^2 = 2(2\pi)^d \int d^d p \, \tilde{\pi}(p) \cdot \tilde{\pi}(-p) \sum_\mu (1 - \cos p_\mu).$$

En représentation de Fourier, le propagateur du champ  $\pi$  s'écrit alors

$$\langle \pi_\alpha(x) \pi_\beta(0) \rangle|_{T=0} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \, e^{-ipx} \tilde{\Delta}_{\alpha\beta}(p)$$

avec

$$\tilde{\Delta}_{\alpha\beta}(p) = \frac{2\delta_{\alpha\beta}}{d - \sum_\mu \cos p_\mu} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{p^2 + O(p^4)}. \quad (15.16)$$

À l'ordre principal, le champ  $\pi$  est donc de masse nulle ou de longueur de corrélation infinie : le développement de basse température suppose automatiquement que la symétrie  $O(N)$  est brisée spontanément et le champ  $\pi$  correspond alors aux modes de Goldstone de la symétrie brisée. Le partenaire massif du champ  $\pi$  dans la réalisation linéaire, la composante  $\sigma$ , a été éliminé par la contrainte (15.1).

Cette propriété explique l'existence d'une limite continue dans la phase de basse température que le développement permet d'étudier.

Soulignons ici que ces propriétés sont indépendantes du choix particulier (15.6) de la paramétrisation de  $\hat{\phi}(x)$ .

### 15.2.3 Point fixe gaussien et perturbations

La forme du propagateur (15.16) montre que le champ  $\pi$  a la dimension gaussienne habituelle d'un champ scalaire  $[\pi] = \frac{1}{2}(d-2)$ .

Tous les vertex sont affectés du facteur  $d - \sum_\mu \cos p_\mu = \frac{1}{2}p^2 + O(p^4)$ . Nous changeons donc d'échelle de distance et de normalisation du champ comme indiqué en section 13.1.2 :

$$x \mapsto \Lambda x \Rightarrow p \mapsto p/\Lambda, \quad \pi(x) \mapsto \Lambda^{(2-d)/2} \pi(x/\Lambda), \quad (15.17)$$

où  $1/\Lambda$  est la maille du réseau dans cette nouvelle échelle. Étendons ensuite la définition de  $\pi(x)$  par une interpolation infiniment différentiable à des valeurs

réelles quelconques de  $x$ . Avec cette définition,  $D_\mu \pi$  admet un développement en puissances de  $\Lambda$  de la forme

$$\begin{aligned}\Lambda^{(2-d)/2} D_\mu \pi(x) &= \Lambda^{(2-d)/2} [\pi(x + \epsilon_\mu/\Lambda) - \pi(x)] \\ &= \sum_{r=1} \frac{1}{r!} \Lambda^{(2-d)/2-r} (\partial_\mu)^r \pi(x).\end{aligned}$$

Le champ  $\sigma$  a un développement en puissances de  $\pi^2$ . Une contribution à  $D_\mu \sigma$  est de la forme

$$D_\mu \Lambda^{n(2-d)} (\pi^2(x))^n = \sum_{r=1} \frac{1}{r!} \Lambda^{n(2-d)-r} (\partial_\mu)^r (\pi^2(x))^n.$$

On en déduit la forme des contributions à l'énergie de configuration. Factorisant l'élément de volume  $\Lambda^{-d}$ , on trouve qu'un vertex contenant  $n$  champs  $\pi$  et  $r$  puissances de  $\partial$ ,  $n \geq 2$ ,  $r \geq 2$ , est affecté d'un facteur  $\Lambda^{l_{nr}}$  avec

$$l_{nr} = d - n(d-2)/2 - r.$$

Comme nous l'avons montré en section 13.1.3, les changements d'échelle et de normalisation ramènent l'analyse des perturbations au point fixe gaussien à de l'analyse dimensionnelle et les quantités  $l_{nr}$  sont aussi les valeurs propres associées aux vecteurs propres du groupe de renormalisation (*cf.* équation (9.50)). Par conséquent :

- (i) pour  $d > 2$ ,  $l_{nr} > 0$  et donc tous les vertex sont inessentiels. On s'attend à ce que le comportement à longue distance pour  $T < T_c$ , dans la phase ordonnée soit donné par une théorie quasi-gaussienne ;
- (ii) pour  $d = 2$ , les vertex avec  $r > 1$  sont inessentiels et les vertex avec  $r = 1$  sont marginaux. Il est donc nécessaire d'étudier systématiquement les corrections au modèle gaussien ;
- (iii) pour  $d < 2$ , les mêmes vertex deviennent essentiels. Ceci n'a rien de surprenant puisque nous avons montré qu'une transition de phase est alors impossible.

Pour  $d > 2$ , un problème cependant apparaît : la mesure engendre des vertex sans dérivées, qui donc semblent essentiels. En réalité, ces vertex maintiennent la symétrie  $O(N)$  du modèle et, en particulier, compensent les corrections de masse engendrées dans le développement perturbatif par les autres vertex. Ils jouent un rôle quelque peu équivalent au terme en  $r_c \sigma^2$  dans l'hamiltonien (10.1).

Cette analyse met en évidence le rôle de la dimension 2 et suggère donc d'étudier plus particulièrement le modèle à deux et au voisinage de deux dimensions.

### 15.3 Limite continue formelle

Dans la mesure où la longueur de corrélation du champ  $\pi$  est infinie, il existe une physique de longue distance non triviale, et donc une limite continue. On peut essayer de décrire la limite continue, en prenant directement la limite continue du modèle sur réseau. Nous avons montré que les corrections les plus importantes au modèle gaussien viennent des vertex avec deux dérivées. L'énergie de configuration, ou action euclidienne, la plus générale invariante par le groupe  $O(N)$ , fonction de  $\hat{\phi}$  et de ses dérivées, et qui inclut au plus deux dérivées, (les termes les plus importants à grande distance) est

$$\mathcal{E}(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{\mu} \partial_{\mu} \hat{\phi}(x) \cdot \partial_{\mu} \hat{\phi}(x), \quad (15.18)$$

à une constante multiplicative près. (L'invariance par translation et l'isotropie dans  $\mathbb{R}^d$  sont implicites.) En effet, tout terme symétrique sans dérivée est une fonction de  $(\hat{\phi})^2$  et donc, à cause de la contrainte (15.1), se réduit à une constante et  $\hat{\phi} \cdot \partial_{\mu} \hat{\phi}$  s'annule.

La fonction de partition s'écrit alors

$$\mathcal{Z} = \int [d\rho(\hat{\phi})] \exp \left[ -\mathcal{E}(\hat{\phi})/T \right], \quad (15.19)$$

où  $d\rho(\hat{\phi})$  est le produit sur tous les points des mesures invariantes sur la sphère.

Dans la paramétrisation (15.6), adaptée au développement perturbatif pour  $T \rightarrow 0$ , l'énergie de configuration (15.18), ou action euclidienne, prend la forme géométrique

$$\mathcal{E}(\pi, \sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{\alpha, \beta} G_{\alpha\beta}(\pi(x)) \sum_{\mu} \partial_{\mu} \pi_{\alpha}(x) \partial_{\mu} \pi_{\beta}(x), \quad (15.20)$$

où

$$G_{\alpha\beta}(\pi) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\pi_{\alpha} \pi_{\beta}}{1 - \pi^2} \quad (15.21)$$

est le tenseur métrique sur la sphère et  $T$  caractérise alors la déviation de la théorie statistique des champs à la théorie gaussienne.

L'expression géométrique (15.20), qui fait intervenir le tenseur métrique, est indépendante de la paramétrisation de la sphère.

*Fonction de partition et fonction génératrice.* La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation est alors donnée par

$$\mathcal{Z}(\mathbf{J}) = \int \left[ \frac{d\pi(x)}{(1 - \pi^2(x))^{1/2}} \right] \exp \left[ -\frac{1}{T} \left( \mathcal{E}(\pi, \sigma) - \int d^d x \mathbf{J}(x) \cdot \pi(x) \right) \right]. \quad (15.22)$$

Un problème apparaît immédiatement : dans l'espace continu la mesure fonctionnelle n'est pas définie. Du point de vue formel, la mesure peut être interprétée comme un déterminant et donc, puisque  $\ln \det = \text{tr} \ln$ , son logarithme comme une trace :

$$\ln \prod_x (1 - \pi^2(x))^{-1/2} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{K} \right]$$

avec

$$\mathbf{K}(x, y) = \delta^d(x - y) \ln(1 - \pi^2(x)) \Rightarrow \text{tr} \mathbf{K} = " \delta^d(0) " \int d^d x \ln(1 - \pi^2(x)). \quad (15.23)$$

Il faut donc trouver une méthode pour régulariser ce qui apparaît comme une contribution supplémentaire infinie d'ordre  $T$  à un hamiltonien effectif.

## 15.4 Régularisation

Même sans tenir compte des contributions de la mesure, les diagrammes de Feynman engendrés par la théorie (15.22) divergent à courte distance ou à impulsion nulle. Il est donc nécessaire de modifier la théorie pour rendre les diagrammes finies, une opération appelée régularisation.

*Régularisation par dérivées ou régularisation de Pauli-Villars.* Toute version régularisée du modèle  $\sigma$  non linéaire doit rester invariante par les transformations du groupe  $O(N)$ . Cette condition est moins simple à satisfaire que dans un cas linéaire puisque, comme conséquence de la symétrie, les termes d'interactions dans l'expression (15.20) sont reliés à la partie quadratique. Une méthode simple consiste à partir de la description du modèle en termes du champ  $\hat{\phi}(x)$  parce que l'énergie de configuration (15.18) est formellement identique à un hamiltonien critique gaussien. Nous remplaçons donc  $\mathcal{E}(\hat{\phi})$  par

$$\mathcal{E}_\Lambda(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \int d^d x \hat{\phi}(x) \cdot \left( -\nabla_x^2 + \frac{\alpha_2}{\Lambda^2} \nabla_x^4 - \frac{\alpha_3}{\Lambda^4} \nabla_x^6 + \dots \right) \hat{\phi}(x). \quad (15.24)$$

En exprimant alors  $\hat{\phi}(x)$  en termes de  $\pi(x)$ , on découvre que le comportement à grandes impulsions du propagateur est amélioré, mais en même temps de nouvelles interactions encore plus singulières sont engendrées. Une analyse en comptage de puissances révèle alors que tous les diagrammes peuvent être régularisés, sauf les diagrammes à une boucle dont le comptage de puissance ne change pas. Cette propriété n'est pas indépendante d'une autre limitation de la régularisation de Pauli-Villars : elle ne régularise pas le terme divergent (15.23) engendré par la mesure. D'ailleurs, on peut vérifier que les divergences résiduelles à une boucle engendrées par l'interaction sont nécessaires pour compenser les divergences provenant de la mesure.

*La régularisation dimensionnelle.* La régularisation dimensionnelle (section 12.5.2) préserve la symétrie  $O(N)$  de l'énergie de configuration. De plus, comme conséquence de la règle

$$\delta^d(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k = 0,$$

le terme (15.23) provenant de la mesure peut être ignoré et, par conséquent, la théorie des perturbations n'a pas de divergences à grandes impulsions pour  $d < 2$ . Grâce à sa simplicité technique, c'est la régularisation que l'on utilise généralement dans les calculs explicites. Un inconvénient théorique est que le rôle du terme de mesure est caché. Par conséquent, pour la discussion théorique de la renormalisation du modèle  $\sigma$  non linéaire, il est utile de considérer à la fois la régularisation dimensionnelle et celle par le réseau. Une autre difficulté est qu'à deux dimensions apparaissent à la fois des divergences de courte et longue distance. Pour définir le développement perturbatif par régularisation dimensionnelle, il est nécessaire de donner une masse (une longueur de corrélation finie) au champ  $\pi$  et donc de briser la symétrie  $O(N)$  explicitement. La manière la plus simple de le faire consiste à ajouter un terme de champ magnétique couplé à  $\sigma$ .

*Régularisation par réseau.* L'expression (15.3), qui correspond à la formulation initiale du problème, fournit évidemment une régularisation par réseau tout à fait adéquate et permet aussi l'utilisation de méthodes non perturbatives pour étudier le modèle  $\sigma$  non linéaire. De plus, c'est la seule régularisation qui permette de discuter le rôle de la mesure dans le développement perturbatif. En revanche, les calculs perturbatifs sont techniquement compliqués et on ne peut définir qu'un groupe de renormalisation différentiel asymptotique dans la mesure où le paramètre de dilatation ne peut pas varier de façon continue.

## 15.5 Divergences d'impulsion nulle ou infrarouges

Puisque dans une théorie de masse nulle le propagateur se comporte comme  $1/p^2$ , il est nécessaire de discuter le développement perturbatif du point de vue des divergences à impulsion nulle ou infrarouges (IR). Par exemple, calculons la valeur moyenne du champ  $\sigma$  à l'ordre d'une boucle. Dans la normalisation initiale (15.12),

$$\begin{aligned} \langle \sigma(x) \rangle &= 1 - \frac{1}{2} \langle \pi^2(x) \rangle + O(\pi^4) \\ &= 1 - (N-1)T \int \frac{d^d p}{p^2 + O(p^4)} + O(T^2). \end{aligned}$$

L'intégrale est finie pour  $d > 2$ , mais diverge à la dimension critique  $d = 2$ , dimension pour laquelle le modèle  $\sigma$  non linéaire est renormalisable.

Cette propriété est directement liée à la physique de la brisure spontanée de symétries (BSS) continues.

- (i) En section 7.7, nous avons montré que dans le modèle à  $N$  composantes, pour  $d > 2$ , la symétrie  $O(N)$  est spontanément brisée à basse température. De façon cohérente, le développement perturbatif du modèle  $\sigma$ , qui prédit aussi une brisure spontanée de symétrie (BSS), n'est pas divergent à impulsion nulle pour  $d > 2$ . Pour  $T < T_c$  fixé, le comportement perturbatif à grande distance est dominé par les excitations de masse nulle appelées aussi ondes de spin. En revanche, le développement perturbatif ne donne aucune indication sur l'existence possible d'une région critique  $T \sim T_c$ .
- (ii) Pour  $d \leq 2$ , on sait d'après le théorème de Mermin–Wagner–Coleman, que la BSS avec ordre ( $\langle \hat{\phi} \rangle \neq 0$ ) est impossible dans un modèle avec une symétrie continue et interactions à courte portée, et ceci est de nouveau cohérent avec l'apparition de divergences IR dans la théorie des perturbations (cf. la discussion de la section 7.7). Pour  $d \leq 2$ , la température critique  $T_c$  s'annule et la théorie des perturbations n'a de sens qu'en présence d'une régularisation à impulsion nulle. Par conséquent, on ne peut rien conclure sur les propriétés à longue distance du modèle directement à partir du développement perturbatif.

*Régularisation IR.* Pour engendrer une théorie des perturbations bien définie à deux dimensions, il faut donc introduire une régularisation à impulsion nulle. En volume infini, cela nécessite de donner au champ  $\pi$  une masse ou longueur de corrélation finie. Puisque la masse nulle est une conséquence de la brisure spontanée de la symétrie  $O(N)$ , il est donc nécessaire de briser la symétrie explicitement. On peut, par exemple, ajouter à l'expression (15.10) un terme de masse explicite. Cependant, l'étude du mécanisme de brisure de symétrie suggère une méthode plus commode qui consiste à ajouter un terme de champ magnétique uniforme :

$$\mathcal{E}(\pi, \sigma) \mapsto \mathcal{E}(\pi, \sigma; H) = \mathcal{E}(\pi, \sigma) - \frac{H}{T} \sum_x \sigma(x), \quad H > 0. \quad (15.25)$$

Une conséquence immédiate de cette modification est que le minimum de l'énergie de configuration n'est plus dégénéré. Il faut maintenant maximiser aussi le terme de champ magnétique et ceci implique  $\pi = 0$  au minimum.

De plus, si l'on développe  $\sigma$  en puissances de  $\pi$ ,

$$\sigma = (1 - \pi^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 + O((\pi^2)^2), \quad (15.26)$$

et que l'on regroupe dans  $\mathcal{E}(\pi, \sigma; H)$  les termes quadratiques, on trouve le nouveau propagateur du champ  $\pi$  :

$$\tilde{\Delta}_{\alpha\beta}(p) = \frac{\delta_{\alpha\beta}T}{p^2 + H + O(p^4)}. \quad (15.27)$$

Le terme linéaire  $\sigma$  a donc engendré une masse  $H^{1/2}$  pour le champ  $\pi$ . En même temps, il a engendré de nouvelles interactions sans dérivées.

Rappelons que dans le cas de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ , le terme de brisure  $H\sigma$  est linéaire dans une composante indépendante et, par conséquent, ne génère pas de nouvelle renormalisation. Le même résultat peut être démontré ici, bien que la composante  $\sigma$  soit une fonction non linéaire du champ  $\pi$ .

## 15.6 Groupe de renormalisation

Nous avons montré que la physique à grande distance du modèle avec symétrie  $O(N)$  peut être décrite, en dimension  $d > 2$ , en dessous de  $T_c$ , par le modèle  $\sigma$  non linéaire. On sait que cette théorie des champs est renormalisable à deux dimensions. On procède donc de manière formellement analogue au cas de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ , c'est-à-dire qu'on étudie la théorie en dimension  $d = 2 + \varepsilon$  à l'aide d'un développement en une série double en température  $T$  et en  $\varepsilon$ . De cette manière, le développement perturbatif est renormalisable et des équations du groupe de renormalisation (EGR) peuvent être démontrées.

### 15.6.1 Renormalisation et EGR

Dans la limite continue formelle, en régularisation dimensionnelle, la fonction de partition dans un champ magnétique uniforme  $H$  s'écrit

$$\mathcal{Z}(H) = \int \left[ (1 - \pi^2(x))^{-1/2} d\pi(x) \right] \exp[-\mathcal{E}(\pi, \sigma; H)/T], \quad (15.28)$$

où

$$\mathcal{E}(\pi, \sigma; H) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left[ (\partial_{\mu} \pi(x))^2 + \frac{(\pi \cdot \partial_{\mu} \pi(x))^2}{1 - \pi^2(x)} \right] - H \sqrt{1 - \pi^2(x)} \right\}. \quad (15.29)$$

Dans l'intégrale de champ, on substitue alors

$$\pi(x) = Z^{1/2} \pi_r(x), \quad \sigma(x) = Z^{1/2} \sigma_r(x), \quad (15.30)$$

où  $Z$  est la renormalisation du champ. La relation entre  $\pi$  et  $\sigma$  devient

$$\sigma_r(x) = [Z^{-1} - \pi_r^2(x)]^{1/2}. \quad (15.31)$$

On introduit aussi une échelle de masse  $\mu$ , à laquelle va être définie la théorie renormalisée, et deux paramètres  $g, h$ , la température et le champ magnétique renormalisés ou effectifs à l'échelle  $\mu$ .

Dans certains schémas de renormalisation, comme la soustraction minimale, les constantes de renormalisation sont indépendantes de  $h$ . C'est un

de ces schémas que nous adoptons aussi ci-dessous. Soulignons que dans ce qui suit,  $\mu$  joue le rôle d'une échelle intermédiaire caractéristique du domaine critique autour du point fixe gaussien. Le comportement à grande distance ultime correspond à des impulsions petites par rapport à  $\mu$ .

Les relations entre paramètres initiaux et paramètres renormalisés prennent la forme

$$T = \mu^{2-d} g Z_g(g), \quad \mu^{d-2} \frac{h}{g} = Z^{1/2}(g) \frac{H}{T}, \quad (15.32)$$

où  $Z_g$  caractérise la renormalisation de la température et nous avons supposé que les constantes de renormalisation ont été choisies indépendantes de  $h$ .

Avec nos conventions, le paramètre  $g$ , qui est proportionnel à la température, est sans dimension. La relation entre fonctions de vertex régularisées et renormalisées est

$$Z^{n/2}(g) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; T, H) = \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; g, h, \mu), \quad (15.33)$$

où les fonctions  $\tilde{\Gamma}_r^{(n)}$  ont, ordre par ordre dans un développement en puissances de  $g$ , une limite finie quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

En dérivant par rapport à  $\mu$ , à paramètres initiaux  $T, H$  fixés, on obtient les EGR

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \zeta(g) + \rho(g) h \frac{\partial}{\partial h} \right] \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; g, h, \mu) = 0, \quad (15.34)$$

où les fonctions du GR sont définies par

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{T, H \text{ fixés}} g &= \beta(g), \\ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{T, H \text{ fixés}} \ln Z &= \zeta(g), \\ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{T, H \text{ fixés}} \ln h &= \rho(g). \end{aligned} \quad (15.35)$$

Utilisant la première relation (15.32) et la définition de  $Z$ , on relie les fonctions du GR dans la théorie renormalisée aux constantes de renormalisation  $Z, Z_g$  :

$$\beta(g) = \varepsilon g \left( 1 + g \frac{d \ln Z_g}{d g} \right)^{-1}, \quad (15.36a)$$

$$\zeta(g) = \beta(g) \frac{d \ln Z}{d g}, \quad (15.36b)$$

où l'on a posé

$$d = 2 + \varepsilon. \quad (15.37)$$

Le coefficient de  $\partial/\partial h$  peut être déduit de la deuxième équation (15.32) qui implique (en prenant le logarithme des deux membres)

$$0 = h^{-1} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} h + d - 2 - \frac{1}{2} \zeta(g) - \frac{\beta(g)}{g}, \quad (15.38)$$

et par conséquent

$$\rho(g) = 2 - d + \frac{1}{2} \zeta(g) + \frac{\beta(g)}{g}. \quad (15.39)$$

Afin de pouvoir discuter les fonctions de corrélation contenant le champ  $\sigma$ , on a aussi besoin des EGR satisfaites par les fonctions de corrélation connexes  $W_r^{(n)}$  :

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2} \zeta(g) + \left( \frac{1}{2} \zeta(g) + \frac{\beta(g)}{g} - \varepsilon \right) h \frac{\partial}{\partial h} \right] W_r^{(n)} = 0. \quad (15.40)$$

### 15.6.2 Calculs à l'ordre d'une boucle

Les deux fonctions du GR peuvent être déduites du calcul de la fonction de vertex à deux points. À l'ordre d'une boucle le calcul utilise le vertex d'ordre  $\pi^4$  :

$$\begin{aligned} \int d^d x \sum_{\mu} [\pi(x) \cdot \partial_{\mu} \pi(x)]^2 &= \frac{1}{4} \int d^d x \sum_{\mu} [\partial_{\mu} (\pi^2(x))]^2 \\ &= -\frac{1}{4} \int d^d x \pi^2(x) \nabla_x^2 (\pi^2(x)). \end{aligned}$$

Dans la représentation de Fourier (15.15),

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int d^d x \pi^2(x) \nabla_x^2 (\pi^2(x)) \\ &= \frac{1}{4} \int d^d x \int d^d p_1 d^d p_2 e^{ix(p_1+p_2)} \tilde{\pi}(p_1) \cdot \tilde{\pi}(p_2) \int d^d p_3 d^d p_4 (p_3 + p_4)^2 \\ & \quad \times e^{ix(p_3+p_4)} \tilde{\pi}(p_3) \cdot \tilde{\pi}(p_4) \\ &= \frac{1}{4} (2\pi)^d \int d^d p_1 d^d p_2 d^d p_3 d^d p_4 \delta\left(\sum p_i\right) (p_3 + p_4)^2 \tilde{\pi}(p_1) \cdot \tilde{\pi}(p_2) \\ & \quad \times \tilde{\pi}(p_3) \cdot \tilde{\pi}(p_4). \end{aligned}$$

La contribution d'ordre  $\pi^4$  venant du développement de  $H\sigma(x)$  a comme effet de remplacer  $(p_3 + p_4)^2$  par  $(p_3 + p_4)^2 + H$  et conduit au vertex  $V^{(4)}$  de la figure 15.1.

Le calcul du diagramme à une boucle de la figure 15.2 s'en déduit. Ce diagramme se décompose, dans une représentation fidèle, dans la somme des deux diagrammes de la figure 15.3, où le flot des indices est apparent, et dont

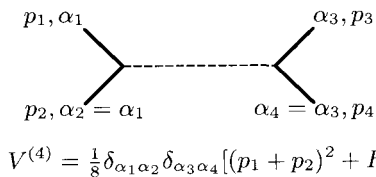


FIG. 15.1 – Vertex  $\pi^4$  : représentation fidèle, la ligne pointillée ne correspond pas à des propagateurs mais permet de représenter fidèlement le flot des indices par les traits pleins.

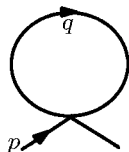


FIG. 15.2 – Fonction à deux points : contribution à une boucle.

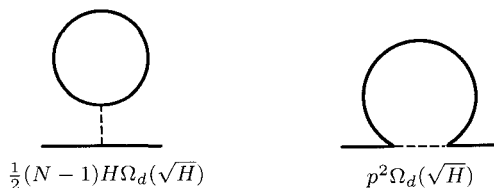


FIG. 15.3 – Diagrammes fidèles à une boucle.

la valeur est donnée en termes de la fonction  $\Omega_d$  introduite en section 12.5.3 (équation (12.31)).

Le deuxième diagramme de la figure 15.3 est donné par

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{(p+q)^2 + H}{q^2 + H} = \frac{p^2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{q^2 + H} + \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q.$$

La contribution proportionnelle à  $\int d^d q$  est compensée par la première contribution de la mesure mais, de toute façon, s'annule en régularisation dimensionnelle.

Pour la fonction de vertex à deux points, on trouve alors

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \frac{1}{T} (p^2 + H) + [p^2 + \frac{1}{2}(N-1)H] \Omega_d(\sqrt{H}) + O(g), \quad (15.41)$$

où (équation (12.31))

$$\Omega_d(m) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{q^2 + m^2}.$$

*Fonction de vertex renormalisée.* À une boucle la fonction à deux points renormalisée, définie en (15.33), et exprimée en terme des paramètres renormalisés (15.32), s'écrit alors

$$\tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p) = \frac{\mu^\varepsilon}{g} \left( \frac{Zp^2}{Z_g} + hZ^{1/2} \right) + [p^2 + \tfrac{1}{2}(N-1)h] \Omega_d(\sqrt{h}) + O(g). \quad (15.42)$$

En régularisation dimensionnelle, la fonction  $\Omega_d$  est donnée par l'équation (12.35) qui peut se récrire

$$\Omega_d(m) = \frac{\pi N_d}{2 \sin(\pi d/2)} m^{d-2} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{N_d}{\varepsilon}, \quad (15.43)$$

où  $N_d$  est le facteur de boucle usuel :

$$N_d = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} = \frac{1}{2\pi} + O(\varepsilon).$$

Exprimant que la fonction à deux points est finie quand  $\varepsilon = d - 2 \rightarrow 0$ , on déduit de l'expression de  $\tilde{\Gamma}_r^{(2)}$  les constantes de renormalisation à l'ordre d'une boucle. Dans le schéma dit de *soustraction minimale*, on trouve

$$\begin{aligned} Z &= 1 + (N-1) \frac{N_d}{\varepsilon} g + O(g^2), \\ Z_g &= 1 + (N-2) \frac{N_d}{\varepsilon} g + O(g^2), \end{aligned} \quad (15.44)$$

Utilisant les expressions (15.36), on en déduit les fonctions du GR à l'ordre d'une boucle :

$$\beta(g) = \varepsilon g - \frac{(N-2)}{2\pi} g^2 + O(g^3), \quad (15.45a)$$

$$\zeta(g) = \frac{(N-1)}{2\pi} g + O(g^2). \quad (15.45b)$$

Les deux fonctions du GR et les exposants critiques sont aujourd'hui connus jusqu'à l'ordre de quatre boucles.

## 15.7 Solution des EGR. Points fixes

Au voisinage de la dimension 2, la nature des points fixes est liée aux zéros de la fonction  $\beta(g)$  donnée par l'équation (15.36a). Intégrant alors les EGR, on déduit de l'existence et de la stabilité des points fixes des propriétés d'universalité.

### 15.7.1 Points fixes

Un examen de la fonction  $\beta(g)$  conduit immédiatement aux conclusions suivantes.

Pour  $d \leq 2$  ( $\varepsilon \leq 0$ ),  $g = 0$  est un point fixe IR instable, cette instabilité IR étant induite par la masse nulle des bosons de Goldstone potentiels. Le spectre de la théorie n'est donc pas donné par la théorie des perturbations et l'hypothèse perturbative de brisure spontanée de symétrie à basse température est incohérente. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce résultat est en accord avec des arguments plus rigoureux.

La section 15.10.1 contient alors une brève discussion de la physique à deux dimensions. Notons que puisque le modèle ne dépend que d'un paramètre marginal,  $g = 0$  est aussi un point fixe stable dans l'ultraviolet (la propriété de liberté asymptotique pour les grandes impulsions). Il y a, cependant, un cas pour lequel l'analyse ne s'applique pas :  $d = 2$ ,  $N = 2$ , où la fonction  $\beta$  s'annule, qui doit être examiné séparément (section 15.10.2).

Pour  $d > 2$ , c'est-à-dire  $\varepsilon > 0$ ,  $g = 0$  est un point fixe IR stable, la symétrie  $O(N)$  est spontanément brisée à basse température en champ nul. L'interaction effective, qui détermine le comportement à grande distance, approche l'origine pour toutes les températures effectives  $g < g^*$ ,  $g^*$  étant le premier zéro non trivial de  $\beta(g)$ . Par conséquent, les propriétés à grandes distances du modèle peuvent être obtenues à partir du développement de basse température et du groupe de renormalisation, en remplaçant les paramètres à l'échelle  $\mu$  par des paramètres effectifs obtenus en résolvant les EGR.

*La température critique.* Enfin, on observe qu'au moins pour  $0 < \varepsilon \ll 1$  et  $N > 2$ , la fonction  $\beta(g)$  du GR a un zéro non trivial

$$g^* = \frac{2\pi\varepsilon}{N-2} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow \beta(g^*) = 0, \text{ et } \beta'(g^*) = -\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (15.46)$$

qui correspond à un point fixe instable pour le comportement à longue distance. Une valeur de la température qui a une telle propriété correspond à une température critique. Les conséquences de ce résultat seront étudiées plus loin.

Notons seulement ici que  $g^*$  est aussi un point fixe UV, c'est-à-dire qu'il gouverne le comportement à grande impulsion de la théorie renormalisée. Par conséquent, on ne peut pas se fier au résultat perturbatif qui indique que la théorie n'est pas renormalisable pour  $d > 2$ . En effet, les fonctions de corrélation ont, pour les grandes impulsions, un comportement non-perturbatif. Cela permet d'envisager l'existence d'une théorie quantique des champs dans le continu, cohérente à toute distance.

### 15.7.2 Intégration des EGR : $d > 2$ , $g < g^*$

Nous discutons maintenant de façon plus précise les solutions des EGR.

Nous examinons d'abord les implications des EGR pour le comportement à longue distance des fonctions de corrélation pour  $d > 2$  où  $g = 0$  est un point fixe IR. Comme en section 13.3.1, nous résolvons l'équation (15.34) en introduisant un paramètre d'échelle  $\lambda$  et en cherchant une solution de la forme

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i, g, h, \mu) = Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i, g(\lambda), h(\lambda), \mu/\lambda). \quad (15.47)$$

La compatibilité avec l'équation (15.34) implique

$$\ln \lambda = - \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')}, \quad (15.48a)$$

$$\ln Z(\lambda) = \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\zeta(g')}{\beta(g')}, \quad (15.48b)$$

$$\ln(h(\lambda)/h) = \int_g^{g(\lambda)} dg' \left[ \frac{\zeta(g')}{2\beta(g')} - \frac{d-2}{\beta(g')} + \frac{1}{g'} \right] \quad (15.48c)$$

la dernière équation pouvant s'intégrer sous la forme

$$h(\lambda) = \lambda^{d-2} Z^{1/2}(\lambda) \frac{g(\lambda)}{g} h.$$

Avec nos conventions,  $\tilde{\Gamma}_r^{(n)}$  a la dimension  $d$  et  $h$  la dimension 2. En tenant compte de l'analyse dimensionnelle, on récrit alors la relation (15.47)

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i, g, h, \mu) = Z^{-n/2}(\lambda) (\mu/\lambda)^d \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(\lambda p_i/\mu, g(\lambda), h(\lambda)\lambda^2/\mu^2, 1). \quad (15.49)$$

Pour  $h = 0$ , le développement perturbatif a des singularités IR. En choisissant  $\lambda$  solution de l'équation

$$h(\lambda) = (\mu/\lambda)^2, \quad (15.50)$$

on s'assure que le développement perturbatif dans la théorie effective à l'échelle  $\lambda$  n'est plus singulier dans l'IR.

Il est facile de vérifier que, au moins dans un voisinage de  $g = 0$ , pour  $h \ll \mu^2$  l'équation implique  $\lambda \rightarrow \infty$  et  $g(\lambda)$  converge vers le point fixe IR gaussien  $g = 0$ . Introduisons trois fonctions de la température

$$M_0(g) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^g \frac{\zeta(g')}{\beta(g')} dg' \right] = Z^{-1/2}(g), \quad (15.51)$$

$$\xi(g) = \mu^{-1} g^{1/\varepsilon} \exp \left[ \int_0^g \left( \frac{1}{\beta(g')} - \frac{1}{\varepsilon g'} \right) dg' \right], \quad (15.52)$$

$$K(g) = M_0(g) [\mu \xi(g)]^{d-2} / g = 1 + O(g). \quad (15.53)$$

L'intégrale dans l'équation (15.48c) a une limite quand  $g \rightarrow 0$  et donc

$$h(\lambda) \rightarrow hK(g).$$

Résolvant alors l'équation (15.50), on trouve

$$\lambda \sim \mu / \sqrt{K(g)h}. \quad (15.54)$$

Les équations (15.48a, b) déterminent alors les comportements de  $g(\lambda)$  et de  $Z(\lambda)$  :

$$g(\lambda) \sim \lambda^{2-d} (\mu \xi(g))^{d-2} \sim [K(g)]^{(d-2)/2} (\mu \xi(g))^{d-2} (h/\mu^2)^{(d-2)/2}, \quad (15.55)$$

$$Z(\lambda) \sim M_0^2(g). \quad (15.56)$$

On en déduit

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i, g, h, \mu) \sim M_0^{-n}(g) [K(g)h]^{d/2} \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i [K(g)h]^{-1/2}, g(\lambda), 1, 1). \quad (15.57)$$

En fait, il est facile de vérifier directement, en utilisant l'analyse dimensionnelle sous la forme

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + 2h \frac{\partial}{\partial h} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i} = d,$$

que l'équation (15.57) donne la solution générale de l'équation (15.34).

Comme la température effective  $g(\lambda) \rightarrow 0$ , les termes dominants dans la limite  $h \rightarrow 0$  et  $p_i \rightarrow 0$  peuvent alors être calculés de manière perturbative.

## 15.8 Fonctions de corrélation : forme d'échelle

Il est commode de récrire l'équation (15.57) sous la forme

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; g, h, \mu) = \xi^{-d}(g) M_0^{-n}(g) F^{(n)}(p_i \xi(g), h/h_0(g)), \quad (15.58)$$

où

$$h_0(g) = [K(g)\xi^2(g)]^{-1}. \quad (15.59)$$

L'équation (15.58) montre que  $\xi(g)$  a, en champ nul, la nature d'une longueur de corrélation.

Pour les fonctions de corrélation connexes la même analyse mène à

$$W_r^{(n)}(p_i; g, h, \mu) = \xi^{d(n-1)}(g) M_0^n(g) G^{(n)}(p_i \xi(g), h/h_0(g)). \quad (15.60)$$

La fonction à un point est l'aimantation et donc

$$M = M_0(g) F^{(0)}(h/h_0(g)). \quad (15.61)$$

En inversant cette relation, on obtient la forme d'échelle de l'équation d'état

$$h = h_0(g)f\left(\frac{M}{M_0(g)}\right). \quad (15.62)$$

Les fonctions de vertex peuvent aussi être exprimées en fonction de l'aimantation sous la forme

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i, g, M, \mu) = \xi^{-d}(g)M_0^{-n}(g)F^{(n)}(p_i\xi(g), M/M_0(g)). \quad (15.63)$$

Les formes d'échelle (15.62) et (15.63) sont cohérentes avec celles obtenues en résolvant les EGR pour la théorie  $(\phi^2)^2$  (cf. section 13.5) : l'apparition de deux fonctions différentes  $\xi(g)$  et  $M_0(g)$  correspond à l'existence des deux exposants critiques indépendants  $\nu, \beta$ , dans la théorie des champs  $\phi^4$ . Elles étendent dans la limite de grandes distances, la forme d'échelle des fonctions de corrélation, valable dans la région critique, à toutes les températures en dessous de  $g^*$ . Il y a cependant une différence importante entre les EGR de la théorie  $(\phi^2)^2$  et celles du modèle  $\sigma$  : la théorie  $(\phi^2)^2$  dépend de deux paramètres, le coefficient de  $\phi^2$  qui joue le rôle d'une température et le coefficient de  $(\phi^2)^2$  qui n'a pas d'équivalent ici. Ce coefficient permet d'interpoler entre le point fixe gaussien et le point fixe IR. Les fonctions de corrélation de la théorie continue  $(\phi^2)^2$  n'ont une forme exacte d'échelle (15.63) qu'au point fixe IR. Au contraire, dans le cas du modèle  $\sigma$ , il a été possible de se débarrasser de toutes les corrections d'échelle, liées aux opérateurs inessentiels, ordre par ordre dans le développement perturbatif. Nous sommes conduits par conséquent à une conclusion remarquable : les fonctions de corrélation du modèle non linéaire de symétrie  $O(N)$  sont identiques aux fonctions de corrélation de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  au point fixe IR. Cette conclusion est en accord avec l'analyse du comportement d'échelle effectuée dans le développement en  $1/N$  en section 14.10.

*La courbe de coexistence.* Appliquons cette analyse à la détermination des singularités près de la courbe de coexistence, c'est-à-dire à  $g$  fixé en dessous de la température critique lorsque le champ magnétique tend vers zéro.

Avec les mêmes notations, l'aimantation renormalisée, qui est la fonction à un point, satisfait

$$M(g, h, \mu) \equiv \langle \sigma_r(x) \rangle = Z^{1/2}(\lambda)M(g(\lambda), 1, 1). \quad (15.64)$$

Pour calculer  $M$ , nous développons l'équation (15.31) :

$$\langle \sigma_r(x) \rangle = Z^{-1/2}(g) \left[ 1 - \frac{1}{2}Z\pi^2(x) + O(\pi^4) \right].$$

À l'ordre d'une boucle, dans un champ,  $M$  est donc donnée par (équation (15.43))

$$\begin{aligned} M &= Z^{-1/2} - \frac{1}{2}(N-1)\mu^{-\varepsilon}g \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{q^2 + h} + O(g^2) \\ &= 1 - (N-1)\frac{N_d}{2\varepsilon}g - (N-1)\frac{\pi N_d}{4\sin(\pi d/2)}g(h/\mu^2)^{(d-2)/2} + O(g^2). \end{aligned}$$

Utilisant alors la relation (15.64), on trouve

$$M(g, h, \mu = 1) = M_0(g) \left[ 1 - (N - 1)M_1(g)h^{(d-2)/2} + O(h, h^{d-2}) \right]$$

avec

$$M_1(g) = N_d \left( \frac{1}{2(d-2)} + \frac{\pi}{4 \sin(\pi d/2)} \right) [K(g)]^{(d-2)/2} (\mu \xi(g))^{d-2}.$$

Ce résultat montre que  $M_0(g)$  est l'aimantation spontanée et établit la forme de la singularité dominante sur la courbe de coexistence, c'est-à-dire à  $h = 0$ , de l'équation d'état.

## 15.9 Le domaine critique : exposants critiques

Étudions maintenant ce qui se produit lorsque  $g$  s'approche de  $g^*$  (pour  $N > 2$ ). La fonction  $\xi(g)$  diverge comme

$$\xi(g) \sim \mu^{-1} (g^* - g)^{1/\beta'(g^*)}. \quad (15.65)$$

On en conclut que l'exposant de la longueur de corrélation est donné par

$$\nu = -\frac{1}{\beta'(g^*)}. \quad (15.66)$$

Pour  $d \rightarrow 2_+$ , l'exposant  $\nu$  se comporte donc comme

$$\nu \sim 1/(d-2). \quad (15.67)$$

La fonction  $M_0(g)$  s'annule à  $g^*$  :

$$\ln M_0(g) = -\frac{1}{2} \frac{\zeta(g^*)}{\beta'(g^*)} \ln(g^* - g) + \text{const.} \quad (15.68)$$

Ceci fournit l'exposant  $\beta = \frac{1}{2}\nu d_\phi$ , et donc aussi  $\eta$ , par la relation  $d_\phi = d - 2 + \eta$  :

$$d_\phi = \zeta(g^*), \quad \eta = \zeta(g^*) + 2 - d. \quad (15.69)$$

À l'ordre dominant, on trouve

$$d_\phi = \frac{N-1}{N-2}(d-2) + O((d-2)^2), \quad \eta = \frac{d-2}{N-2} + O((d-2)^2). \quad (15.70)$$

Enfin, on vérifie que la singularité de  $\tilde{\Gamma}_r^{(n)}$  pour  $g = g^*$  provenant du préfacteur  $\xi^{-d} M_0^{-n}$  coïncide avec le résultat obtenu dans la théorie  $(\phi^2)^2$ .

*La nature de la longueur de corrélation  $\xi(g)$ .* La longueur  $\xi(g)$  est liée à une échelle de transition (crossover en anglais) entre deux comportements

différents des fonctions de corrélation. Pour des distances grandes par rapport à  $\xi(g)$ , le comportement des fonctions de corrélation est gouverné par les modes de Goldstone et peut donc être déduit du développement perturbatif de basse température. Cependant, lorsque  $g$  s'approche de  $g^*$ ,  $\xi(g)$  diverge. Il existe alors des distances grandes par rapport à l'échelle microscopique mais petites par rapport à  $\xi(g)$  pour lesquelles les fonctions de corrélation ont un comportement critique. Dans cette situation, on peut construire dans le continu une théorie quantique des champs cohérente à toutes les échelles, le comportement critique étant aussi le comportement à grandes impulsions des fonctions de corrélation renormalisées.

*Commentaires généraux.* À partir du développement de basse température, nous avons pu décrire, pour les théories avec symétries continues, non seulement la structure complète de la phase de basse température, comme attendu, mais aussi dans le cas non abélien (le groupe des rotations  $SO(N)$  est abélien, c'est-à-dire commutatif pour  $N = 2$ ) le comportement critique près de deux dimensions.

Ce qui est surprenant, dans une certaine mesure, dans ce résultat est que la série des perturbations n'est sensible qu'à la structure locale de la sphère  $\hat{\phi}^2 = 1$  bien que le rétablissement de la symétrie implique la sphère globalement. Ceci explique, d'ailleurs, la particularité du cas abélien  $N = 2$  : localement un cercle ne peut pas être distingué d'une ligne droite non compacte et donc le modèle  $\sigma$  devient une théorie libre. Pour  $N > 2$ , en revanche, la sphère a une courbure caractéristique locale. Des variétés compactes régulières différentes peuvent toutefois avoir la même métrique locale, et par conséquent la même théorie des perturbations. Elles ont toutes la même physique à basse température. Cependant, les résultats précédents concernant le comportement critique, ne sont physiquement pertinents que s'ils sont encore valables lorsque  $\varepsilon$  n'est pas infinitésimal et que  $g$  approche  $g^*$ , une condition qui ne peut pas être vérifiée directement. En particulier, le développement de basse température manque en général des termes décroissants comme  $\exp(\text{const.}/g)$  qui peuvent dans certains cas être essentiels pour la physique. Enfin, notons qu'une relation directe entre les modèles  $(\phi^2)^2$  et  $\sigma$ , est fournie par le développement pour  $N \rightarrow \infty$  (section 14.10). Ceci donne à penser que les considérations précédentes sont valables pour le modèle à  $N$  composantes, au moins pour des valeurs de  $N$  suffisamment grandes. En revanche, la physique pour  $N = 2$  n'est pas bien reproduite, la transition de phase de Kosterlitz–Thouless, qui repose sur des effets invisibles dans le développement de basse température, est absente. Cardy et Hamber ont spéculé sur le flot du GR pour  $N$  près de 2 et pour la dimension  $d$  près de 2, en incorporant de façon phénoménologique la transition de Kosterlitz–Thouless dans leur analyse.

## 15.10 Dimension 2

Nous examinons maintenant brièvement le cas de la dimension 2, où le modèle procède certaines propriétés intéressantes.

### 15.10.1 Le modèle non-abélien

Pour  $N > 2$ , le cas non-abélien, le modèle  $\sigma$  non linéaire partage alors une propriété importante avec la physique des interactions microscopiques fondamentales : le modèle  $\sigma$  est l'exemple le plus simple d'une théorie des champs asymptotiquement libre (dans l'ultraviolet), puisque le premier coefficient de la fonction  $\beta$  est négatif :

$$\beta(g) = -\frac{(N-2)}{2\pi}g^2 + O(g^3), \quad (15.71)$$

contrairement, par exemple, à la théorie des champs  $\phi^4$ . Par conséquent, le comportement des fonctions de corrélation universelles pour les grandes impulsions est entièrement calculable à partir de la théorie des perturbations et des arguments du GR (la propriété de liberté asymptotique). En contre-partie, le point fixe gaussien est instable dans l'infrarouge et donc, en champ  $h$  nul, le spectre de la théorie n'est pas perturbatif. Ceci est cohérent avec l'absence attendue de brisure de symétrie, qui conduit à un spectre composé de  $N$  états massifs dégénérés.

Si l'on définit maintenant la fonction

$$\xi(g) = \mu^{-1} \exp \left[ \int^g \frac{dg'}{\beta(g')} \right], \quad (15.72)$$

on peut intégrer les EGR de la même manière et on trouve que  $\xi(g)$  est la longueur de corrélation en champ nul. De plus, on peut utiliser l'expression explicite de la fonction  $\beta$  à deux boucles pour calculer la longueur de corrélation ou la masse physique pour  $g \rightarrow 0$  :

$$\xi^{-1}(g) = m(g) = K\mu g^{-1/(N-2)} e^{-2\pi/[(N-2)g]} (1 + O(g)). \quad (15.73)$$

Cependant, la constante d'intégration  $K$ , qui relie la masse physique à l'échelle du GR, ne peut être calculée que par des techniques non perturbatives.

Enfin, les formes d'échelles (15.58) et (15.60) impliquent que le développement perturbatif à champ magnétique fixé est valable, à petites impulsions ou à grandes distances, et pour  $h/h_0(g)$  grand.

*La conjecture d'Elitzur.* L'énergie de configuration (15.18) avec symétrie  $O(N)$  possède une sphère de minima classiques dégénérés. Pour définir une théorie des perturbations, on est obligé d'ajouter à l'énergie un terme linéaire de brisure de symétrie qui sélectionne un minimum classique particulier. Nous avons mentionné, et c'est facile de le vérifier, que pour  $d \leq 2$  les fonctions de corrélation ont des divergences IR lorsque le paramètre  $h$  tend vers zéro, une propriété qui est cohérente avec l'absence de BSS pour  $d \leq 2$ . Cependant, pour faire des calculs perturbatifs, un autre méthode existe : on n'introduit pas un terme de brisure de symétrie mais plutôt un ensemble de *coordonnées collectives* qui paramètrent l'ensemble des minima classiques. On développe alors

en théorie des perturbations autour d'un minimum fixé, mais on ne traite de manière perturbative que les modes du champ qui ne correspondent pas à une rotation globale. Enfin, on somme sur tous les minima classiques. Clairement, après cette dernière somme, seules les fonctions de corrélation invariantes sous  $O(N)$  survivent. Elitzur a émis une conjecture, que David a démontrée, à savoir qu'à deux dimensions les fonctions de corrélation invariantes sous  $O(N)$  obtenues par cette procédure ont un développement régulier de basse température. Cela signifie que si l'on calcule les fonctions de corrélation invariantes sous  $O(N)$  par la théorie des perturbations avec un champ non nul et que l'on prend la limite  $\hbar = 0$ , cette limite est finie.

Pour avoir une idée du mécanisme de ces compensations de singularités IR, on peut calculer la fonction à deux points invariante à l'ordre d'une boucle :

$$\begin{aligned}\langle \sigma(x)\sigma(0) + \boldsymbol{\pi}(x) \cdot \boldsymbol{\pi}(0) \rangle &= 1 - \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\pi}(x) - \boldsymbol{\pi}(0))^2 \rangle + O(\pi^4) \\ &= 1 - (N-1)T \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left( \frac{1 - e^{ipx}}{p^2} \right) + O(T^2).\end{aligned}$$

On observe que le numérateur dans l'intégrant s'annule à  $p = 0$ .

### 15.10.2 Le cas abélien $N = 2$

Nous avons vu que le modèle  $\sigma$  non linéaire de symétrie  $O(2)$  est particulier parce que la fonction  $\beta$  du GR se réduit, près de deux dimensions, dans un développement de basse température, au terme dimensionnel  $(d-2)g$ . Par conséquent les propriétés, du point de vue du GR sont assez différentes de celles des modèles  $\sigma$  non linéaires de symétrie  $O(N)$  génériques avec  $N > 2$ . En particulier, à deux dimensions le modèle de symétrie  $O(2)$  n'est pas asymptotiquement libre. L'origine de cette différence se trouve dans la structure locale de la variété : pour  $N = 2$  la sphère  $O(N)$  se réduit à un cercle qui est localement une variété plate, c'est-à-dire qui ne peut être distinguée d'une ligne droite. D'ailleurs, si l'on paramètre le spin  $\hat{\phi}(x)$  en  $\{\cos \theta(x), \sin \theta(x)\}$ , l'énergie de configuration du modèle  $\sigma$  non linéaire en champ nul devient l'hamiltonien d'un champ libre de masse nulle. En effet,

$$\partial_\mu \cos \theta(x) = -\partial_\mu \theta(x) \sin \theta(x), \quad \partial_\mu \sin \theta(x) = \partial_\mu \theta(x) \cos \theta(x),$$

et donc

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{\mu^{d-2}}{2g} \int d^d x \sum_\mu [\partial_\mu \theta(x)]^2.$$

La fonction  $\beta$  est donc identiquement donnée par son terme dimensionnel  $(d-2)g$  à tous les ordres.

Puisque  $\theta$  est un champ libre de masse nulle, la longueur de corrélation reste infinie pour tout  $g$ . Cependant, une simple analyse de haute température du modèle de spins sur réseau correspondant, montre que la longueur de corrélation est finie à haute température. Une transition de phase à température

finie est nécessaire pour expliquer ce phénomène. Le hamiltonien du modèle  $\sigma$  ne peut donc pas représenter les propriétés à longues distances du modèle sur réseau pour toutes les températures.

La solution de ce paradoxe repose sur la remarque que  $\theta$  est une variable cyclique, une condition qui n'est pas incorporée dans le modèle  $\sigma$  parce qu'elle ne produit que des contributions exponentiellement petites en  $1/g$ , et ne joue pas de rôle à basse température.

*Modèle bidimensionnel.* À deux dimensions, la fonction  $\beta$  s'annule identiquement. Notons, cependant, que ce ne sont pas les fonctions de corrélation du champ  $\theta$  qui sont physiques mais plutôt celles de  $\sin \theta$  ou  $\cos \theta$  ou de manière équivalente de  $e^{\pm i\theta}$ . Même dans une théorie des champs libres, ces champs doivent être renormalisés et ont donc une dimension non gaussienne pour toutes les températures  $g$ .

Pour s'en convaincre il suffit de calculer les fonctions de corrélation correspondantes. Comme le propagateur de masse nulle n'existe pas, il est commode de faire le calcul d'abord dans la théorie massive correspondant au hamiltonien

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{1}{2g} \int d^2x \left[ \sum_{\mu} [\partial_{\mu} \theta(x)]^2 + m^2 \theta^2(x) \right].$$

Toutes les fonctions de corrélation de  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  se déduisent de

$$\left\langle \prod_{i=1}^n e^{i\epsilon_i \theta(x_i)} \right\rangle = \int [d\theta] \exp \left[ -\mathcal{E}(\theta) + i \sum_i \epsilon_i \theta(x_i) \right] \quad (15.74)$$

avec  $\epsilon_i = \pm 1$ . Posant

$$J(x) = i \sum_i \epsilon_i \delta(x - x_i),$$

on peut récrire l'intégrale

$$\left\langle \prod_{i=1}^n e^{i\epsilon_i \theta(x_i)} \right\rangle = \int [d\theta] \exp \left[ -\mathcal{E}(\theta) + \int d^2x J(x) \theta(x) \right].$$

L'intégration donne

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{i\epsilon_i \theta(x_i)} \right\rangle &= \exp \left[ \frac{g}{2} \int d^2x d^2y J(x) \Delta(x-y) J(y) \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{g}{2} \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \Delta(x_i - x_j) \right], \end{aligned} \quad (15.75)$$

où  $\Delta(x)$  est le propagateur massif

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2p}{p^2 + m^2} e^{ipx}.$$

Dans le limite  $m \rightarrow 0$ , le propagateur diverge (cf. équation (A.6)). La somme des contributions divergentes est

$$\frac{g}{4\pi} \ln m \left( \sum_i \epsilon_i \right)^2.$$

Donc, seules les fonctions de corrélations telles que  $\sum_i \epsilon_i = 0$ , c'est-à-dire invariantes par le groupe de symétrie  $SO(2)$  qui agit sur  $\theta$  par translation, ne s'annulent pas dans la limite  $m \rightarrow 0$ . On en déduit que la symétrie  $O(2)$  n'est pas brisée à basse température.

La fonction à deux points invariante a comme limite

$$\langle e^{i\theta(x) - i\theta(0)} \rangle \propto x^{-g/2\pi}. \quad (15.76)$$

Malgré l'absence de brisure de symétrie, les fonctions ont un comportement algébrique à basse température avec un exposant variable

$$\eta = g/2\pi \Rightarrow d_\phi = g/4\pi, \quad (15.77)$$

comportement généralement associé à une ligne de points fixes.

Enfin, soulignons qu'à deux dimensions, il est possible de construire une autre théorie des champs qui, à basse température, se réduit à la théorie libre, mais qui incorpore la propriété que  $\theta$  est une variable angulaire. Cela conduit à l'étude du modèle de sine-Gordon qui possède une transition de phase, la fameuse transition de Kosterlitz-Thouless (KT), qui sépare une phase de longueur de corrélation infinie *sans ordre* (la phase de basse température du modèle  $O(2)$ ) d'une phase avec longueur de corrélation finie.

## 15.11 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ à basse température

*Remarque préliminaire.* Les calculs algébriques qui suivent se placent dans le cadre de la régularisation dimensionnelle (cf. section 12.5.2), mais il existe une version sur réseau qui ne nécessite que des modifications simples.

À basse température, c'est-à-dire à  $T$  fixée,  $T < T_c$ , dans un système dans lequel une symétrie discrète est brisée spontanément les fonctions de corrélation connexes décroissent exponentiellement à grande distance. La situation est tout à fait différente quand la symétrie est continue à cause de la présence de modes de Goldstone. Une physique non triviale de longue distance existe pour toute température dans la phase ordonnée. Cette physique est décrite par le modèle  $\sigma$  non linéaire ainsi que nous allons le vérifier, directement dans l'espace continu, en étudiant la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ , dont le hamiltonien a la forme

$$\mathcal{H}(\phi) = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \sum_\mu (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} r \phi^2 + \frac{1}{4!} u (\phi^2)^2 \right], \quad (15.78)$$

dans la phase de basse température ( $r < r_c$ ). La fonction de partition est donnée par l'intégrale de champ

$$\mathcal{Z} = \int [\mathrm{d}\phi(x)] \exp[-\mathcal{H}(\phi)].$$

Nous changeons de variables, posant

$$\phi(x) = \rho(x)\hat{\phi}(x) \quad \text{avec} \quad \hat{\phi}^2(x) = 1. \quad (15.79)$$

L'intégrale de champ devient

$$\mathcal{Z} = \int [\rho^{N-1}(x)\mathrm{d}\rho(x)] [\mathrm{d}\hat{\phi}(x)] \exp[-\mathcal{H}(\rho, \hat{\phi})] \quad (15.80)$$

avec

$$\mathcal{H}(\rho, \hat{\phi}) = \int \mathrm{d}^d x \left\{ \frac{1}{2} \rho^2(x) [\partial_\mu \hat{\phi}(x)]^2 + \frac{1}{2} [\partial_\mu \rho(x)]^2 + \frac{1}{2} r \rho^2 + \frac{1}{4!} u \rho^4 \right\}. \quad (15.81)$$

Dans la phase ordonnée, à  $T$  fixé en dessous de  $T_c$ , le champ  $\rho(x)$  a une valeur moyenne non nulle et est massif (la longueur de corrélation est finie); sa dynamique n'est donc pas critique. L'intégration sur le champ  $\rho(x)$  engendre une énergie de configuration locale effective  $\mathcal{E}(\hat{\phi})$  pour le champ  $\hat{\phi}$ :

$$\exp[-\mathcal{E}(\hat{\phi})] = \int [\rho^{N-1}(x)\mathrm{d}\rho(x)] \exp[-\mathcal{H}(\rho, \hat{\phi})]. \quad (15.82)$$

De plus, l'intégrale fonctionnelle (15.82) peut être calculée de manière perturbative. Notons  $M$  la valeur moyenne de  $\rho(x)$  à l'approximation des arbres et posons

$$\rho(x) = M + \rho'(x). \quad (15.83)$$

En termes de  $\rho'$ , l'hamiltonien (15.81) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\rho', \hat{\phi}) = \int \mathrm{d}^d x \left\{ \frac{1}{2} (M^2 + 2M\rho' + \rho'^2) [\partial_\mu \hat{\phi}(x)]^2 + \frac{1}{2} [\partial_\mu \rho'(x)]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} r (M + \rho')^2 + \frac{1}{4!} u (M + \rho')^4 \right\}. \end{aligned}$$

En négligeant toutes les fluctuations du champ  $\rho'$ , on obtient à l'ordre dominant

$$\mathcal{E}^{(0)}(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} M^2 \int \mathrm{d}^d x [\partial_\mu \hat{\phi}(x)]^2. \quad (15.84)$$

On reconnaît l'énergie de configuration du modèle  $\sigma$  non linéaire.

Les corrections en boucles provenant de l'intégration sur  $\rho'$  engendrent des interactions supplémentaires en  $\hat{\phi}$ . Cependant, tant que l'on explore des impulsions beaucoup plus petites que la masse du champ  $\rho$  ou des distances

beaucoup plus grandes que la longueur de corrélation correspondante, l'énergie de configuration effective résultant de l'intégration sur le champ  $\rho$  peut être développée en termes locaux. Le terme dominant pour les grandes distances est le terme ne contenant que deux dérivées. À cause de la symétrie  $O(N)$ , il est proportionnel à  $\mathcal{E}^{(0)}(\hat{\phi})$  et n'a comme effet que de renormaliser le coefficient  $M^2$  qui apparaît dans l'équation (15.84). Les autres interactions ont quatre dérivées ou plus et correspondent à des opérateurs inessentiels. Notons que pour une température  $T$  près de  $T_c$ , le domaine dans l'espace des impulsions où ces arguments s'appliquent est

$$|p_i| \ll (T_c - T)^\nu.$$

Dans une telle limite, le modèle  $\sigma$  non linéaire (15.84) décrit complètement les propriétés à longue distance de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  pour  $T$  fixé,  $T < T_c$ . De plus, le coefficient devant  $\mathcal{E}(\hat{\phi})$  devient grand à basse température comme dans le modèle sur réseau.



# Chapitre 16

## Groupe de renormalisation fonctionnel

DANS CE CHAPITRE, nous décrivons de façon relativement brève une approche au groupe de renormalisation, proche des idées initialement développées par Wegner et Wilson. Ce groupe de renormalisation, dans ses différentes formulations, exprime l'invariance de la fonction de partition dans un changement corrélé du propagateur et des autres paramètres du hamiltonien.

Polchinski a montré ultérieurement qu'il pouvait fournir une nouvelle démonstration de la renormalisabilité des théories des champs.

Plus récemment, des variantes ont été proposées. Elles ont permis de développer de nouvelles méthodes d'approximation basées non plus sur la théorie des perturbations mais, par exemple, sur un développement en dérivées.

Dans l'approche de Wegner et Wilson, un groupe de renormalisation fonctionnel est construit explicitement par intégration partielle sur les modes de grande impulsion du champ. Des équations de groupe de renormalisation (EGR) fonctionnelles expriment de façon générale et exacte, dans le cadre de la théorie statistique locale des champs, l'équivalence entre un changement du paramètre d'échelle lié à la physique microscopique et les paramètres de l'hamiltonien. D'ailleurs, on parle aussi de *groupe de renormalisation exact*. Il est facile de vérifier, qu'en dehors du cas gaussien, ces équations ne sont fermées que si toutes les interactions locales possibles sont prises en compte.

Il est alors possible d'en déduire diverses EGR satisfaites par les fonctions de corrélation. Suivant la forme choisie, ces EGR sont exactes ou ne sont exactes qu'à grande distance ou petites impulsions, à des corrections décroissant plus vite que toute puissance du paramètre de dilatation près.

Dans ce chapitre, nous ne décrivons pas les différents schémas d'approximation dans lesquels ces EGR satisfaites par le hamiltonien ont été résolues, mais montrons explicitement que ces EGR permettent aussi un calcul perturbatif des fonctions de groupe de renormalisation comme la fonction  $\beta$  (dont il faut simplement adapter la définition à ce contexte plus général), même si

techniquement les méthodes usuelles de théorie quantique des champs basées sur la régularisation dimensionnelle sont beaucoup plus efficaces.

## 16.1 Intégration partielle et variation du hamiltonien

Nous démontrons d'abord, grâce à des identités qui n'impliquent que des intégrales de champ gaussiennes, l'égalité de deux fonctions de partitions correspondant à deux hamiltoniens différents. Cette relation peut être interprétée comme résultant d'une intégration partielle sur certaines composantes du champ. Nous en déduisons une condition suffisante pour que, dans une théorie statistique des champs, des modifications corrélées du propagateur et des interactions laisse la fonction de partition invariante.

Nous supposons dans tout ce qui suit, sauf indication contraire, que la théorie des champs est invariante par translation et donc que les propagateurs correspondent à des noyaux de la forme  $\Delta(x - y)$ .

### 16.1.1 Intégration partielle

Nous établissons d'abord une relation simple entre les fonctions de partition correspondant à deux hamiltoniens de la classe considérée en section 9.1.1.

Le premier hamiltonien dépend d'un champ  $\phi$  et nous l'écrivons sous la forme

$$\mathcal{H}_1(\phi) = \frac{1}{2} \int dx dy \phi(x) K_1(x - y) \phi(y) + \mathcal{V}_1(\phi), \quad (16.1)$$

où  $K_1$  est un opérateur positif et la fonctionnelle  $\mathcal{V}_1(\phi)$  est développable en puissances du champ  $\phi$ , locale et invariante par translation. À la partie quadratique explicite est associée une fonction à deux points gaussienne, ou propagateur,  $\Delta_1$  inverse de  $K_1$  :

$$\int dz K_1(x - z) \Delta_1(z - y) = \delta(x - y).$$

Le deuxième hamiltonien dépend de deux champs  $\phi_1, \phi_2$  sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\phi_1, \phi_2) = & \frac{1}{2} \int dx dy [\phi_1(x) K_2(x - y) \phi_1(y) + \phi_2(x) \mathcal{K}(x - y) \phi_2(y)] \\ & + \mathcal{V}_1(\phi_1 + \phi_2). \end{aligned} \quad (16.2)$$

De nouveau, nous définissons

$$\int dz K_2(x - z) \Delta_2(z - y) = \delta(x - y), \quad \int dz \mathcal{K}(x - z) \mathcal{D}(z - y) = \delta(x - y).$$

Les noyaux  $K_1$ ,  $K_2$  et  $\mathcal{K}$  sont positifs, ce qui est une condition nécessaire pour que les intégrales de champ existent, au moins dans un sens perturbatif.

De plus, les noyaux  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\mathcal{D}$  (donc également positifs) ont la forme des propagateurs régularisés (12.29) de façon à garantir l'existence d'un développement formel des intégrales de champ en puissances de l'interaction  $\mathcal{V}_1$ .

Alors, si

$$\Delta_1 = \Delta_2 + \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad K_1 = K_2(K_2 + \mathcal{K})^{-1}\mathcal{K}, \quad (16.3)$$

les fonctions de partition

$$\mathcal{Z}_1 = \int [\mathrm{d}\phi] e^{-\mathcal{H}_1(\phi)}$$

et

$$\mathcal{Z}_2 = \int [\mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}\phi_2] e^{-\mathcal{H}(\phi_1, \phi_2)} \quad (16.4)$$

sont proportionnelles et leur rapport est explicite :

$$\int [\mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}\phi_2] e^{-\mathcal{H}(\phi_1, \phi_2)} = \left( \frac{\det(\mathcal{D}\Delta_2)}{\det \Delta_1} \right)^{1/2} \int [\mathrm{d}\phi] e^{-\mathcal{H}_1(\phi)}, \quad (16.5)$$

où des facteurs  $\sqrt{2\pi}$  ont été intégrés dans la mesure d'intégration et une régularisation qui donne un sens aux déterminants est implicite.

*Notation.* Dans ce qui suit, nous utilisons la notation compacte

$$\int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \phi(x) K(x-y) \phi(y) \equiv (\phi K \phi). \quad (16.6)$$

*Démonstration.* Après le changement de variables  $\{\phi_1, \phi_2\} \mapsto \{\phi_1, \phi = \phi_2 + \phi_1\}$ , l'intégrale (16.4) prend la forme

$$\mathcal{Z}_2 = \int [\mathrm{d}\phi] e^{-\mathcal{V}_1(\phi)} \mathcal{Z}(\phi)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\phi) &= \int [\mathrm{d}\phi_1] \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\phi_1 K_2 \phi_1) + ((\phi - \phi_1) \mathcal{K} (\phi - \phi_1))] \right\} \\ &= \int [\mathrm{d}\phi_1] \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\phi_1 (K_2 + \mathcal{K}) \phi_1) - 2(\phi \mathcal{K} \phi_1) + (\phi \mathcal{K} \phi)] \right\} \\ &= (\det(K_2 + \mathcal{K}))^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\phi K_1 \phi) \right], \end{aligned}$$

où dans le calcul de l'intégrale gaussienne est intervenu la translation

$$\phi_1 \mapsto \chi = \phi_1 - (K_2 + \mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \phi.$$

*Autre forme de l'identité.* On peut aussi définir

$$e^{-\mathcal{V}_2(\phi)} = (\det \mathcal{D})^{-1/2} \int [\mathrm{d}\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2} (\varphi \mathcal{K} \varphi) - \mathcal{V}_1(\phi + \varphi) \right], \quad (16.7)$$

ainsi que

$$\mathcal{H}_2(\phi) = \frac{1}{2}(\phi K_2 \phi) + \mathcal{V}_2(\phi).$$

Alors l'identité (16.5) se récrit

$$\int [d\phi] e^{-\mathcal{H}_2(\phi)} = \left( \frac{\det \Delta_2}{\det \Delta_1} \right)^{1/2} \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}_1(\phi)}. \quad (16.8)$$

Cette identité peut alors être interprétée comme le résultat d'une intégration partielle sur le champ  $\phi$  dans la mesure où le propagateur  $\mathcal{D}$  est positif et donc, au sens des opérateurs,  $\Delta_2 < \Delta_1$ .

### 16.1.2 Forme différentielle

Nous supposons maintenant que le propagateur  $\Delta$  est fonction d'un paramètre réel  $s : \Delta \equiv \Delta(s)$ . De plus,  $\Delta(s)$  est  $C^\infty$  avec une dérivée négative. Nous définissons

$$D(s) = \frac{d\Delta(s)}{ds} < 0, \quad (16.9)$$

où  $D(s)$  est représenté par le noyau  $D(s; x - y)$ .

Pour  $s < s'$ , nous identifions

$$\Delta_1 = \Delta(s), \quad \Delta_2 = \Delta(s') \quad \text{et donc} \quad \mathcal{D}(s, s') = \Delta(s) - \Delta(s') > 0. \quad (16.10)$$

De même,

$$K_1 = K(s) = \Delta^{-1}(s), \quad K_2 = K(s'), \quad \mathcal{K}(s, s') = [\mathcal{D}(s, s')]^{-1} > 0. \quad (16.11)$$

Comme les noyaux  $K(s)$ ,  $\mathcal{K}(s, s')$  sont positifs, toutes les intégrales gaussiennes existent.

Enfin, nous posons

$$\mathcal{V}_1(\phi) = \mathcal{V}(\phi, s), \quad \mathcal{V}_2(\phi) = \mathcal{V}(\phi, s'), \quad \mathcal{H}_1(\phi) = \mathcal{H}(\phi, s), \quad \mathcal{H}_2(\phi) = \mathcal{H}(\phi, s').$$

L'identité (16.8) prend alors la forme

$$\int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi, s')} = \left( \frac{\det \Delta(s')}{\det \Delta(s)} \right)^{1/2} \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi, s)}.$$

L'équation (16.7) devient

$$e^{-\mathcal{V}(\phi, s')} = (\det \mathcal{D}(s, s'))^{-1/2} \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi \mathcal{K}(s, s') \varphi) - \mathcal{V}(\phi + \varphi, s) \right]. \quad (16.12)$$

Nous posons

$$s' = s + \sigma, \quad \sigma > 0,$$

et faisons tendre  $\sigma$  vers zéro. Alors,

$$\mathcal{K}^{-1}(s, s + \sigma) = \mathcal{D}(s, s + \sigma) = -\sigma D(s) + O(\sigma^2). \quad (16.13)$$

Dans la limite  $\sigma \rightarrow 0$ , le terme quadratique dans le champ  $\varphi$ , dans l'expression (16.12) est multiplié par un facteur  $1/\sigma$  et, donc, les valeurs du champ  $\varphi$  contribuant à l'intégrale sont d'ordre  $\sqrt{\sigma}$ . Nous développons alors  $\mathcal{V}(\phi + \varphi, s)$  en puissances de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\phi + \varphi, s) &= \mathcal{V}(\phi, s) + \int dx \frac{\delta \mathcal{V}(\phi, s)}{\delta \phi(x)} \varphi(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta^2 \mathcal{V}(\phi, s)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \varphi(x) \varphi(y) + O(\varphi^3). \end{aligned}$$

Nous en déduisons le développement de  $e^{-\mathcal{V}(\phi + \varphi, s)}$ . Dans la relation (16.12), le développement de l'intégrale en puissances de  $\sigma$  se réduit à une somme d'intégrales gaussiennes qui s'évaluent par le théorème de Wick. En multipliant les deux membres par  $e^{\mathcal{V}(\phi, s)}$ , on déduit de la relation (16.12)

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{V}(\phi, s) - \mathcal{V}(\phi, s + \sigma)} &= \\ 1 + \frac{1}{2} \int dx dy \left[ \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} - \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right] \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle + O(\sigma^2), \end{aligned}$$

où  $\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle$  est la valeur moyenne gaussienne correspondant, à cet ordre, au propagateur  $-\sigma D(s)$  :

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = -\sigma D(s; x - y) + O(\sigma^2).$$

Par ailleurs,

$$e^{\mathcal{V}(\phi, s) - \mathcal{V}(\phi, s + \sigma)} = 1 - \sigma \frac{d}{ds} \mathcal{V}(\phi, s) + O(\sigma^2).$$

En identifiant les termes d'ordre  $\sigma$ , on obtient l'équation fondamentale

$$\frac{d}{ds} \mathcal{V}(\phi, s) = -\frac{1}{2} \int dx dy D(s; x - y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right]. \quad (16.14)$$

Cette équation exprime donc une condition *suffisante* pour que la fonction de partition

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(s) &= (\det \Delta(s))^{-1/2} \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi, s)} \text{ avec} \\ \mathcal{H}(\phi, s) &= \frac{1}{2} (\phi K(s) \phi) + \mathcal{V}(\phi, s), \end{aligned} \quad (16.15)$$

soit indépendante du paramètre  $s$ .

Cette propriété relie une modification du propagateur à une modification de l'interaction, tout à fait dans l'esprit du groupe de renormalisation.

*Remarques.*

(i) Si l'on pose

$$\mathcal{V}(\phi, s) = \mathcal{V}(\phi = 0, s) + \mathcal{V}'(\phi, s),$$

le terme  $\mathcal{V}(\phi = 0, s)$  se découple et l'équation se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{V}'(\phi, s) = & -\frac{1}{2} \int dx dy D(s; x-y) \\ & \times \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}'}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}'}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}'}{\delta \phi(y)} \right] - (\phi = 0). \end{aligned} \quad (16.16)$$

Dans la suite, c'est cette forme que nous utiliserons le plus souvent dans les calculs explicites, les soustractions de  $\mathcal{V}(\phi)$  et de l'équation étant implicites pour ne pas alourdir la notation.

(ii) Pour que  $\mathcal{Z}(s)$  soit indépendant de  $s$ , il suffit que l'équation (16.14) soit vraie en valeur moyenne avec la mesure  $e^{-\mathcal{H}(\phi, s)}$ . Il est donc possible d'ajouter à l'équation des contributions de valeur moyenne nulle pour obtenir d'autres conditions suffisantes.

### 16.1.3 Évolution du hamiltonien

De l'équation (16.14), on déduit aussi l'évolution du hamiltonien (16.15). D'une part,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{H}(\phi, s) = \frac{d}{ds} \mathcal{V}(\phi, s) - \frac{1}{2} (\phi \Delta^{-1}(s) D(s) \Delta^{-1}(s) \phi).$$

Par ailleurs,

$$\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} - [\Delta^{-1}(s) \phi](x), \quad \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - [\Delta^{-1}(s)](x-y).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \int dx dy D(s; x-y) \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \\ &= \int dx dy \left[ D(s; x-y) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} - 2\phi(x) L(s; x-y) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] \\ & \quad + (\phi \Delta^{-1}(s) D(s) \Delta^{-1}(s) \phi), \end{aligned}$$

où l'opérateur  $L(s)$ , de noyau  $L(s; x-y)$ , est défini par

$$L(s) \equiv D(s) \Delta^{-1}(s) = \frac{d \ln \Delta(s)}{ds}. \quad (16.17)$$

En utilisant ces équations dans l'équation (16.14), on vérifie que les deux termes quadratiques en  $\phi$  se compensent. On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{H}(\phi, s) = & -\frac{1}{2} \int dx dy D(s; x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] \\ & - \int dx dy \phi(x) L(s; x-y) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} + \frac{1}{2} \text{tr} L(s). \end{aligned} \quad (16.18)$$

#### 16.1.4 Fonctionnelle connexe et solution formelle

Réciproquement, l'équation (16.14) est une équation différentielle du premier ordre en  $s$ . Si l'on se donne la valeur de la fonctionnelle  $\mathcal{V}(\phi, s)$  pour une valeur initiale  $s_0$  du paramètre  $s$ , sa solution est définie pour tout  $s \geq s_0$ . De la démonstration de l'équation (16.14), on s'attend à ce que la solution se déduise directement de l'équation (16.12) :

$$e^{-\mathcal{V}(\phi, s)} = (\det \mathcal{D}(s_0, s))^{-1/2} \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2} (\varphi \mathcal{K}(s_0, s) \varphi) - \mathcal{V}(\phi + \varphi, s_0) \right]. \quad (16.19)$$

Nous nous proposons de résoudre l'équation (16.14) pour le vérifier. Au passage, nous allons donner une autre démonstration de l'équation (16.14).

*Fonctionnelle connexe.* Nous changeons maintenant de variables  $\phi + \varphi \mapsto \varphi$  dans l'intégrale (16.19), ce qui donne

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{V}(\phi, s)} = & (\det \mathcal{D}(s_0, s))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} (\phi \mathcal{K}(s_0, s) \phi)} \\ & \times \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2} (\varphi \mathcal{K}(s_0, s) \varphi) - \mathcal{V}(\varphi, s_0) + (\phi \mathcal{K}(s_0, s) \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Cette expression montre que  $\mathcal{V}(\phi, s)$  est reliée à la fonctionnelle génératrice  $\mathcal{W}(H, s)$  des fonctions de corrélation connexes du champ  $\varphi$  :

$$\mathcal{V}(\phi, s) = \frac{1}{2} \ln \det \mathcal{D}(s_0, s) + \frac{1}{2} (\phi \mathcal{K}(s_0, s) \phi) - \mathcal{W}(\mathcal{K}\phi, s) \quad (16.21)$$

avec la notation  $[\mathcal{K}\phi](x) \equiv \int dy \mathcal{K}(s_0, s; x-y) \phi(y)$ , où

$$e^{\mathcal{W}(H, s)} = \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2} (\varphi \mathcal{K}(s_0, s) \varphi) - \mathcal{V}(\varphi, s_0) + \int dx H(x) \varphi(x) \right].$$

Cette représentation suggère une autre démonstration, algébriquement équivalente, de l'identité (16.14) mais qui en cache la signification profonde.

*Autre démonstration de l'équation (16.14).* Partons de la définition

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{W}(H, s)} = & \int [d\varphi] \exp \left[ -\mathcal{H}(\varphi, s) + \int dx H(x) \varphi(x) \right] \quad \text{avec} \\ \mathcal{H}(\varphi, s) = & \frac{1}{2} (\varphi \mathcal{K}(s) \varphi) + \mathcal{V}(\varphi), \end{aligned}$$

où nous supposons que le noyau  $\mathcal{K}$  dépend d'un paramètre  $s$  et est dérivable. Dérivant les deux membres par rapport à  $s$ , on obtient

$$\frac{d\mathcal{W}}{ds} e^{\mathcal{W}(H,s)} = -\frac{1}{2} \int [d\varphi] (\varphi d_s \mathcal{K}(s) \varphi) e^{-\mathcal{H}(\varphi,s) + \int dx H(x) \varphi(x)}.$$

En utilisant, à l'intérieur de l'intégrale, la remarque habituelle

$$\frac{\delta}{\delta H(x)} \exp \left[ \int dx H(x) \varphi(x) \right] = \varphi(x) \exp \left[ \int dx H(x) \varphi(x) \right], \quad (16.22)$$

on peut récrire cette équation

$$\frac{d\mathcal{W}}{ds} e^{\mathcal{W}(H,s)} = -\frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta}{\delta H(x)} \frac{d\mathcal{K}(s; x-y)}{ds} \frac{\delta}{\delta H(y)} e^{\mathcal{W}(H,s)},$$

et, donc, enfin

$$\frac{d\mathcal{W}}{ds} = -\frac{1}{2} \int dx dy \frac{d\mathcal{K}(s; x-y)}{ds} \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta H(x) \delta H(y)} + \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta H(x)} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta H(y)} \right]. \quad (16.23)$$

En utilisant la relation (16.21) avec  $\mathcal{K}(s) \equiv \mathcal{K}(s_0, s)$  pour exprimer  $\mathcal{W}$  en fonction de  $\mathcal{V}$ , après un peu d'algèbre on retrouve l'équation (16.14).

La fonctionnelle  $\mathcal{V}(\phi, s)$  se déduit donc directement du calcul des fonctions de corrélation connexes correspondant au propagateur  $\mathcal{D}(s_0, s)$  et à l'interaction initiale  $\mathcal{V}(\phi, s_0)$ .

Par ailleurs, cette démonstration suggère que l'équation (16.14) est en fait une équation de champ. Les calculs explicites de la section 16.3 et la démonstration des équations (16.14) et (16.28) de la section D.1 le confirment.

*Solution de l'équation (16.23).* Nous commençons par linéariser l'équation (16.23), en posant

$$\mathcal{Z}(H, s) = e^{\mathcal{W}(H,s)}.$$

L'équation devient

$$\frac{d\mathcal{Z}}{ds} = -\frac{1}{2} \int dx dy \frac{d\mathcal{K}(s; x-y)}{ds} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}}{\delta H(x) \delta H(y)},$$

généralisation fonctionnelle d'une équation de diffusion ou de Fokker-Planck dépendante du temps. En particulier, on vérifie que le noyau  $d\mathcal{K}/ds$  est négatif, de sorte que l'opérateur dérivée fonctionnelle du membre de droite est formellement négatif, comme dans une équation de diffusion habituelle.

On peut se demander pourquoi ne pas utiliser directement cette équation beaucoup plus simple car linéaire. La raison est la suivante : alors que  $\mathcal{V}(\phi, s)$  et donc  $\mathcal{W}(H, s)$ , sont par hypothèse des fonctionnelles locales du champ, ce n'est pas le cas de  $\mathcal{Z}(H, s)$  et donc, il devient difficile d'exprimer la condition de localité. On verra plus loin comment cette condition de localité intervient dans la solution perturbative de l'équation (16.32).

Pour résoudre l'équation, on utilise une transformation de Fourier fonctionnelle, en posant

$$\mathcal{Z}(H, s) = \int [d\varphi] e^{-\mathcal{H}(\varphi, s) + \int dx H(x)\varphi(x)}.$$

En utilisant la remarque (16.22), on transforme l'équation en une équation pour  $\mathcal{H}$  :

$$\frac{d\mathcal{H}}{ds} = \frac{1}{2} \int dx dy \frac{d\mathcal{K}(s; x-y)}{ds} \varphi(x)\varphi(y).$$

La solution est immédiate :

$$\mathcal{H}(\varphi, s) = \frac{1}{2}(\varphi\mathcal{K}(s)\varphi) + \mathcal{V}(\varphi),$$

où  $\mathcal{V}(\varphi)$  est indépendant de  $s$  et donc déterminé par la condition aux limites. Pour le choix  $\mathcal{K}(s) \equiv \mathcal{K}(s_0, s)$ , on trouve  $\mathcal{V}(\varphi) \equiv \mathcal{V}(\varphi, s_0)$ .

### 16.1.5 Fonctions de corrélation

En introduisant un champ classique supplémentaire  $\chi(x)$ , nous pouvons substituer

$$\mathcal{V}_1(\phi) \mapsto \mathcal{V}_1(\phi + \chi)$$

dans l'équation (16.8). L'identité (16.7) montre alors que le transformé de  $\mathcal{V}_1(\phi + \chi)$  est  $\mathcal{V}_2(\phi + \chi)$ . L'hamiltonien correspondant s'écrit

$$\mathcal{H}_1(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(\phi K_1 \phi) + \mathcal{V}_1(\phi + \chi).$$

Après le changement de variables  $\phi + \chi \mapsto \phi$  dans l'intégrale de champ, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\phi, \chi) &\mapsto \frac{1}{2}(\phi K_1 \phi) + \mathcal{V}_1(\phi) - (\phi K_1 \chi) + \frac{1}{2}(\chi K_1 \chi) \\ &= \mathcal{H}_1(\phi) - (\phi K_1 \chi) + \frac{1}{2}(\chi K_1 \chi). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une relation entre fonctions génératrices de fonctions de corrélation

$$\mathcal{Z}_1(\chi) = \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}_1(\phi) + (\phi K_1 \chi) - (\chi K_1 \chi)/2} = \left( \frac{\det \Delta_1}{\det \Delta_2} \right)^{1/2} \mathcal{Z}_2(\chi), \quad (16.24)$$

avec

$$\mathcal{Z}_2(\chi) = \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}_2(\phi) + (\phi K_2 \chi) - (\chi K_2 \chi)/2}.$$

Choisissant alors

$$K_1 = K(s), \quad K_2 = K(s_0),$$

et posant

$$\chi(x) = [\Delta(s_0)H](x),$$

nous vérifions que la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(H, s) = & \left( \frac{\det \Delta(s_0)}{\det \Delta(s)} \right)^{1/2} \int [d\phi] \exp \left[ -\mathcal{H}(\phi, s) + (\phi K(s) \Delta(s_0) H) \right. \\ & \left. - (H \Delta(s_0) (K(s) - K(s_0)) \Delta(s_0) H) / 2 \right] \end{aligned} \quad (16.25)$$

est indépendante de  $s$  et satisfait à la condition aux limites

$$\mathcal{Z}(H, s_0) = \int [d\phi] \exp \left[ -\mathcal{H}(\phi, s_0) + \int dx \phi(x) H(x) \right]. \quad (16.26)$$

### 16.1.6 Renormalisation du champ

Dans le but de trouver des solutions de points fixes des EGR, il est nécessaire d'introduire une renormalisation de champ. Pour démontrer les identités correspondantes, nous posons

$$\phi(x) = \sqrt{Z(s)} \phi'(x), \quad \mathcal{H}(\phi, s) = \mathcal{H}'(\phi', s),$$

où  $Z(s)$  est une fonction arbitraire dérivable. Alors, par dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{H}(\phi, s) &= \frac{d}{ds} \mathcal{H}'(\phi', s) + \int dx \frac{\delta \mathcal{H}'(\phi')}{\delta \phi'(x)} \frac{\partial \phi'(x)}{\partial s} \\ &= \frac{d}{ds} \mathcal{H}'(\phi', s) - \frac{1}{2} \eta(s) \int dx \phi'(x) \frac{\delta \mathcal{H}'(\phi')}{\delta \phi'(x)}, \end{aligned}$$

où nous avons défini

$$\eta(s) = \frac{d \ln Z(s)}{ds}. \quad (16.27)$$

En omettant maintenant les primes, nous déduisons de l'équation de flot (16.18) la nouvelle équation (omettant le terme constant)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{H}(\phi, s) = & -\frac{1}{2} \int dx dy D(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] \\ & - \int dx dy \phi(x) L(s; x-y) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} + \frac{1}{2} \eta(s) \int dx \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)}. \end{aligned} \quad (16.28)$$

## 16.2 Intégration sur les modes de grande impulsion et EGR

L'équivalence (16.8) ou l'équation (16.19) et l'équation (16.14), qui en est la conséquence, conduisent à des EGR. En effet, comme nous allons le vérifier, il est possible d'en déduire des équations qui correspondent à une intégration partielle sur les modes de grande impulsion du champ, ce qui,

dans l'espace direct, correspond à une intégration sur des degrés de liberté de courte distance.

Dans ce qui suit, nous prenons pour  $\Delta$  un propagateur critique. Une déviation possible à la théorie critique est incluse dans  $\mathcal{V}(\phi)$ . De plus, nous nous plaçons explicitement dans un espace à  $d$  dimensions.

*Paramètre de coupure et propagateur.* Dans le formalisme précédent, nous identifions maintenant  $s \equiv -\ln \Lambda$ , où  $\Lambda$  est le paramètre de coupure sur les grandes impulsions, qui représente aussi l'inverse de l'échelle microscopique. Une variation de  $s$  correspond alors à une dilatation du paramètre  $\Lambda$ .

Nous choisissons un propagateur régularisé  $\Delta_\Lambda$  de la forme

$$\Delta_\Lambda(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \tilde{\Delta}_\Lambda(k) \quad \text{avec} \quad \tilde{\Delta}_\Lambda(k) = \frac{C(k^2/\Lambda^2)}{k^2}. \quad (16.29)$$

La fonction  $C(t)$  est régulière pour  $t \geq 0$ , positive, décroissante, tend vers 1 pour  $t \rightarrow 0$  et tend vers zéro plus vite que toute puissance pour  $t \rightarrow \infty$ . Les composantes de Fourier du champ correspondant à des impulsions beaucoup plus grandes que  $\Lambda$  contribuent donc très peu à l'intégrale de champ.

Nous introduisons aussi la dérivée  $D_\Lambda(x)$  dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{D}_\Lambda(k) = -\Lambda \frac{\partial \tilde{\Delta}_\Lambda(k)}{\partial \Lambda} = \frac{2}{\Lambda^2} C'(k^2/\Lambda^2). \quad (16.30)$$

Soulignons une propriété essentielle de la fonction  $\tilde{D}_\Lambda$  : elle n'a pas de pôle à  $k = 0$  et n'est donc pas critique. La fonction

$$D_\Lambda(x) = -\Lambda \frac{\partial \Delta_\Lambda(x)}{\partial \Lambda} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \tilde{D}_\Lambda(k) = \Lambda^{d-2} D_{\Lambda=1}(\Lambda x), \quad (16.31)$$

décroît donc pour  $|x| \rightarrow \infty$  plus vite que toute puissance si  $C(t)$  est  $C^\infty$ , exponentiellement si  $C(t)$  est analytique. La même propriété est vérifiée par le propagateur

$$\mathcal{D}(\Lambda_0, \Lambda) = D_{\Lambda_0} - D_\Lambda \quad \text{avec} \quad \Lambda_0 > \Lambda,$$

dont l'inverse apparaît maintenant dans l'intégrale de champ (16.19).

### 16.2.1 EGR

Avec ces hypothèses et définitions, l'équation (16.16) devient

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{V}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right], \quad (16.32)$$

où la transformée de Fourier de  $D_\Lambda(x)$  est donnée par l'équation (16.30) :

$$\tilde{D}_\Lambda(k) = -\Lambda \frac{\partial \tilde{\Delta}_\Lambda(k)}{\partial \Lambda} = \frac{2}{\Lambda^2} C'(k^2/\Lambda^2). \quad (16.33)$$

L'équation (16.32) étant exacte, on parle ici aussi de *groupe de renormalisation exact*.

*Remarque fondamentale.* Comme  $D_\Lambda(x)$  est une fonction, au moins, à décroissance rapide, si initialement  $\mathcal{V}(\phi)$  est local, il le reste comme cela apparaîtra plus clairement quand nous développerons cette équation en puissances de  $\phi$ . De même, dans la forme intégrée (16.19), la propriété de décroissance de  $\mathcal{D}(\Lambda_0, \Lambda)$  entraîne que  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  ne contient pas de singularités de longue distance.

*Autres remarques.*

- (i) Les équations (16.32) et (16.34) se distinguent de l'équation générale (9.23) introduite au chapitre 9 par la propriété que le paramètre d'échelle  $\Lambda$  y figure explicitement à travers la fonction  $D_\Lambda$ . Nous allons éliminer plus loin cette dépendance explicite.
- (ii) Pour étudier l'existence de points fixes, il faut se donner une interaction initiale critique  $\mathcal{V}_0(\phi)$  à l'échelle  $\Lambda_0$  et utiliser l'équation (16.32) pour calculer l'interaction effective  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  à l'échelle  $\Lambda \ll \Lambda_0$ . Un point fixe est défini par la propriété que  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$ , après une renormalisation du champ  $\phi$  convenablement choisie (ce qui conduit à l'équation (16.28)), tend vers une limite.
- (iii) Comme l'équation (16.32) peut aussi être démontrée à partir des équations de champ quantiques (*cf.* appendice D.1), dans cette formulation, l'intégration partielle sur les modes de grande impulsion n'implique pas de perte d'information à la différence de ce qui se passerait sur un réseau dans le cas d'une intégration sur les modes de courte distance.

## 16.2.2 Représentation de Fourier

En termes des composantes de Fourier  $\tilde{\phi}(k)$  du champ,

$$\phi(x) = \int d^d k \, e^{ikx} \tilde{\phi}(k) \Leftrightarrow \tilde{\phi}(k) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \phi(x),$$

la dérivée fonctionnelle devient (dérivée en chaîne)

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(k)}.$$

Introduisant cette représentation dans l'équation (16.32), on trouve

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{V}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(k) \delta \tilde{\phi}(-k)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(-k)} \right]. \quad (16.34)$$

Dans cette équation, la localité se traduit par la régularité des composantes de Fourier. Si les coefficients du développement de  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  en puissances de  $\tilde{\phi}$ ,

après factorisation de la fonction  $\delta$ , sont des fonctions régulières pour une valeur initiale de  $\Lambda = \Lambda_0$ , ils le restent pour  $\Lambda < \Lambda_0$  parce que  $\tilde{D}_\Lambda(k)$  est une fonction régulière de  $k$ .

Enfin, l'équation (16.18) pour l'hamiltonien complet, exprimée en termes des composantes de Fourier,

$$\mathcal{H}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{2}(2\pi)^d \int d^d k \tilde{\phi}(k) \tilde{\Delta}_\Lambda^{-1}(k) \tilde{\phi}(-k) + \mathcal{V}(\phi, \Lambda), \quad (16.35)$$

prend la forme (omettant le terme indépendant de  $\phi$ )

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{H}(\phi, \Lambda) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(k) \delta \tilde{\phi}(-k)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(-k)} \right] \\ &\quad + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{L}_\Lambda(k) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \tilde{\phi}(k), \end{aligned} \quad (16.36)$$

avec (équation (16.17))

$$\tilde{L}_\Lambda(k) = \tilde{D}_\Lambda(k) / \tilde{\Delta}_\Lambda(k). \quad (16.37)$$

Dans l'équation (16.36), nous avons implicitement soustrait à  $\mathcal{H}(\phi, \Lambda)$  et aux équations leurs valeurs à  $\phi = 0$ .

### 16.2.3 Développement en puissances du champ

Nous notons  $V^{(n)}$  et  $\tilde{V}^{(n)}$  respectivement, les coefficients du développement de  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  en puissances de  $\phi(x)$  et de  $\tilde{\phi}(p)$ , la transformée de Fourier du champ :

$$\mathcal{V}(\phi, \Lambda) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (16.38)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int \prod_i d^d p_i \tilde{\phi}(p_i) (2\pi)^d \delta(p_1 + \dots + p_n) \\ &\quad \times \tilde{V}^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (16.39)$$

L'équation (16.34) peut alors être exprimée en terme de ces composantes :

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} V^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \left[ V^{(n+2)}(x_1, x_2, \dots, x_n, x, y) \right. \\ &\quad \left. - \sum_I V^{(l+1)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}, x) V^{(n-l+1)}(x_{i_{l+1}}, \dots, x_{i_n}, y) \right], \end{aligned} \quad (16.40)$$

où l'ensemble  $I \equiv \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  parcourt tous les sous-ensembles distincts de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

En représentation de Fourier,

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{V}^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k) - \frac{1}{2} \sum_I \tilde{D}_\Lambda(p_0) \tilde{V}^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0) \tilde{V}^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0), \quad (16.41)$$

où l'impulsion  $p_0$  est déterminée par la conservation de l'impulsion totale.

Soulignons qu'une conséquence de ces équations est que, même si l'interaction initiale à l'échelle initiale  $\Lambda_0$  est proportionnelle à  $u\phi^4$ , l'intégration des EGR engendre une interaction locale générale car toutes les fonctions  $\tilde{V}^{(n)}$  sont couplées. Toutefois, dans l'esprit des méthodes perturbatives de la théorie des champs, il est possible de résoudre l'équation (16.32) dans un développement en puissances de  $u$  avec l'Ansatz que les termes de  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  quadratiques et quartiques en  $\phi$  sont d'ordre  $u$  et le terme général de degré  $2n$  d'ordre  $u^{n-1}$ . En section 16.3, nous calculons explicitement les premiers termes.

#### 16.2.4 Fonctions de corrélation

L'addition d'un terme de champ externe à l'interaction,

$$\mathcal{V}(\phi, \Lambda_0) \mapsto \mathcal{V}(\phi, \Lambda_0) - \int d^d x H(x) \phi(x),$$

permet d'engendrer les fonctions de corrélation. Toutefois, l'équation (16.32) montre que  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  devient alors, en général, une fonctionnelle compliquée du champ externe  $H(x)$ .

*Champ externe particulier.* Une première solution à ce problème est la suivante : on prend un champ externe  $H$  dont les composantes de Fourier  $\tilde{H}(k)$  s'annulent pour  $k^2 \geq \Lambda^2$ , ainsi qu'une fonction  $\tilde{D}_\Lambda(k)$  qui s'annule identiquement pour  $k^2 \leq \Lambda^2$ . Ceci implique que  $C'(t)$  s'annule identiquement pour  $t \leq 1$ . Alors,  $\int d^d x H(x) \phi(x)$  ne contribue pas au membre de droite de l'équation (16.32).

Cependant, les transformations de groupe de renormalisation sont alors telles que les fonctions de corrélation, correspondant à des hamiltoniens  $\mathcal{H}(\phi)$  associés à des échelles  $\Lambda$  différentes, ne coïncident que quand toutes les impulsions sont inférieures à l'échelle  $\Lambda$  la plus petite. Les différences entre ces fonctions de corrélation sont des fonctions indéfiniment différentiables et donc, après transformation de Fourier, des fonctions décroissant, à grande distance, plus vite que toute puissance dans une dilatation des variables d'espace, ainsi qu'il a été supposé dans l'équation (9.9).

De plus, la fonction  $C(t)$  ne peut pas être analytique mais seulement indéfiniment dérivable, ce qui affecte le domaine critique  $\xi < \infty$ , et la définition de l'universalité y devient plus subtile. Enfin, de telles fonctions se prêtent mal à des calculs explicites.

*Modification des EGR.* Il est aussi possible de choisir des fonctions  $C(t)$  de type analytique et d'étudier les équations ainsi obtenues. Le problème évident est que si nous ajoutons un terme linéaire en  $\phi$ , par exemple dans l'équation (16.36), le membre de droite va impliquer une contribution de la forme

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \tilde{H}(-k).$$

Par itération, l'équation va engendrer une fonctionnelle générale de  $H, \phi$  paire en  $\{H, \phi\} \mapsto \{-H, -\phi\}$ .

Cependant, nous remarquons que ce terme est proportionnel à une dérivée fonctionnelle de  $\mathcal{H}$  dont la valeur moyenne avec la mesure  $e^{-\mathcal{H}(\phi)}$  est nulle. Cela suggère de modifier l'équation en ajoutant une contribution de valeur moyenne nulle. Nous substituons alors

$$\mathcal{H}(\phi) \mapsto \mathcal{H}(\phi, H) = \mathcal{H}(\phi) - (\phi \zeta H) + \frac{1}{2}(H U H), \quad (16.42)$$

où  $\zeta$  et  $U$  sont deux noyaux que nous allons déterminer. De la relation entre dérivées

$$\frac{\delta \mathcal{H}(\phi, H)}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(x)} - [\zeta H](x),$$

on déduit

$$\begin{aligned} & \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \left[ \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, H)}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, H)}{\delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(y)} \right] \\ &= -2 \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) [\zeta H](x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(y)} + (H \zeta D_\Lambda \zeta H), \\ & \int d^d x d^d y L_\Lambda(x-y) \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, H)}{\delta \phi(y)} \\ &= \int d^d x d^d y L_\Lambda(x-y) \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(y)} - (\phi L_\Lambda \zeta H). \end{aligned}$$

Pour éliminer le terme additionnel dépendant de  $\mathcal{H}$ , on utilise

$$\left\langle \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, H)}{\delta \phi(y)} \right\rangle_{e^{-\mathcal{H}(\phi, H)}} = 0 = \left\langle \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(y)} - \int d^d z \zeta(y-z) H(z) \right\rangle_{e^{-\mathcal{H}(\phi, H)}}.$$

On voit que la forme (16.42) est stable si

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} [-(\phi \zeta H) + \frac{1}{2}(H U H)] = (H \zeta D_\Lambda \zeta H) - \frac{1}{2}(H \zeta D_\Lambda \zeta H) - (\phi L_\Lambda \zeta H).$$

On en déduit les deux équations, en représentation de Fourier,

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{\zeta}(k, \Lambda) &= \tilde{L}_\Lambda(k) \tilde{\zeta}(k, \Lambda), \\ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{U}(k, \Lambda) &= \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{\zeta}^2(k, \Lambda), \end{aligned} \quad (16.43)$$

avec les conditions aux limites

$$\tilde{\zeta}(k, \Lambda_0) = 1, \quad \tilde{U}(k, \Lambda_0) = 0.$$

Utilisant les définitions (16.30) et (16.37), on trouve la solution de la première équation :

$$\tilde{\zeta}(k, \Lambda) = \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k) / \tilde{\Delta}_{\Lambda}(k),$$

qui est une fonction régulière de  $k$  à  $k = 0$ . Enfin,

$$\tilde{U}(k, \Lambda) = \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}^2(k) / \tilde{\Delta}_{\Lambda}(k) - \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k) = \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}^2(k) [K_{\Lambda}(k) - K_{\Lambda_0}(k)],$$

est aussi une fonction régulière de  $k$  à  $k = 0$ .

On vérifie que ces résultats sont cohérents avec l'identité (16.25).

Le facteur  $\zeta$  correspond à une renormalisation du champ, mais qui n'est pas une constante puisque  $\tilde{\zeta}$  dépend de  $k$ . Cependant, comme la fonction  $\tilde{\zeta}$  est régulière à  $k = 0$ , cette renormalisation n'affecte pas le comportement dominant à longue distance. De même, la fonction  $U$  est une addition à la fonction à deux points connexe. De nouveau, comme  $\tilde{U}$  est une fonction régulière, cette addition n'affecte pas le comportement à longue distance.

En présence d'une renormalisation du champ, un terme s'ajoute à l'équation (16.43) :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{\zeta}(k, \Lambda) = -\Lambda \frac{\partial \ln \tilde{\Delta}_{\Lambda}(k)}{\partial \Lambda} \tilde{\zeta}(k, \Lambda) + \frac{1}{2} \eta(\Lambda) \tilde{\zeta}(k, \Lambda).$$

Nous rappelons ici que la constante  $\eta$  dépend de  $\Lambda$  à travers l'hamiltonien. En terme de la fonction  $Z(\Lambda)$  solution de

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} Z(\Lambda) = \eta(\Lambda) Z(\Lambda), \quad Z(\Lambda_0) = 1,$$

et donc

$$\ln Z(\Lambda) = \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} \eta(\Lambda') \frac{d\Lambda'}{\Lambda'},$$

la solution peut s'écrire

$$\tilde{\zeta}(k, \Lambda) = \sqrt{Z(\Lambda)} \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k) / \tilde{\Delta}_{\Lambda}(k). \quad (16.44)$$

### 16.3 Solution perturbative : théorie $\phi^4$

Nous montrons d'abord ici comment les équations (16.40) ou (16.41) peuvent être résolues de façon perturbative. Nous prenons l'exemple de la théorie  $\phi^4$  et nous allons poursuivre le calcul jusqu'à l'ordre  $u^2$  car l'algèbre de ces calculs nous sera utile plus loin.

*Conditions aux limites.* Nous supposons que l'hamiltonien à l'échelle  $\Lambda_0$  est de la forme

$$\mathcal{V}(\phi, \Lambda_0) = \frac{1}{4!} u \int d^d x \phi^4(x) + \frac{1}{2!} r_c(\Lambda_0, u) \int d^d x \phi^2(x),$$

où la constante  $r_c(\Lambda_0, u)$  est ajustée pour que la théorie initiale à l'échelle  $\Lambda_0$  soit critique :

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p=0, \Lambda_0) = 0.$$

En particulier, un calcul perturbatif direct à l'ordre  $u^2$  conduit à

$$\begin{aligned} r_c(\Lambda_0, u) = & -\frac{u}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k) \\ & + \frac{u^2}{6} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k_1) \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k_2) \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k_1 + k_2) + O(u^3). \end{aligned} \quad (16.45)$$

Nous prenons comme Ansatz à l'ordre  $u$  :

$$\mathcal{V}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{4!} u \int d^d x \phi^4(x) + \frac{1}{2!} r_{c1}(\Lambda) u \int d^d x \phi^2(x) + O(u^2),$$

et utilisons les EGR sous la forme (16.40).

L'équation pour le coefficient de  $\phi\phi$  à l'ordre  $u$  est compatible avec cet Ansatz :

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} r_{c1}(\Lambda) = \frac{1}{2} D_{\Lambda}(0)$$

En utilisant (16.30) et la condition de criticalité à  $\Lambda = \Lambda_0$ , on peut l'intégrer :

$$r_{c1}(\Lambda) = -\frac{1}{2} \Delta_{\Lambda}(0),$$

et cette solution correspond bien à la condition de criticalité à l'échelle  $\Lambda$ .

L'équation satisfaite par  $V^{(4)}$ , à l'ordre  $u^2$ , fait intervenir le terme d'ordre  $u^2$  de  $V^{(6)}$  qui s'exprime uniquement en terme de  $V^{(4)}$  à l'ordre  $u$ . En effet ( $\mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2, \dots\}$ )

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V^{(6)}(\mathbf{x}, \Lambda) = & -u^2 \frac{6!}{2(3!)^2} \int d^d x d^d y D_{\Lambda}(x-y) \phi^3(x) \phi^3(y) \\ & + O(u^3). \end{aligned}$$

*Le vertex à six points.* En composantes de Fourier, en notant  $\tilde{V}_2^{(6)}$  le coefficient de  $u^2$ , on trouve

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}_2^{(6)}(p_1, \dots, p_6) = - \sum_I \tilde{D}_{\Lambda}(p_1 + p_{i_1} + p_{i_2}),$$

où  $I$  représente les 10 sous-ensembles appartenant à  $\{2, 3, \dots, 6\}$ . Pour intégrer cette équation, nous introduisons la fonction

$$\mathcal{D}_\Lambda(x) = \Delta_{\Lambda_0}(x) - \Delta_\Lambda(x). \quad (16.46)$$

Cette fonction satisfait

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{D}_\Lambda = D_\Lambda, \quad \mathcal{D}_{\Lambda_0} = 0.$$

La propriété essentielle de sa transformée de Fourier

$$\tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(k) = \frac{1}{k^2} [C(k^2/\Lambda_0^2) - C(k^2/\Lambda^2)],$$

est d'être régulière à  $k = 0$ .

L'intégration alors est simple et donne

$$\begin{aligned} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V^{(6)}(\mathbf{x}, \Lambda) &= -\frac{6!}{2(3!)^2} u^2 \int d^d x d^d y \mathcal{D}_\Lambda(x-y) \phi^3(x) \phi^3(y) \\ &\quad + O(u^3). \end{aligned}$$

En représentation de Fourier,

$$\tilde{V}_2^{(6)}(p_i, \Lambda) = - \sum_I \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p_1 + p_{i_1} + p_{i_2}).$$

La fonction  $\tilde{V}^{(6)}$  est donc aussi régulière à  $p_1 = \dots = p_6 = 0$  et l'hamiltonien reste bien local.

*Le vertex à quatre points.* Ce résultat permet d'explicitier l'équation satisfaite par  $V_2^{(4)}$ , le coefficient de  $V^{(4)}$  à l'ordre  $u^2$  :

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \frac{1}{4!} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V_2^{(4)}(\mathbf{x}, \Lambda) \\ = - \int d^d x d^d y \mathcal{D}_\Lambda(x-y) \left[ \frac{1}{8} D_\Lambda(x-y) \phi^2(x) \phi^2(y) + \frac{1}{12} D_\Lambda(0) \phi(x) \phi^3(y) \right] \\ + \frac{1}{12} \Delta_\Lambda(0) \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \phi(x) \phi^3(y), \end{aligned}$$

où, en représentation de Fourier,

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}_2^{(4)}(\mathbf{p}, \Lambda) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{V}_2^{(6)}(p_1, p_2, \dots, p_4, k, -k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta_\Lambda(0) \sum_i \tilde{D}_\Lambda(p_i) \\ &= - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \left[ \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(k + p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i \left[ -D_\Lambda(0) \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p_i) + \Delta_\Lambda(0) \tilde{D}_\Lambda(p_i) \right]. \end{aligned}$$

De nouveau, l'intégration est simple et donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{4!} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V_2^{(4)}(\mathbf{x}, \Lambda) &= -\frac{1}{16} \int d^d x d^d y \mathcal{D}_\Lambda^2(x-y) \phi^2(x) \phi^2(y) \\ &\quad + \frac{1}{12} \Delta_\Lambda(0) \int d^d x d^d y \mathcal{D}_\Lambda(x-y) \phi(x) \phi^3(y). \end{aligned}$$

En représentation de Fourier,

$$\tilde{V}_2^{(4)}(p_i, \Lambda) = -\frac{1}{2} [\bar{B}_\Lambda(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes}] + \frac{1}{2} \Delta_\Lambda(0) \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p_i),$$

avec

$$\bar{B}_\Lambda(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(k) \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p-k).$$

On vérifie que dans la limite  $\Lambda_0/\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{V}^{(4)}(p_i, \Lambda)$  diverge logarithmiquement pour  $d = 4$ , ce qui correspond à la renormalisation du coefficient de  $\phi^4$  à l'ordre d'une boucle.

Le coefficient  $\tilde{V}^{(2)}$  à l'ordre  $u^2$ . Terminons cet exercice en calculant le coefficient d'ordre  $u^2$  de  $\tilde{V}^{(2)}(p, \Lambda)$ . Il satisfait l'équation

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}_2^{(2)}(p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{V}_2^{(4)}(p, -p, k, -k) - \frac{1}{4} \tilde{D}_\Lambda(p) \Delta_\Lambda^2(p).$$

La valeur à  $p = 0$  donne la condition de criticalité :

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}_2^{(2)}(0) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{V}_2^{(4)}(0, 0, k, -k) - \frac{1}{4} \tilde{D}_\Lambda(0) \Delta_\Lambda^2(p).$$

Nous connaissons la valeur de  $\tilde{V}^{(2)}(0) = r_c(\Lambda, u)$  *a priori* grâce au développement perturbatif ordinaire. Il y a d'une part la contribution (16.45), à l'échelle  $\Lambda$ , à laquelle il faut ajouter les contributions provenant de  $V_2^{(4)}$  et  $V_2^{(6)}$ . On trouve donc

$$\begin{aligned} r_{c2}(\Lambda) &= \frac{1}{6} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_2) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1 + k_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_\Lambda(k) \tilde{V}_2^{(4)}(0, 0, k, -k) \\ &\quad - \frac{1}{8} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{V}_2^{(6)}(0, 0, k_1, -k_1, k_2, -k_2) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_2). \end{aligned} \quad (16.47)$$

On vérifie que  $r_{c2}(\Lambda)$  satisfait bien l'équation de flot. L'expression peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} r_{c2}(\Lambda) &= \frac{1}{6} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \left[ -\tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(k_1) \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(k_2) \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(k_1 + k_2) + \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_2) \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1 + k_2) \right] - \frac{1}{4} \Delta_\Lambda^2(0) \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(0) + \frac{1}{4} \Delta_\Lambda(0) \bar{B}_\Lambda(0). \end{aligned} \quad (16.48)$$

Enfin, cette condition au limite détermine le vertex à deux points

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2^{(2)}(p) = & \frac{1}{6} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \left[ -\tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(k_1) \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(k_2) \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p + k_1 + k_2) + \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_2) \right. \\ & \left. \times \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1 + k_2) \right] - \frac{1}{4} \Delta_\Lambda^2(0) \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p) + \frac{1}{4} \Delta_\Lambda(0) \bar{B}_\Lambda(0). \end{aligned} \quad (16.49)$$

*Remarque.* Il résulte de l'équation (16.19) en section 16.1.4, que les mêmes résultats peuvent être obtenus en calculant perturbativement des fonctions de corrélation connexes avec l'interaction  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda_0)$  et le propagateur  $\mathcal{D}(\Lambda_0, \Lambda)$ . L'utilité du calcul précédent est de montrer plus explicitement comment ces EGR exactes, avec les conditions aux limites à l'échelle initiale, déterminent la fonctionnelle  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$ . De plus, on vérifie que si la théorie est critique pour  $\Lambda_0$ , elle le reste pour tout  $\Lambda$ .

## 16.4 EGR : forme standard

Après une renormalisation du champ, nécessaire pour pouvoir atteindre des points fixes non gaussiens, l'EGR prend la forme (16.28) avec  $s = -\ln \Lambda$  :

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \mathcal{H}(\phi, \Lambda) = & \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x - y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] \\ & + \int d^d x d^d y \phi(x) L_\Lambda(x - y) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} + \frac{\eta}{2} \int d^d x \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)}. \end{aligned} \quad (16.50)$$

La fonction  $\eta$  est *a priori* arbitraire avec, cependant, la restriction, comme nous l'avons expliqué au chapitre 9, que la fonction  $\eta$  ne dépende de  $\Lambda$  qu'à travers  $\mathcal{H}(\phi, \Lambda)$ . Elle doit être ajustée pour garantir l'existence des points fixes.

L'équation (16.50) n'a pas une forme markovienne stationnaire parce que  $D_\Lambda$  et  $L_\Lambda$  dépendent explicitement de  $\Lambda$  :

$$L_\Lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{ikx} \tilde{L}_\Lambda(k) = \Lambda^d L_1(x), \quad D_\Lambda(x) = \Lambda^{d-2} D_1(\Lambda x),$$

où  $\tilde{L}_\Lambda(k)$  est défini par l'équation (16.37) et nous avons utilisé les relations (16.31). Pour éliminer cette dépendance, nous faisons partout une dilatation des variables de position de la forme

$$x \mapsto x/\Lambda.$$

Ceci a comme effet de substituer dans l'hamiltonien,

$$\int d^d x \phi(x) \mapsto \int d^d x \Lambda^{-d} \phi(x/\Lambda), \quad \mathcal{H}^{(n)}(x_i, \Lambda) \mapsto \mathcal{H}^{(n)}(x_i/\Lambda, \Lambda).$$

Nous définissons alors,

$$\phi(x) = \Lambda^{(d-2)/2} \phi'(\Lambda x), \quad \mathcal{H}^{(n)}(x_i, \Lambda) = \Lambda^{n(d+2)/2} \mathcal{H}'^{(n)}(\Lambda x_i, \Lambda).$$

La transformation de  $\phi$  est simplement la renormalisation gaussienne.

Puisque  $\Lambda^{(d-2)/2} \Lambda^{(d+2)/2} = \Lambda^d$ , ce changement compense le facteur  $\Lambda^{-d}$  du changement de variable initial sur  $x$  quand le coefficient de  $\mathcal{H}^{(n)}$  est homogène à  $\phi^n$ . En conséquence,

$$\begin{aligned} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) &\mapsto \Lambda^{-2-d} \int d^d x d^d y D_1(x-y), \\ \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] &\mapsto \Lambda^{2+d} \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi'(x) \delta \phi'(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi'(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi'(y)} \right], \\ \int d^d x d^d y L_\Lambda(x-y) \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} &\mapsto \int \Lambda^{-2d} d^d x d^d y \Lambda^d L_1(x-y) \Lambda^d \phi'(x) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi'(y)} \\ \int d^d x \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} &\mapsto \int \Lambda^{-d} d^d x \Lambda^{(d-2)/2} \phi'(x) \Lambda^{(d+2)/2} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi'(x)}. \end{aligned}$$

On vérifie que toutes les puissances de  $\Lambda$  se compensent.

Enfin, la relation entre  $\phi$  et  $\phi'$  peut aussi s'écrire

$$\phi'(x) = \Lambda^{(2-d)/2} \phi(x/\Lambda),$$

de sorte que le membre de droite devient

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_\phi &= \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\phi'} + \int d^d x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi'(x)} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_\phi \phi'(x) \\ &= \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\phi'} + \int d^d x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi'(x)} \left( \frac{1}{2}(2-d) - \sum_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \phi'(x), \end{aligned}$$

où nous avons noté  $x^\mu$  les  $d$  coordonnées de  $x$ .

Dans ce qui suit nous omettons les primes. Par ailleurs, nous introduisons le paramètre de dilatation  $\lambda = \Lambda_0/\Lambda$  qui relie l'échelle initiale  $\Lambda_0$  et l'échelle courante  $\Lambda$  et donc,

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} = -\lambda \frac{d}{d\lambda}.$$

Alors, les EGR prennent la forme standard (9.23) :

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}(\phi, \lambda) &= -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] \\ &\quad - \int d^d x \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, \lambda)}{\delta \phi(x)} \left[ \frac{1}{2}(d-2+\eta) + \sum_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \phi(x) \\ &\quad - \int d^d x d^d y L(x-y) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, \lambda)}{\delta \phi(x)} \phi(y). \end{aligned} \tag{16.51}$$

*EGR en composantes.* En développant l'équation (16.51) en puissances de  $\phi$ , on trouve des équations pour les composantes sous une forme standard. Pour  $n \neq 2$  ( $D_1 \equiv D$ ),

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}^{(n)}(x_i; \lambda) &= \left( \frac{1}{2} n(d+2-\eta) + \sum_{j,\mu} x_j^\mu \frac{\partial}{\partial x_j^\mu} \right) \mathcal{H}^{(n)}(x_i; \lambda) \\ &- \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \left[ \mathcal{H}^{(n+2)}(x_1, x_2, \dots, x_n, x, y; \lambda) \right. \\ &\left. - \sum_I \mathcal{H}^{(l+1)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}, x; \lambda) \mathcal{H}^{(n-l+1)}(x_{i_{l+1}}, \dots, x_{i_n}, y; \lambda) \right]. \quad (16.52) \end{aligned}$$

En représentation de Fourier, ces équations prennent la forme

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; \lambda) &= \left( d - \frac{1}{2} n(d-2+\eta) - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; \lambda) \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k; \lambda) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_I \tilde{D}(p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0; \lambda) \tilde{\mathcal{H}}^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0). \quad (16.53) \end{aligned}$$

Pour  $n = 2$ , il faut distinguer les composantes de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{V}$ . Dans les deux cas, on trouve un terme supplémentaire dans l'équation :

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}^{(2)}(x_1; \lambda) &= \left( d + 2 - \eta + \sum_{\mu} x_1^\mu \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} \right) \mathcal{H}^{(2)}(x_1; \lambda) \\ &- \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \left[ \mathcal{H}^{(4)}(x_1, 0, , x, y; \lambda) - 2\mathcal{H}^{(2)}(x-x_1; \lambda) \mathcal{H}^{(2)}(y; \lambda) \right] \\ &- 2 \int d^d y L(x_1-y) \mathcal{H}^{(2)}(y; \lambda). \quad (16.54) \end{aligned}$$

En représentation de Fourier,

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p; \lambda) &= \left( 2 - \eta - \sum_{\mu} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p; \lambda) - 2\tilde{L}(p) \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p; \lambda) \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; \lambda) + \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p; \lambda) \right)^2, \quad (16.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; \lambda) &= \left( 2 - \eta - \sum_{\mu} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; \lambda) - \eta \tilde{\Delta}^{-1}(p) \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; \lambda) + \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; \lambda) \right)^2. \quad (16.56) \end{aligned}$$

## 16.5 Dimension 4

Nous avons établi des EGR fonctionnelles générales. Nous les appliquons maintenant, à l'exemple de la théorie  $\phi^4$ , dans un cadre perturbatif. Notre but est de montrer explicitement de quelle manière le groupe de renormalisation fonctionnel permet de retrouver les résultats obtenus au chapitre 10, dans le cadre du groupe de renormalisation perturbatif asymptotique.

Nous commençons par la dimension 4, où le point fixe gaussien est marginalement stable. Les hypothèses perturbatives et les calculs ont beaucoup de points communs avec ceux de la section 16.3.

### 16.5.1 Conditions de renormalisation. Fonctions $\beta$ et $\eta$

*Conditions de renormalisation.* En dimension 4, une théorie non triviale peut être obtenue comme une fonction du paramètre  $g(\lambda)$  défini, par exemple, comme la valeur de  $\tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p_i, \lambda)$  à  $p_1 = \dots = p_4 = 0$  :

$$g(\lambda) \equiv \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p_i = 0, \lambda). \quad (16.57)$$

Toutes les autres interactions sont alors déterminées perturbativement comme fonction de  $g$ , en les supposant au moins d'ordre  $g^2$ , en résolvant perturbativement les autres équations de flot, avec des conditions aux limites appropriées, par la méthode expliquée en fin de section 9.7.2 et comme nous l'avons fait en section 16.3. On supprime ainsi toutes les corrections dues aux opérateurs inessentiels, ne conservant que l'effet de l'opérateur marginal. De cette manière, toutes les interactions deviennent des fonctions implicites de  $\lambda$  à travers  $g(\lambda)$  qui satisfait une équation unique (équation (9.62)) :

$$\lambda \frac{dg}{d\lambda} = -\beta(g(\lambda)) \quad (16.58)$$

avec, comme nous l'avons déjà vu,  $\beta(g) = O(g^2)$ .

La fonction  $\eta(g)$  est alors déterminée par la condition

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p; g) \right|_{p=0} = 1 \Rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial p^2} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) \right|_{p=0} = 0, \quad (16.59)$$

qui supprime l'opérateur redondant qui correspond à un changement de normalisation du champ.

Les deux conditions (16.57) et (16.59) jouent le rôle des conditions de renormalisation dans la théorie de la renormalisation habituelle (*cf.* section 13.1.2).

*EGR : autre forme.* Dans l'équation (16.53), nous exprimons la dérivée par rapport à  $\ln \lambda$  en fonction de la dérivée par rapport à  $g$  et de la fonction  $\beta$ , en utilisant la définition (16.58),

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} = -\beta(g) \frac{d}{dg}.$$

Pour  $d = 4$ , l'équation s'écrit ( $n \neq 2$ )

$$\begin{aligned} \beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; g) &= \left( n - 4 + \frac{1}{2} n \eta(g) + \sum_{j, \mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; g) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k; g) \\ &- \frac{1}{2} \sum_I \tilde{D}(p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0; g) \\ &\times \tilde{\mathcal{H}}^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0; g). \end{aligned} \quad (16.60)$$

Dans le cas  $n = 2$ , l'équation satisfaite par  $\mathcal{V}^{(2)}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) &= \left( -2 + \eta(g) + \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) + \eta(g) \tilde{\Delta}^{-1}(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; g) - \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) \right)^2. \end{aligned} \quad (16.61)$$

Les fonctions  $\beta$  et  $\eta$ . En utilisant la condition (16.57) dans l'équation (16.60) pour  $n = 4$ ,  $p_i = 0$ , on trouve une équation pour la fonction  $\beta(g)$  :

$$\beta(g) = 2g\eta(g) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(6)}(0, 0, 0, 0, k, -k; g) - 4g \tilde{D}(0) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(0; g). \quad (16.62)$$

L'équation (16.61) se résout ensuite récursivement sous la forme

$$\begin{aligned} \left( 2 - \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) &= -\beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) - \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) \right)^2 \\ &+ \eta(g) \left( \tilde{\Delta}^{-1}(p) + \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; g). \end{aligned} \quad (16.63)$$

Pour  $p = 0$ , on obtient la condition de criticalité qui détermine

$$r_c(g) = \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(0; g) = \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(0; g).$$

Cependant, notons aussi que si le membre de droite contient un terme en  $p^2$  dans son développement en séries de Taylor à  $p = 0$ , la solution de l'équation ne peut pas être régulière. En effet, l'équation

$$\left( 2 - \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) f(p^2) = 2(1 - p^2 f'(p^2)) = p^2$$

n'a que des solutions singulières de la forme

$$f(p^2) = -p^2 \ln p + \text{const. } p^2.$$

Or nous ne cherchons que des solutions régulières. En exprimant alors que la dérivée par rapport à  $p^2$  du membre de droite de l'équation (16.63) s'annule, on obtient donc la condition

$$\eta(g) = 2C''(0)r_c^2(g) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; g) \Big|_{p=0}, \quad (16.64)$$

qui détermine  $\eta(g)$ . Ceci démontre, dans ce contexte, la nécessité de la fonction  $\eta(g)$  et donc de la renormalisation du champ  $\phi$ .

### 16.5.2 Solution des EGR à l'ordre $g$

Comme  $\eta(g)$  est au moins d'ordre  $g$  (en fait il est d'ordre  $g^2$ ) et que nous avons supposé  $\tilde{\mathcal{H}}^{(6)}$  d'ordre  $g^2$ , l'équation (16.62) confirme que  $\beta(g)$  est d'ordre  $g^2$ .

À l'ordre  $g$ , comme  $\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g)$  est d'ordre  $g$ , le membre de gauche de l'équation (16.61) est négligeable. L'équation se réduit à

$$\left(2 - \sum_{\mu} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) = \frac{1}{2} g D(0) + \eta \tilde{\Delta}^{-1}(p).$$

Le membre de gauche n'a pas de terme en  $p^2$  dans son développement à  $p = 0$  et donc,  $\eta$  s'annule à l'ordre  $g$ . À l'ordre  $g$ , l'équation (16.61) se réduit donc à

$$\left(2 - \sum_{\mu} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) = \frac{1}{2} g D(0).$$

Nous notons que l'équation homogène a des solutions régulières proportionnelles à  $p^2$  correspondant à l'opérateur redondant qui change la normalisation du champ. La solution générale est donc la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière constante. La condition (16.59) élimine le terme redondant et conduit à la solution constante

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) = \frac{1}{4} g D(0) + O(g^2).$$

### 16.5.3 Solution des EGR à l'ordre $g^2$

Pour  $\tilde{\mathcal{H}}^{(6)}(p_i; g)$ , le membre de gauche est d'ordre  $g^3$  qui est négligeable et donc

$$\left(2 + \sum_{j, \mu} p_j^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_j^{\mu}}\right) \mathcal{H}^{(6)}(p_i; g) = g^2 \left[ \tilde{D}(p_1 + p_2 + p_3) + 9 \text{ termes} \right] + O(g^3). \quad (16.65)$$

Par ailleurs ( $\Delta \equiv \Delta_{\Lambda=1}$ ),

$$\left(2 + \sum_{\mu} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\right) \tilde{\Delta}(p) = \tilde{D}(p).$$

Dans le membre de gauche, on peut remplacer  $\tilde{\Delta}(p)$ , qui est une fonction singulière à  $p = 0$ , par la fonction

$$-\tilde{D}_*(p) = \tilde{\Delta}(p) - \frac{1}{p^2} \quad \text{et donc} \quad \left(2 + \sum_{\mu} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\right) \tilde{D}_*(p) = -\tilde{D}(p), \quad (16.66)$$

qui est régulière. Nous notons que la fonction  $\tilde{D}_*(p)$  est la limite de la fonction (16.46) pour  $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ .

La solution régulière de l'équation (16.65) peut alors s'écrire

$$\mathcal{H}^{(6)}(p_i; g) = -g^2 \left[ \tilde{D}_*(p_1 + p_2 + p_3) + 9 \text{ termes} \right] + O(g^3).$$

La fonction  $\beta$ . Dans l'équation (16.62), comme  $g\eta(g)$  est d'ordre  $g^3$ ,

$$\beta(g) = g^2 \left[ 3\tilde{B}_*(0) - 2D(0)\tilde{D}_*(0) \right] - g^2 D(0)\tilde{D}(0) + O(g^3),$$

avec

$$\tilde{B}_*(p) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{D}_*(p - k). \quad (16.67)$$

Les deux derniers termes se compensent puisque

$$\tilde{D}(0) = 2C'(0) = -2\tilde{D}_*(0), \quad (16.68)$$

et il reste à évaluer

$$\tilde{B}_*(0) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}_*(k) \tilde{D}(k).$$

On vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left[ \frac{1}{2} k^4 \tilde{D}_*^2(k) \right] &= 2k^3 \tilde{D}_*^2(k) + k^3 \tilde{D}_*(k) k \frac{d}{dk} \tilde{D}_*(k) \\ &= 2k^3 \tilde{D}_*^2(k) - k^3 \tilde{D}_*(k) \left( \tilde{D}(k) + 2\tilde{D}_*(k) \right) = -k^3 \tilde{D}_*(k) \tilde{D}(k), \end{aligned}$$

où la relation (16.66) a été utilisée. Ainsi, l'intégrant peut s'écrire comme une dérivée totale et l'intégrale est déterminée par le comportement asymptotique

$$k^2 \tilde{D}_*(k) \rightarrow 1 \quad \text{pour} \quad k \rightarrow \infty.$$

On obtient

$$\tilde{B}_*(0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{d}{dk} \left[ \frac{1}{2} k^4 \tilde{D}_*^2(k) \right] = \frac{1}{16\pi^2}. \quad (16.69)$$

On en déduit

$$\beta(g) = \frac{3}{16\pi^2}g^2 + O(g^3), \quad (16.70)$$

en accord avec le résultat (10.21) pour  $\varepsilon = 0$ .

La fonction  $\eta$ . Il est alors commode d'introduire la fonction

$$F^{(4)}(p_i; g) = \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p_i; g) - \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(0; g) = O(g^2). \quad (16.71)$$

À l'ordre  $g^2$ , la fonction  $F^{(4)}$  est solution de

$$\begin{aligned} \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} F^{(4)}(p_i; g) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(6)}(p_1, p_2, p_3, p_4, k, -k; g) \\ &\quad + g \sum_i \tilde{D}(p_i) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p_i; g) - (\mathbf{p} = 0). \end{aligned}$$

Comme le membre de droite de l'équation s'annule pour  $p = 0$  (ce qui, en fait, est une conséquence de l'équation de flot satisfaite par  $g(\lambda)$ ), l'équation a une solution régulière. Plus explicitement,

$$\begin{aligned} \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} F^{(4)}(p_i; g) &= \frac{1}{2}g^2 \left[ D(0) \tilde{D}_*(p_1) + 3 \text{ termes} - 2\tilde{B}_*(p_1 + p_2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \text{ termes} \right] + \frac{1}{4}D(0)g^2 \sum_i \tilde{D}(p_i) - (\mathbf{p} = 0). \end{aligned}$$

En remarquant que l'équation

$$\sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} X(p) = Y(p), \quad Y(0) = 0,$$

a comme solution

$$X(p) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} Y(\lambda p),$$

après quelques intégrations par parties et manipulations algébriques, on trouve

$$F^{(4)}(p_i; g) = -\frac{1}{2}g^2 \mathcal{B}(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} - \frac{1}{4}g^2 D(0) \left[ \tilde{\mathcal{D}}_*(p_1) - \tilde{\mathcal{D}}_*(0) + 3 \text{ termes} \right] \quad (16.72)$$

avec

$$\mathcal{B}(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{D}}_*(k) \left[ \tilde{\mathcal{D}}_*(p + k) - \tilde{\mathcal{D}}_*(k) \right].$$

De l'équation (16.64), on déduit alors, à l'ordre  $g^2$ ,

$$\begin{aligned} \eta(g) &= \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \mathcal{B}(p + k) \Big|_{p=0} \\ &= \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k_1) \tilde{\mathcal{D}}_*(k_2) \left[ \tilde{\mathcal{D}}_*(p + k_1 + k_2) - \tilde{\mathcal{D}}_*(k_2) \right] \Big|_{p=0}. \end{aligned}$$

Pour ce calcul, il est commode de passer en variables d'espace. L'expression prend la forme

$$\eta(g) = \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \int d^4x e^{ipx} D(x) \mathcal{D}_*^2(x) \Big|_{p=0}.$$

Notons

$$\sum_{\mu=1}^4 \left( \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^2 \Phi(p^2) = 8\Phi'(p^2) + 4p^2\Phi''(p^2).$$

En utilisant cette relation pour évaluer la dérivée par rapport à  $p^2$ , on trouve

$$\begin{aligned} \eta(g) &= -\frac{1}{16}g^2 \int d^4x x^2 D(x) \mathcal{D}_*^2(x) \\ &= -\frac{\pi^2}{8}g^2 \int_0^\infty dx x^5 D(x) \mathcal{D}_*^2(x). \end{aligned}$$

L'équation (16.66) entraîne

$$D(x) = \left( 2 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{D}_*(x),$$

où, comme dans la dernière intégrale,  $x$  est la coordonnée radiale. Alors,

$$\frac{\partial}{\partial x} x^6 \mathcal{D}_*^3(x) = 6x^5 \mathcal{D}_*^3(x) + 3x^5 \mathcal{D}_*^2(x) x \frac{\partial}{\partial x} D(x).$$

L'intégrand est donc une dérivée explicite. La contribution à l'infini est nulle car toutes les fonctions sont à décroissance rapide. À l'origine,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \mathcal{D}_*(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} x^2 \int d^4p \frac{e^{ipx}}{p^2} = \frac{1}{4\pi^2}.$$

On retrouve donc le résultat (10.38) pour  $N = 1$  :

$$\eta(g) = \frac{1}{6} \frac{1}{(4\pi)^4} g^2 + O(g^3).$$

*Remarques.*

- (i) Il est possible ensuite de démontrer que les EGR peuvent être résolues par la même méthode, à tous les ordres, dans un développement en puissances de  $g$ . Ainsi, on démontre aussi que la théorie des champs  $\phi^4$  est renormalisable. Comme toutes les fonctions sont régulières à impulsion nulle, il suffit de montrer que toutes les intégrales convergent à grande impulsion. En particulier, cette méthode de démonstration évite les problèmes de combinatoire des diagrammes de Feynman des démonstrations usuelles.

- (ii) On peut avoir l'impression que nous avons utilisé explicitement la propriété qu'il n'y avait qu'un seul paramètre  $g$  de type  $\phi^4$  pour éliminer  $\lambda$ . En réalité, la solution que nous avons obtenue est déterminée par les conditions de degré en  $g(\lambda)$  des fonctions  $\mathcal{H}^{(n)}$ . Par exemple, dans le cas de plusieurs termes de type  $\phi^4$ , et donc plusieurs coefficients  $g_i$ , il suffit de substituer

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} = - \sum_i \beta_i(g) \frac{\partial}{\partial g_i}$$

et d'utiliser la propriété  $\beta_i(g) = O(g^2)$ .

- (iii) Il est simple de voir que la même méthode s'applique pour les théories de type  $\phi^n$  dans les dimensions où ces opérateurs sont marginaux (comme la dimension 3 pour  $\phi^6$ ).

## 16.6 Point fixe : développement en $\varepsilon$

Pour compléter la vérification de la cohérence du groupe de renormalisation fonctionnel avec le groupe de renormalisation asymptotique dans sa forme utilisée dans les chapitres 10 et 13, nous considérons maintenant la dimension  $d = 4 - \varepsilon$  et développons les équations (16.53 et 16.56) en puissances de  $g$  et  $\varepsilon$ .

Au lieu de déterminer le point fixe directement, nous suivons la stratégie de la section précédente, et déterminons l'équation de flot satisfaite par le paramètre effectif  $g(\lambda)$ . Les calculs sont alors très semblables.

Nous partons de

$$\begin{aligned} \beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; g) &= \left( \frac{1}{2} n(d-2+\eta) - d + \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; g) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k; g) \\ &- \frac{1}{2} \sum_l \tilde{D}(p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0). \end{aligned} \quad (16.73)$$

L'équation  $n = 2$  s'écrit

$$\begin{aligned} \beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) &= \left( \eta - 2 + \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) + \eta \Delta^{-1}(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; g) - \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) \right)^2. \end{aligned} \quad (16.74)$$

Ordre  $g$ . La condition (16.57) implique

$$\beta(g) = -\varepsilon g + 2g\eta(g) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(6)}(0, 0, 0, 0, k, -k; g) - 4g \tilde{D}(0) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(0; g). \quad (16.75)$$

On vérifiera que  $\eta$  reste d'ordre  $g^2$  et qu'ainsi les termes sont au moins d'ordre  $g^2$  sauf le premier :

$$\beta(g) = -\varepsilon g + O(g^2).$$

Dans ces conditions, à la différence du cas  $d = 4$ , le membre de gauche contribue à l'ordre dominant.

À l'ordre  $g$ ,  $\mathcal{V}^{(2)}(p; g)$  est une constante et donc

$$\mathcal{V}^{(2)}(p; g) \equiv \mathcal{V}^{(2)}(0; g) = r_c(g) = \frac{D(0)}{2(d-2)}g + O(g^2).$$

Notons la relation

$$(d-2)\Delta(0) + D(0) = 0, \quad (16.76)$$

et donc

$$r_c(g) = -\frac{1}{2}g\Delta(0) + O(g^2).$$

Ordre  $g^2$ . Nous avons ensuite besoin de  $\mathcal{H}_*^{(6)}(p_i)$  qui est d'ordre  $g^2$ . À cet ordre, il satisfait

$$\left( 2 + \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \mathcal{H}^{(6)}(p_i; g) = g^2 \left[ \tilde{D}(p_1 + p_2 + p_3) + 9 \text{ termes} \right] + O(g^3, g^2\varepsilon). \quad (16.77)$$

En introduisant la fonction (16.66), la solution régulière de l'équation (16.77) peut alors s'écrire

$$\mathcal{H}^{(6)}(p_i; g) = -g^2 \left[ \tilde{\mathcal{D}}_*(p_1 + p_2 + p_3) + 9 \text{ termes} \right] + O(g^3).$$

La fonction  $\beta$  est maintenant déterminée à l'ordre  $g^2$  :

$$\beta(g) = -\varepsilon g + g^2 \left[ 3\tilde{B}_*(0) - 2D(0)\tilde{\mathcal{D}}_*(0) \right] + 2g^2\Delta(0)\tilde{D}(0) + O(g^3),$$

avec

$$\tilde{B}_*(p) = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{D}}_*(p-k).$$

Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , on peut remplacer les contributions d'ordre  $g^2$  par leurs valeurs à  $d = 4$ , qui ont déjà été calculées (équation (16.70)). On en déduit

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \frac{3}{16\pi^2}g^2 + O(g^3, g^2\varepsilon),$$

en accord avec le résultat (10.21), et on retrouve le point fixe non gaussien (10.22),  $g^* = 16\pi^2\varepsilon/3 + O(\varepsilon^2)$ .

Comme à  $d = 4$ , on pose

$$F^{(4)}(p_i, g) = \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p_i; g) - \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(0; g) = O(g^2). \quad (16.78)$$

L'équation pour  $F^{(4)}(p_i; g)$ , à l'ordre  $g^2$ , devient

$$\begin{aligned} - \left( \varepsilon + \sum_{j, \mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) F^{(4)}(p_i; g) &= \frac{1}{2} g^2 \left[ -D(0) \tilde{\mathcal{D}}_*(p_1) + 3 \text{ termes} \right. \\ &\quad \left. + 2 \tilde{B}_*(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} \right] + \frac{1}{2} g^2 \Delta(0) \left[ \tilde{D}(p_1) + 3 \text{ termes} \right] - (\mathbf{p} = 0). \end{aligned} \quad (16.79)$$

On peut vérifier que la solution régulière est

$$F^{(4)}(p_i; g) = -\frac{1}{2} g^2 \mathcal{B}(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} + \frac{1}{2} g^2 \Delta(0) \left[ \tilde{\mathcal{D}}_*(p_1) - \tilde{\mathcal{D}}_*(0) + 3 \text{ termes} \right] \quad (16.79)$$

avec

$$\mathcal{B}(p) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\mathcal{D}}_*(k) \left[ \tilde{\mathcal{D}}_*(p + k) - \tilde{\mathcal{D}}_*(k) \right].$$

Il est ensuite possible de calculer  $\eta(g)$  à l'ordre  $g^2$ . À l'ordre  $\varepsilon^2$ , il suffit de la valeur de la fonction  $\eta(g)$ , à  $d = 4$ , qui a déjà été obtenue en fin de section 16.5.1.

## 16.7 Stabilité locale du point fixe

Une fois un point fixe  $\mathcal{H}_*$  identifié, on peut développer l'équation (16.51) au voisinage du point fixe :

$$\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}_* + E(\lambda).$$

On obtient alors l'EGR linéarisée

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} E(\lambda) = \mathcal{L}_* E(\lambda),$$

où l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}_*$ , après une intégration par parties, prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_* &= \int d^d x \phi(x) \left[ \frac{1}{2} (d + 2 - \eta) + \sum_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \\ &\quad + \int d^d x d^d y D(x - y) \left[ -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} + \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta \phi(x)} \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \right] \\ &\quad - \int d^d x d^d y L(x - y) \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(y)}. \end{aligned} \quad (16.80)$$

Nous cherchons les valeurs propres  $\ell$  et les vecteurs propres  $E_\ell \equiv E_\ell(\lambda = 1)$  de  $\mathcal{L}_*$  :

$$\mathcal{L}_* E_\ell = \ell E_\ell, \quad (16.81)$$

et donc

$$E_\ell(\lambda) = \lambda^\ell E_\ell(1).$$

L'équation (16.81) peut s'écrire de façon explicite en termes des composantes  $\tilde{E}_\ell^{(n)}(p_i)$  de  $E_\ell$  sous la forme

$$\begin{aligned} \ell \tilde{E}_\ell^{(n)}(p_i) = & \left( d - \frac{1}{2}n(d-2+\eta) - \sum_j \tilde{D}(p_j) \tilde{\Delta}^{-1}(p_j) - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{E}_\ell^{(n)}(p_i) \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{E}_\ell^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k) \\ & + \sum_I \tilde{D}(p_0) \tilde{E}_\ell^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0) \tilde{\mathcal{H}}_*^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0). \end{aligned} \quad (16.82)$$

### 16.7.1 Point fixe gaussien

Au point fixe gaussien,  $\eta = 0$  et  $\mathcal{H}_*$  se réduit à l'hamiltonien quadratique, puisque  $\mathcal{V}_*(\phi) = 0$ , et l'opérateur  $\mathcal{L}_*$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_* = & \int d^d x \phi(x) \left[ \frac{1}{2}(d+2) + \sum_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \\ & - \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres correspondent à prendre tous les  $\mathcal{H}^{(n)}$  nuls pour  $n > N$ . Le coefficient du terme d'ordre  $\phi^N$  satisfait alors à l'équation homogène

$$\ell \tilde{E}_\ell^{(N)}(p_i) = \left( d - \frac{1}{2}N(d-2) - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{E}_\ell^{(N)}(p_i),$$

qui est identique à l'équation (9.56) et qui est une équation aux valeurs propres. Elle a comme solutions, des polynômes homogènes dans les impulsions. Si  $r$  est le degré dans les variables  $p_i$ , la valeur propre est donnée par

$$\ell = d - \frac{1}{2}N(d-2) - r.$$

Les autres coefficients  $\mathcal{H}^{(n)}$ ,  $n < N$  sont ensuite entièrement déterminés par les équations

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2}(N-n)(d-2) + r - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{E}_\ell^{(n)}(p_i) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{E}_\ell^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k). \end{aligned} \quad (16.83)$$

On peut être surpris de ces termes additionnels. En fait, on peut vérifier que si l'on pose

$$E(\phi) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta(x-y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right] \Omega(\phi),$$

la fonctionnelle  $\Omega(\phi)$  satisfait l'équation aux valeurs propres plus simple

$$\ell \Omega_\ell(\phi) = \int d^d x \phi(x) \left[ \frac{1}{2}(d+2) + \sum_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Omega_\ell(\phi),$$

dont les solutions sont alors de simples monômes.

L'opérateur linéaire qui fait passer de  $\Omega(\phi)$  à  $E(\phi)$ ,

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta(x-y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right],$$

remplace tous les monômes en  $\phi$  qui contribuent à  $\Omega$  par leurs *produits normaux*. Le produit normal  $E^{(N)}(\phi)$  d'un monôme de degré  $N$  en  $\phi$  est tel que, pour tout  $n < N$ , les fonctions de corrélation gaussiennes

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \phi(x_i) E^{(N)}(\phi) \right\rangle$$

avec le poids  $e^{-\mathcal{H}_*}$  s'annulent. Soulignons que le *produit normal* dépend explicitement du choix d'une mesure gaussienne.

Il est utile pour la suite de calculer le produit normal correspondant à  $\int d^d x \phi^3(x)$  qui, dans l'approximation gaussienne, correspond à la valeur propre  $\frac{1}{2}(6-d)$ . On trouve

$$\frac{1}{3!} \int d^d x \phi^3(x) \mapsto \frac{1}{3!} \int d^d x \phi^3(x) - \frac{1}{2} \Delta(0) \int d^d x \phi(x).$$

De même, pour  $\int d^d x \phi^4(x)$ , on trouve

$$\frac{1}{4!} \int d^d x \phi^4(x) \mapsto \frac{1}{4!} \int d^d x \phi^4(x) - \frac{1}{4} \Delta(0) \int d^d x \phi^2(x) + \frac{1}{8} \Delta^2(0).$$

On reconnaît le terme d'ordre  $\varepsilon$  du hamiltonien de point fixe.

### 16.7.2 Dimension $d = 4 - \varepsilon$ : perturbations $\phi^2$ et $\phi^4$

Pour  $n = 2$ , à l'ordre  $\varepsilon$ , l'équation se réduit à

$$\begin{aligned} \ell \tilde{E}_\ell^{(2)}(p) = & \left( 2 + \frac{1}{2} g^* D(0) \tilde{D}(p) - \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{E}_\ell^{(2)}(p) \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{E}_\ell^{(4)}(p, -p, k, -k). \end{aligned}$$

Comme nous nous intéressons à la perturbation qui dans la limite gaussienne est une constante  $t$ , nous posons

$$\tilde{E}_\ell^{(2)}(p) = t + O(\varepsilon).$$

Il est cohérent de supposer  $\tilde{E}_\ell^{(4)}(p)$  d'ordre  $\varepsilon$  ainsi que  $\tilde{E}_\ell^{(6)}(p)$  d'ordre  $\varepsilon^2$ . En conséquence, la valeur propre  $\ell$  est de la forme

$$\ell = 2 + O(\varepsilon),$$

et  $\tilde{E}_\ell^{(4)}(p)$  satisfait à l'ordre dominant

$$2\tilde{E}_\ell^{(4)}(p_i) = - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \tilde{E}_\ell^{(4)}(p_i) + g^* t \sum_i \tilde{D}(p_i) + O(\varepsilon^2).$$

L'équation (16.66) permet d'intégrer :

$$\tilde{E}_\ell^{(4)}(p_i) = -g^* t \sum_i \tilde{D}_*(p_i) + O(\varepsilon^2).$$

Enfin, nous reportons cette expression dans l'équation pour  $\tilde{E}_\ell^{(2)}$ . À l'ordre dominant,

$$\begin{aligned} & \left( 2 - \ell + \frac{1}{2} g^* D(0) \tilde{D}(p) + g^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \left( \tilde{D}_*(p) + \tilde{D}_*(k) \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{E}_\ell^{(2)}(p) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( 2 - \ell + \frac{1}{2} g^* D(0) \tilde{D}(p) + g^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \left( \tilde{D}_*(p) + \tilde{D}_*(k) \right) - \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \\ & \quad \times \tilde{E}_\ell^{(2)}(p) = 0. \end{aligned}$$

Dans la limite  $p = 0$ , utilisant de nouveau les conditions  $\tilde{E}^{(2)}(p = 0) \neq 0$  et de régularité à  $p = 0$ , on trouve

$$\ell = 2 + \frac{1}{2} g^* D(0) \tilde{D}(0) + g^* D(0) \tilde{D}_*(0) + g^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{D}_*(k).$$

Les deux premiers se compensent et dans l'intégrale, on reconnaît  $\tilde{B}_*(0)$ . Donc,

$$\ell = d_t = 2 - \frac{1}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

en accord avec le résultat (10.31) obtenu par une autre méthode.

*Perturbation  $\phi^4$ .* La même méthode, mais partant cette fois de  $\tilde{E}^{(4)} = O(1)$ , permet de calculer l'exposant  $\omega$ , qui correspond à une variation de  $g$ , et donc à la dérivée de la fonction  $\beta$  comme dans les EGR de la théorie des champs. L'exposant

$$d_g = -\omega = -\beta'(g^*) = -\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

est la valeur propre correspond à une perturbation de type  $\phi^4$ . On en déduit la dimension  $d_{\phi^4}$  de l'opérateur propre qui est identique à  $\phi^4(x)$  à l'ordre dominant

$$d_{\phi^4} = d - d_g = 4.$$

Comme  $d_{\phi^4}$  est plus grand que  $d$ , cet opérateur est inessentiel.

### 16.7.3 Perturbations brisant la symétrie $\mathbb{Z}_2$

Nous étudions maintenant les valeurs propres associées aux opérateurs essentiels brisant la symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ . Nous allons montrer que ces valeurs propres s'expriment en fonction d'un exposant déjà connu.

Pour cela nous partons de l'équation de point fixe

$$\begin{aligned} 0 = & \int d^d x \phi(x) \left[ \frac{1}{2}(d+2-\eta) + \sum_{\mu} x^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right] \frac{\delta \mathcal{H}_*(\phi)}{\delta \phi(x)} \\ & - \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}_*}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta \phi(y)} \right] \\ & - \int d^d x d^d y L(x-y) \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta \phi(x)} \phi(y). \end{aligned} \quad (16.84)$$

Nous en déduisons une nouvelle équation obtenue en faisant agir sur cette équation l'opérateur  $\int dz \delta / \delta \phi(z)$  et nous posons

$$E^{(3)} = \int d^d z \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta \phi(z)}.$$

Nous notons que

$$\int d^d x L(x) = \tilde{D}(0) \tilde{\Delta}^{-1}(0) = 0.$$

Après une intégration par parties, l'équation peut s'écrire

$$[\mathcal{L}_* - \frac{1}{2}(d-2+\eta)] E^{(3)} = 0.$$

Nous avons donc identifié un vecteur propre,  $E^{(3)}$ , et la valeur propre

$$\ell = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta).$$

Au premier ordre en  $\varepsilon$ , ce vecteur propre essentiel a la forme

$$E^{(3)} = r_{c1} g^* \int d^d x \phi(x) + \frac{1}{3!} g^* \int d^d x \phi^3(x) + O(\varepsilon^2).$$

Dans la limite gaussienne, il correspond à l'opérateur  $\int d^d x \phi^3(x)$ . Le terme linéaire en  $\phi$  corrige  $\phi^3$  pour éliminer la composante sur  $\phi$  dont on vérifie qu'elle est plus essentielle. En effet, l'action de  $\mathcal{L}_*$  sur un terme linéaire en  $\phi$  donne

$$\mathcal{L}_* \int d^d z \phi(z) = \frac{1}{2}(d + 2 - \eta) \int d^d z \phi(z) + \tilde{D}(0) E^{(3)}.$$

On voit alors qu'il existe une autre valeur propre qui est

$$\ell = \frac{1}{2}(d + 2 - \eta),$$

et qui correspond au vecteur propre

$$E^{(1)} = (1 - \eta/2) \int d^d x \phi(x) + \frac{1}{2} \tilde{D}(0) E^{(3)}.$$

Dans l'approximation gaussienne, ce vecteur propre, qui est le plus essentiel, se réduit à  $\int d^d z \phi(z)$  et est associé à la valeur propre

$$\ell = \frac{1}{2}(d + 2).$$

Par la relation (9.64), on en déduit aussi la dimension  $d_\phi$  de l'opérateur  $\phi$  :

$$d_\phi = d - \frac{1}{2}(d + 2 - \eta) = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta),$$

ce qui est bien cohérent avec l'interprétation initiale de l'exposant  $\eta$  comme étant lié à une renormalisation du champ.

# Appendice A

## Compléments techniques

Nous rassemblons ici quelques résultats techniques supplémentaires utiles.

### A.1 Fonctions $\Gamma$ , $\psi$ , $\delta$

La fonction  $\Gamma(z)$ , qui interpole  $(z-1)!$  pour  $z$  non entier, peut être définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} . \quad (\text{A.1})$$

Cette représentation intégrale définit une fonction holomorphe pour  $\text{Re } z > 0$ . Cette fonction satisfait une relation de symétrie

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

qui la prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe avec des pôles simples aux entiers négatifs.

Une autre identité est la formule de duplication

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+1/2).$$

En termes de la dérivée logarithmique de  $\Gamma$ ,

$$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z),$$

ces relations s'écrivent

$$\psi(z) - \psi(1-z) + \pi / \tan(\pi z) = 0, \quad 2\psi(2z) = 2 \ln 2 + \psi(z) + \psi(z+1/2). \quad (\text{A.2})$$

On appelle constante d'Euler

$$\gamma = -\psi(1). \quad (\text{A.3})$$

En particulier,

$$\Gamma(1+s) = 1 - \gamma s + O(s^2). \quad (\text{A.4})$$

Une autre fonction utile est

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

### A.1.1 Distribution de Dirac

Nous avons souvent utilisé la fonction ou distribution  $\delta$  de Dirac. La distribution  $\delta(x - x_0)$  est une application linéaire continue qui, à toute fonction continue  $f(x)$ , fait correspondre la valeur  $f(x_0)$ . Il est commode de représenter l'action de  $\delta$  par une intégrale sous la forme

$$\int dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0).$$

Appliquant cette définition à la fonction  $e^{ipx}$  avec  $p$  réel, on trouve

$$\int dx \delta(x) e^{ipx} = 1.$$

La transformée de Fourier de  $\delta$  est la fonction constante  $f \equiv 1$ . Réciproquement,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-ipx}.$$

La distribution  $\delta$  peut être obtenue comme limite, au sens des distributions, de différentes fonctions, par exemple,

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\varepsilon^2}.$$

Nous avons utilisé la fonction signe :

$$\text{sgn}(x) = +1 \quad \text{pour } x > 0, \quad \text{sgn}(x) = -1 \quad \text{pour } x < 0.$$

Une autre fonction, la fonction saut  $\theta(x)$  ou fonction de Heaviside lui est directement reliée :

$$\theta(x) = 1 \quad \text{pour } x > 0, \quad \theta(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0 \Rightarrow \text{sgn}(x) = \theta(x) - \theta(-x).$$

Enfin, au sens des distributions,

$$\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x), \quad \frac{d}{dx} \text{sgn}(x) = 2\delta(x).$$

Par ailleurs, nous avons aussi défini la fonction  $\delta$  à  $n$  variables  $x_i$  :

$$\delta^{(d)}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \delta(x_i).$$

## A.2 Le propagateur massif en dimension 2

Nous étudions le comportement du propagateur massif (8.39),

$$\Delta(x, m) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{2m}{x} \right)^{d/2-1} K_{1-d/2}(mx),$$

quand la masse  $m$  tend vers zéro et la dimension tend vers 2.

Pour  $d > 2$ , quand  $m \rightarrow 0$ , le propagateur a une limite finie (équation (8.38)) :

$$\Delta(x, 0) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \frac{1}{x^{d-2}}.$$

Pour  $d \rightarrow 2$ , le propagateur de masse nulle diverge

$$\Delta(x, 0) = \frac{1}{2\pi(d-2)} - \frac{1}{4\pi} (\gamma + \ln \pi + \ln x^2) + O(d-2), \quad (\text{A.5})$$

où le développement (A.4) de la fonction  $\Gamma$  a été utilisé. Le comportement de  $\Delta(x, m)$  pour  $d = 2$  quand  $m \rightarrow 0$ , se déduit du comportement de  $K_0(z)$  pour  $z \rightarrow 0$  ( $\gamma$  est la constante d'Euler) :

$$\begin{aligned} K_0(z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-z(t+1/t)/2} \\ &\sim -\ln(z/2) - \gamma. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\Delta(x, m) \underset{m \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2\pi} (\ln(mx/2) + \gamma). \quad (\text{A.6})$$

## A.3 Déterminants d'opérateurs

Le calcul d'intégrales de champ gaussiennes engendre souvent des déterminants d'opérateurs (6.31), (10.9), (12.26) et (14.8). L'évaluation de ces déterminants peut être ramenée, si nécessaire après quelques transformations, au calcul de déterminants d'opérateurs de la forme  $\mathbf{M} = \mathbf{1} + \mathbf{K}$ . À condition que les traces de toutes les puissances de  $\mathbf{K}$  existent, l'identité

$$\ln \det \mathbf{M} \equiv \text{tr} \ln \mathbf{M}, \quad (\text{A.7})$$

développée en puissances du noyau  $\mathbf{K}$  :

$$\ln \det (\mathbf{1} + \mathbf{K}) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \text{tr} \mathbf{K}^p, \quad (\text{A.8})$$

peut se révéler utile pourvu que la série converge.

Dans le cas où les opérateurs  $\mathbf{K}$  sont représentés par des noyaux de la forme  $K(x, y)$ , le produit de deux opérateurs  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  est défini par

$$[\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2](x, y) = \int dz K_1(x, z) K_2(z, y),$$

et la trace par

$$\text{tr } \mathbf{K} = \int dx K(x, x),$$

dont on vérifie la propriété cyclique.

Les traces successives des puissances de  $\mathbf{K}$  s'écrivent alors explicitement

$$\text{tr } \mathbf{K}^p = \int dx_1 \cdots dx_p K(x_1, x_2) K(x_2, x_3) \cdots K(x_p, x_1).$$

*Remarque.* Le déterminant d'une matrice de taille  $n \times n$ , de la forme  $1 + \lambda \mathbf{K}$  est un polynôme en  $\lambda$  de degré  $n$ . Si on le calcule par l'identité précédente, on trouve une série infinie. En exprimant que tous les termes à partir de l'ordre  $n + 1$  s'annulent, on trouve des identités entre les traces des puissances de la matrice  $\mathbf{K}$ .

## A.4 Le groupe orthogonal

Le groupe  $O(N)$  est le groupe des matrices orthogonales réelles  $N \times N$  satisfaisant

$$\mathbf{O} \mathbf{O}^T = \mathbf{1},$$

où  $^T$  indique la transposition. C'est le groupe qui conserve le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^N$ . Géométriquement, c'est le groupe des rotations-réflexion de l'espace à  $N$  dimensions. La relation d'orthogonalité entraîne

$$\det \mathbf{O} \mathbf{O}^T = (\det \mathbf{O})^2 = 1$$

et donc

$$\det \mathbf{O} = \pm 1.$$

Les matrices de déterminant 1 forment un sous-groupe de  $O(N)$  noté  $SO(N)$ , qui géométriquement correspond aux rotations (transformations qui préservent l'orientation du système d'axes de coordonnées). Le groupe  $SO(N)$  est connexe à l'identité et toute matrice de  $SO(N)$  peut être obtenue par un produit fini de matrices appartenant à un voisinage de l'identité. Dans un voisinage infinitésimal de l'identité, une matrice de  $SO(N)$  peut se développer sous la forme

$$\mathbf{O} = \mathbf{1} + \mathbf{L} + O(\mathbf{L}^2) \text{ avec } \mathbf{L} + \mathbf{L}^T = 0.$$

Les matrices antisymétriques indépendantes forment un espace vectoriel de dimension  $N(N-1)/2$ . Soient  $L_\alpha$  une base de cet espace. La propriété de groupe des matrices orthogonales se traduit dans la relation de commutation

$$[L_\alpha, L_\beta] = \sum_{\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma.$$

Ces relations de commutation ou produits de Lie donnent à l'espace vectoriel des matrices antisymétriques, une structure d'algèbre de Lie et les coefficients  $f_{\alpha\beta\gamma}$  sont appelés constantes de structure. Enfin, toute matrice de  $SO(N)$  peut être écrite comme l'exponentielle d'un élément de l'algèbre de Lie :

$$\mathbf{O} = e^{\mathbf{L}}.$$

Une base de l'algèbre de Lie forme donc un ensemble de générateurs de  $SO(N)$ . Pour engendrer  $O(N)$ , il faut ajouter une réflexion.

Dans l'étude de la brisure spontanée de symétrie, nous avons considéré le sous-groupe  $O(N-1)$  de  $O(N)$  qui laisse un vecteur donné  $\mathbf{v} \neq 0$  invariant. Au voisinage de l'identité, cela se traduit par la propriété des générateurs du groupe  $SO(N-1)$  correspondants

$$\mathbf{L}\mathbf{v} = 0.$$

Il existe  $(N-1)(N-2)/2$  tels générateurs. À l'ensemble complémentaire des  $N-1$  générateurs de  $SO(N)$  restants, sont associés les  $N-1$  modes de Goldstone.

## A.5 Transformation de Fourier : décroissance et régularité

Dans cette section, nous rappelons, à travers quelques exemples utiles pour cet ouvrage, la relation entre décroissance asymptotique à grand argument des mesures positives et la régularité de leurs transformées de Fourier. Le lecteur intéressé par plus de détails est renvoyé à la littérature mathématique sur ce sujet.

Nous examinons d'abord le cas des mesures discrètes définies sur  $\mathbb{Z}$  qui est particulièrement simple.

### A.5.1 Mesures positives discrètes et séries de Fourier

*Décroissance exponentielle.* Nous considérons une mesure positive discrète  $\rho_n$  définie sur le réseau des points entiers de la droite réelle :

$$\rho_n \geq 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n = 1. \quad (\text{A.9})$$

Nous supposons que pour  $|n| \rightarrow \infty$ ,  $\rho_n$  décroît exponentiellement :

$$\rho_n < M e^{-\mu|n|}, \quad \mu > 0.$$

En conséquence, tous les moments

$$m_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^p \rho_n$$

de  $\rho_n$  sont finis. La fonction analytique donnée par la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n z^{n-1},$$

est holomorphe et uniforme dans l'anneau compris entre deux cercles  $e^{-\mu} < |z| < e^{\mu}$  où la série de Laurent converge.

La fonction périodique  $\tilde{\rho}(\theta)$ , de période  $2\pi$ ,

$$\tilde{\rho}(\theta) = e^{-i\theta} f(e^{-i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\theta} \rho_n \Rightarrow \tilde{\rho}^*(\theta) = \tilde{\rho}(-\theta),$$

est donc holomorphe dans une bande  $|\operatorname{Im} \theta| < \mu$ . De plus, la positivité de la mesure entraîne  $|\tilde{\rho}(\theta)| \leq \tilde{\rho}(0) = 1$ .

Réciproquement, les coefficients de Fourier  $\rho_n$  sont donnés par

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \tilde{\rho}(\theta). \quad (\text{A.10})$$

Si la fonction  $f$  est holomorphe et uniforme dans un domaine  $e^{-\mu} < |z| < e^{\mu}$ , les coefficients de sa série de Laurent sont aussi donnés par

$$\rho_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} dz z^{-n} f(z).$$

Le domaine d'analyticité de  $f$  entraîne la convergence de la série de Laurent. En effet, suivant que  $n$  est positif ou négatif, on déforme le cercle dans les cercles de rayon  $e^{\mu}$  ou  $e^{-\mu}$ . On en déduit

$$\forall R, 0 < R < e^{\mu} : \lim_{|n| \rightarrow \infty} \rho_n R^n = 0.$$

Ces résultats qui établissent une relation entre les propriétés de dérivabilité de la fonction et les propriétés de décroissance des coefficients de la série de Fourier peut se généraliser de nombreuses manières.

*Décroissance rapide.* Supposons, par exemple, que  $\rho_n$  décroisse, quand  $n \rightarrow \infty$ , plus vite que toute puissance de  $n$  :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \exists A_p \text{ tel que } \rho_n \leq \frac{A_p}{|n|^p + 1}.$$

Tous les moments

$$m_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^p \rho_n ,$$

de  $\rho_n$  sont de nouveau finis. C'est d'ailleurs une condition nécessaire et suffisante.

Il est alors simple de vérifier que la fonction périodique  $\tilde{\rho}(\theta)$  est dérivable, et la dérivée est obtenue en dérivant terme à terme la représentation (A.10) :

$$\tilde{\rho}'(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-in) e^{-in\theta} \rho_n .$$

La série converge pour tout  $\theta$ . En effet,

$$|\tilde{\rho}'(\theta)| \leq |\tilde{\rho}'(0)| \leq \sum_n |n| \rho_n < \infty .$$

La mesure  $n\rho_n$  étant également à décroissance rapide, l'argument se généralise aux dérivées successives :

$$\tilde{\rho}^{(p)}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-in)^p e^{-in\theta} \rho_n ,$$

et la fonction  $\tilde{\rho}(\theta)$  est donc indéfiniment dérivable. Pour tout  $\theta$ ,

$$\left| \tilde{\rho}^{(p)}(\theta) \right| \leq \left| \tilde{\rho}^{(p)}(0) \right| \leq \sum_n |n|^p \rho_n < \infty .$$

Réciproquement, supposons que  $\tilde{\rho}(\theta)$  soit indéfiniment dérivable. Comme  $\tilde{\rho}(\theta)$  est dérivable, on peut intégrer par parties (pour  $n \neq 0$ )

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \tilde{\rho}'(\theta) .$$

De façon plus générale, intégrant  $p$  fois, on trouve

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi} \frac{i^p}{n^p} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \tilde{\rho}^{(p)}(\theta)$$

et donc

$$|\rho_n| \leq \frac{1}{n^p} \left| \tilde{\rho}^{(p)}(0) \right| .$$

*Décroissance algébrique.* La seule condition de normalisation (A.9), qui implique la convergence uniforme des séries  $\sum_n e^{in\theta} \rho_n$ , entraîne la continuité de  $\tilde{\rho}(\theta)$ . De façon plus générale, la condition

$$\sum_n \rho_n |n|^p < \infty , \quad p \in \mathbb{N} ,$$

entraîne l'existence et la continuité de la dérivée  $p$ -ième de  $\tilde{\rho}(\theta)$ . Cette condition est vérifiée si

$$\rho_n \leq \frac{R}{|n|^{\sigma+1} + 1}, \quad \text{avec } \sigma > p.$$

Réciproquement, si  $\tilde{\rho}(\theta)$  est une fonction continue périodique de période  $2\pi$ , les coefficients de Fourier tendent vers zéro pour  $|n| \rightarrow \infty$ . En effet, (choisissant, par exemple,  $n > 0$ )

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \tilde{\rho}(\theta) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} d\tau e^{i\tau} \tilde{\rho}(\tau/n) \\ &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{p=1}^n \int_{2\pi(p-1)}^{2\pi p} d\tau e^{i\tau} \tilde{\rho}(\tau/n) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\tau} \frac{2\pi}{n} \sum_{p=1}^n \tilde{\rho}(\tau/n + 2\pi(p-1)/n). \end{aligned}$$

La somme sur  $p$  est une somme de Riemann qui converge pour  $n \rightarrow \infty$  vers une intégrale puisque  $\tilde{\rho}$  est continue :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{p=1}^n \tilde{\rho}(\tau/n + 2\pi(p-1)/n) = \int_0^{2\pi} ds \tilde{\rho}(s),$$

et la convergence est uniforme en  $\theta$ . En soustrayant à la somme, cette limite ne change pas l'intégrale sur  $\tau$  et donc

$$|\rho_n| \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\tau \left| \frac{2\pi}{n} \sum_{p=1}^n \tilde{\rho}(\tau/n + 2\pi(p-1)/n) - \int_0^{2\pi} ds \tilde{\rho}(s) \right|,$$

qui tend vers zéro. On notera que seule la convergence uniforme en  $\theta$  de la somme de Riemann a joué un rôle, ce qui permet de relaxer la condition de continuité.

L'existence d'une dérivée d'ordre  $p$  permet d'intégrer par parties et donc de démontrer une décroissance, au moins d'ordre  $|n|^{-p}$ .

Des résultats plus précis peuvent parfois être obtenus. Par exemple, si  $\tilde{\rho}(\theta)$  a une singularité isolée à  $\theta = 0$  en  $|\theta|^\sigma$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\rho_n$  décroît comme  $|n|^{-1-\sigma}$ ,

$$\tilde{\rho}(\theta) = A|\theta|^\sigma + \text{partie plus régulière} \Rightarrow \rho_n \underset{|n| \rightarrow \infty}{\propto} |n|^{-1-\sigma}.$$

Ce résultat se démontre par exemple en intégrant par parties  $[\sigma] + 1$  fois,  $[\sigma]$  étant la partie entière de  $\sigma$ . On peut alors calculer la transformée de Fourier de  $|\theta|^{\sigma-[\sigma]-1}$  explicitement.

*Réseau à  $d$  dimensions.* Les résultats précédents se généralisent aux cas des probabilités de transition considérées en section 3.3.

Supposons pour  $\rho(\mathbf{n})$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ , des propriétés de décroissance exponentielle,

$$\rho(\mathbf{n}) < M e^{-\mu|\mathbf{n}|}, \quad \mu > 0.$$

La fonction

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \rho(\mathbf{n}),$$

est holomorphe dans le tube

$$|\operatorname{Im} \mathbf{k}| < \mu.$$

Réciproquement, si l'on suppose pour  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ , le domaine d'holomorphie  $|\operatorname{Im} \mathbf{k}| \leq \mu$ , alors dans l'intégrale sur une zone de Brillouin,

$$\rho(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}} \tilde{\rho}(\mathbf{k}),$$

on peut déplacer le contour, dans le complexe, dans la direction

$$\operatorname{Im} \mathbf{k} = \kappa \mathbf{n}, \quad \kappa = \mu/|\mathbf{n}|,$$

et on en déduit une décroissance exponentielle.

### A.5.2 Transformation de Fourier

Les transformées de Fourier de mesures positives et plus généralement, de fonctions à décroissance rapide ou exponentielle du type envisagé en section 3.1, jouent aussi un rôle important dans différentes parties de cet ouvrage. Il est donc utile de voir dans quelle mesure les propriétés démontrées dans la section précédente se généralisent. La différence technique principale avec la section précédente est que la transformation de Fourier est symétrique. En particulier, la fonction initiale et sa transformée de Fourier ont toutes deux des propriétés de régularité et de décroissance à l'infini ce qui complique un peu l'analyse. Comme notre but est de faire comprendre la dualité entre régularité et décroissance à l'infini, nous l'illustrons ici uniquement par des exemples où les résultats peuvent être démontrés de façon élémentaire.

Pour les problèmes physiques qui ont été étudiés dans ce cours, nous devons admettre comme mesures, non seulement des fonctions, mais également des distributions au sens mathématique du terme comme les « fonctions »  $\delta$  de Dirac. Dans ce cas, les fonctions  $f(q)$  pour être mesurables, c'est-à-dire pour que leur valeur moyenne soit définie, doivent être *continues*. Il est alors nécessaire de faire appel à la théorie des distributions, et le lecteur intéressé est renvoyé à la littérature mathématique sur ce sujet.

*Fonctions continues.* Dans un but d'illustration, nous nous restreignons à des fonctions  $\rho(q)$  continues. L'étude des relations entre décroissance et régularité de la transformée de Fourier devient alors assez semblable au cas

discret. Supposons, par exemple, que  $\rho(q)$  soit une fonction à décroissance exponentielle :

$$|\rho(q)| \leq M e^{-\mu|q|}, \quad \mu > 0.$$

Si  $\rho(q)$  caractérise une mesure, non seulement tous les moments de la distribution existent, mais ils satisfont

$$|\langle q^p \rangle| \leq M \int dq e^{-\mu|q|} |q|^p \leq \frac{2M}{\mu^{p+1}} p!.$$

La transformée de Fourier,

$$\tilde{\rho}(k) = \langle e^{-ikq} \rangle \equiv \int dq e^{-ikq} \rho(q), \quad (\text{A.11})$$

de  $\rho(q)$  est une fonction analytique, holomorphe pour  $|\operatorname{Im} k| < \mu$ . En effet,

$$|\tilde{\rho}(k)| \leq M \int dq e^{-(\mu - |\operatorname{Im} k|)|q|} \leq \frac{2M}{\mu - |\operatorname{Im} k|}. \quad (\text{A.12})$$

De même, si  $\rho(q)$  décroît plus vite que toute puissance, sa transformée de Fourier est indéfiniment dérivable.

Enfin, si l'intégrale  $\int dq |\rho(q)| |q|^p$  converge,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq |q|^p \rho(q) < \infty,$$

la dérivée  $p$ -ième de  $\tilde{\rho}(k)$  est continue.

*Réciproque.* Par un argument similaire à celui utilisé pour les séries de Fourier, on démontre que si l'intégrale dans la représentation de de Fourier

$$\rho(q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq} \tilde{\rho}(k),$$

converge absolument, et si  $\tilde{\rho}(k)$  est continue,  $\rho(q)$  tend vers zéro pour  $|q| \rightarrow \infty$ . En effet,

$$\begin{aligned} \rho(q) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq} \tilde{\rho}(k) = \frac{1}{2\pi q} \int dk e^{ik} \tilde{\rho}(k/q) \\ &= \frac{1}{2\pi q} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{2\pi(p-1)}^{2\pi p} dk e^{ik} \tilde{\rho}(k/q) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dk e^{ik} \frac{2\pi}{q} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k/q + 2\pi p/q). \end{aligned}$$

Avec nos conditions, la somme de Riemann converge, pour  $|q| \rightarrow \infty$ , uniformément en  $k$  vers l'intégrale qui, intégrée avec  $e^{ik}$ , ne donne pas de contribution.

Si  $\tilde{\rho}(k)$  admet une dérivée  $p$ -ième continue, une intégration par parties répétée permet de démontrer que  $q^p \rho(q)$  tend vers zéro, avec l'hypothèse supplémentaire que  $\int dk |\rho^{(p)}(k)|$  converge.

De même, dans les cas des fonctions indéfiniment dérivables ou analytiques dans une bande, on peut démontrer la décroissance rapide ou exponentielle de la transformée de Fourier avec quelques conditions de convergence à l'infini.

Pour s'affranchir en partie de ses problèmes de convergence à l'infini il est nécessaire de se placer dans le cadre plus général des distributions.



# Appendice B

## Transitions de phase : généralités

Nous avons regroupé ici quelques propriétés supplémentaires des transitions de phase.

### B.1 Fondamental de la matrice de transfert

La notion de matrice de transfert a été introduite en section 4.1.2. Nous démontrons ici que la fonction propre  $\psi_0(q)$  de la matrice de transfert, correspondant à la valeur propre maximale  $\tau_0$ , est de signe constant et peut donc être choisie positive. En conséquence, la valeur propre  $\tau_0$  est *positive et simple*. En référence au formalisme quantique, nous appelons ci-dessous le vecteur propre, *fondamental* de la matrice de transfert. Ainsi, le fondamental est non dégénéré.

Montrons d'abord que  $\psi_0(q)$  est une fonction de signe constant, qu'on peut donc choisir positive.

Toute fonction  $\psi(q)$  de carré sommable satisfait l'inégalité

$$|\tau_0| \geq \frac{1}{\|\psi\|^2} \left| \int dq dq' \psi(q') \mathcal{T}(q', q) \psi(q) \right|,$$

l'égalité n'étant possible que si  $\psi(q)$  appartient à l'espace propre associé à  $\tau_0$ .

Cependant, puisque  $\mathcal{T}(q', q)$  est une fonction symétrique positive,

$$\left| \int dq dq' \psi(q') \mathcal{T}(q', q) \psi(q) \right| \leq \int dq dq' |\psi(q')| \mathcal{T}(q', q) |\psi(q)|,$$

alors que

$$\|\psi\| = \|(|\psi|)\|.$$

Ainsi, si la fonction  $\psi(q)$  n'est pas de signe constant, la fonction  $|\psi(q)|$  donne une valeur moyenne plus grande. Nous concluons que la fonction  $\psi_0(q)$  est nécessairement de signe constant.

Une conséquence directe de ce résultat est que la valeur propre  $\tau_0$  est positive et non dégénérée. En effet, supposons qu'il existe deux vecteurs propres indépendants  $\psi_0(q)$  et  $\tilde{\psi}_0(q)$  correspondant à la valeur propre  $\tau_0$ . Comme  $\mathbf{T}$  est hermitien, on peut toujours les choisir orthogonaux

$$\int dq \psi_0(q) \tilde{\psi}_0(q) = 0.$$

Calculons alors la quantité

$$\int dq' dq \tilde{\psi}_0(q') \mathcal{T}(q', q) \psi_0(q) = \tau_0 \int dq \tilde{\psi}_0(q) \psi_0(q) = 0,$$

où la condition que  $\psi_0(q)$  est vecteur propre avec la valeur propre  $\tau_0$  a été utilisée. Comme l'intégrand dans le membre de droite est le produit de trois fonctions positives et compte-tenu de la forme particulière (4.6) des noyaux  $\mathcal{T}$ , qui implique que  $\mathcal{T}(q', q)$  est strictement positif pour tout couple  $\{q, q'\}$ , ceci est impossible.

## B.2 Paramètre d'ordre et propriété d'amas

Quand la valeur propre la plus grande de la matrice de transfert est dégénérée, la détermination des fonctions de corrélation en volume infini devient une question subtile, qui dépend explicitement de la manière dont la limite thermodynamique est atteinte. En particulier, elle peut dépendre des conditions aux limites. Cette sensibilité aux conditions aux limites est une autre caractéristique de la région à plusieurs phases.

Examinons, dans cette situation, les propriétés de décroissance à grande distance des fonctions de corrélation.

Nous considérons la région à deux phases d'un système de type Ising et appelons  $\psi_+$  et  $\psi_-$  les vecteurs propres fondamentaux de la matrice de transfert, qui sont échangés par l'opérateur de symétrie  $\mathbf{P}$  (la réflexion qui renverse les spins) :

$$\psi_- = \mathbf{P}\psi_+,$$

et sont orthogonaux. Tout vecteur  $\psi(\alpha)$  de la forme

$$\psi(\alpha) = \cos \alpha \psi_+ + \sin \alpha \psi_-, \quad (\text{B.1})$$

est aussi un vecteur propre de la matrice de transfert avec la même valeur propre. Supposons qu'il soit possible de prendre la limite du volume infini de telle sorte que le vecteur  $\psi(\alpha)$  soit sélectionné. Les fonctions de corrélation font alors intervenir l'action de produits de matrices de spin en des points du réseau transverse sur le vecteur  $\psi(\alpha)$ . Pour des raisons de simplicité, nous nous restreignons à des produits de spin ayant la même position sur le réseau transverse, et notons  $\mathbf{S}$  la matrice correspondante (définie en (7.50)). Dans ce qui suit, nous omettons l'indice de position  $\sigma$ .

Définissons

$$(\psi_+ \mathbf{S} \psi_+) = m, \quad (\text{B.2})$$

où  $m$  tend vers 1 dans le modèle d'Ising dans la limite de température nulle. Alors,

$$(\psi_- \mathbf{S} \psi_-) = (\psi_+ \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P} \psi_+) = -m. \quad (\text{B.3})$$

Nous avons aussi

$$(\psi_+ \mathbf{S} \psi_-) = -(\psi_- \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P} \psi_+) = -(\psi_- \mathbf{S} \psi_+). \quad (\text{B.4})$$

Comme  $\mathbf{S}$  est une matrice symétrique,

$$(\psi_+ \mathbf{S} \psi_-) = 0. \quad (\text{B.5})$$

La matrice  $\mathbf{S}$ , restreinte au sous-espace  $\{\psi_+, \psi_-\}$ , est diagonale dans la base  $\{\psi_+, \psi_-\}$ .

Les équations (B.2)–(B.5) impliquent en particulier :

$$(\psi(\alpha) \mathbf{S} \psi(\alpha)) = m \cos 2\alpha, \quad (\text{B.6})$$

$$(\psi(\alpha) \mathbf{S} \psi(\pi/2 + \alpha)) = m \sin 2\alpha. \quad (\text{B.7})$$

Sauf pour  $\alpha = \pi/4 \pmod{\pi/2}$ , la valeur moyenne du spin ne s'annule pas et ceci caractérise la région à plusieurs phases.

Calculons ce que naïvement on s'attendrait à être la fonction de corrélation de spin à deux points connexe (cf. section 4.3.2), c'est-à-dire la fonction à deux points de  $\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle$ , pour deux points séparés par une distance  $\ell$  dans la direction de temps mais à la même position transverse. Elle est donnée par

$$W^{(2)}(\ell) = \frac{(\psi(\alpha) (\mathbf{S} - m \cos 2\alpha) \mathbf{T}^\ell (\mathbf{S} - m \cos 2\alpha) \psi(\alpha))}{(\psi(\alpha) \mathbf{T}^\ell \psi(\alpha))}. \quad (\text{B.8})$$

La matrice de transfert  $\mathbf{T}$  projetée sur les états fondamentaux pour  $\ell \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^\ell &= \tau_0^\ell \left( P_+ + P_- + O(e^{-\ell/\xi}) \right), \\ &= \tau_0^\ell \left( P(\alpha) + P(\pi/2 + \alpha) + O(e^{-\ell/\xi}) \right), \end{aligned}$$

où  $P_+$ ,  $P_-$  et  $P(\alpha)$  sont les projecteurs sur les vecteurs correspondants. On en déduit

$$W^{(2)}(\ell) \sim m^2 \sin^2 2\alpha + O(e^{-\ell/\xi}). \quad (\text{B.9})$$

Ce n'est que pour  $\alpha = n\pi$  que les fonctions de corrélation satisfont à la propriété d'amas (cf. section 4.3.2, équation (4.25)). Les vecteurs propres correspondant sont alors  $\psi_+$  et  $\psi_-$  qui sont échangés par  $\mathbf{P}$ . La symétrie de réflexion est spontanément brisée.

Soulignons que les fonctions de corrélation calculées en sommant sur toutes les configurations de spin, correspondent à des moyennes sur les deux états fondamentaux et ne satisfont donc pas à la propriété d'amas.

Comme nous l'avons souligné dans l'exemple 7.2, un des deux états  $\psi_{\pm}$  est sélectionné dans la limite thermodynamique par la procédure suivante : on ajoute à l'énergie de configuration un terme couplé linéairement au paramètre d'ordre (un champ magnétique pour des spins). Ce terme favorise ainsi, une des phases. On fait alors tendre l'amplitude de ce terme vers zéro après avoir pris la limite thermodynamique. Cette procédure choisit un des états  $\psi_+$  ou  $\psi_-$  suivant le signe du champ. Les fonctions de corrélation du système ainsi obtenues satisfont alors à la propriété d'amas dans la limite du volume infini. Une solution alternative consiste à prendre la limite thermodynamique, avec comme conditions aux limites, tous les spins aux bords fixés et égaux, soit à  $+1$ , soit à  $-1$ .

On peut bien sûr se demander le sens physique de cette procédure : en section B.3, nous allons montrer que de tels systèmes dans la phase de symétrie brisée ne sont plus ergodiques. Une fois préparés dans une phase, ils y restent. Si l'on veut, dans ces conditions, que les moyennes temporelles soient égales aux moyennes d'ensemble, il faut calculer la fonction de partition en restreignant la somme aux configurations dont le spin moyen a le signe de l'aimantation spontanée. Le champ magnétique sélectionne automatiquement les configurations appropriées.

### B.3 Dynamiques stochastiques et transitions de phase

*Modèle de type Ising.* Il est facile de construire une dynamique stochastique qui converge, asymptotiquement dans le temps, vers la distribution d'équilibre du modèle d'Ising. On peut, par exemple, imposer le principe d'équilibre détaillé (cf. section 3.4.2) et choisir comme probabilité de transition d'une configuration  $\{S_r\}$  vers une configuration  $\{S'_r\}$ ,

$$\begin{cases} p(S_r, S'_r) = e^{-\beta[\mathcal{E}(S'_r) - \mathcal{E}(S_r)]} & \text{pour } \mathcal{E}(S_r) < \mathcal{E}(S'_r), \\ p(S_r, S'_r) = 1 & \text{autrement,} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

où  $\mathbf{r}$  appartient à un ensemble  $\Omega$  de volume  $L^d$  dans  $\mathbb{Z}^d$  et  $\mathcal{E}(S_r)$  est l'énergie de configuration, par exemple,

$$\mathcal{E}(S) = \sum_{\substack{\text{n.n.} \\ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega \subset \mathbb{Z}^d}} -JS_{\mathbf{r}}S'_{\mathbf{r}}. \quad (\text{B.11})$$

Pour les arguments qui suivent, la connaissance précise des configurations qui sont directement reliées par les probabilités  $p$  n'est pas utile pourvu que le

système soit ergodique en volume fini, c'est-à-dire qu'il existe une probabilité non nulle de relier deux configurations de spin arbitraires. La propriété importante, qui est vérifiée par toutes les dynamiques locales, est que la probabilité d'aller d'une configuration à une autre configuration de plus haute énergie est, à basse température, de l'ordre de  $e^{-\beta\Delta\mathcal{E}}$ , où  $\Delta\mathcal{E}$  est la différence d'énergie.

C'est pourquoi, à basse température, si nous partons d'une configuration où tous les spins valent par exemple  $+1$ , la probabilité de créer une bulle de spins  $-1$  est proportionnelle à  $e^{-\beta J A}$ , où  $A$  est l'aire de la surface de la bulle (comme la figure 7.3 l'illustre pour la dimension deux). À  $d$  dimensions, une bulle de surface minimale est une sphère. Si nous appelons  $L$  son rayon, la mesure de sa surface est d'ordre  $L^{d-1}$  et la probabilité est d'ordre  $e^{-\sigma L^{d-1}}$ , où  $\sigma$  est la tension de surface, à basse température  $\sigma \propto \beta = 1/T$ .

Pour  $d = 1$ , le système reste donc ergodique à volume infini puisque la probabilité de transition reste toujours finie, et aucune transition de phase n'est possible.

Pour  $d > 1$ , la probabilité de transition à basse température tend vers zéro quand  $L \rightarrow \infty$  et, donc, le même mécanisme qui conduit à l'existence de plusieurs phases est responsable d'une brisure d'ergodicité.

*Modèles à symétrie continue.* Prenons de nouveau l'exemple de la symétrie  $O(N)$ . Considérons maintenant une bulle dans le centre de laquelle le vecteur de spin est tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction d'aimantation spontanée. Dans ce cas, le bilan d'énergie défavorise les configurations où, comme précédemment, des spins sont tournés d'un angle  $\theta$  à l'intérieur d'une sphère. Ceci donnerait de nouveau une énergie de surface en  $L^{d-1}$ . Au lieu de cela, il est plus avantageux d'interpoler entre  $\theta$  et zéro de façon linéaire sur une distance  $L$ . Le coût en énergie entre proches voisins est maintenant proportionnel à  $1 - \cos(\theta/L) \sim \theta^2/2L^2$ . Cette énergie doit être multipliée par le nombre de spins dans le sphère de rayon  $L$ . On trouve

$$\Delta\mathcal{E} \propto \beta\theta^2 L^{d-2}.$$

On conclut qu'en dimensions  $d \leq 2$ , cette énergie reste finie quand  $L \rightarrow \infty$ . Il existe donc une probabilité finie de faire tourner tous les spins d'un angle  $\theta$ , et la symétrie  $O(N)$  ne peut pas être brisée. Au contraire, pour  $d > 2$ , une transition est possible.

*Conclusion.* Les analyses de haute et basse température, statique et dynamique, permettent de mettre en évidence l'existence d'une transition de phase et la nature des phases. Toutefois, elles ne fournissent aucun renseignement sur la transition de phase elle-même, ou sur le comportement des quantités thermodynamiques dans le voisinage de la température critique. Ces problèmes doivent être étudiés par d'autres méthodes.



# Appendice C

## Développement en $1/N$ : quelques calculs

Nous donnons ici quelques détails supplémentaires sur le calcul détaillé de deux diagrammes qui sont apparus dans le développement en  $1/N$ .

### C.1 Diagramme de Feynman à une boucle

Le diagramme (b) représenté sur la figure 2.4 (section 2.5.1), qui est aussi proportionnel à la contribution à une boucle à la fonction à deux points dans la théorie  $\phi^4$ , a joué un rôle essentiel dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Nous évaluons son comportement quand la masse  $m$  tend vers zéro (avec échelle de coupure  $\Lambda$ ).

*Diagramme régularisé.* Considérons un propagateur régularisé de la forme générale (14.9). Le diagramme 2.4 prend la forme (14.13),

$$\Omega_d(m) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_\Lambda(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{m^2 + k^2 D(k^2/\Lambda^2)} = \Lambda^{d-2} \omega_d(m/\Lambda), \quad (\text{C.1})$$

où la fonction  $D(t)$  est positive et régulière pour  $t \geq 0$  et normalisée par  $D(0) = 1$ . En choisissant une fonction  $D(k)$  suffisamment croissante pour  $|k| \rightarrow \infty$ , il est possible de rendre tout diagramme convergent et en particulier le diagramme 2.4.

Nous avons besoin des premiers termes du développement de  $\Omega_d(m)$  pour  $m^2 \rightarrow 0$ . Nous présentons le calcul pour une fonction  $D$  particulière,

$$\omega_d(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{z^2 + k^2 + k^4} = N_d \int_0^\infty \frac{k^{d-1} dk}{z^2 + k^2 + k^4},$$

où la constante  $N_d$  est le facteur de boucle (14.16a), mais le résultat exhibe la plupart des propriétés du cas général. La deuxième intégrale, où l'intégrale angulaire a été effectuée, définit une fonction holomorphe pour  $0 < \text{Re } d < 4$ ,

ce qui est la situation la plus intéressante. Le dénominateur est un polynôme du second degré en  $k^2$  qui, pour  $z = 0$ , a comme racines  $k^2 = 0$  et  $k^2 = -1$ . De façon générale, factorisons le polynôme

$$z^2 + k^2 + k^4 = (k_1^2 + k^2) (k_2^2 + k^2).$$

Les deux racines sont des fonctions holomorphes en  $z^2$  dans un voisinage de  $z = 0$ . À l'ordre  $z^2$ , par exemple,

$$k_1^2 = z^2 + z^4 + O(z^6), \quad k_2^2 = 1 - z^2 + O(z^4).$$

Nous procédons par prolongement analytique à partir de  $0 < \text{Re } d < 2$  et séparons l'intégrale en deux contributions :

$$\omega_d(z) = \frac{N_d}{k_1^2 - k_2^2} \int_0^\infty k^{d-1} dk \left( \frac{1}{k^2 + k_2^2} - \frac{1}{k^2 + k_1^2} \right).$$

Chaque intégrale se calcule explicitement :

$$\int_0^\infty \frac{k^{d-1} dk}{k^2 + \kappa^2} = \kappa^{d-2} \frac{\pi}{2 \sin(\pi d/2)}.$$

En utilisant ce résultat pour  $\omega_d(z)$ , nous reconnaissons la constante  $K_d$  définie en (14.16b) :

$$\omega_d(z) = K(d) \frac{k_2^{d-2} - k_1^{d-2}}{k_2^2 - k_1^2}.$$

Cette expression est maintenant régulière jusqu'à  $\text{Re } d < 4$ . Les premiers termes pour  $z \rightarrow 0$  sont donc

$$\omega_d(z) = \omega_d(0) - K(d)z^{d-2} + a(d)z^2 + O(z^4, z^d),$$

avec

$$a(d) = (3 - d/2)K(d),$$

dont on vérifie qu'il est égal à la valeur (14.17) avec la forme particulière de  $D$ .

De façon générale, le terme proportionnel à  $k_2^{d-2}$  engendre un développement régulier en  $z^2$  et le terme proportionnel à  $k_1^{d-2}$  engendre un développement régulier multiplié par  $z^{d-2}$ . On peut vérifier avec un peu d'analyse que cette structure est générale.

## C.2 La fonction à deux points à l'ordre $1/N$ pour $u \rightarrow 0$

À l'ordre  $1/N$ , un seul diagramme contribue à la fonction à deux points  $(\sigma\sigma)$  (figure 14.3). Dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  et après une renormalisation de

masse, on trouve

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) = p^2 + \frac{2}{N(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(6/u) + b(d)q^{-\varepsilon}} \left( \frac{1}{(p+q)^2} - \frac{1}{q^2} \right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (\text{C.2})$$

Pour calculer les coefficients du développement de  $\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p)$ , pour  $u \rightarrow 0$ , qui est de la forme

$$\sum_{k \geq 1} \alpha_k(\varepsilon) u^k p^{2-k\varepsilon} + \beta_k(\varepsilon) u^{(2+2k)/\varepsilon} p^{-2k}, \quad (\text{C.3})$$

il est commode d'utiliser la transformée de Mellin de l'intégrale considérée comme fonction de  $u$ . En effet, si une fonction  $f(u)$  a, pour  $u \rightarrow 0$ , un comportement de la forme  $u^t$ , alors la transformée de Mellin,

$$M(s) = \int_0^\infty du u^{-1-s} f(u),$$

a un pôle à  $s = t$ . Appliquant cette transformation à l'intégrale et inversant l'ordre des intégrations  $q$  et  $u$ , nous sommes ramenés à l'intégrale

$$\int_0^\infty du \frac{u^{-1-s}}{(6/u) + b(d)q^{-\varepsilon}} = \frac{1}{6} \left( \frac{b(d)q^{-\varepsilon}}{6} \right)^{1-s} \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Le résultat de l'intégration restante sur  $q$  se déduit de l'intégrale générique

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(p+q)^{2\mu} q^{2\nu}} = p^{d-2\mu-2\nu} \frac{\Gamma(\mu+\nu-d/2)\Gamma(d/2-\mu)\Gamma(d/2-\nu)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(d-\mu-\nu)}. \quad (\text{C.4})$$

Les termes avec des puissances entières de  $u$  correspondent au développement perturbatif qui existe pour  $\varepsilon$  suffisamment petit en régularisation dimensionnelle.  $\alpha_k$  a des pôles en  $\varepsilon = (2l+2)/k$  pour lesquels la puissance correspondante de  $p^2$  est  $-l$ , c'est-à-dire un entier. On vérifie que  $\beta_l$  a un pôle pour la même valeur de  $\varepsilon$  et que les contributions singulières se compensent dans la somme.



# Appendice D

## Groupe de renormalisation fonctionnel : compléments

Dans cette section, nous présentons une méthode générale qui permet de démontrer des équations de champ pour des théories statistiques ou quantiques. Nous montrons ensuite que les équations du groupe de renormalisation fonctionnel (GRF) obtenues au chapitre 16 s'en déduisent, ce qui fournit une autre démonstration de l'équation fondamentale (16.14).

Enfin, nous montrons que la transformée de Legendre d'une fonctionnelle liée simplement à l'hamiltonien satisfait une équation de flot très utile.

### D.1 GRF et équations de champ

*Équations de champ.* Nous considérons l'intégrale fonctionnelle générale

$$\mathcal{Z} = \int [\mathrm{d}\phi] \mathrm{e}^{-\mathcal{H}(\phi)}.$$

Les équations de champ peuvent se démontrer par une méthode simple, basée sur l'invariance d'une intégrale par changement de variables infinitésimal  $\phi \mapsto \varphi$  :

$$\phi(x) = \varphi(x) + \varepsilon K(\varphi, x),$$

l'identité obtenue étant développée au premier ordre dans le paramètre constant  $\varepsilon$ .

Le jacobien de la transformation est

$$\mathcal{J} = \det \frac{\delta \phi(x)}{\delta \varphi(y)} = 1 + \varepsilon \int \mathrm{d}x \frac{\delta K(\varphi, x)}{\delta \varphi(x)} + O(\varepsilon^2),$$

où nous avons utilisé de nouveau l'identité  $\ln \det = \mathrm{tr} \ln$ .

On en déduit l'équation générale

$$\left\langle \int dx \left[ \frac{\delta K(\phi, x)}{\delta \phi(x)} - K(\phi, x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(x)} \right] \right\rangle = 0, \quad (\text{D.1})$$

où  $\langle \bullet \rangle$  signifie valeur moyenne avec le poids  $e^{-\mathcal{H}(\phi)}$ .

Une façon équivalente d'établir cette équation est de remarquer que l'intégrale d'une dérivée totale est nulle et, donc,

$$\int [d\phi] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} K(\phi) e^{-\mathcal{H}(\phi)} = 0.$$

Explicitant la dérivée, on obtient l'équation

$$\left\langle \frac{\delta K(\phi)}{\delta \phi(x)} - K(\phi) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(x)} \right\rangle = 0.$$

L'application de cette identité à une fonction  $K(\phi, x)$ , après intégration sur  $x$ , redonne l'équation (D.1).

On peut bien sûr se demander si ces manipulations formelles sont toujours justifiées. Dans certains cas, un processus limite à partir d'une approximation de réseau, et même de réseau fini, peut se révéler nécessaire. Enfin, le plus souvent, il est possible de démontrer ces identités dans un sens formel, c'est-à-dire à tous les ordres du développement perturbatif.

*Équations de champ et GRF.* On suppose maintenant que l'hamiltonien  $\mathcal{H}(\phi)$  dépend d'un paramètre  $s$  mais que la fonction de partition  $\mathcal{Z}$  n'en dépend pas et, donc,

$$\frac{d\mathcal{Z}}{ds} = - \left\langle \frac{d}{ds} \mathcal{H}(\phi, s) \right\rangle = 0.$$

Nous introduisons la notation

$$(\phi \mathcal{K} \phi) \equiv \int dx dy \phi(x) \mathcal{K}(x-y) \phi(y).$$

Nous décomposons  $\mathcal{H}(\phi, s)$  en une somme de trois termes :

$$\mathcal{H}(\phi, s) = \frac{1}{2}(\phi \Delta^{-1}(s) \phi) + \mathcal{V}(\phi, s) + \frac{1}{2} \ln \det \Delta(s),$$

où  $\ln \det \Delta = \text{tr} \ln \Delta$  doit être régularisé.

L'équation devient alors,

$$\left\langle -\frac{1}{2}(\phi \Delta^{-1}(s) D(s) \Delta^{-1}(s) \phi) + \frac{d}{ds} \mathcal{V}(\phi, s) \right\rangle + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \ln \det \Delta(s) = 0, \quad (\text{D.2})$$

avec

$$D(s) = \frac{d\Delta}{ds},$$

un opérateur de noyau  $D(s; x - y)$ .

Nous avons l'identité

$$\frac{d}{ds} \ln \det \Delta(s) = \frac{d}{ds} \operatorname{tr} \ln \Delta(s) = \operatorname{tr} L(s),$$

avec la notation

$$L(s) = D(s) \Delta^{-1}(s).$$

L'équation fondamentale (16.14) est alors obtenue avec le choix

$$K(\phi, x) = \frac{1}{2} \int dy D(s; x - y) \left[ [\Delta^{-1} \phi](y) - \frac{\delta \mathcal{V}(\phi, s)}{\delta \phi(y)} \right].$$

La contribution du jacobien devient

$$\int dx \frac{\delta K(\phi, x)}{\delta \phi(x)} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(s) - \frac{1}{2} \int dx dy D(s; x - y) \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}.$$

Le second terme donne

$$\begin{aligned} \int dx K(\phi, x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, s)}{\delta \phi(x)} &= \frac{1}{2} \int dx dy D(s; x - y) \left\{ [\Delta^{-1} \phi](y) - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right\} \\ &\times \left\{ [\Delta^{-1} \phi](x) + \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int dx dy D(s; x - y) \left\{ [\Delta^{-1} \phi](y) [\Delta^{-1} \phi](x) - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right\}. \end{aligned}$$

Éliminant alors le terme quadratique entre les deux équations (D.1) et (D.2), on obtient une équation qui exprime une condition suffisante pour que la fonction de partition soit invariante :

$$\frac{d}{ds} \mathcal{V}(\phi, s) = -\frac{1}{2} \int dx dy D(s; x - y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}(\phi, s)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}(\phi, s)}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}(\phi, s)}{\delta \phi(y)} \right].$$

On reconnaît l'équation (16.14) et en identifiant le paramètre  $s$  à  $-\ln \Lambda$ , on obtient les équations de groupe de renormalisation.

Pour prendre en compte la renormalisation du champ, on ajoute un terme linéaire en  $\phi$  :  $K(\phi, x) \mapsto K(\phi, x) + \frac{1}{2} \eta \phi(x)$ . Cela ajoute une constante infinie au jacobien, qui est compensée par un changement de normalisation de la fonction de partition, et

$$\int dx K(\phi, x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, s)}{\delta \phi(x)} \mapsto \int dx K(\phi, x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, s)}{\delta \phi(x)} + \frac{\eta}{2} \int dx \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, s)}{\delta \phi(x)}.$$

De façon plus générale, on obtient d'autres équations de groupe de renormalisation en ajoutant à  $K$  d'autres fonctionnelles locales de  $\phi$ . Mais ces manipulations algébriques ne doivent pas faire perdre de vue que le but est de construire un groupe de renormalisation qui a des points fixes locaux.

## D.2 GRF : transformation de Legendre

Nous avons vu en section 16.1.4 (équation (16.21)), que la fonctionnelle

$$\mathcal{W}(H, s) = -\mathcal{V}(\mathcal{D}(s_0, s)H, s) + \frac{1}{2}(H\mathcal{D}(s_0, s)H) + \frac{1}{2} \ln \det \mathcal{D}(s_0, s), \quad (\text{D.3})$$

où  $\mathcal{D}$  est défini en (16.10), avait une interprétation de fonctionnelle génératrice de fonctions de corrélation connexes. Elle satisfait l'équation de flot (16.23) :

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s} = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \frac{\partial \mathcal{K}(s_0, s; x-y)}{\partial s} \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta H(x) \delta H(y)} + \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta H(x)} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta H(y)} \right]. \quad (\text{D.4})$$

où  $\mathcal{K}$  est défini en (16.11) :

$$\mathcal{D}(s_0, s) \mathcal{K}(s_0, s) = 1.$$

Il est aussi naturel d'introduire sa transformée de Legendre :

$$\mathcal{W}(H, s) + \mathcal{G}(\varphi, s) = \int d^d x H(x) \varphi(x), \quad H(x) = \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \varphi(x)}.$$

Celle-ci satisfait une équation de flot qui est utile pour des calculs pratiques.

La stationnarité de la transformation de Legendre implique

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{W} \right|_H + \left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G} \right|_\varphi = 0.$$

Par ailleurs, il est commode de poser

$$\Sigma(\varphi, s, x, y) = \int d^d z \mathcal{K}(s_0, s; x-z) \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta H(z) \delta H(y)}.$$

Alors, la propriété (6.19) de la transformation de Legendre entraîne

$$\int d^d z d^d z' \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(z)} \mathcal{D}(s_0, s; z-z') \Sigma(\varphi, s, z', y) = \delta^{(d)}(x-y). \quad (\text{D.5})$$

L'équation (D.4) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}(\varphi, s) = & -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y L(s_0, s; x-y) \Sigma(\varphi, s, x, y) \\ & + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \frac{\partial \mathcal{K}(s_0, s; x-y)}{\partial s} \varphi(x) \varphi(y), \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

avec, au sens des opérateurs,

$$L(s_0, s) = -\mathcal{K}^{-1} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \ln \mathcal{D}(s_0, s).$$

Avec ces définitions, pour  $\mathcal{V} = 0$ ,

$$\mathcal{G}(\varphi, s) = \mathcal{G}(0, s) + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \varphi(x) \mathcal{K}(s_0, s; x - y) \varphi(y).$$

Si l'on pose

$$\mathcal{G}(\varphi, s) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \varphi(x) \mathcal{K}(s_0, s; x - y) \varphi(y) + \mathcal{G}_1(\varphi, s),$$

l'équation (D.6) devient

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}_1(\varphi, s) = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y L(s_0, s; x - y) \Sigma(\varphi, s, x, y). \quad (\text{D.7})$$

Le noyau  $\Sigma(\varphi, s, x, y)$  est maintenant solution de

$$\Sigma(\varphi, s, x, y) + \int d^d z d^d z' \frac{\delta^2 \mathcal{G}_1}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(z)} \mathcal{D}(s_0, s; z - z') \Sigma(\varphi, s, z', y) = \delta^{(d)}(x - y). \quad (\text{D.8})$$

De façon équivalente, la transformée de Fourier

$$\tilde{\Sigma}(\varphi, s, p, q) = \int d^d x d^d y e^{ipx + iqy} \Sigma(\varphi, s, x, y)$$

satisfait

$$\tilde{\Sigma}(\varphi, s, p, q) + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\delta \mathcal{G}_1}{\delta \tilde{\varphi}(p) \delta \tilde{\varphi}(-k)} \tilde{\mathcal{D}}(s_0, s; k) \tilde{\Sigma}(\varphi, s, k, q) = (2\pi)^d \delta^{(d)}(p + q). \quad (\text{D.9})$$

L'équation (D.7) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}_1(\varphi, s) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{L}(s_0, s; k) \tilde{\Sigma}(\varphi, s, k, -k). \quad (\text{D.10})$$

La fonctionnelle  $\mathcal{G}_1(\varphi, s)$  est locale et satisfait une équation relativement simple.

Pour expliciter ces équations, nous développons  $\mathcal{G}_1$  et  $\Sigma$  en puissances de  $\varphi$ . À l'ordre  $\varphi^0$ , en représentation de Fourier,  $\Sigma = \Sigma_0$  est solution de

$$\tilde{\Sigma}_0(s, p) + \mathcal{G}_1^{(2)}(p) \tilde{\mathcal{D}}(s_0, s; p) \tilde{\Sigma}_0(s, p) = 1$$

et, donc,

$$\tilde{\Sigma}_0(s, p) = \left[ 1 + \tilde{\mathcal{D}}(s_0, s; p) \tilde{\mathcal{G}}_1^{(2)}(p) \right]^{-1}.$$

Alors, en écriture symbolique,

$$\Sigma = \Sigma_0 - \frac{1}{2} \Sigma_0 \frac{\delta^2 \mathcal{G}_1^{(4)}}{\delta \varphi \delta \varphi} \varphi \varphi \mathcal{D}(s_0, s) \Sigma_0 + O(\varphi^4),$$

et donc,

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}_1^{(2)}(p, s) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\mathcal{D}}(s_0, s; k) \tilde{\Sigma}_0^2(k) \tilde{\mathcal{G}}_1^{(4)}(p, -p, k, -k).$$

*Application à la théorie  $\phi^4$ .* Nous posons maintenant  $s = -\ln \Lambda$ . Nous substituons aussi  $\mathcal{D}(s_0, s) \mapsto \mathcal{D}_\Lambda$  et appliquons ces identités à la théorie  $u\phi^4$ . À l'ordre  $u^1$ , on trouve

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2} r_{c1} u \int d^d x \phi^2(x) + \frac{1}{4!} u \int d^d x \phi^4(x) + O(u^2).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(H) &= \frac{1}{2} \int d^d x H \mathcal{K} H - \frac{1}{2} r_{c1} u \int d^d x (\mathcal{D}H)^2(x) - \frac{1}{4!} u \int d^d x (\mathcal{D}H)^4(x) \\ &\quad + O(u^2). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\varphi(x) = [\mathcal{K}H](x) = \phi(x) + O(u)$$

Utilisant la stationnarité de la transformation de Legendre qui implique

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u} = 0,$$

on en déduit

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{2} u r_{c1} \int d^d x \varphi^2(x) + \frac{1}{4!} u \int d^d x \varphi^4(x) + O(u^2).$$

À cet ordre, on retrouve l'équation donnant  $r_{c1}$ , obtenue en section 16.3,

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} r_{c1} = \frac{1}{2} D_\Lambda(0).$$

De façon générale, les équations (D.8) et (D.10) peuvent être résolues de façon itérative et fournissent un développement perturbatif. À cause de la transformation de Legendre, seuls les diagrammes 1-irréductibles contribuent. Ainsi, le terme de degré 6 en  $\varphi$  est maintenant d'ordre  $u^3$ .

*EGR en forme standard.* Après élimination de la dépendance explicite en  $\Lambda$  et renormalisation du champ, on obtient l'équation de flot analogue de l'équation (16.51) :

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_1(\varphi, \lambda) &= \int d^d x \varphi(x) \left[ \frac{1}{2} (d+2+\eta) + \sum_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \frac{\delta \mathcal{G}_1}{\delta \varphi(x)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Lambda \frac{d \ln \mathcal{D}_\Lambda}{d\Lambda}(x-y) \Sigma(\varphi, \lambda, y, x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta \int d^d x d^d y [\Delta_\Lambda]^{-1}(x-y) \varphi(x) \varphi(y). \end{aligned}$$

### D.3 GRF et régularisation dimensionnelle

Le formalisme général de la section 16.1 permet d'écrire d'autres équations, ce que nous illustrons maintenant par un exemple.

Dans le cadre de la régularisation dimensionnelle, la théorie n'a plus de divergences de grande impulsion, au moins pour des dimensions génériques. En revanche, les questions du comportement critique et des divergences possibles associées restent ouvertes. Pour construire un groupe de renormalisation fonctionnel on peut introduire, dans le propagateur, un facteur de coupure  $m$  à petite impulsion et étudier le flot qui correspond à faire tendre  $m$  vers zéro. Par exemple, le propagateur

$$\tilde{\Delta}_m(p) = \frac{1 - e^{-p^2/m^2}}{p^2},$$

pour  $|p| \gg m$ , a le comportement d'un propagateur critique mais n'a pas de pôle à  $p = 0$ . De façon générale, on peut prendre comme propagateur

$$\tilde{\Delta}(m; p) = \frac{C(p^2/m^2)}{p^2}, \quad C(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 1.$$

On exprime alors, comment l'interaction effective change quand  $m \rightarrow 0$ . En d'autres termes, on exprime l'équivalence entre une théorie avec paramètre de coupure variable  $m$  et interaction  $\mathcal{V}(\phi)$  qui est critique à  $m = 0$ ,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p = 0, m = 0) = 0,$$

et une interaction  $\mathcal{V}(\phi, m)$  qui correspond au propagateur fixe non-critique  $m = m_0$ . Notons que la condition critique est facile à réaliser en régularisation dimensionnelle.

*EGR intégrée.* Dans les notations de la section 16.1, on peut aussi définir, pour  $m_0 > m$ ,  $K(m) = \Delta^{-1}(m)$ . De plus,

$$\mathcal{D}(m_0, m) = \Delta(m_0) - \Delta(m), \quad \mathcal{K}(m_0, m) = \mathcal{D}^{-1}(m_0, m).$$

Sous forme intégrée, l'équation (16.19) devient alors

$$\begin{aligned} & e^{-\mathcal{V}(\phi, m)} \\ &= (\det \mathcal{D}(m_0, m))^{-1/2} \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2} (\varphi \mathcal{K}(m_0, m) \varphi) - \mathcal{V}(\phi + \varphi, m_0) \right], \end{aligned}$$

avec aussi,

$$\mathcal{H}(\phi, m) = \frac{1}{2} (\phi K(m_0) \phi) + \mathcal{V}(\phi, m).$$

Les calculs perturbatifs sont peu modifiés. Par exemple, pour

$$\mathcal{V}(\phi, m_0) = \frac{1}{4!} u \int d^d x \phi^4(x),$$

à l'ordre  $u$ ,

$$\mathcal{V}(\phi, m) = \mathcal{V}(\phi, m_0) + \frac{1}{4}u\mathcal{D}(x=0; m_0, m) \int d^d x \phi^2(x).$$

Sous forme différentielle, la condition suffisante pour que les fonctions de partition soient identiques pour tout  $m$  est semblable à l'équation (16.32), le paramètre  $m$  remplaçant  $\Lambda$  et le signe relatif des deux membres étant changé,

$$m \frac{\partial}{\partial m} \mathcal{V}(\phi, m) = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(m; x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right] \quad (\text{D.11})$$

avec, maintenant,

$$\tilde{D}(m; p) = -m \frac{\partial \tilde{\Delta}(m; p)}{\partial m} = \frac{2 e^{-p^2/m^2}}{m^2}.$$

Du point de vue perturbatif, les manipulations algébriques ne changent pas. Par exemple, le calcul de la fonction  $\beta(g)$ , pour  $d=4$  à l'ordre  $g^2$ , se ramène au calcul de  $\tilde{B}(0)$ , dans la limite  $m \rightarrow 0$ , où la fonction  $\tilde{B}(p)$  est donnée par l'expression (16.67) :

$$\tilde{B}(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{D}(p-k).$$

Ici,

$$\tilde{B}(0) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2 e^{-k^2/m^2}}{m^2} \left( \frac{e^{-k^2/m_0^2} - e^{-k^2/m^2}}{k^2} \right).$$

Après le changement de variables  $k \mapsto mk$ , on peut prendre la limite  $m=0$ . On trouve

$$\begin{aligned} \tilde{B}(0) &= \frac{1}{8\pi^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} (e^{-k^2} - e^{-2k^2}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk (e^{-k^2} - e^{-2k^2}) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds (e^{-s} - e^{-2s}) = \frac{1}{16\pi^2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire un résultat identique à celui obtenu dans le formalisme de coupure à grande impulsion (équation (16.69)).

Le calcul de  $\eta(g)$  est un peu long mais on trouve de nouveau le même résultat.

# Index

## A

action euclidienne, 123  
action euclidienne, 201, 233, 311  
aimantation, 139  
aimantation : spontanée, 158, 168  
analyse dimensionnelle, 335  
anisotropie cubique : flot linéarisé, 295  
anisotropie cubique : modèle avec, 293  
anisotropie cubique : points fixes, 294  
approximation de champ moyen, 220  
approximation quasi-gaussienne, 206, 212  
approximation quasi-gaussienne :  
    corrections, 214

## B

Bessel : fonction de, 47, 48  
Borel : transformation de, 282  
boucles : nombre de, relation  
    topologique, 313  
Brillouin : zone de, 75  
brisure spontanée de symétrie, 157  
brisure d'ergodicité, 158, 462  
brisure spontanée de symétrie, 97, 167

## C

calculs perturbatifs : une dimension,  
    131  
chaleur spécifique : champ moyen, 171  
chaleur spécifique : comportement cri-  
    tique, 281  
champ à  $N$  composantes, 287  
champ libre, 201  
champ magnétique, 138  
champ moyen, 163, 224  
champ moyen : corrections, 224  
classe d'universalité, 66

classe d'universalité, 58  
classe d'universalité, 232, 241  
comportement d'échelle, 240  
comportements critiques, 159  
conditions aux limites :  
    anti-périodiques, 179  
conditions aux limites : périodiques,  
    90, 138  
conjugaison hermitienne, 105  
connexes : contributions, 30, 31  
corrections aux relations d'échelle :  
     $N \rightarrow \infty$ , 373  
courbe de coexistence, 401  
cumulants, 34, 52, 53

## D

décimation, 111  
dérivée fonctionnelle, 123  
déterminant d'un opérateur  
    différentiel, 358  
déterminants d'opérateurs, 449  
développement : asymptotique, 282  
développement : de basse température,  
    386  
développement : de haute  
    température, 193  
développement : en  $1/N$ , 375  
développement : en  $\varepsilon$ , 255  
développement : en nombre de boucles,  
    318  
développement : en  $\varepsilon$  : perturbations  
    propres, 256  
développement : perturbatif, 129  
développement : perturbatif : repré-  
    sentation formelle, 312  
développement : perturbatif :  
    une dimension, 131  
diagrammes de Feynman, 31

diagrammes de Feynman :  
     1-irréductibles, 314  
 diagrammes de Feynman : arbres, 319  
 diagrammes de Feynman : boucles,  
     définition, 313  
 diagrammes de Feynman : connexes,  
     314  
 diagrammes de Feynman :  
     ligne externe, 313  
 diagrammes de Feynman :  
     ligne interne, 313  
 diagrammes de Feynman :  
     représentation fidèle, 314  
 diagrammes de Feynman : une boucle,  
     265, 320, 359, 465  
 diagrammes du vide, 316  
 dimension 4 : le rôle de  $\lambda$ , 219  
 dimension  $d = 4 - \varepsilon$  : perturbations  $\phi$   
     et  $\phi^3$ , 445  
 dimension  $d = 4 - \varepsilon$  : perturbations  $\phi^2$   
     et  $\phi^4$ , 444  
 dimension infinie : points fixes, 172  
 dimension : anormale, 348  
 dimension : canonique, 348  
 dimension : critique, 336  
 dimension : d'une variable aléatoire  
     moyenne, 64  
 dimension : de Hausdorff, 72  
 dimension : de  $\sigma^2$ , 276  
 dimension : des polynômes locaux, 258  
 dimension : du champ, 240, 242, 256  
 dimension : du champ :  $N \rightarrow \infty$ , 367  
 dimension : du champ : modèle  $\sigma$  non  
     linéaire, 402  
 dimension : du champ : ordre  $\varepsilon^2$ , 272,  
     278  
 dimension : du paramètre d'ordre, 256  
 Dirac : distribution de, fonction  $\delta$ , 125,  
     448  
 distribution : de spin moyen, 139, 142,  
     167  
 distribution : d'équilibre, 158  
 distribution : gaussienne  
     asymptotique, 55, 78  
 divergence de la longueur  
     de corrélation, 208  
 divergences infrarouges, 338, 391  
 divergences ultraviolettes, 263, 313

domaine critique, 198, 245, 273  
 domaine critique : comportement  
     d'échelle, 281  
 domaine critique : loi d'échelle, 246,  
     280  
 domaine critique : universalité, 173  
 dynamiques stochastiques et  
     transitions de phase, 462

## E

échelle de coupure, 233, 334  
 échelle de transition, 371, 402  
 EGR, 237  
 EGR : asymptotiques, 279  
 EGR : champ à  $N$  composantes, 288  
 EGR : domaine critique, 350  
 EGR : en champ ou en dessous de  $T_c$ ,  
     281  
 EGR : équation d'état, 353  
 EGR : flot de l'hamiltonien, 241  
 EGR : fonctionnelle, 421  
 EGR : fonctionnelle : flot  
     de l'hamiltonien, 423  
 EGR : fonctions de corrélation, 245  
 EGR : linéarisée, 242  
 EGR : modèle  $\sigma$  non linéaire, 394, 395  
 EGR : modèle  $\sigma$  non linéaire : solution,  
     400  
 EGR : modèle  $\sigma^4$ , 288  
 EGR :  $N \rightarrow \infty$ , 372  
 EGR : renormalisées, 341  
 EGR : solution générale, 343  
 EGR : solution perturbative à  $d = 4$ ,  
     340  
 EGR : théorie des champs, 339  
 Elitzur : conjecture de, 404  
 énergie d'interaction, 138  
 énergie libre, 96, 139  
 équation de diffusion fonctionnelle,  
     418  
 équation de Schrödinger, 110  
 équation d'état, 166  
 équation d'état :  $N \rightarrow \infty$ , 368  
 équation d'état : EGR, 353  
 équation d'état : forme d'échelle, 171,  
     354, 401  
 équation d'état : forme paramétrique,  
     368

équation d'état : symétrie orthogonale, 212  
 équations de champ, 469  
 équations de groupe de renormalisation : *cf.* EGR, 237  
 équilibre détaillé, 80, 462  
 ergodicité, 158  
 espace de Hilbert, 92  
 espace quotient, 386  
 essentielle : perturbation, 65  
 essentiels : vecteurs, perturbations propres, 243  
 état fondamental quantique, 111  
 Euler : constante de, 447  
 exposants critiques : résultats numériques, 282  
 exposants : relations d'échelle, 279, 353, 354  
 exposant :  $\delta : N \rightarrow \infty$ , 368  
 exposant : de chaleur spécifique  $\alpha$ , 281  
 exposant : de chaleur spécifique  $\alpha : N \rightarrow \infty$ , 369  
 exposant : de corrections  $\omega$ , 256  
 exposant : de corrections  $\omega : N \rightarrow \infty$ , 369  
 exposant : de corrélation  $\nu$ , 210, 278, 352  
 exposant : de corrélation  $\nu$  : gaussien, 198  
 exposant : de corrélation  $\nu$  : modèle  $\sigma$  non linéaire, 402  
 exposant : de corrélation  $\nu : N \rightarrow \infty$ , 366  
 exposant : de corrélation  $\nu$  : ordre  $\varepsilon$ , 276  
 exposant : de susceptibilité magnétique  $\gamma$ , 353  
 exposant : de susceptibilité magnétique  $\gamma$  : ordre  $\varepsilon$ , 276  
 exposant : de susceptibilité magnétique  $\gamma$  : quasi-gaussien, 170  
 exposant :  $\delta$  : quasi-gaussien, 171  
 exposant :  $\eta$ , 346  
 exposant :  $\eta$  : gaussien, 198  
 exposant :  $\eta$  : ordre  $\varepsilon^2$ , 348  
 exposant :  $\eta$  : ordre  $1/N$ , 378  
 exposant :  $\eta$  : ordre  $\varepsilon^2$ , 272

exposant : magnétique  $\beta : N \rightarrow \infty$ , 365  
 exposant : magnétique  $\beta$  : quasi-gaussien, 170

## F

facteur de coupure, 324, 345  
 flot de l'hamiltonien, 417, 420  
 flot entre points fixes, 257  
 flots de gradient, 289  
 flots et variation du potentiel, 290  
 fonction à deux points : calcul perturbatif, 396  
 fonction à deux points : calcul perturbatif, 273  
 fonction  $\beta$  : calcul à une boucle, 345  
 fonction à deux points, 32, 132, 208  
 fonction à deux points : approximation quasi-gaussienne, 213  
 fonction à deux points : calcul à deux boucles, 347  
 fonction à deux points : calcul perturbatif, 132, 267, 271, 273, 316  
 fonction à deux points : comportement d'échelle, 276  
 fonction à deux points : gaussienne, 128, 196, 203  
 fonction à deux points : ordre  $1/N$ , 466  
 fonction à quatre points, 35  
 fonction à quatre points : calcul perturbatif, 268, 344  
 fonction à quatre points : développement perturbatif, 317  
 fonction  $\beta$ , 271, 278, 339, 433  
 fonction  $\beta$  : calcul perturbatif, 437, 440  
 fonction  $\beta$  : modèle  $\sigma$  non linéaire, 394, 397  
 fonction  $\beta : N \rightarrow \infty$ , 372  
 fonction de Bessel modifiée, 47  
 fonction de partition, 90, 131, 138  
 fonction de partition : quantique, 110, 114  
 fonction  $\eta$ , 339, 435  
 fonction  $\eta$  : calcul perturbatif, 438  
 fonction  $\Gamma$ , 38, 447  
 fonction génératrice, 24, 34, 53  
 fonction génératrice : méthode du col, 44

fonction  $\psi$ , 447  
 fonction saut ou de Heaviside  $\theta$ , 61, 448  
 fonction signe  $\text{sgn}$ , 448  
 fonctionnelle 1-irréductible  
     à une boucle, 320  
 fonctionnelle génératrice, 123, 308  
 fonctions de corrélation, 94, 144, 419  
 fonctions de corrélation : comportement d'échelle, 352  
 fonctions de corrélation : connexes, 99, 144, 235, 308  
 fonctions de corrélation : critiques, lois de puissances, 346  
 fonctions de corrélation :  
     forme d'échelle, 401  
 fonctions de corrélation : gaussiennes, 125  
 fonctions de corrélation : nues, 337  
 fonctions de corrélation :  
     renormalisées, 337, 341  
 fonctions de vertex, 150, 236, 309  
 fonctions de vertex : à quatre points, 153  
 fonctions un-irréductibles, 150

## G

Gamma : fonction, 38  
 gaussienne : valeur moyenne, 27  
 Goldstone : modes de, 185, 212, 362, 387, 451  
 Goldstone : phénomène de, 229  
 GRF, 411  
 GRF : composantes, 423  
 GRF : développement en  $\varepsilon$ , 439  
 GRF : équations en forme standard, 431  
 GRF : et équations de champ, 470  
 GRF : et régularisation  
     dimensionnelle, 475  
 GRF : et transformation de Legendre, 472  
 GRF : évolution de l'hamiltonien, 416  
 GRF : flot de l'interaction, 415  
 GRF : fonctions de corrélation, 425  
 GRF : Groupe de Renormalisation Fonctionnel, 411  
 GRF : localité, 422

GRF : représentation de Fourier, 422  
 GRF : solution perturbative, 426, 435  
 GRF : théorie  $\phi^4$  perturbative, 433  
 groupe de renormalisation, 61, 64  
 groupe de renormalisation : équations de : *cf.* EGR, 237  
 groupe de renormalisation : exact, 422  
 groupe de renormalisation :  
     perturbatif, 257, 261, 264  
 groupe de renormalisation :  
     près de la dimension 4, 279  
 groupe de symétrie cubique, 74, 293  
 groupe orthogonal, 183, 187, 225, 450

## H

hamiltonien, 201, 233  
 hamiltonien : analyse dimensionnelle, 334  
 hamiltonien : critique, 262  
 hamiltonien : de Landau, 234  
 hamiltonien : de Landau–Ginzburg–Wilson, 234  
 hamiltonien : de point fixe, 240  
 hamiltonien : effectif, 237, 333  
 hamiltonien : général, 311  
 hamiltonien : quadratique isotrope général, 248  
 hamiltonien : quantique, 107, 111, 114  
 Hermite : polynômes de, 41

## I

impulsion, 147, 192  
 inessentielle : perturbation, 64  
 inessentiels : vecteurs, perturbations propres, 244  
 insensibilité à la structure de courte distance, 331  
 intégrale gaussienne, 123  
 intégrale de champ, 233  
 intégrale de champ : calcul perturbatif, 312  
 intégrale de champ : gaussienne, 201  
 intégrale de champ : gaussienne :  
     calcul, 201  
 intégrale de champ : intégration partielle, 412  
 intégrale de chemin, 82

intégrale de chemin :  
     calcul perturbatif, 129  
 intégrale de chemin : gaussienne, 122  
 intégrale de chemin : gaussienne :  
     calcul, 82, 126  
 intégrale de Wiener, 82  
 intégrale gaussienne, 25, 203  
 interaction : à courte portée, 191  
 interaction : de proches voisins, 91  
 interaction : ferromagnétique, 164, 191  
 invariance par translation, 68  
 invariance par translation, 138, 145

## L

Legendre : transformation de, 309  
 liberté asymptotique, 381  
 ligne de points fixes, 407  
 limite centrale : théorème de la, 55  
 limite continue, 77, 98, 109, 205  
 limite thermodynamique, 90, 95, 142  
 localité, 68, 74, 89, 235, 311  
 loi d'échelle, 72, 79  
 longueur de corrélation, 98, 145, 204  
 longueur de corrélation : approxima-  
     tion quasi-gaussienne, 209  
 longueur de corrélation : divergence,  
     110

## M

marche au hasard, 66, 199  
 marche au hasard : comportement  
     asymptotique, 71  
 marche au hasard : limite continue, 71  
 marche au hasard : sur le cercle, 85  
 marche au hasard : sur réseau, 73  
 marginale : perturbation, 64  
 marginaux : vecteurs, perturbations  
     propres, 243  
 markovien stationnaire : processus, 67,  
     245  
 markovien : processus, 242  
 Markov : chaîne de, 67, 79  
 masse, 201  
 matrice de transfert, 92, 178, 183  
 matrice de transfert : fondamental, 459  
 matrice de transfert : gaussienne, 104  
 matrice densité, 110

Mellin : transformée de, 467  
 méthode des caractéristiques, 342  
 méthode du col, 35, 56, 165, 207, 221,  
     223, 318, 362  
 méthode du col : à plusieurs variables,  
     43  
 méthode du col : complexe, 39  
 méthode du col : et développement  
     perturbatif, 156  
 méthode du col : réelle, 36  
 modèle avec anisotropie cubique, 304  
 modèle avec symétrie orthogonale :  
     *cf.* modèle  $O(N)$ , 118  
 modèle d'Ising, 178  
 modèle d'Ising : une dimension, 117  
 modèle gaussien, 103, 119, 151, 194  
 modèle  $O(N)$  : développement en  $\varepsilon$ ,  
     277  
 modèle  $O(N)$  : limite  $N \rightarrow \infty$ , 362  
 modèle  $O(N)$  : phase désordonnée, 363  
 modèle  $O(N)$  : phase ordonnée, 362  
 modèle  $O(N)$  : une dimension, 118  
 modèle  $\sigma$  non linéaire, 378, 381  
 modèle  $\sigma$  non linéaire :  $N \rightarrow \infty$ , 379  
 modèle  $\sigma$  non linéaire :  
     action euclidienne, 389  
 modèle  $\sigma$  non linéaire : dimension 2,  
     403  
 modèle  $\sigma$  non linéaire : régularisation,  
     390  
 modèle  $\sigma$  non linéaire : rôle  
     de la dimension 2, 388  
 modèle  $\sigma$  non linéaire : stabilité  
     du point fixe gaussien, 388  
 modèle  $\sigma$  non linéaire : sur réseau, 382  
 modèle  $\sigma$  non linéaire : température  
     critique, 398  
 modèle  $\sigma^4$  général : à deux paramètres,  
     302  
 modèle  $\sigma^4$  général : EGR, 297  
 modèle  $\sigma^4$  général : fonction  $\beta$ , 297  
 modèle  $\sigma^4$  général : fonction  $\eta$ , 297  
 modèle  $\sigma^4$  général : fonction  $\nu$ , 298  
 modes de Goldstone : *cf.* Goldstone,  
     185  
 mouvement brownien, 71

**O**

ondes de spin, 392  
 opérateur d'annihilation, 105  
 opérateur de création, 105  
 opérateur de masse, 315  
 opérateur intégral, 79  
 opérateur position, 93, 105  
 Ornstein–Zernike : forme d', 198, 209  
 oscillateur harmonique perturbé, 129  
 oscillateur harmonique quantique, 107

**P**

paramètre de coupure, 334  
 paramètre d'ordre, 157, 179  
 point fixe, 62, 65, 78, 241, 242  
 point fixe : cubique, 294  
 point fixe : gaussien, 247, 442  
 point fixe : gaussien : perturbations propres, 250  
 point fixe : non gaussien : développement en  $\varepsilon$ , 253  
 point fixe : non gaussien :  $O(N)$ , ordre  $\varepsilon$ , 278  
 point fixe : non gaussien :  $O(N)$ , stabilité, 298  
 point fixe : non gaussien : ordre  $\varepsilon$ , 271  
 point fixe : stabilité, 63, 79, 291  
 point fixe : stabilité : et dimension du champ, 299  
 point fixe : stabilité : locale, 441  
 point tricritique, 224  
 points fixes : flot entre, 289  
 polymères : propriétés statistiques, 283  
 potentiel thermodynamique, 140  
 prolongement dimensionnel, 266, 323  
 propagateur, 263, 310  
 propagateur : massif en dimension 2, 449  
 propagateur : régularisé, 421  
 propriété d'amas, 144  
 propriété d'amas, 99, 461

**R**

rapports d'amplitudes, 369  
 rapports d'amplitudes, 170  
 rapports d'amplitudes, 210

rapports d'amplitudes : résultats numériques, 285  
 redondante : perturbation, 66  
 redondants : vecteurs, perturbations propres, 244  
 régularisation, 313  
 régularisation : de Pauli–Villars, 390  
 régularisation : dimensionnelle, 323, 391  
 régularisation : infrarouge, 392  
 régularisation : par réseau, 391  
 relation de commutation canonique, 105  
 renormalisabilité, 331  
 renormalisation, 56, 61, 78  
 renormalisation : conditions de, 337  
 renormalisation : constantes de, 337  
 renormalisation : de masse, 112, 262  
 renormalisation : du champ, 237, 420  
 renormalisation : gaussienne, 334  
 représentation de Fourier, 145  
 représentation non-linéaire du groupe  $O(N)$ , 385

**S**

sensibilité aux conditions aux limites, 157  
 série asymptotique, 37  
 série de Laurent, 452  
 série divergente, 37  
 séries de Fourier, 451  
 spins classiques, 138  
 spins indépendants, 162  
 stabilité du point fixe isotrope, 299  
 Stirling : formule de, 39  
 surface critique, 241  
 symétrie du carré, 228  
 symétrie  $O(N)$  : hamiltonien général, 355  
 symétries continues, 183, 212  
 systèmes ferromagnétiques : définition, 138

**T**

température, 138  
 temps de relaxation, 86  
 tenseur métrique sur la sphère, 389

théorème de la limite centrale, 51  
 théorème de Mermin–Wagner–  
     Coleman, 185, 362, 392  
 théorème de renormalisation, 337  
 théorème de Wick : *cf.* Wick, 28  
 théorie de Landau, 210  
 théorie des champs :  $(\phi^2)^2$  : limite  
      $N \rightarrow \infty$ , 364  
 théorie des champs : développement  
     perturbatif, 312  
 théorie des champs : gaussienne, 309  
 théorie des champs : renormalisable,  
     332  
 théorie des champs :  
     super-renormalisable, 338  
 théorie des perturbations, 28, 129  
 théorie des perturbations : et mini-  
     mum du potentiel, 130  
 théorie quantique des champs :  
     interaction, 311  
 théorie statistique des champs, 233  
 théorie statistique des champs : déve-  
     loppement perturbatif, 307  
 transformation de Fourier, 52, 456  
 transformation de Fourier : décrois-  
     sance et régularité, 451  
 transformation de Legendre, 140, 147,  
     236  
 transformation de Legendre :  
     et méthode du col, 152  
 transformation de Legendre :  
     inversibilité, 148  
 transformation de Legendre :  
     stationnarité, 141, 148  
 transition de phase, 157, 181

transition de phase :  
     de Kosterlitz–Thouless, 185  
 transition de phase : dimension infinie,  
     163  
 transition de phase : du second ordre  
     ou continue, 169  
 transition de phase : liquide–vapeur,  
     283  
 transition de phase :  $O(2)$ , 185  
 transition de phase : premier ordre,  
     168  
 transition de phase : superfluide  
     de l’hélium, 283

## U

universalité, 56, 64, 77, 241, 348  
 universalité : classe, 66  
 universalité : dimension infinie, 169  
 universalité : domaine critique, 245

## V

variables aléatoires à valeurs entières,  
     58  
 vertex d’interaction, 312

## W

Wick : théorème de, 28, 128, 225, 311

## Z

zone de Brillouin, 192