



SCIENCES SUP



*Cours et exercices corrigés*

Licence • Master • Écoles d'ingénieurs

# RELATIVITÉ RESTREINTE

## Bases et applications

*Claude Semay  
Bernard Silvestre-Brac*

DUNOD

# RELATIVITÉ RESTREINTE

## Bases et applications

***Claude Semay***

Chercheur qualifié FNRS  
à l'université de Mons-Hainaut (Belgique)

***Bernard Silvestre-Brac***

Chargé de recherches CNRS  
au laboratoire de Physique Subatomique  
et de Cosmologie de Grenoble

DUNOD

# Consultez nos catalogues sur le Web



**www.dunod.com**

Illustration de couverture : *Raoul Giordan*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2005

ISBN 2 10 049483 X

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Avant-propos

- *Oui, mais qui a raison en réalité ? insista M. Tompkins.*
- *Vous ne pouvez pas poser une question aussi générale.*  
*En relativité, les observations sont toujours rapportées*  
*à un observateur particulier, un observateur*  
*dont le mouvement est bien défini relativement à ce qui est observé.*

Extrait d'un dialogue entre M. TOMPKINS et le professeur

Depuis qu'Albert Einstein a, en 1905, jeté les bases d'une des théories les plus fondamentales de l'histoire des sciences, la relativité restreinte, des centaines de livres et des milliers d'articles ont été publiés sur le sujet. Rechercher, dans un ouvrage comme celui-ci, l'originalité à tout prix n'aurait donc été ni aisé ni, sans doute, pédagogiquement avantageux. Nous croyons cependant que ce manuel se distingue d'autres livres par trois caractéristiques : premièrement, l'utilisation d'une représentation graphique originale de la relativité restreinte ; deuxièmement, l'illustration de la théorie par des exemples (académiques) basés sur les (futurs ?) voyages interstellaires ; troisièmement, la dérivation des équations de transformation à la fois par une démarche historique et par une approche moderne beaucoup plus générale.

Nombre de nos concepts, basés sur le sens commun, doivent être abandonnés en relativité restreinte, dont le plus solidement ancré en nous est sans doute le caractère absolu du temps. La relativité d'Einstein est par bien des aspects une théorie étrange. Heureusement, cela n'interdit nullement qu'elle puisse être bien comprise si l'on veut bien se donner la peine de lui accorder l'attention qu'elle mérite. Un peu d'aide étant cependant toujours la bienvenue, nous avons illustré aussi souvent que possible certains développements formels de la théorie par une approche graphique originale due à F. W. Sears et R. W. Brehme. Nous pensons qu'une représentation graphique des concepts de base de la relativité restreinte peut fortement aider à la compréhension de la théorie et, en particulier, des fameux « paradoxes » qu'on lui attribue.

Comme dans beaucoup de manuels, nous illustrons la théorie par des applications tirées, aussi souvent que possible, de publications scientifiques. Dans cet ouvrage, nous faisons de plus appel à des exercices académiques basés sur les véhicules spatiaux. S'il est vrai que les fusées, et autres astronefs, ne sont pas des objets relativistes, on ne peut toutefois pas rejeter le fait qu'ils le deviennent un jour, dans un futur peut-être lointain. Nous pensons en outre que ces « applications », toujours développées avec rigueur, peuvent apporter un peu de fantaisie et de rêve dans un texte parfois (souvent ?) austère. C'est également dans le but d'agréments un peu le manuel que des illustrations issues de vieux magazines de science-fiction ont été ajoutées.

Dans ce livre, les équations de transformation de la relativité restreinte sont établies en se basant sur l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide. Cette démarche, qui est la plus utilisée et sans doute aussi la plus simple, n'est cependant pas la plus générale. Nous démontrerons donc l'existence d'une vitesse limite invariante dans l'univers en partant d'hypothèses très raisonnables sur la structure de l'espace-temps. Cela se fait indépendamment de la théorie électromagnétique, celle-ci ne fournissant qu'un cadre pratique pour mesurer cette vitesse.

Cet ouvrage ne se prétend nullement exhaustif. En particulier, certains points difficiles de la théorie de la relativité restreinte, comme les représentations des groupes de Lorentz ou de Poincaré, ne seront pas abordés. Bien qu'un chapitre important soit consacré aux connexions existant entre la relativité restreinte et l'électromagnétisme, cette dernière théorie est loin d'être complètement couverte.

Ce manuel s'adresse avant tout aux étudiants n'ayant encore aucune notion de la théorie de la relativité restreinte, mais des lecteurs plus avertis doivent pouvoir cependant y trouver de nombreuses matières à réflexion.

Nous proposons ici un petit guide de lecture. Certains mots importants, souvent propres à la théorie de la relativité restreinte, sont écrits en italique lorsqu'ils apparaissent pour la première fois dans le texte. Nous insistons sur un mot ou un bout de phrase en l'écrivant en gras. Certaines sections marquées d'un astérisque (\*) abordent des sujets plus difficiles ou pouvant être omis dans une première lecture. Les nombreuses références citées dans le texte, ainsi que les ouvrages repris dans la bibliographie, permettent au lecteur d'approfondir certains points particuliers. L'indication « biblio » signale qu'une référence est mentionnée dans la bibliographie.

Une bonne compréhension d'une théorie se traduit par la capacité à résoudre des problèmes spécifiques. À la fin de chaque chapitre, des exercices sont donc proposés au lecteur – dans un ordre de difficulté, approximativement et très subjectivement, croissante. Les exercices sont par nature une œuvre collective. Certains de ceux que nous proposons sont inspirés de problèmes parus dans d'autres manuels, cités dans la bibliographie ; d'autres sont extraits d'examens dont nous avons eu connaissance ; quelques-uns sont de notre cru. Des notes sur ces exercices, donnant les solutions – quand elles ne sont pas contenues dans l'énoncé du problème – ou des informations complémentaires, sont rassemblées à la fin de l'ouvrage.

Le manuel se clôture par quelques annexes. Nous ne saurions trop conseiller leur lecture, en particulier celle consacrée aux unités dites naturelles et celle où sont discutées les notions (trop souvent confondues) de grandeurs invariantes, conservées et constantes.

La rédaction de cet ouvrage a bénéficié des observations et critiques de nombreux lecteurs, étudiants, enseignants et amis. Nous les remercions tous chaleureusement, en particulier Fabien Buisseret, Benjamin Fuks et Vincent Mathieu. Nous remercions aussi Daniel Flipo pour ses nombreux conseils de T<sub>E</sub>Xnicien. Nous tenons également à exprimer toute notre gratitude à Raoul Giordan qui nous a permis d'illustrer cet ouvrage avec quelques-uns de ses dessins.

# Table des matières

<b>AVANT-PROPOS</b>	<b>V</b>
<b>CHAPITRE 1 • LE CONCEPT DE LA RELATIVITÉ</b>	<b>1</b>
1.1 La notion de référentiel	1
1.2 Les transformations de Galilée	8
1.3 Michelson, la Terre et l'éther	10
1.4 Les postulats d'Einstein	13
1.5 La relativité du temps	16
1.6 L'expérience de Kennedy-Thorndike	18
1.7 La vitesse de la lumière	20
1.8 Avant d'aller plus loin	21
<b>EXERCICES</b>	<b>22</b>
<b>CHAPITRE 2 • TRANSFORMATIONS DE LORENTZ SPÉCIALES</b>	<b>26</b>
2.1 Transformations de Lorentz	26
2.2 Approches graphiques	38
<b>EXERCICES</b>	<b>48</b>
<b>CHAPITRE 3 • LE TEMPS ET LA RELATIVITÉ</b>	<b>50</b>
3.1 La notion de simultanéité	50
3.2 Temps propre et dilatation des temps	52
3.3 Structure causale de l'espace-temps	55
3.4 Vitesses supraluminiques et voyages dans le temps	56
3.5 Présents absolu et relatif	58
3.6 * La flèche du temps	60
3.7 Le « paradoxe » des jumeaux	61
<b>EXERCICES</b>	<b>68</b>

CHAPITRE 4 • L'ESPACE ET LA RELATIVITÉ	73
4.1 Contraction des longueurs	73
4.2 Invariance de la dimension transversale	75
4.3 Transformation des angles	76
4.4 Transformation des volumes	77
4.5 Méson $\pi$ en mouvement rapide	78
4.6 Le train et le tunnel	80
EXERCICES	82
CHAPITRE 5 • LA VITESSE ET LA RELATIVITÉ	86
5.1 Composition des vitesses	86
5.2 Expérience de Fizeau	89
5.3 Illusions relativistes	91
EXERCICES	97
CHAPITRE 6 • RECONSTRUIRE LA RELATIVITÉ RESTREINTE	101
6.1 Définition d'un groupe	101
6.2 * Nouvelle dérivation des transformations de Lorentz	102
6.3 Structure de groupe et rapidité	111
6.4 Du relatif et de l'absolu	113
EXERCICES	114
CHAPITRE 7 • TRANSFORMATIONS DE LORENTZ GÉNÉRALES	116
7.1 Non-commutativité des transformations spéciales	116
7.2 Transformations de Lorentz avec et sans rotation	118
7.3 * Précession de Thomas	123
7.4 Transformations non homogènes	128
7.5 Loi générale de composition des vitesses	129
EXERCICES	130

---

CHAPITRE 8 • QUADRIVECTEURS	133
8.1 L'espace-temps de Minkowski	134
8.2 Propriétés des quadrivecteurs et métrique de Minkowski	137
8.3 Groupe de Lorentz	143
8.4 Intervalle de temps propre	146
8.5 Quadrivecteur vitesse	148
8.6 Vitesse relative	150
8.7 Quadrivecteur accélération	151
8.8 Mobile à accélération propre constante	154
EXERCICES	159
 CHAPITRE 9 • DYNAMIQUE RELATIVISTE	 166
9.1 Équation fondamentale	166
9.2 Équivalence masse-énergie	170
9.3 Quadrivecteur énergie-impulsion	173
9.4 Quadrivecteur force	175
9.5 Particules de masse nulle	176
9.6 Quadrivecteur fréquence	186
EXERCICES	188
 CHAPITRE 10 • SYSTÈMES DE PARTICULES	 195
10.1 Conservation du quadrivecteur énergie-impulsion	195
10.2 Astronefs relativistes	197
10.3 Référentiel du centre de masse	203
10.4 Désintégrations et collisions	207
10.5 Systèmes à deux particules dans la voie finale	214
10.6 * Systèmes à trois particules dans la voie finale	220
EXERCICES	224
 CHAPITRE 11 • LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE	 233
11.1 Champs tensoriels et dérivées covariantes	233



11.2	Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques	235
11.3	Quadrivecteur densité de courant électrique	237
11.4	Quadrivecteur potentiel	238
11.5	Tenseur électromagnétique	239
11.6	Transformation du champ électromagnétique	242
11.7	Force de Lorentz	244
11.8	Ondes planes	246
11.9	Mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme	248
11.10	* Potentiel et champ d'une charge en mouvement	249
	<b>EXERCICES</b>	254
	<b>SOLUTIONS DES EXERCICES</b>	260
	<b>POSTFACE</b>	277
	<b>ANNEXE A • UNITÉS NATURELLES</b>	278
	<b>ANNEXE B • QUANTITÉS INVARIANTES, CONSERVÉES ET CONSTANTES</b>	280
	<b>ANNEXE C • GROUPE DE POINCARÉ</b>	282
	<b>ANNEXE D • LES MÉTRIQUES DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE</b>	284
	<b>ANNEXE E • LE PARADOXE EPR</b>	287
	<b>LEXIQUE FRANÇAIS-ANGLAIS</b>	290
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	291
	<b>RÉFÉRENCES DES CITATIONS</b>	293
	<b>INDEX</b>	294

## Chapitre 1

# **Le concept de relativité**

*Je ne peux rien vous prouver si vous ne me laissez faire aucune mesure.  
La mesure est pour moi le seul moyen de trouver les lois de la nature.  
Je ne suis pas un métaphysicien.*

Arthur S. EDDINGTON (1921)

## **1.1 LA NOTION DE RÉFÉRENTIEL**

### **1.1.1 Systèmes de référence**

L'homme désire comprendre le monde qui l'entoure et le pourquoi des choses. Il tire même une gloire personnelle à pouvoir faire des prédictions sur les phénomènes naturels. Pour ce faire, il doit effectuer des mesures, les plus précises possible, sur des quantités susceptibles d'intervenir dans la description de ces phénomènes. Or ces quantités dépendent de l'observateur et de ce par rapport à quoi il effectue ses mesures.

Considérons un homme  $A$  assis dans un train en marche. Il pense légitimement être au repos car il est immobile par rapport à tout son environnement proche : son voisin assis en face de lui, son livre sur les genoux, sa valise dans le compartiment à bagages sont fixes par rapport à lui. Le train passe devant un passage à niveau où un autre individu  $B$  laisse tomber un caillou en attendant l'ouverture de la barrière. Ce personnage pense également être au repos car il est immobile par rapport à la barrière, par rapport à l'arbre voisin. Il voit aussi son caillou tomber à ses pieds selon la verticale. En revanche, il voit  $A$  passer devant lui et manifestement il ne

considère pas ce dernier comme étant au repos. Du point de vue de  $A$ ,  $B$  n'est pas au repos non plus puisqu'il défile devant lui. De même la trajectoire du caillou n'est pas une droite verticale, mais une courbe qui peut ne pas être simple selon le mouvement du train. Pendant le temps de chute du caillou, le train a avancé et, par rapport au train, le point de contact du caillou au sol n'est pas à la verticale de son point de lâcher. Les deux personnages  $A$  et  $B$  ne « voient » pas les mêmes choses, pourtant ils doivent être en mesure d'en déduire l'un et l'autre ce qui se passe réellement, car les phénomènes naturels et les événements ont une réalité intrinsèque indépendante de la façon dont on les appréhende. Connaissant le mouvement du train par rapport à lui,  $B$  doit être en mesure de savoir que  $A$  est immobile dans le train. De même  $A$ , connaissant le mouvement de l'arbre par rapport à lui, doit être en mesure de savoir que  $B$  est immobile par rapport à l'arbre et, à partir de la mesure de la trajectoire du caillou dans le train, il doit aussi être en mesure d'en déduire que le caillou tombe verticalement par rapport à  $B$ .

Autrement dit, l'homme a besoin de repères dans l'espace et dans le temps. Considérons d'abord les propriétés de l'espace. Toute mesure doit être faite par rapport à « quelque chose ». Ce « quelque chose » demande à être précisé et se nomme un *système de référence* ou *référentiel*. Celui-ci est un ensemble infini continu de points (au sens mathématique du terme) tels qu'ils sont fixes les uns par rapport aux autres. Cette propriété est le fait d'un corps solide et un système de référence pourrait être un solide, à condition qu'il ait une extension suffisamment importante pour recouvrir tous les phénomènes qui nous intéressent. C'est un fait d'expérience que, pour décrire notre espace, il faut désigner un point spécial  $O$ , appelé origine, et trois axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , que l'on peut prendre mutuellement orthogonaux (formant, par exemple un trièdre direct). En termes mathématiques, on dit que l'espace est *affine* à trois dimensions. La donnée de l'origine et des trois axes constitue un « référentiel d'espace » (ou un « repère », ou un « système de référence ») et, par définition, ces éléments sont **fixes** les uns par rapport aux autres. Un autre référentiel est défini par une autre origine  $O'$  et par trois autres axes  $O'x'$ ,  $O'y'$ ,  $O'z'$  qui, eux-aussi, sont fixes les uns par rapport aux autres. Par contre, ce nouveau référentiel peut se déplacer, de manière rigide, dans le premier référentiel. La formalisation des phénomènes physiques dans chacun des référentiels et le lien entre les quantités mathématiques qui les décrivent est la question de base du physicien.

Et le temps ? Le temps est mesuré par une horloge et jouit d'un statut spécial : en mécanique classique (newtonienne) le temps est absolu, indépendant du repère. Toutes les horloges dans tous les référentiels peuvent être synchronisées. Le voyageur prenant le train à Paris règle sa montre sur l'horloge de la gare. En arrivant à Bruxelles, il compare l'heure de sa montre à celle indiquée par l'horloge de la gare d'arrivée (qui est supposée synchronisée sur celle de Paris) : elle marque exactement la même heure, et ceci quel que soit le mouvement du train le long du parcours.

En relativité, même restreinte, qui nous intéresse ici, il n'en va plus de même. Le temps dépend du mouvement ; il ne peut être absolu. Ainsi, pour définir proprement un référentiel, on doit lui affecter également son propre système d'horloges syn-

chronisées (voir section 2.1.2). La lecture du temps sur l'horloge définit un nouvel axe, temporel, sur lequel il faut également définir une origine. Il faut toutefois se garder de mettre sur le même pied le temps et l'espace. S'il est vrai que le temps peut être considéré comme une quatrième dimension, elle est de nature différente des dimensions spatiales, même en relativité. En effet, dans un référentiel donné, un objet peut explorer une direction spatiale dans un sens ou dans l'autre. Par contre, son évolution se fait toujours dans un seul sens du temps, vers le futur. La raison profonde de cette dissymétrie est encore mal connue (voir section 3.6).

Pour résumer cette longue discussion, un référentiel  $\mathcal{R}$  est fixé par la donnée d'une origine  $O$  dans l'espace et dans le temps, et de 4 axes de repérage : trois axes dans des directions, par exemple, mutuellement orthogonales et un dans la « direction du temps ». En mécanique classique, on omet souvent l'axe des temps car il n'est pas spécifique à un repère particulier. En relativité, on utilise abusivement le nom de référentiel en se restreignant au référentiel spatial lorsqu'on se concentre uniquement sur la partie espace ; c'est de pratique courante et nous tomberons souvent dans cet abus de langage qui ne porte pas à conséquence. Dans la suite, nous utiliserons fréquemment la notion de *référentiel propre* : le référentiel propre d'un observateur ou d'un objet est le référentiel dans lequel cet observateur ou cet objet est au repos.

Signalons enfin que l'espace de la relativité restreinte est euclidien et que tous les théorèmes de géométrie euclidienne (rapport du périmètre d'un cercle à son rayon, théorème de Pythagore, somme des angles d'un triangle égale à  $180^\circ$ , etc.) y ont cours. En relativité générale, cette propriété n'est plus vraie car la géométrie dépend du contenu en matière et seul le vide est euclidien. À strictement parler, lorsque nous utilisons le terme référentiel, nous sous-entendons toujours un espace vide ou un espace pour lequel la densité de matière est trop faible pour induire une modification significative à la géométrie euclidienne. Dans cet ouvrage, c'est toujours dans ce cadre que nous emploierons le terme référentiel.

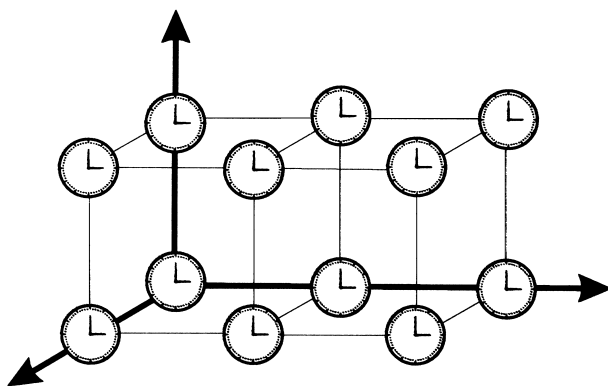
### 1.1.2 Systèmes de coordonnées

Se fixer un référentiel est une étape indispensable pour étudier la nature, mais cela ne suffit pas. Dire par rapport à quoi on fait une mesure c'est bien, encore faut-il maintenant effectuer les mesures proprement dites et affecter des nombres à celles-ci. Pour cela, nous avons d'abord besoin d'une unité de longueur et d'une unité de temps. Chaque axe du référentiel peut ainsi être gradué.

Un *événement* est, par définition, un point de l'espace et du temps. Il repère un phénomène naturel qui a lieu en un point bien précis de l'espace et en un temps bien précis, par exemple un flash lumineux ou le passage d'une particule. Comme nous le verrons plus loin, la relativité restreinte est avant tout une bonne gestion des événements. L'événement est déterminé sans ambiguïté par 3 nombres  $(x, y, z)$  qui donnent sa position par rapport aux 3 axes spatiaux, que nous prenons orthonormés (orthogonaux et normés) par commodité, et un temps  $t$  repéré sur l'axe du temps.

Comment fait-on, en pratique, la mesure d'un événement ? Pour la coordonnée temporelle, on utilise une horloge étalonnée suivant l'unité de temps ou une sous-

unité. Pour les coordonnées d'espace, on utilise une règle étalonnée aussi suivant l'unité et ses sous-multiples (on supposera que ce sont les mêmes sur chacun des axes). Par la pensée, on peut faire, grâce à cette règle, un découpage régulier de l'unité, repéré par des traits, aussi fins que souhaité, sur chacun des axes d'espace. À partir de ces axes, on construit un maillage de tous les points d'espace qui ont pour coordonnées l'un quelconque des repères sur chacun des axes. On obtient une sorte de « cristal » dont chaque sommet est étiqueté de façon unique par les coordonnées correspondant aux multiples de l'unité ou de ses sous-unités. Enfin, à chaque sommet on affecte une horloge. Le cadran des horloges est gradué par l'unité de temps choisie, et éventuellement des sous-multiples de cette unité. Les horloges, supposées identiques et parfaites, de tous les points du référentiel sont synchronisées (nous précisons comment synchroniser celles-ci dans la section 2.1.2). Un événement déclenche, par un mécanisme approprié, le blocage de l'horloge sur une graduation et l'allumage du « sommet du cristal » où il a lieu. La mesure consiste à lire l'indication de l'horloge, qui fournit le temps  $t$ , et l'examen du sommet allumé fournit les trois coordonnées d'espace  $(x, y, z)$ . Ces nombres  $(t, x, y, z)$ , obtenus par projection sur chacun des axes, s'appellent les *coordonnées cartésiennes* de l'événement. On recommence cette opération pour tous les événements qui nous intéressent et, si on veut des mesures encore plus précises, on réduit l'écart du maillage en utilisant une sous-unité plus petite, et on réduit l'écart entre les graduations des horloges. On a représenté sur la figure 1.1 un tel « cristal d'horloges » qui est nécessaire pour définir correctement un événement.



**Figure 1.1** Un cristal d'horloges, toutes synchronisées en tous les points du maillage de l'espace, est nécessaire pour définir les coordonnées des événements.

Cette façon de structurer l'espace et le temps comme un « cristal d'horloges » est une vue idéale qui permet de définir proprement un événement et qui simule la quatrième dimension, relative au temps. D'un point de vue pratique, on ne met évidemment pas une horloge en chaque point étiqueté de l'espace. Pour décrire un phé-

nomène se déroulant dans l'espace et dans le temps, on se borne en général à mettre une horloge au départ de celui-ci, une autre à la fin, puis on interpole tous les points intermédiaires par une loi mathématique adéquate et vraisemblable. Dans la suite de cet ouvrage, il sera très souvent question d'événements, et on sous-entend que ceux-ci peuvent être déterminés de façon précise par l'existence implicite d'un « cristal d'horloges » ou d'un procédé qui lui est équivalent.

Concentrons-nous sur la position dans l'espace. Nous l'avons compris, un point est déterminé par trois nombres : ses coordonnées cartésiennes sur chacun des axes. Dans ce cas précis, ces nombres ont pour dimension une longueur. Mais l'utilisation des coordonnées cartésiennes, bien que très pratique, n'est pas une nécessité. Il nous suffit d'avoir une prescription qui définit un point de l'espace de façon non ambiguë. Pour cela il nous faut 3 nombres  $(u, v, w)$  et un procédé permettant de déterminer le point de façon unique. Ce procédé consiste souvent en pratique à définir ces nombres comme fonctions des coordonnées cartésiennes  $(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ , permettant une correspondance univoque. Une fois cette transformation effectuée, on dit qu'on a défini un autre jeu de coordonnées et on appelle ce nouveau jeu les *coordonnées curvilignes*, par opposition aux coordonnées cartésiennes (voir annexe D).

Les étudiants ont souvent tendance à confondre le concept de référentiel et celui de système de coordonnées. Précisons à nouveau la différence. Un référentiel définit un cadre, un contenu dans lequel on effectue des mesures, indépendamment de la façon dont on effectue celles-ci. Un système de coordonnées est un procédé permettant, dans un référentiel donné, de déterminer de façon unique un point de ce référentiel. On peut très bien imaginer travailler avec des coordonnées cartésiennes dans deux référentiels différents (et vous verrez par la suite que nous ne nous en priverons pas !) ; on peut aussi, dans le même référentiel, utiliser des systèmes de coordonnées différents. Les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques sont très utilisés en pratique.

### 1.1.3 Référentiels d'inertie

Parmi tous les référentiels imaginables, certains vont jouer un rôle incontournable, ce sont les *référentiels d'inertie*, ou *référentiels inertiels*, ou *référentiels galiléens*. Pour comprendre ce point, il convient de remarquer que la vitesse ou la trajectoire d'un point matériel sont des quantités qui dépendent du référentiel. La façon dont les quantités cinématiques se modifient en fonction des perturbations extérieures, nommées forces, fait l'objet de lois. Les lois de la mécanique classique<sup>1</sup> ont été énoncées par Newton, après que Galilée ait grandement déblayé le terrain du point de vue conceptuel. La première loi peut être formulée de la façon suivante :

1. Pour des informations détaillées sur la mécanique classique, on peut consulter, par exemple, les ouvrages suivants : le cours de Berkeley (biblio) ; l'ouvrage de H. Goldstein, C. Poole et J. Safko (biblio) ; Philippe Spindel, *Mécanique*, Gordon and Breach Science Publishers, vol. 1 et 2, 2001-2002 ; Claude Gignoux et Bernard Silvestre-Brac, *Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*, EDP Sciences, 2002.

Il existe une classe de référentiels particuliers, nommés référentiels galiléens, dans lesquels tout corps conservera son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, en l'absence de force extérieure agissant sur lui.

Il s'agit d'un postulat, mais cautionné par plusieurs siècles d'expériences. De ce postulat même, on conclut que les référentiels galiléens se déduisent les uns des autres par un mouvement rectiligne uniforme. On peut dire qu'il existe une *relation d'équivalence* au sens mathématique du terme entre les référentiels d'inertie, c'est-à-dire une relation qui possède les propriétés suivantes :

- *Réflexivité* : tout référentiel  $\mathcal{R}$  est équivalent à lui-même ;
- *Symétrie* : si un référentiel  $\mathcal{R}$  est équivalent à un référentiel  $\mathcal{R}'$ , alors la réciproque est vraie ;
- *Transitivité* : si les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont équivalents et qu'il en est de même pour les référentiels  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$ , alors les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}''$  sont équivalents.

Nous verrons que ces propriétés sont cohérentes avec la seconde loi. Celle-ci stipule :

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces  $\vec{F}$  appliquée à un corps est le produit de sa masse  $m$  par son accélération  $\vec{\phi}$

$$\vec{F} = m \vec{\phi}. \quad (1.1)$$

En général l'expression de la force dépend de la position et de la vitesse, et cette seconde loi, aussi nommée principe fondamental de la dynamique, permet de déterminer par calcul l'évolution dans le temps de ce corps matériel. La troisième loi concerne l'égalité des forces d'action et de réaction. Elle suppose une interaction instantanée entre les corps et ne peut s'accommoder de la relativité restreinte. Nous n'en ferons pas usage par la suite, mais nous en reparlerons brièvement dans la section 11.10.

Naïvement, on a l'impression que la seconde loi contient la première puisque si on annule la force, on déduit que la vitesse est constante. En fait il n'en est rien. Si on veut pouvoir énoncer la seconde loi, il faut au préalable dire dans quel référentiel on se place et, pour cela, il faut se baser sur la première loi. On veut énoncer des lois simples. Mais cette simplicité ne peut pas être universelle, et le cadre dans lequel elle s'applique est celui des systèmes dits galiléens.

Présupposer l'existence de référentiels d'inertie est une chose ; avoir la certitude que nous effectuons nos mesures par rapport à un de ceux-ci en est une autre, autrement plus difficile à vérifier. On effectue toujours des mesures avec une certaine précision ; si le référentiel utilisé n'est pas tout à fait galiléen, mais que les corrections apportées de ce fait sont inférieures à la précision de nos mesures, ce n'est pas très gênant, et on peut dire qu'avec une bonne approximation on travaille dans un référentiel galiléen.

Pour la plupart des expériences de la vie courante, un système référentiel lié à la Terre peut être considéré comme galiléen. Mais la Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil et, pour des expériences concernant les mouvements célestes, on choisit plutôt le système de Copernic centré sur le Soleil et dont les axes pointent vers des « étoiles fixes ». Mais ces étoiles sont emportées dans un tourbillon autour du centre de la Galaxie et la Galaxie elle-même se déplace par rapport aux galaxies environnantes. La quête d'un vrai référentiel d'inertie n'est donc pas une sinécure ! Dans la section suivante, nous donnons une piste pour sa détermination.

Heureusement, pour mettre au point la théorie, il n'est pas nécessaire de se préoccuper trop de ces « détails pratiques ». On se borne à dire qu'il existe des référentiels d'inertie et qu'on travaille dans leur cadre. C'est ainsi que fonctionne la théorie de la relativité restreinte. Le but de la relativité générale est de se démarquer de cette contrainte et d'établir les lois de la physique dans des référentiels quelconques.

#### 1.1.4 \* Le référentiel universel

L'Univers est baigné par un rayonnement de corps noir, le rayonnement cosmique de fond, dont la température absolue est d'environ 2,7 K. Cette radiation électromagnétique, reliquat du big-bang, provient de toutes les directions du ciel. On détecte toutefois une anisotropie qui peut s'interpréter comme un effet Doppler (voir sections 3.7.2 et 9.5.2) dû au déplacement de la Terre dans l'espace <sup>2</sup>. Il semble donc exister un référentiel d'inertie privilégié (plus précisément une classe privilégiée de référentiels) que l'on peut considérer, dans un certain sens, comme au repos par rapport aux grandes structures de l'univers (amas de galaxies) car le rayonnement cosmique de fond y est parfaitement isotrope ; appelons-le « référentiel universel ».

Si on fait l'hypothèse qu'il existe bien un référentiel d'inertie privilégié – le référentiel universel est un bon candidat, il est possible de développer une théorie « test » différente de la relativité restreinte. Des observations expérimentales sont alors en mesure de trancher en faveur d'une des deux théories. Jusqu'à présent, aucune déviation notable par rapport à la théorie d'Einstein n'a pu être mise en évidence <sup>3</sup>.

2. Voir, par exemple, l'ouvrage de Bernard Schutz, *Gravity from the ground up*, Cambridge University Press, 2003, p. 355. L'anisotropie mesurée correspond à une vitesse de déplacement de la Terre d'environ 350 km/s par rapport au référentiel universel.

3. Pour plus d'information, on peut consulter les références suivantes : H. P. Robertson, « Postulate versus Observation in the Special Theory of Relativity », *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, n° 3, July 1949, p. 378-382 ; Reza Mansouri et Roman U. Sexl, « A Test Theory of Special Relativity: I. Simultaneity and Clock Synchronization », *General Relativity and Gravitation*, vol. 8, n° 7, 1977, p. 497-513 ; *Id.*, « A Test Theory of Special Relativity: II. First Order Tests », *General Relativity and Gravitation*, vol. 8, n° 7, 1977, p. 515-524 ; *Id.*, « A Test Theory of Special Relativity: III. Second-Order Tests », *General Relativity and Gravitation*, vol. 8, n° 10, 1977, p. 809-814 ; G. Saathoff *et al.*, « Improved Test of Time Dilation in Special Relativity », *Physical Review Letters*, vol. 91, n° 19, 7 November 2003, p. 190403/1-4.



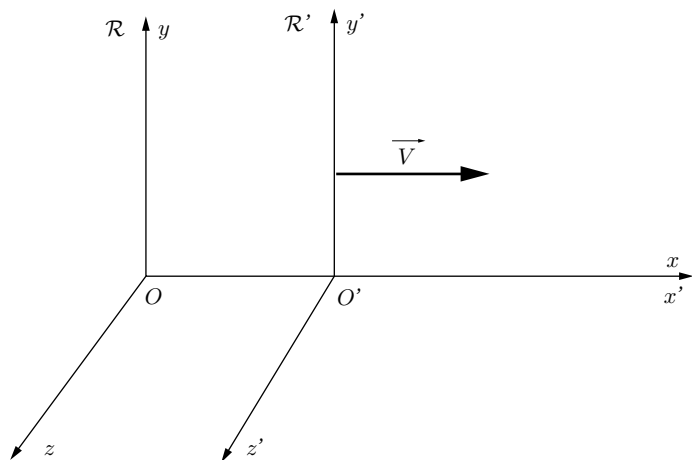
## 1.2 LES TRANSFORMATIONS DE GALILÉE

Comme nous l'avons vu, la mécanique fait jouer un rôle particulier aux systèmes de référence appelés référentiels d'inertie. La figure 1.2 montre les parties spatiales de deux tels référentiels dans une configuration particulière où leurs axes sont parallèles deux à deux et leur mouvement relatif est parallèle à un des axes. Une telle configuration sera fréquemment utilisée par la suite.

Au départ de toute théorie, il y a des postulats. La mécanique classique est basée, entre autres, sur un postulat fondamental appelé postulat de la *relativité galiléenne* :

Les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie.

Bien entendu, pour pouvoir effectuer des calculs sur un même phénomène physique dans deux référentiels distincts, il faut se donner des règles qui permettent de passer de l'un à l'autre. En particulier, il faut connaître les règles qui permettent de passer d'un jeu de coordonnées dans un référentiel à celui d'un autre référentiel. Ces règles s'appellent les *équations de transformation*. Celles qui respectent le postulat de la relativité galiléenne s'appellent les *transformations de Galilée*.



**Figure 1.2**  $\vec{V}$  étant une vitesse constante, si  $\mathcal{R}$  est un référentiel d'inertie,  $\mathcal{R}'$  l'est également.

Considérons un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$  se déplaçant avec une vitesse constante  $\vec{V}$  dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , de telle manière que les deux systèmes d'axes soient confondus quand les horloges des deux référentiels marquent l'instant 0. Un phénomène quelconque se produisant à la coordonnée  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$  dans  $\mathcal{R}$  se produit à la coordonnée  $\vec{r}'$  et à l'instant  $t'$  dans  $\mathcal{R}'$ . Les équations de transformation entre ces deux référentiels s'écrivent alors

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V} t', \quad (1.2)$$

$$t = t'. \quad (1.3)$$

Ces relations s'inversent simplement en remplaçant  $\vec{V}$  par  $-\vec{V}$ . Remarquons que, pour ces transformations, le temps est considéré comme absolu : il s'écoule de la même manière pour tous les observateurs, quel que soit leur état de mouvement.

Vérifions que ces transformations respectent bien le postulat de relativité galiléenne. La relation fondamentale de la dynamique pour une particule de masse  $m$  s'écrit

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (1.4)$$

où  $\vec{F}$  est le vecteur force qui s'exerce sur cette particule. Notons qu'en mécanique classique, la masse  $m$ , appelée plus précisément *masse d'inertie*, est considérée comme un attribut de la particule et ne peut dépendre de son état de mouvement. Dans un autre référentiel d'inertie, les transformations de Galilée donnent

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r} - \vec{V} t) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (1.5)$$

En outre, en mécanique classique, on suppose que la force qui agit sur la masse  $m$  est indépendante du référentiel par rapport auquel elle est mesurée. En effet, elle ne peut dépendre que des positions relatives et éventuellement des vitesses relatives des corps avec lesquels interagit la particule considérée ; ces deux caractéristiques sont des grandeurs indépendantes du référentiel et, par conséquent, il en est de même de la force. On a donc  $\vec{F}' = \vec{F}$ , ce qui implique

$$\vec{F}' = m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2}. \quad (1.6)$$

Autrement dit, la loi est la même dans les deux référentiels. En fait, une autre manière d'énoncer le postulat de la relativité galiléenne est :

Les expériences de mécanique faites à l'intérieur de référentiels d'inertie ne permettent pas de déceler la vitesse relative de ces référentiels.

Une conséquence immédiate des équations de transformation de Galilée est la loi d'addition des vitesses. Si un objet est animé d'une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et d'une vitesse  $\vec{v}'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , alors, en vertu des équations (1.2) et (1.3), on a

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}. \quad (1.7)$$

La lumière est une onde électromagnétique dont le comportement est régi par les équations de Maxwell. Si la lumière est affectée de la même manière que les particules par la loi de transformation (1.7) (voir section 11.6), alors la vitesse d'un rayon lumineux dépend du mouvement relatif de la source et de l'observateur. Nous allons voir que cela n'est en fait pas observé expérimentalement, en ce qui concerne le module de cette vitesse.

### 1.3 MICHELSON, LA TERRE ET L'ÉTHER

Avant d'aller plus loin, il convient de parler d'une notion introduite au XIX<sup>e</sup> siècle pour expliquer un certain nombre de phénomènes physiques. L'expérience a montré que les ondes mécaniques, comme les ondes sonores par exemple, nécessitent un milieu matériel pour se propager. Les ondes électromagnétiques se propagent également dans certains milieux matériels, mais elles possèdent en outre la propriété très remarquable de se propager dans le vide. Les physiciens du XIX<sup>e</sup> siècle, et en particulier Fresnel, n'admettaient pas l'idée d'une propagation sans support matériel. Ils imaginèrent donc un milieu hypothétique baignant tout l'univers, qu'ils baptisèrent *éther*, et dont les vibrations assuraient la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide<sup>4</sup>. La lumière ne devait alors se propager avec une vitesse bien définie  $c$ , prédite par la théorie électromagnétique, que dans les milieux au repos par rapport à l'éther<sup>5</sup>. Remarquons que l'éther devait posséder des propriétés contradictoires : il ne devait offrir aucune résistance aux déplacements planétaires, mais pour transmettre des ondes transversales comme la lumière, il devait être pratiquement incompressible.

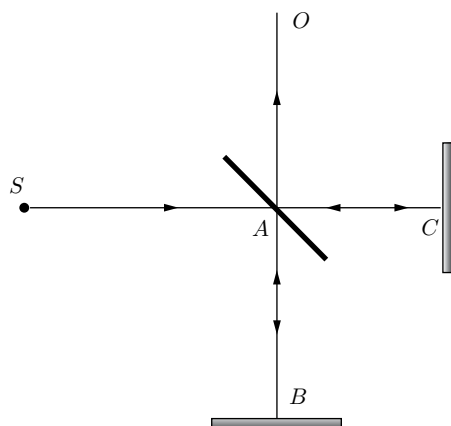
Vers 1880, les physiciens, pour qui l'éther restait le substrat indispensable à la propagation des rayons lumineux, vont imaginer un certain nombre d'expériences pour mettre en évidence son existence. Telle est l'origine de l'expérience, restée célèbre, de Michelson en 1881, renouvelée en 1887 par Michelson et Morley, et ultérieurement de nombreuses fois avec une précision sans cesse accrue.

Partant du principe que la Terre est en mouvement dans l'éther et que la vitesse de la lumière est constante par rapport à l'éther, Michelson suppose que la mesure de la vitesse de la lumière doit donner des résultats différents suivant l'orientation de la vitesse de la Terre par rapport à l'éther. L'idée est alors d'essayer de mettre en évidence ces variations en faisant intervenir des phénomènes d'interférence lumineuse dont on connaît l'intérêt en métrologie lorsqu'on veut réaliser des mesures fines.

---

4. L'idée qu'un « fluide » pouvait baigner tout l'univers fut introduite dès l'Antiquité. Aux « quatre éléments » (eau, air, terre et feu) supposés former le monde sublunaire ou monde terrestre, introduits par Empédocle et commentés par Platon, Aristote proposa d'ajouter un cinquième élément, l'éther, constituant inaltérable du monde céleste.

5. Autrement dit, les équations de propagation de la lumière ne devaient prendre exactement la forme (11.14) que dans ces milieux (voir section 11.2).



**Figure 1.3** Schéma de principe de l'expérience de Michelson et Morley.

La figure 1.3 montre le schéma de principe de l'expérience <sup>6</sup>. Un faisceau lumineux issu d'une source  $S$  est divisé en deux par une lame semi-transparente faisant un angle de  $45^\circ$  par rapport à ce faisceau. Un des rayons décrit la trajectoire aller retour  $AC$  avant d'être réfléchi par la lame vers l'observateur. L'autre rayon parcourt le bras  $AB$  puis traverse la lame avant d'atteindre l'observateur. Un tel dispositif est appelé un interféromètre. Pour l'expérimentateur, l'éclairement au point d'observation  $O$  dépend de la différence des temps de propagation  $\Delta t$  des deux rayons lumineux issus de  $S$  et se recombinant en  $O$ . Plus précisément, l'aspect interférentiel dépend de la différence de phase  $2\pi\nu\Delta t$ , où  $\nu$  est la fréquence du rayonnement. Les trajets  $SA$  et  $AO$  étant communs pour les deux rayons,  $\Delta t$  ne dépend que des temps de parcours  $t(AB)$  et  $t(AC)$  des rayons dans les bras  $AB$  et  $AC$ . Nous allons maintenant calculer la quantité  $t(AB) - t(AC)$  pour deux configurations différentes de l'interféromètre.

La figure 1.3 montre en fait la situation pour laquelle le dispositif serait immobile par rapport à l'éther. Supposons maintenant que l'ensemble soit en mouvement par rapport à l'éther dans lequel la lumière se propage, selon l'hypothèse de l'époque, avec la vitesse  $c$ . Considérons, par exemple, qu'au moment de l'expérience, la vitesse d'entraînement du système,  $\vec{V}$ , qui est en gros la vitesse de la Terre par rapport à l'éther, soit parallèle <sup>7</sup> à la direction du bras  $AB$ . Posons  $l_1 = AB$  et  $l_2 = AC$ . Calculons le temps que met un rayon lumineux pour parcourir le bras  $AB$  pour un trajet aller retour. Pour évaluer ce temps,  $t_1$ , plaçons-nous dans un référentiel lié à la Terre. Les vitesses s'ajoutant algébriquement, on aurait

6. Les difficultés expérimentales inhérentes à sa réalisation sont présentées dans un article de R. S. Shankland, « The Michelson-Morley experiment », *Scientific American*, vol. 211, 1964, p. 107-114.

7. Si ce n'est pas le cas, il faut introduire des variables angulaires, ce qui complique les calculs sans changer la conclusion.

$$t(AB) = t_1 = \frac{l_1}{c - V} + \frac{l_1}{c + V}. \quad (1.8)$$

Dans le bras AC, le temps  $t_2$  pour un trajet aller retour se calcule plus aisément dans un référentiel lié à l'éther (voir figure 1.4). Le rayon lumineux parcourt dans ce cas les deux bras d'un triangle isocèle (de base  $2h$ ) avec la vitesse  $c$ . On obtient

$$t(AC) = t_2 = \frac{1}{c} 2\sqrt{l_2^2 + h^2} \quad \text{avec} \quad V t_2 = 2h, \quad (1.9)$$

puisque la distance  $2h$  est parcourue en une durée  $t_2$  à la vitesse  $V$ . On en tire aisément

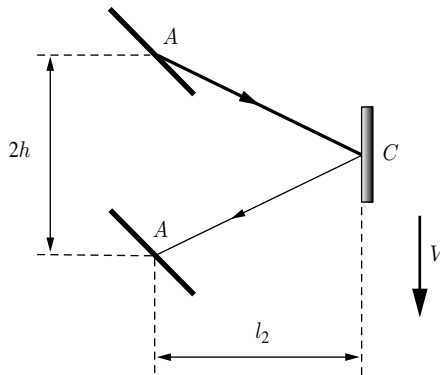
$$t(AC) = t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}}. \quad (1.10)$$

Les franges d'interférence observées pour cette configuration dépendent donc de la différence des temps de propagation  $t(AB) - t(AC) = t_1 - t_2$ .

On peut maintenant échanger le rôle des deux bras de l'interféromètre en faisant pivoter l'ensemble de l'appareil d'un quart de tour. On obtient alors

$$t(AB) = t_3 = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad \text{et} \quad t(AC) = t_4 = \frac{l_2}{c + V} + \frac{l_2}{c - V}. \quad (1.11)$$

La différence des temps de propagation  $t(AB) - t(AC) = t_3 - t_4$  contrôle maintenant l'aspect des franges d'interférence.



**Figure 1.4** Trajet du rayon lumineux dans le bras AC de l'interféromètre de Michelson et Morley pour le référentiel lié à l'éther. La flèche épaisse montre le sens de déplacement de l'interféromètre par rapport à l'éther.

La différence  $\Delta T$  des différences de temps de propagation des rayons lumineux dans les deux configurations de l'interféromètre est donnée par

$$\Delta T = (t_1 - t_2) - (t_3 - t_4) \approx (l_1 + l_2) \frac{V^2}{c^3}, \quad (1.12)$$

où on utilise le fait que  $V \ll c$  pour faire un calcul approché. En effet, la vitesse d'entraînement du référentiel dans l'éther étant supposée proche de la vitesse de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire 30 km/s, on a  $V/c \approx 10^{-4}$ . Après rotation du dispositif expérimental, on s'attend donc à observer une variation de la différence de phase égale à

$$\Delta\phi = 2\pi\nu\Delta T \approx \frac{2\pi}{\lambda}(l_1 + l_2) \frac{V^2}{c^2}, \quad (1.13)$$

où  $\lambda = c/\nu$  est la longueur d'onde la lumière utilisée. Cela se traduit par un défilement de  $n = \Delta\phi/(2\pi)$  franges d'interférence, puisqu'un déplacement d'une frange correspond à un retard de phase égal à  $2\pi$ . L'expérience, répétée plusieurs fois (en particulier à des époques différentes de l'année : l'orientation de la vitesse de la Terre change tout au long de l'année dans un référentiel d'inertie lié au Soleil), a toujours donné le même résultat :  $\Delta T = 0$  ! Aucun effet attribuable au mouvement orbital de la Terre, ni au mouvement du système solaire par rapport au rayonnement cosmique de fond (voir section 1.1.4), n'a jamais pu être observé<sup>8</sup>. Nous verrons dans la section suivante comment interpréter correctement ces résultats.

## 1.4 LES POSTULATS D'EINSTEIN

Le désaccord est flagrant entre observation et calcul théorique dans l'expérience de Michelson et Morley. Comment l'expliquer ? L'expression des différences des temps de propagation de la lumière dans cette expérience s'obtient en supposant que la loi galiléenne d'addition des vitesses est valable pour les rayons lumineux. Cette hypothèse de travail est une conséquence directe de la manière dont se transforment les équations de Maxwell, qui régissent le comportement de la lumière, sous l'action des transformations de Galilée. Or, il apparaît que les équations de

8. Des expériences modernes ont été réalisées avec des masers (T. S. Jaseja, A. Javan, J. Murray et C. H. Townes, « Test of Special Relativity or of the Isotropy of Space by Use of Infrared Masers », *Physical Review*, vol. 133, n° 5A, 2 March 1964, p. A1221-A1225) et des lasers (A. Brillet et J. L. Hall, « Improved Laser Test of the Isotropy of Space », *Physical Review Letters*, vol. 42, n° 9, 26 February 1979, p. 549-552). Signalons qu'il est également possible de tester l'invariance de la vitesse de la lumière en utilisant le GPS (Rainer Müller, « The Ether Wind and the Global Positioning System », *The Physics Teacher*, vol. 38, April 2000, p. 243-246).

Maxwell, contrairement aux équations de la mécanique classique, ne sont pas invariantes pour les transformations de Galilée (voir section 11.6).

Comment donc concilier la mécanique classique de Newton, la théorie électromagnétique de Maxwell, la relativité galiléenne et les résultats de l'expérience de Michelson et Morley ? Plusieurs solutions s'offraient aux scientifiques du XIX<sup>e</sup> siècle :

- Admettre que la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell était fausse ;
- Rendre compatibles les postulats de la mécanique classique et de l'électromagnétisme ;
- Admettre que les postulats de la mécanique classique étaient faux.

La première solution est vite apparue inacceptable. Toute une série de belles expériences prouvaient nettement que toutes les prédictions de la théorie de Maxwell se vérifient très bien. La deuxième voie conduit à l'élaboration du concept d'éther, référentiel privilégié servant de support à la propagation des ondes électromagnétiques et seul référentiel où les équations de Maxwell seraient strictement valables. Cependant, toutes les expériences, du type de celle de Michelson et Morley, tentant de mettre en évidence l'existence de l'éther ont échoué.

Finalement c'est la troisième voie qui se révèle être la bonne : reconnaître que la mécanique classique se fonde sur des postulats qui doivent être abandonnés. La chose se fait graduellement, avec des scientifiques comme FitzGerald puis Lorentz et Poincaré, mais c'est Einstein en 1905 (alors âgé de 26 ans) qui fait le pas décisif en postulant le caractère non absolu du temps et de l'espace<sup>9</sup>. Il élabore une nouvelle mécanique qui permet d'expliquer l'ensemble des résultats théoriques et expérimentaux concernant les ondes électromagnétiques. Cette théorie, la *relativité restreinte*, est basée sur deux postulats extrêmement simples. Le premier de ces postulats est l'élargissement à toutes les lois de la physique du principe de relativité.

**Premier postulat** : tous les référentiels d'inertie sont équivalents ; autrement dit, la formulation mathématique des lois de la physique doit être la même dans tous ces référentiels.

Aucune expérience de physique réalisée dans un référentiel d'inertie ne permet de déceler le mouvement de ce référentiel : il n'existe pas d'état de mouvement absolu. **Le seul mouvement que l'on puisse observer est le mouvement relatif d'un objet par rapport à un autre.**

9. On peut trouver quelques éléments sur l'histoire de la genèse de la théorie de la relativité restreinte, par exemple, dans le livre de M. Boratav et R. Kerner (biblio), et dans les ouvrages de vulgarisation de Kip S. Thorne (biblio) et de Jean-Paul Auffray, *L'espace-temps*, Flammarion, 1998.

Le deuxième postulat érige en principe l'impossibilité de la mesure de la vitesse de la lumière par rapport à un hypothétique référentiel absolu <sup>10</sup>.

**Deuxième postulat** : la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante de l'état de mouvement de la source.

En fait, l'intérêt du deuxième postulat est surtout historique, puisque son énoncé peut se déduire naturellement du premier postulat et de quelques propriétés naturelles de l'espace et du temps. En effet, nous verrons dans la section 6.2 comment il est possible de se passer de l'invariance de la vitesse de la lumière <sup>11</sup> pour construire la théorie d'Einstein. Cependant, dans la suite, nous établirons les équations de transformation de la relativité restreinte en nous basant sur le deuxième postulat. Cette démarche, conforme à l'histoire et basée sur des faits expérimentaux solidement établis, a le mérite d'être d'un abord plus simple que la théorie très générale développée dans la section 6.2.

Ces postulats impliquent que les lois de transformations de Galilée doivent être remplacées par de nouvelles lois de transformations qui, en particulier, laissent invariante l'équation de propagation des ondes électromagnétiques. L'élaboration de ces lois et l'examen de quelques-unes de leurs extraordinaires conséquences font l'objet des chapitres suivants.

Les résultats de l'expérience de Michelson et Morley peuvent être très simplement expliqués par l'application du second postulat. Si la vitesse de la lumière est bien identique pour tous les référentiels d'inertie, les temps de propagation des rayons lumineux le long des deux bras de l'interféromètre sont

$$t_1 = t_3 = \frac{2l_1}{c} \quad \text{et} \quad t_2 = t_4 = \frac{2l_2}{c}, \quad (1.14)$$

ce qui conduit bien à  $\Delta T = 0$ , c'est-à-dire à aucun défilement de franges.

D'autres expériences, comme celle de Fizeau (dont nous reparlerons dans la section 5.2), qui avaient reçu une interprétation classique peu satisfaisante, n'ont pu être correctement interprétées que dans le cadre de la relativité d'Einstein <sup>12</sup>.

10. Prenons garde au fait que si le module de la vitesse de la lumière est invariant pour un changement de référentiel, il n'en est pas de même de la couleur de la lumière (ou fréquence ou longueur d'onde) qui, elle, dépend du mouvement relatif de l'observateur et de la source. Nous étudierons en détail ce phénomène, connu sous le nom d'effet Doppler, plus loin dans le livre (voir sections 3.7.1 et 9.5.2).

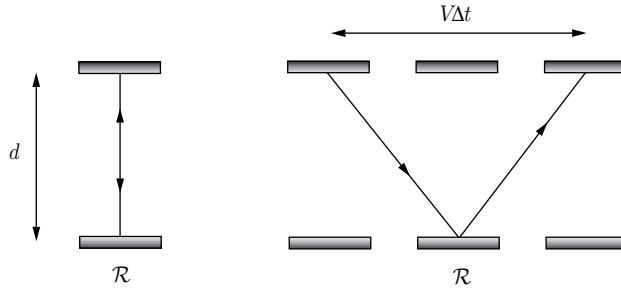
11. Quand on parle de « vitesse de la lumière », il faut toujours comprendre module de la vitesse de la lumière dans le vide, habituellement noté  $c$ , à moins que ce ne soit précisé autrement. La vitesse de la lumière dans un matériau transparent peut être inférieure à  $c$  et même inférieure à celle d'une particule de matière se déplaçant dans ce milieu.

12. Voir par exemple l'ouvrage de M. Boratav et R. Kerner, chap. 2 (biblio).



Précisons immédiatement que cette théorie a fini par s'imposer à l'époque parce que c'était la seule théorie cohérente expliquant l'**ensemble** des observations et expériences faites jusque-là.

## 1.5 LA RELATIVITÉ DU TEMPS



**Figure 1.5** Trajets aller retour du photon dans l'horloge à photons pour les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

Une conséquence immédiate et *a priori* surprenante des postulats d'Einstein est qu'il n'existe pas de temps absolu, et que l'écoulement du temps dépend de l'état de mouvement de l'observateur par rapport à un système de référence donné. Il est possible d'illustrer simplement ce phénomène en construisant « mentalement » une horloge battant la mesure du temps au moyen de photons. Imaginons deux miroirs parallèles se faisant face – l'un positionné au-dessus de l'autre – séparés par une distance  $d$ . Un observateur du référentiel propre  $\mathcal{R}'$  de ces deux miroirs observe un photon faisant des allers retours perpendiculaires à ces deux miroirs, l'aller définissant le « tic » et le retour le « tac » de l'horloge (voir figure 1.5). Ce système est appelé « horloge à photons » (ou horloge d'Einstein-Langevin, ou horloge de Feynman). Le temps aller retour d'un photon est évidemment

$$\Delta t' = 2 \frac{d}{c}, \quad (1.15)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière.

Supposons maintenant que le référentiel  $\mathcal{R}'$  soit animé d'une vitesse  $V$  parallèle aux miroirs par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . Un observateur de  $\mathcal{R}$  ne constatera pas que le photon fait des allers retours perpendiculaires aux miroirs. Il va observer un trajet oblique comme indiqué sur la figure 1.5.

Un aller retour dans le référentiel  $\mathcal{R}$  prend évidemment plus de temps que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  car le photon se déplace toujours à la même vitesse  $c$  mais doit parcourir une distance plus grande. En fait, si  $\Delta t$  est le temps d'un aller retour dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , la distance  $D$  parcourue par le photon est égale à

$$D = 2\sqrt{d^2 + \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2}. \quad (1.16)$$

D'où on déduit que

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2}. \quad (1.17)$$

Par de simples manipulations algébriques, il est possible de relier  $\Delta t$  et  $\Delta t'$ , c'est-à-dire le temps d'un aller retour dans le référentiel  $\mathcal{R}$  où l'horloge est mobile et dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où elle est stationnaire. On trouve

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.18)$$

Notons que cette équation se réduit bien à  $\Delta t = \Delta t'$  quand  $V = 0$ , c'est-à-dire quand les deux référentiels sont immobiles l'un par rapport à l'autre.

La relation (1.18) est la fameuse formule d'Einstein de *dilatation des temps* qui montre que  $\Delta t \geq \Delta t'$  et que  $\Delta t = \infty$  quand  $V = c$ . Autrement dit l'horloge à photons en mouvement bat la mesure du temps plus lentement qu'une horloge équivalente dans un référentiel stationnaire. Lorsque  $V > c$ , l'équation (1.18) indique que l'intervalle de temps  $\Delta t$  devient imaginaire, ce qui est déjà une indication qu'il est impossible de dépasser la vitesse de la lumière.

Une modification similaire des longueurs (mesurées dans la direction du mouvement) apparaît quand  $V \neq 0$ . Tandis qu'un observateur au repos par rapport à un objet mesure la longueur de cet objet comme étant  $\ell'$ , un observateur en mouvement par rapport à cet objet observera une longueur contractée

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.19)$$

Cet effet est appelé la *contraction des longueurs* ou contraction de Lorentz, ou encore contraction de Lorentz-FitzGerald, puisque le mathématicien FitzGerald avait avancé la même idée quelques années avant Lorentz. L'utilisation de l'horloge à photons permet de démontrer facilement cette relation (voir aussi exercice 4.2).

Notons que pour faire nos calculs avec l'horloge à photons, nous avons supposé que la distance  $d$  entre les deux miroirs était la même pour les observateurs des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Cette hypothèse est correcte car le trajet des photons est perpendiculaire à la direction de la vitesse relative entre les deux référentiels. Cette invariance des dimensions transversales sera discutée plus loin (voir sections 4.2 et 6.2).

TABLEAU 1.1  
FACTEUR DE DILATATION DES TEMPS.

$\frac{V}{c}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$
0,1	1,005
0,2	1,021
0,5	1,155
0,7	1,400
0,9	2,294
0,99	7,089
0,999	22,366
0,9999	70,712

Le phénomène de dilatation du temps est présenté ici de façon intuitive, simple et pédagogique grâce à l’horloge à photons. Il sera démontré de façon plus rigoureuse dans le chapitre 3.

Le ralentissement du temps ne devient perceptible que pour des vitesses proches de celle de la lumière. Le tableau 1.1 illustre cet effet. Par exemple, une horloge voyageant à 99,99 % de la vitesse de la lumière par rapport à la Terre enregistrera le passage d’un an tandis que presque 71 ans s’écouleront sur Terre.

Une objection possible à cette analyse est qu’elle a été faite pour une horloge particulière. Comment savons-nous qu’une autre horloge (utilisant un pendule et des roues dentées par exemple) ne sera pas affectée différemment par le mouvement ? La

réponse vient de la relativité elle-même qui nous dit qu’il n’est pas possible de déceler un mouvement absolu. Si deux horloges se comportaient différemment, alors cette différence pourrait être utilisée comme détecteur de mouvement. Cela étant impossible, toutes les horloges, quel que soit leur mécanisme interne (incluant les horloges biologiques complexes de nos organismes), doivent répondre au mouvement précisément de la même manière. Insistons sur le fait qu’il n’y a rien de mystérieux dans le comportement des horloges. S’il y a quelque chose de mystérieux dans la relativité restreinte, c’est l’invariance de la vitesse de la lumière. Une fois ce phénomène établi, tout le reste suit naturellement. Notons que si on avait supposé valable la loi galiléenne d’addition des vitesses, alors le phénomène de dilatation des temps n’existerait pas (voir exercice 1.1).

1.6 L’EXPÉRIENCE DE KENNEDY-THORNDIKE

L’expérience de Michelson et Morley a évidemment été le germe des réflexions sur une nouvelle façon de voir l’espace et le temps. De grands savants ont été impliqués dans cette réflexion : citons seulement les grands noms de FitzGerald, Lorentz, Poincaré et, bien sûr, Einstein qui a assis définitivement la théorie de la relativité restreinte. Dans les années qui suivirent, un certain nombre d’expériences ont tenté d’améliorer la précision de l’expérience de 1887.

1.6.1 Les expériences pionnières

Toutes les expériences qui suivent celle de Michelson et Morley en sont finalement des variantes, basées sur la précision extraordinaire des méthodes interférométriques (voir tableau 1.2). La longueur des bras de l’interféromètre est une donnée importante ainsi que la longueur d’onde de la radiation choisie. L’écart des franges d’interférence en dépend de façon cruciale. Nous indiquons ci-dessous les expériences pionnières qui ont permis de conforter un peu plus la théorie de la relativité.

TABLEAU 1.2 VARIANTES DE L'EXPÉRIENCE DE MICHELSON ET MORLEY.

$D$  REPRÉSENTE LA LONGUEUR DES BRAS,  $\Delta_a$  REPRÉSENTE LE DÉPLACEMENT DES FRANGES ATTENDU EN SUPPOSANT L'ÉTHER AU REPOS PAR RAPPORT AU SOLEIL ET UN DÉPLACEMENT DE LA TERRE À LA VITESSE DE 30 KM/S,  $\Delta_m$  REPRÉSENTE LE DÉPLACEMENT DES FRANGES MESURÉ DANS L'EXPÉRIENCE<sup>14</sup>.

Nom(s)	Année(s)	Endroit	$D(m)$	$\Delta_a(\text{frange})$	$\Delta_m(\text{frange})$
Michelson	1881	Potsdam	1,2	0,04	0,01
Michelson et Morley	1887	Cleveland	11	0,40	0,005
Morley et Miller	1902-04	Cleveland	32,2	1,13	0,007 3
Miller	1921	Mt Wilson	32	1,12	0,04
Miller	1923-24	Cleveland	32	1,12	0,015
Miller	1924	Cleveland	32	1,12	0,007
Tomascheck	1924	Heidelberg	8,6	0,3	0,01
Miller	1925-26	Mt Wilson	32	1,12	0,044
Kennedy	1926	Pasadena	2	0,07	0,001
Illingworth	1927	Pasadena	2	0,07	0,000 2
Piccard et Stahel	1927	Mt Rigi	2,8	0,13	0,003
Michelson, et al.	1929	Mt Wilson	25,9	0,9	0,005
Joos	1930	Jena	21	0,75	0,001

Après avoir réalisé leur fameuse expérience, Michelson et Morley ne s'intéressent plus que de loin à ce type de recherches et passent le flambeau à Miller. Bien que les résultats des expériences de Miller, tout en confirmant ceux de Michelson et Morley, soient un peu décevants sur le plan de la précision atteinte, le mérite de celui-ci est d'avoir beaucoup mieux cerné les sources d'incertitudes, notamment les effets de la température et de la magnétostriction sur l'acier de l'appareillage dus au champ magnétique terrestre. Ces études sérieuses ont énormément aidé les successeurs de Miller et la précision a été sans cesse améliorée. L'expérience qui, malgré tout, a assis définitivement l'isotropie et l'invariance de  $c$ , et donc la théorie de la relativité restreinte, est celle de Kennedy et Thorndike en 1932.

### 1.6.2 Une expérience décisive

Dans son esprit, la technique expérimentale de Kennedy et Thorndike est la même que celle de Michelson et Morley<sup>15</sup>. Il s'agit d'un dispositif interférométrique avec une lame semi-réfléchissante qui sépare en deux un rayon monochromatique vert (raie  $\lambda 5461$  du mercure) ; ces deux rayons parcourent les deux bras de l'interféro-

14. Les données proviennent de l'article : R. S. Shankland, S. W. McCuskey, F. C. Leone et G. Kuerti, « New Analysis of the Interferometer Observations of Dayton C. Miller », *Reviews of Modern Physics*, vol. 27, n° 2, April 1955, p. 167-178.

15. Roy J. Kennedy et Edward M. Thorndike, « Experimental Establishment of the Relativity of Time », *Physical Review*, vol. 42, November 1932, p. 400-418.

mètre et se recombinent à la sortie pour former un système d'interférences (voir section 1.3). Le déplacement des franges a été mesuré avec une grande précision tout au long de l'année.

Les principales différences entre cette expérience et celle de Michelson et Morley sont essentiellement d'ordre technique de façon à limiter au maximum les sources d'erreur :

- Les bras de l'interféromètre ne sont plus perpendiculaires et n'ont plus la même longueur. Cela permet d'avoir plus de latitude pour la mesure des effets, notamment sur la différence de chemins optiques.
- Les auteurs ont utilisé un appareillage révolutionnaire pour maintenir la température de la chambre à vide de l'interféromètre stable à moins de 0,001 °C, à toute heure et en toutes saisons.
- Les miroirs sont soutenus par un dispositif en quartz, pour limiter au maximum les effets de dilatation et de magnétostriction. Leur rotation à la fois par rapport à l'horizontale et la verticale est assurée, non plus à la main, mais par un dispositif électrique très fin.
- Les franges d'interférence sont examinées à travers un télescope et sont photographiées toutes les douze heures pour essayer de déceler des effets diurnes.

Les auteurs ont cherché à la fois des effets périodiques sur quelques jours, mais aussi sur des périodes de plusieurs mois. L'analyse des données est évidemment cruciale et, là encore, ils ont pris d'énormes précautions. Toutes les séries de mesures montrent des décalages inférieurs à 0,000 05 franges, compatibles avec un décalage nul. Après cette brillante expérience, la cause est entendue : plus personne ne remet en cause l'isotropie et l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide.

## 1.7 LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

La vitesse de la lumière dans le vide est la constante fondamentale de la théorie de la relativité restreinte, comme l'est la constante de Planck pour la mécanique quantique ou la constante de la gravitation universelle pour la relativité générale. La première tentative de mesure de cette vitesse dont nous ayons connaissance a été faite par Galilée au <sup>xvi</sup><sup>e</sup> siècle. Bien que son expérience n'ait pas conduit à un résultat concluant, une autre de ses découvertes, celle des satellites de Jupiter, fournit les bases pour la première mesure réelle de la vitesse de la lumière. En 1676, l'astronome danois Roemer déduisit, en observant les éclipses de Io (satellite le plus interne de Jupiter), que la lumière met environ 11 minutes pour franchir le rayon de l'orbite terrestre. Avec les données de l'époque, la vitesse de la lumière fut évaluée à environ 215 000 km/s, ce qui est le bon ordre de grandeur (se reporter à l'exercice 1.6 pour une explication de la méthode). En 1849, le physicien français Fizeau construisit un dispositif dont la partie principale consistait en deux roues dentées de

même axe tournant à grande vitesse. Grâce à cet appareil, Fizeau calcula une vitesse de 315 000 km/s, résultat comparable à celui de Roemer<sup>16</sup>.

Longtemps mesurée avec une précision de plus en plus grande, la vitesse de la lumière dans le vide est désormais **fixée exactement** par convention<sup>17</sup> :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

Cela entraîne une nouvelle définition du mètre qui devient :

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.

Précisons qu'en 1967 la définition suivante de la seconde a été adoptée :

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

L'erreur relative faite en assimilant la vitesse de la lumière à 300 000 km/s est inférieure à 0,1 %.

## 1.8 AVANT D'ALLER PLUS LOIN

La relativité restreinte admet l'équivalence de tous les référentiels d'inertie pour la formulation des lois physiques. Cela implique qu'il est impossible de mettre en évidence un mouvement rectiligne uniforme par des expériences internes, c'est-à-dire des expériences menées sans se rapporter à d'autres référentiels que son référentiel propre. Or il semble en première analyse que les mouvements non uniformes soient en contradiction avec la relativité restreinte, puisqu'une accélération peut être mesurée par une expérience interne. Alors que la vitesse est une grandeur relative pour un observateur, l'accélération est donc une grandeur absolue. C'est en ce sens que la première version de la théorie de la relativité développée par Einstein est restreinte. Il ne faudrait pas croire pour autant qu'il est impossible dans ce formalisme de traiter le cas de référentiels en mouvement accéléré (voir section 8.8). En fait, des contradictions apparaissent lorsque l'on essaie de décrire le comportement d'objets soumis à un champ de gravitation dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte. L'introduction des forces de gravité dans le formalisme d'Einstein ne peut se faire qu'au prix d'une refonte de la relativité restreinte en une autre théorie, la relativité générale. La relativité restreinte décrit, en fait, un univers idéalisé dépourvu de gravitation.

16. Pour obtenir plus de détails sur ces expériences, on peut consulter, par exemple, le cours de Berkeley, chap. 10 (biblio). Voir également l'article de Albert Van Helden, « Roemer's speed of light », *Journal for the History of Astronomy*, vol. 14, 1983, p. 137-141.

17. Harry E. Bates, « Resource Letter RMSL-1: Recent measurements of the speed of light and the redefinition of the meter », *American Journal of Physics*, vol. 56, n° 8, August 1988, p. 682-687.

Le principe de relativité restreinte peut être considéré comme un méta-principe en ce sens qu'il n'est pas lui-même une loi de la physique mais plutôt un schéma auquel doit obéir toute loi de la physique. Ce principe doit être la pierre angulaire de toute nouvelle théorie proposée. Si une nouvelle loi est bien identique dans tous les référentiels d'inertie, alors elle a une chance de décrire une partie du comportement de l'univers. Si elle ne respecte pas ce principe, alors elle doit être rejetée. Toute l'expérience accumulée depuis 1905 suggère que la relativité restreinte d'Einstein doit effectivement être érigée en « principe gouverneur » des lois de la physique.

Peu après la publication des travaux d'Einstein, la relativité restreinte rencontra une vive opposition de la part de nombreux physiciens. La controverse finit par s'éteindre dans les années 30, quand la technologie devint suffisamment avancée pour permettre les premières vérifications expérimentales des prédictions de la théorie. Aujourd'hui, il n'y a plus de place pour le doute : le comportement des particules se déplaçant à des vitesses proches de celle de la lumière dans les accélérateurs est en parfait accord avec les lois de la relativité restreinte d'Einstein.

Le succès de la relativité restreinte ne signifie pas que nous devons abandonner la mécanique classique. Les lois de Newton sont parfaitement applicables dans la vie de tous les jours, dans la plupart des disciplines scientifiques et dans presque toute la technologie. On ne doit pas se préoccuper du phénomène de dilatation des temps pour planifier un voyage en avion, ni prendre en compte le phénomène de contraction des longueurs dans la conception d'un véhicule. Les prédictions de la théorie d'Einstein et de la théorie de Newton sont presque identiques pour les phénomènes dont les vitesses caractéristiques sont petites par rapport à celle de la lumière. Elles ne commencent à diverger fortement que lorsque les vitesses mises en jeu sont proches de la vitesse de la lumière.

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 260.

---

### 1.1 L'horloge à photons galiléenne

Montrer que si la loi galiléenne d'addition des vitesses est correcte, alors l'expérience de l'horloge à photons décrite dans la section 1.5 n'implique pas le phénomène de dilatation des temps.

---

### 1.2 Utilisation d'horloges atomiques dans les avions

Une vérification possible de la théorie de la relativité restreinte consiste à mesurer explicitement le phénomène de dilatation du temps. Pour ce faire, on embarque dans un avion de ligne volant à la vitesse constante de 800 km/h une horloge atomique

de précision ; on laisse au sol une horloge atomique identique qui sert de témoin. Il suffit de comparer les temps (c'est plus facile à dire qu'à faire !) des deux horloges à l'issue d'un voyage commencé au temps  $t = 0$  sur chacune des horloges.

- (a) Quelle doit être la précision minimale des horloges pour mettre en évidence le phénomène de dilatation des temps ?
- (b) Sur une telle horloge, quel serait l'écart maximum mesuré (par rapport à une horloge infiniment précise) sur une durée d'une année ?

---

### 1.3 Voyage vers Andromède

La galaxie d'Andromède est située à 2,3 millions d'années-lumière de la Terre. On considère que la Terre et Andromède sont des points, sans mouvement relatif. On décide de visiter Andromède grâce à une fusée voyageant à vitesse constante depuis la Terre jusqu'à Andromède.

- (a) Si le temps mis pour faire le voyage est de 2,31 millions d'années pour les observateurs terrestres, quelle est la vitesse de la fusée ? Quelle est la durée du voyage pour les passagers de la fusée ? Seront-ils encore vivants à la fin du voyage ? Et leurs descendants ?
- (b) Mêmes questions si on embarque sur une fusée plus puissante qui ne met que 2,301 millions d'années.
- (c) On désire que le voyage en fusée n'excède pas 20 ans pour les passagers. Quelle est la vitesse minimum à communiquer à la fusée pour réaliser ce projet ? Combien de temps dure ce voyage pour un observateur terrestre ?

---

### 1.4 La course infernale

Un proton cosmique voyage à la vitesse  $v = 0,999\,999\,c$  pendant 4 années-lumière entre l'étoile  $\alpha$  du Centaure et la Terre ( $1 \text{ année-lumière} = 9,461 \times 10^{15} \text{ m}$ ). Supposons que ce proton engage une course avec un photon (qui se déplace à la vitesse de la lumière dans tous les référentiels) le long de ce trajet. Quelles sont les différences de temps de vol pour un observateur sur la Terre, pour le proton et pour le photon ?

---

### 1.5 Vitesse relative de deux fusées

Soient deux fusées  $F$  et  $F'$  en mouvement de translation rectiligne uniforme sur deux droites parallèles. On appelle  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  les référentiels inertiels liés respectivement à  $F$  et  $F'$ . Les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}$  mesurent la vitesse de la fusée  $F'$ , qui a pour module  $V_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . Les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}'$  mesurent la vitesse de la fusée  $F$  qui a pour module  $V_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$ . En appliquant le principe de la relativité, montrer que  $V_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$ .



## 1.6 Roemer et les éclipses de Io

En se basant sur les éclipses de Io, satellite le plus interne de Jupiter, l'astronome danois Roemer a conclu, en 1676, à une vitesse finie pour la propagation de la lumière dans le vide. Dans ce problème, nous indiquons le principe de sa démarche, sans nous encombrer de toutes les subtilités afférentes. Nous adoptons un modèle simplifié pour illustrer la méthode.

Le Soleil ( $S$ ), la Terre ( $T$ ), Jupiter ( $J$ ) et Io ( $I$ ) sont représentés par des points. Il y a occultation de Io lorsque  $T$ ,  $J$  et  $I$  sont alignés avec  $J$  entre  $T$  et  $I$  (Jupiter intercepte la lumière que Io nous envoie). En fait Jupiter n'est pas un point et possède une zone d'ombre ; il y a éclipse lorsque Io se trouve dans la zone d'ombre. L'orbite de la Terre est située dans le plan appelé écliptique, et peut être considérée comme un cercle de centre  $S$  de rayon  $ST = R = 1,49 \times 10^8$  km. Cette orbite est parcourue en  $T_t = 1 \text{ an} = 365,25$  jours. L'orbite de Io est un cercle, dans le plan de l'écliptique, de centre  $J$ , accomplie en  $T_i \approx 42,5$  heures. La Terre et Io tournent dans le même sens sur leur orbite. Les périodes données sont valables dans un référentiel inertiel lié aux étoiles. Nous nous intéressons à l'évolution du système au maximum sur une demi-année ; pendant ce laps de temps, Jupiter a peu bougé sur son orbite. Nous faisons l'hypothèse que  $S$  et  $J$  sont fixes.

En fait, Roemer a travaillé sur des éclipses et non sur des occultations. Il y a plusieurs raisons à cela : d'abord l'occultation peut avoir lieu après le début de l'éclipse (Io est par conséquent invisible au moment de l'occultation) et, surtout, la durée entre deux occultations varie en fonction de la position de la Terre, alors que la durée entre deux éclipses reste plus ou moins constante.

Il y a « opposition » lorsque Jupiter est au plus près de la Terre ( $T$  est entre  $S$  et  $J$ ). Il y a « quadrature » lorsque le triangle  $STJ$  est rectangle en  $T$ . Nous notons  $c$  la vitesse de la lumière. Ainsi, le moment où l'éclipse est observée sur Terre est égal au temps vrai augmenté du temps qu'a mis la lumière pour effectuer la distance  $IT \approx JT$ .

- (a) Donner une estimation du nombre  $N$  d'éclipses visibles de la Terre en une demi-année.
- (b) Se placer au voisinage de l'opposition et calculer le temps  $\Delta T$  séparant  $n$  ( $n \ll N$ ) éclipses vues de la Terre (on se place dans la situation symétrique de  $n/2$  éclipses avant l'opposition et  $n/2$  éclipses après l'opposition). On note  $T_a = \Delta T/n$  la durée apparente d'une éclipse. Montrer que  $T_a \approx T_i$ .
- (c) Résoudre la même question que la précédente, en se plaçant maintenant au voisinage de la quadrature. Montrer que  $T_a > T_i$  ; les éclipses semblent prendre du retard. Que se passe-t-il au voisinage de la seconde quadrature lorsque la Terre est de l'autre côté de son orbite ?
- (d) Calculer le retard cumulé  $\Delta T - nT_i$  sur  $n$  éclipses au voisinage de la première quadrature. Roemer a mesuré un retard d'environ 10 min au début novembre de l'année 1676. Il a déduit que le temps  $\tau$  mis par la lumière pour parcourir une

unité astronomique  $R$  était de 11 min. La valeur de  $R$  connue à l'époque était  $R = 1,45 \times 10^8$  km. En déduire la vitesse de la lumière mesurée par Roemer<sup>18</sup>.

- (e) La valeur la plus mal mesurée à l'époque n'était finalement pas  $R$ , mais  $\tau$ . La valeur actuelle de cette quantité est  $\tau = 8$  min. Quelle est la valeur de  $c$  correspondante ?

---

18. Roemer n'a pas calculé la vitesse de la lumière ; il s'est contenté de montrer qu'elle est finie. Le calcul explicite de cette vitesse a été fait par son élève Horrebow.

## Chapitre 2

# **Transformations de Lorentz spéciales**

*Manifestement, continua l'Explorateur du Temps, tout corps réel doit s'étendre dans quatre dimensions. Il doit avoir Longueur, Largeur, Épaisseur et... Durée.*

Herbert George WELLS (1895)

## **2.1 TRANSFORMATIONS DE LORENTZ**

Dans le premier chapitre, nous avons vu que les transformations de Galilée doivent être remplacées par de nouvelles transformations qui, en particulier, laissent invariante l'équation de propagation des ondes électromagnétiques. Ces transformations sont appelées *transformations de Lorentz*.

Avant de déterminer la forme de ces transformations, nous allons reparler du concept d'événement, notion centrale dans la théorie de la relativité restreinte. Nous allons également nous assurer de la possibilité de définir un temps commun pour toutes les horloges immobiles d'un même référentiel d'inertie.

### **2.1.1 Notion d'événement**

Un événement est un phénomène physique supposé « infiniment » localisé dans l'espace et dans le temps, son étendue étant réduite à un point et sa durée à un instant infiniment court. Dans un référentiel donné, un événement sera complète-

ment caractérisé par ses trois coordonnées spatiales  $(x, y, z)$  et le temps  $t$ , indiqué par une horloge immobile de ce référentiel au moment où se produit cet événement. Un événement peut donc être représenté par un point d'un espace à quatre dimensions, appelé espace-temps<sup>1</sup>. Ses coordonnées sont  $(t, x, y, z)$  ou  $(ct, x, y, z)$ , la coordonnée temporelle ayant dans cette dernière notation la même dimension que les coordonnées spatiales. Remarquons que si un événement a pour coordonnées  $(t, x, y, z)$  dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$  et pour coordonnées  $(t', x', y', z')$  dans un autre référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$ , alors on peut faire correspondre à cet événement les coordonnées respectives  $(ct, x, y, z)$  et  $(ct', x', y', z')$  car la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels d'inertie.

Dans la suite, les trois coordonnées spatiales seront toujours rapportées à un repère cartésien orthonormé (voir annexe D pour d'autres possibilités). L'origine spatiale d'un référentiel désignera le point de l'espace  $(x = 0, y = 0, z = 0)$  à un instant quelconque. Le point de l'espace-temps qui a pour coordonnées  $(t = 0, x = 0, y = 0, z = 0)$  sera appelé origine spatiotemporelle du repère. Ces deux origines seront indifféremment notées  $O$ .

### 2.1.2 Mesures des positions et des temps, synchronisation des horloges

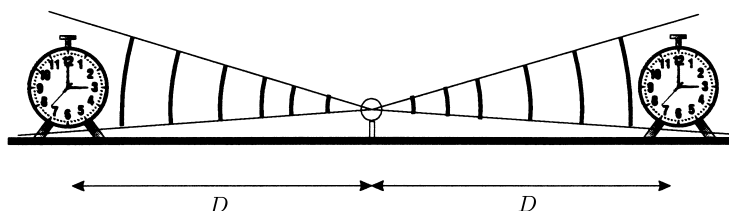
Dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , les coordonnées spatiotemporelles d'un événement sont mesurées **localement** par un observateur, muni de son horloge, au repos dans ce référentiel : il enregistre la coïncidence entre l'événement qui se produit là où il se trouve et le temps marqué par son horloge (voir section 1.1.2). Le deuxième postulat permet de définir l'unité de longueur à partir de l'unité de temps. L'observateur peut mesurer, par exemple, la distance qui le sépare de l'origine spatiale  $O$  de son référentiel en faisant réfléchir un signal lumineux sur un miroir placé en  $O$ . La distance est le produit par  $c/2$  du temps écoulé entre l'émission du signal et la réception du signal réfléchi.

On voit qu'il est loisible de fabriquer une « règle » simplement par des mesures de temps, en cochant sur un bâton solide et immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$  des points correspondant à des multiples d'un temps donné, choisi comme unité. Ce protocole de construction d'une règle est loin d'être artificiel. Rappelons que notre unité de longueur, le mètre, est définie à partir de l'unité de temps, via l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide (voir section 1.7). Il existe de très nombreux cas pour lesquels une mesure de longueur se déduit d'une mesure de temps : ce sont les situations où le transport d'une règle physique s'avère matériellement impossible. Un exemple édifiant est celui de la mesure de la distance Terre-Lune obtenue par le temps séparant l'émission et la réception, après réflexion sur le sol lunaire, d'un signal électromagnétique<sup>2</sup>.

1. On parle aussi de *continuum* spatiotemporel ou continuum espace-temps, un continuum désignant, en physique, un ensemble d'éléments de même nature.

2. Voir, par exemple, l'article de Kenneth Nordtvedt, « La Lune au secours d'Einstein », *La Recherche*, n° 295, février 1997, p. 70-76.

Dans ce référentiel  $\mathcal{R}$ , on peut synchroniser toutes les horloges qui y sont au repos. En effet, puisque la vitesse de la lumière est une constante universelle, il suffit de placer au milieu du segment de droite qui joint deux horloges une source qui, à un instant quelconque, envoie un signal lumineux dans toutes les directions ; les deux horloges considérées sont synchronisées si elles indiquent le même temps à la réception de ce signal, puisque la vitesse de la lumière est identique dans toutes les directions<sup>3</sup> (voir figure 2.1). Ce protocole de synchronisation permet d'éviter le déplacement des horloges, empêchant ainsi le phénomène de dilatation des temps d'affecter la marche de ces horloges (voir section 1.5).



**Figure 2.1** Synchronisation de deux horloges au repos dans un référentiel d'inertie au moyen de signaux lumineux.

Le processus de synchronisation est, de fait, basé sur la propriété que le temps s'écoule de la même façon pour toutes les horloges, supposées parfaites et identiques, immobiles les unes par rapport aux autres dans un référentiel d'inertie. L'horloge, située par exemple à l'origine spatiale, peut servir de référent pour la synchronisation de toutes les horloges de notre « cristal d'horloges » par le protocole précédent ou un autre protocole équivalent (voir exercice 2.1). Il n'est pas difficile de montrer que, si toutes les horloges sont synchronisées sur l'horloge de référence, elles sont synchronisées entre elles. Mathématiquement, la relation « être synchronisée » est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de cette relation est désignée simplement comme « le temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ».

Les mesures de temps et de distances peuvent s'effectuer suivant les mêmes principes dans un autre référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$ . Le premier postulat garantit en effet que tous les observateurs inertiels peuvent construire des horloges équivalentes basées sur le même étalon de fréquence (voir section 1.7). De plus, il assure que la physique ne dépend pas du choix de ce standard. On peut également synchroniser toutes les horloges au repos dans cet autre référentiel d'inertie. Toutefois nous avons vu qu'il fallait abandonner la notion de temps absolu. Cela signifie que le temps indiqué par les horloges au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ne pourra en général plus être pris identique au temps indiqué par les horloges au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

3. D'autres procédures de synchronisation des horloges peuvent être utilisées : voir, par exemple, le livre de M. Ludvigsen, p. 23 (biblio), ou l'article de N. David Mermin, « Relativity without light », *American Journal of Physics*, vol. 52, n° 2, February 1984, p. 119-124.

### 2.1.3 Transformations homogènes

La vitesse de la lumière dans le vide est indépendante des mouvements de la source et du récepteur. Considérons un observateur immobile dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . Les positions et les temps mesurés par cet observateur sont notés  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ . Supposons qu'une source lumineuse ponctuelle, située sur l'origine spatiale  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}$ , émette à l'instant  $t = 0$  une impulsion lumineuse dans toutes les directions. À un instant ultérieur  $t$ , l'équation du front d'onde sphérique de rayon  $R$  est donnée par  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$  (voir figure 2.2), ce qui peut s'écrire

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (2.1)$$

Considérons un autre référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$ , animé d'une vitesse  $\vec{V}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , dans lequel un observateur note ses mesures de positions et de temps par  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et  $t'$ . Pour simplifier, nous allons également supposer que les origines spatiales  $O$  et  $O'$  des deux référentiels coïncident en  $t = t' = 0$ . Autrement dit, le front d'onde lumineux sphérique est émis à l'instant zéro depuis l'origine spatiale dans les deux référentiels. Pour l'observateur du référentiel  $\mathcal{R}'$ , l'équation du front d'onde sphérique de rayon  $R'$  est donc donnée par  $R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct'$ , c'est-à-dire

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, \quad (2.2)$$

car la vitesse de la lumière  $c$  est la même dans les deux référentiels.

Les transformations de Lorentz se trouvent ainsi définies comme les changements de coordonnées

$$\begin{aligned} t &= t(t', x', y', z'), \\ x &= x(t', x', y', z'), \\ y &= y(t', x', y', z'), \\ z &= z(t', x', y', z'), \end{aligned} \quad (2.3)$$

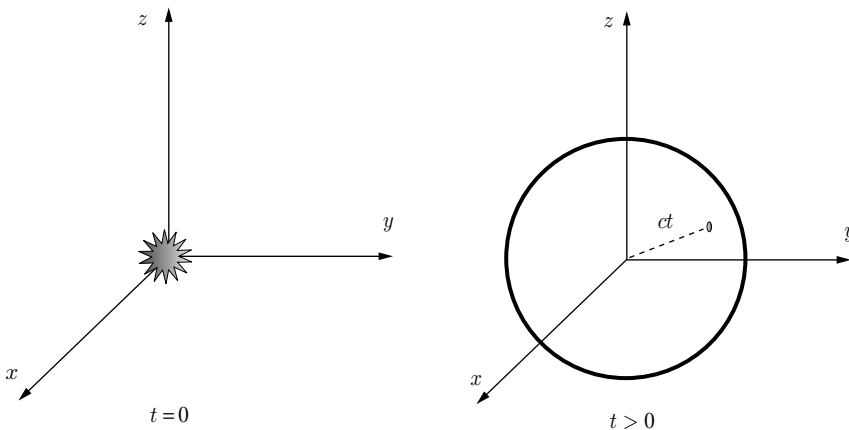


Figure 2.2 Propagation d'un front d'onde lumineux sphérique.

tels que l'équation du mouvement (2.1) est transformée en l'équation du mouvement (2.2), c'est-à-dire que

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \iff c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \quad (2.4)$$

Nous allons maintenant supposer que l'espace et le temps sont homogènes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'origine spatiotemporelle absolue. Cela entraîne la linéarité de la transformation. En effet, regardons des événements caractérisés par  $x' = y' = z' = 0$ . Imaginons qu'au lieu d'une relation linéaire du type  $t = A t'$ , nous ayons une relation du genre  $t = S t'^2$ , où  $S$  est une constante. Trois événements se produisant à cet endroit dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , à des instants  $t' = 1, 2$  et  $3$  secondes, se produisent à des instants  $t = 1S, 4S$  et  $9S$  secondes dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Ces événements ne sont pas également espacés dans le temps pour un observateur de ce référentiel. Supposons maintenant que l'origine spatiotemporelle du référentiel  $\mathcal{R}'$  soit déplacée sur le premier événement. Dans ce cas, les trois événements apparaissent aux temps  $t' = 0, 1$  et  $2$  secondes dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , ce qui se traduit par des instants  $t = 0, 1S$  et  $4S$  secondes dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Les intervalles de temps entre les mêmes événements sont donc modifiés dans ce référentiel. Cela ne peut logiquement résulter d'un simple choix d'origine spatiotemporelle. On obtient un résultat similaire pour une transformation quelconque sur les temps, si elle est non linéaire. On en conclut donc que les transformations de Lorentz doivent être linéaires, aussi bien pour l'espace que pour le temps (voir section 6.2.2 pour une démonstration rigoureuse).

On vérifie aisément que l'équivalence (2.4) ne peut pas être satisfaite pour une transformation de Galilée. L'équivalence recherchée peut s'écrire

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \kappa (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2). \quad (2.5)$$

La transformation étant linéaire, le coefficient  $\kappa$  ne peut dépendre que du paramètre caractérisant la transformation, à savoir  $\vec{V}$ . Nous allons maintenant faire l'hypothèse supplémentaire que l'espace est isotrope. Dans ce cas, le coefficient  $\kappa$  ne peut dépendre que du module de  $\vec{V}$  et non de son orientation. De plus, si nous considérons trois référentiels  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ , tels que  $\vec{V}_{12}$  caractérise la transformation des référentiels  $\mathcal{R}_1$  vers  $\mathcal{R}_2$ , que  $\vec{V}_{23}$  caractérise la transformation des référentiels  $\mathcal{R}_2$  vers  $\mathcal{R}_3$  et que  $\vec{V}_{13}$  caractérise la transformation des référentiels  $\mathcal{R}_1$  vers  $\mathcal{R}_3$ , on s'attend à avoir

$$\kappa(|\vec{V}_{13}|) = \kappa(|\vec{V}_{12}|)\kappa(|\vec{V}_{23}|). \quad (2.6)$$

Puisque  $|\vec{V}_{13}|$  ne dépend pas seulement de  $|\vec{V}_{12}|$  et  $|\vec{V}_{23}|$ , mais aussi de l'angle entre  $\vec{V}_{12}$  et  $\vec{V}_{23}$ ,  $\kappa$  est nécessairement une constante. En vertu de la relation (2.6), on a donc  $\kappa = 1$ , ce qui implique

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (2.7)$$

Ces transformations sont dites homogènes : elles sont telles que les repères spatiaux et la synchronisation des horloges dans chacun des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont choisis de sorte que

$$x = y = z = ct = 0 \iff x' = y' = z' = ct' = 0. \quad (2.8)$$

Autrement dit, les origines des repères spatiaux dans les deux référentiels coïncident au moment où les horloges synchronisées de ces deux laboratoires marquent toutes l'instant zéro.

Dans un référentiel d'inertie,  $t$  étant la coordonnée temporelle,  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un repère cartésien orthonormé et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide, les transformations de Lorentz homogènes sont les transformations linéaires qui laissent invariante la forme quadratique  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ .

Les transformations de Lorentz les plus simples que l'on puisse réaliser ne concernent que deux des quatre coordonnées d'espace-temps. Une première famille comprend les transformations qui « mélangent » une coordonnée d'espace avec la coordonnée temporelle. Il s'agit de *rotations d'espace-temps* :

$$\begin{aligned} y = y', z = z' \text{ et } (x, t) &\rightarrow (x', t') \quad \text{tel que} & c^2t^2 - x^2 &= c^2t'^2 - x'^2, \\ x = x', z = z' \text{ et } (y, t) &\rightarrow (y', t') \quad \text{tel que} & c^2t^2 - y^2 &= c^2t'^2 - y'^2, \\ x = x', y = y' \text{ et } (z, t) &\rightarrow (z', t') \quad \text{tel que} & c^2t^2 - z^2 &= c^2t'^2 - z'^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comme nous le verrons dans la section suivante, chacune des trois transformations (2.9) dépend d'un paramètre sans dimension qui est le rapport entre la vitesse relative  $V$  des deux référentiels d'inertie et la vitesse de la lumière.

Une autre famille de transformations, qui satisfait à la condition (2.7), consiste en trois rotations spatiales à deux dimensions :

$$\begin{aligned} t = t', z = z' \text{ et } (x, y) &\rightarrow (x', y') \quad \text{tel que} & x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2, \\ t = t', y = y' \text{ et } (x, z) &\rightarrow (x', z') \quad \text{tel que} & x^2 + z^2 &= x'^2 + z'^2, \\ t = t', x = x' \text{ et } (y, z) &\rightarrow (y', z') \quad \text{tel que} & y^2 + z^2 &= y'^2 + z'^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Chacune de ces trois rotations dépend d'un seul paramètre qui est l'angle de rotation. Une rotation quelconque à trois dimensions est donc caractérisée par trois angles de rotation, par exemple les angles d'Euler<sup>4</sup>. Nous reparlerons des rotations dans le chapitre 7.

Les rotations et les rotations d'espace-temps sont des transformations continues en ce sens qu'elles dépendent de paramètres que l'on peut faire varier continûment. Notons enfin que les transformations discrètes suivantes sont également des transformations de Lorentz :

4. Voir, par exemple, l'ouvrage de H. Goldstein, C. Poole et J. Safko, p. 150 (biblio).



$$t \rightarrow -t \quad \text{renversement du temps} \quad (2.11)$$

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z) \quad \text{réflexion d'espace (parité)}. \quad (2.12)$$

### 2.1.4 Transformations spéciales

Déterminons maintenant la forme explicite d'une rotation d'espace-temps. Pour cela, nous allons considérer une situation physique particulière.

Deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont unis par une *transformation de Lorentz spéciale* si ces deux référentiels sont dans la situation particulière où leurs axes sont parallèles deux à deux et leur mouvement relatif est parallèle à un des axes. De plus, les origines spatiales  $O$  et  $O'$  des deux référentiels coïncident en  $t = t' = 0$ . Une telle configuration est illustrée sur la figure 2.3. Dans la suite de cette section, nous supposons que, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les composantes de la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}'$  sont données par

$$V_x = V, \quad V_y = V_z = 0. \quad (2.13)$$

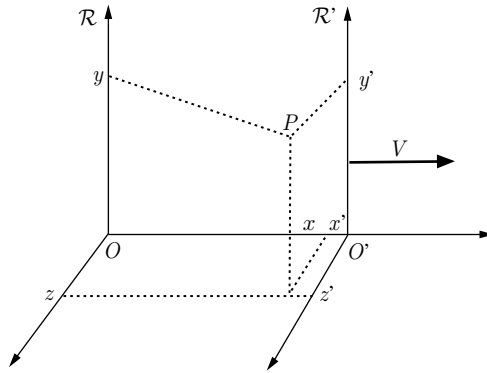
Nous devons chercher la transformation de Lorentz qui correspond à cette situation physique. Soient  $(t, x, y, z)$  et  $(t', x', y', z')$  les coordonnées spatio-temporelles d'un **même** événement dans les deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Dans le cas d'une transformation de Galilée, nous avons

$$\begin{aligned} t &= t', \\ x &= x' + V t', \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pour une transformation spéciale de Lorentz nous allons supposer, par analogie et en imposant la linéarité de la transformation, que les relations (2.3) se réduisent à

$$\begin{aligned} ct &= A ct' + B x', \\ x &= C ct' + D x', \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans ces expressions, le temps n'est plus considéré comme absolu : nous avons vu dans la section 1.5 que la durée d'un phénomène dépendait de l'observateur. L'hypothèse que dans une transformation spéciale de Lorentz le long de l'axe  $Ox$  les coordonnées  $y$  et  $z$  demeurent inchangées paraît assez naturelle et sera pleinement justifiée dans les sections 4.2 et 6.2.3. Nous savons que la grandeur  $c$  va jouer un rôle particulier; elle est donc introduite au niveau de la coordonnée temporelle (voir section 2.1.1).



**Figure 2.3** Référentiels d'inertie unis par une transformation spéciale de Lorentz.

Les coefficients sans dimension  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  dans les relations (2.15) peuvent être déterminés par la condition (2.7). L'identification terme à terme fournit les conditions

$$A^2 - C^2 = 1, \quad (2.16)$$

$$B^2 - D^2 = -1, \quad (2.17)$$

$$AB - CD = 0. \quad (2.18)$$

Nous avons ici trois équations pour quatre inconnues. La solution dépend donc d'un paramètre. Il ne peut en être autrement car la transformation entre les deux référentiels dépend de leur vitesse relative  $V$ . La relation (2.16) est satisfaite si on pose

$$A = \cosh \theta \quad \text{et} \quad C = \sinh \theta. \quad (2.19)$$

De même, la relation (2.17) est satisfaite si on pose

$$D = \cosh \phi \quad \text{et} \quad B = \sinh \phi. \quad (2.20)$$

Finalement la condition (2.18) entraîne

$$\sinh(\phi - \theta) = 0, \quad (2.21)$$

dont l'unique solution est  $\phi = \theta$ . Les relations de transformation sont donc données par

$$\begin{aligned} ct &= \cosh \theta \, ct' + \sinh \theta \, x', \\ x &= \sinh \theta \, ct' + \cosh \theta \, x', \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Remarquons que ces relations s'inversent en changeant le signe de  $\theta$ .

Il faut maintenant déterminer le lien existant entre le paramètre  $\theta$  et la vitesse relative  $V$  des deux référentiels. Pour cela, considérons l'origine spatiale  $O'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Les coordonnées spatio-temporelles de ce point dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  sont  $(ct', 0, 0, 0)$  où  $t'$  est un instant arbitraire. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , l'équation du mouvement de  $O'$  est  $x = Vt$ , puisque  $O'$  se déplace à la vitesse constante  $V$  le long de l'axe  $Ox$  dans ce référentiel, et puisque les origines spatiales des deux repères coïncident pour  $t = t' = 0$ . On en conclut que les coordonnées spatio-temporelles de  $O'$  sont  $(ct, Vt, 0, 0)$  dans  $\mathcal{R}$ . Donc, en utilisant les relations (2.22), on obtient

$$ct = \cosh \theta ct' \quad \text{et} \quad Vt = \sinh \theta ct'. \quad (2.23)$$

On en déduit que

$$\frac{V}{c} = \tanh \theta, \quad (2.24)$$

ce qui implique que

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{et} \quad \sinh \theta = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.25)$$

Le signe de  $\cosh \theta$  est choisi de sorte que  $V = 0$  implique  $t = t'$ , ce qui revient à identifier la transformation de Lorentz à la transformation de Galilée aux faibles vitesses. Le paramètre sans dimension  $\theta$  est appelé *rapidité* ou *pseudo-vitesse*.

Il est commode d'utiliser les deux paramètres sans dimension suivants

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.26)$$

On établit immédiatement que

$$\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1. \quad (2.27)$$

Avec les conventions (2.26), on a  $\cosh \theta = \gamma$ ,  $\sinh \theta = \beta\gamma$  et  $\tanh \theta = \beta$ . Les transformations de Lorentz spéciales s'écrivent alors

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x'), \\ x &= \gamma(x' + \beta ct'), \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les transformations ci-dessus relient donc les coordonnées spatio-temporelles  $(ct, x, y, z)$  d'un événement  $E$  dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$  aux coordonnées spatio-temporelles  $(ct', x', y', z')$  du **même** événement  $E$  dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$ .

Ces deux référentiels se présentent comme indiqué sur la figure 2.3. Bien que ces transformations aient été établies en étudiant le phénomène très particulier de la propagation d'un front d'onde lumineux <sup>5</sup>, nous verrons dans la section 6.2 que ces transformations sont les seules possibles, et qu'elles peuvent s'appliquer à tout événement, quelle que soit sa nature physique.

La forme (2.28) de la transformation de Lorentz spéciale a été obtenue à l'aide de deux événements, dont l'un est l'origine spatiotemporelle. Cette condition n'est pas nécessaire. On peut choisir deux événements quelconques  $E_1$  de coordonnées  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $E_2$  de coordonnées  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et des quantités primées correspondantes dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Il est facile de vérifier que la transformation (2.28) laisse invariante la grandeur suivante, reliée à l'*intervalle d'espace-temps* entre les deux événements  $E_1$  et  $E_2$ ,

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \\ &= c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nous reviendrons abondamment sur cette propriété dans les chapitres suivants.

Les relations (2.28) mettent clairement en évidence la symétrie qui existe, d'une part entre le temps et l'espace, d'autre part entre les deux référentiels. Pour inverser ces relations, il suffit de remplacer  $V$  par  $-V$  (ou  $\beta$  par  $-\beta$ ). Cela implique donc que la vitesse relative du référentiel  $\mathcal{R}$  vue du référentiel  $\mathcal{R}'$  est caractérisée par  $V'_x = -V$  et  $V'_y = V'_z = 0$ , ce qui semble assez naturel (voir exercice 1.5). Les équations de transformation de Lorentz inverses sont donc

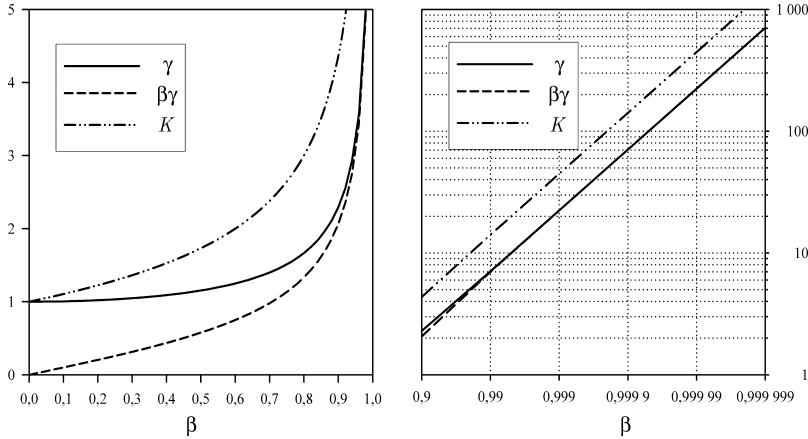
$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.30)$$

La grandeur  $V/c$  est le paramètre sans dimension qui caractérise la rotation d'espace-temps  $(x, t) \rightarrow (x', t')$ . La forme des autres rotations d'espace-temps « élémentaires » possibles s'obtient en permutant le rôle de  $x$  et  $y$ , ou de  $x$  et  $z$ . Nous discuterons le cas d'une transformation générale avec  $V_x \neq 0$ ,  $V_y \neq 0$  et  $V_z \neq 0$  dans la section 7.2.

5. Il existe plusieurs manières d'établir la forme des transformations de Lorentz au moyen de ces hypothèses. On peut consulter à ce sujet, par exemple, l'ouvrage de J.-L. Bobin (biblio). Signalons également la méthode originale proposée dans le livre de M. Ludvigsen (biblio). Une

étape de la démonstration est l'introduction du coefficient  $K = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ , appelé *facteur de Bondi*.

On a alors  $2\gamma = K + K^{-1}$  et  $2\gamma\beta = K - K^{-1}$ .



**Figure 2.4** Facteurs  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ,  $\beta\gamma$  et  $K = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$  en fonction de  $\beta$ .

Remarquer que, dans la figure de gauche, l'échelle des axes est linéaire, tandis que dans la figure de droite, elle est logarithmique.

La présence du facteur  $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2/c^2}$  dans les transformations de Lorentz implique que  $|V| < c$ , c'est-à-dire que la vitesse relative de deux référentiels inertiels ne peut ni atteindre ni excéder la vitesse de la lumière dans le vide. Une particule est dite *matérielle* s'il est toujours possible de définir, au moins instantanément, un référentiel inertiel dans lequel cette particule est au repos. Cela implique donc que la vitesse d'une telle particule ne peut ni atteindre ni dépasser la valeur  $c$  par rapport à un référentiel d'inertie quelconque<sup>6</sup>. Soulignons également que lorsque la vitesse d'une particule est voisine de  $c$  les effets relativistes deviennent très importants, comme l'illustre la figure 2.4 où  $\gamma$  et  $\beta\gamma$  sont représentés en fonction de  $\beta$ . Un corollaire à cette définition est que le photon, particule constituant la lumière, n'est pas une particule matérielle ; en effet, la vitesse du photon étant  $c$  quel que soit le choix du référentiel inertiel, il n'en existe aucun dans lequel le photon se trouve au repos. Le lien entre masse et vitesse des particules sera analysé en plus amples détails dans le chapitre 9.

À faible vitesse relative  $V$ , les transformations de Lorentz se réduisent aux transformations de Galilée. En effet, si  $|V|/c \ll 1$ , on obtient alors à partir des relations (2.28)

$$\begin{aligned} t &= t' + (V/c^2) x', \\ x &= x' + V t'. \end{aligned} \quad (2.31)$$

À moins que la valeur de  $x'$  ne soit « astronomique », on retrouve bien le caractère absolu du temps en relativité galiléenne ( $t = t'$ ).

Les relations (2.28) traduisent bien le fait que ni l'espace ni le temps ne peuvent plus être considérés comme absolus. Le temps (ou l'espace) d'un observateur est un

6. Cela implique également que la masse de cette particule est non nulle (voir section 9.5).

« mélange » du temps et de l'espace d'un autre observateur. Dans le cadre de la relativité restreinte, l'espace et le temps ne forment plus qu'une seule entité, au **caractère absolu**, l'espace-temps (voir section 6.4).

### 2.1.5 \* Construction des repères

Les systèmes de coordonnées des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  utilisés pour définir les transformations de Lorentz spéciales (2.28) sont tels que les coordonnées spatiales et temporelle coïncident si la vitesse relative des référentiels est nulle. On peut se demander par quelle procédure des observateurs, en mouvement relatif, vont pouvoir bâtir leurs systèmes de coordonnées respectifs de cette manière.

Supposons qu'un observateur  $A$  immobile dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}''$  décide de comparer ses mesures avec celles d'un observateur  $B$  en mouvement rectiligne uniforme dans ce référentiel. Supposons en outre que l'observateur  $A$  ait déjà défini un système de coordonnées pour son propre référentiel. Il repère un point immobile dans le référentiel de l'observateur  $B$  (celui-ci a le même vecteur vitesse que  $B$ ) et décide que ce point sera l'origine  $O'$  d'un référentiel d'inertie encore à définir  $\mathcal{R}'$  (dans cette section, l'origine signifie l'origine du repère spatial). Le vecteur vitesse relative et la position du point  $O'$  à un instant donné déterminent une droite  $D$  dans l'espace. L'observateur  $A$  change alors son système de référence : par une rotation il rend son axe  $O''x''$  parallèle à la droite  $D$ , et par une translation il déplace son origine  $O''$  pour l'amener sur cette droite. Il décide ensuite de réaliser toutes ses mesures de position dans ce nouveau référentiel, qu'il baptise référentiel  $\mathcal{R}$ , dont l'origine est maintenant notée  $O$  et dont les coordonnées spatiales sont notées  $x, y, z$ . La vitesse relative des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  est donc parallèle à l'axe  $Ox$  et l'origine  $O'$  va forcément coïncider avec l'origine  $O$  à un instant donné. L'observateur  $A$  peut orienter son axe  $Ox$  en décidant par exemple que la vitesse de l'observateur  $B$  sera positive.

Ayant été averti par son collègue  $A$ , l'observateur  $B$  fixe ses axes  $O'y'$  et  $O'z'$ , perpendiculaires à la vitesse relative, au moment où  $O'$  passe par  $O$ , simplement en repérant la direction des axes  $Oy$  et  $Oz$  ainsi que la longueur unité sur ces axes. Cette opération peut être réalisée sans ambiguïté car les transformations de Lorentz laissent inchangées les mesures perpendiculaires à la vitesse relative. L'observateur  $B$  reporte alors la longueur unité, de son axe  $O'y'$  par exemple, sur son axe  $O'x'$  qui est dans la direction de la vitesse relative. L'orientation de cet axe est fixée par le fait que la vitesse de l'observateur  $A$  doit être négative pour l'observateur  $B$ .

Au moment du croisement des origines  $O$  et  $O'$ , les observateurs vont tous les deux synchroniser leurs horloges respectives sur le temps zéro. Chaque observateur va ensuite définir sa propre unité de temps au moyen de son unité de longueur et de l'invariant  $c$ . Précisons que même si les observateurs  $A$  et  $B$  n'utilisent pas les mêmes unités pour la vitesse de la lumière, ce qui implique des unités de temps différentes, les unités des coordonnées  $ct$  et  $ct'$  seront identiques en vertu du choix identique des unités de longueurs.

Les observateurs, ayant ainsi chacun défini leur système de référence, pourront relier leurs mesures respectives de positions et de temps par une transformation spé-

ciale de Lorentz. Bien que cette procédure théorique soit parfaitement correcte, cela ne veut pas dire que sa réalisation pratique soit aisée. En fait, l'étude de phénomènes physiques ne requiert généralement pas la comparaison directe de mesures faites par deux observateurs différents situés dans deux référentiels d'inertie en mouvement relatif. Il est plutôt nécessaire de mesurer des variables dynamiques comme l'énergie et l'impulsion de particules, ce qui ne demande pas l'élaboration d'un système de référence autre que celui de l'observateur. Notons cependant qu'il est souvent intéressant de construire « mentalement » d'autres référentiels que celui de l'observateur, dans lesquels les calculs sont plus aisés à réaliser (voir section 10.3).

## 2.2 APPROCHES GRAPHIQUES

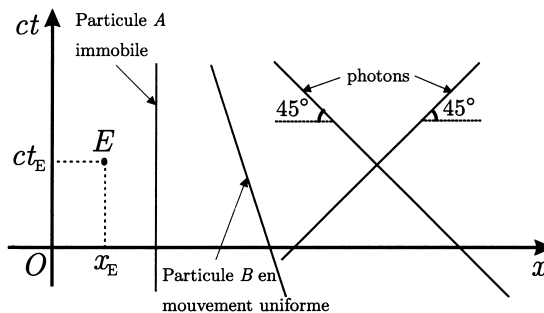
### 2.2.1 Ligne d'univers et cône de lumière

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, le cadre naturel de la relativité restreinte est l'espace-temps à quatre dimensions (trois dimensions d'espace et une dimension temporelle). Toute particule est caractérisée par une « trajectoire » dans l'espace-temps, même si elle ne se déplace pas dans l'espace. Cette trajectoire est appelée *ligne d'univers* de la particule. De manière générale, on qualifiera également de ligne d'univers un ensemble d'événements<sup>7</sup> formant une ligne continue dans l'espace-temps, ce qui peut se noter

$$(ct, x, y, z) = (ct(\lambda), x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)), \quad (2.32)$$

où  $t, x, y, z$  sont fonctions d'un paramètre descriptif  $\lambda$ . Ce paramètre peut être simplement la coordonnée temporelle, auquel cas  $t(\lambda) = t = \lambda$ . Par exemple, la ligne d'univers, entre les temps 0 et  $T$ , d'une particule de vitesse  $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$  constante, passant par l'origine spatiale au temps  $t = 0$ , se note

$$(ct, x, y, z) = (ct, V_x t, V_y t, V_z t) \quad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.33)$$



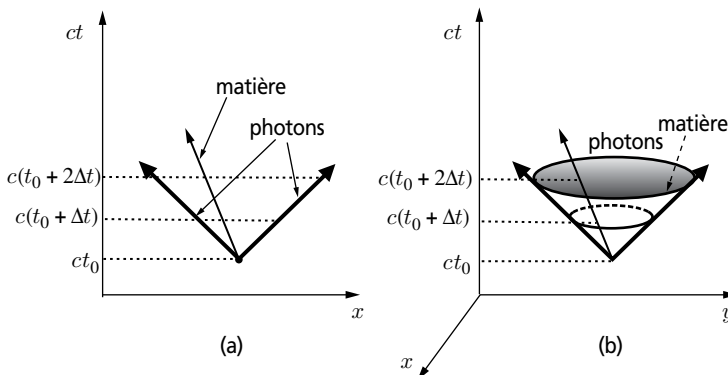
**Figure 2.5** Un événement particulier  $E$  et différentes lignes d'univers dans une représentation graphique de l'espace-temps.

7. On désigne parfois un événement comme un *point d'univers*.

Pour résoudre les problèmes de la relativité restreinte, il est parfois utile de disposer d'une représentation graphique de l'espace-temps. Comme il est impossible de visualiser (et donc de dessiner) un espace à quatre dimensions, on utilise une image simplifiée de l'espace-temps. Pour étudier les aspects essentiels de la relativité restreinte, on peut généralement supprimer deux des trois dimensions spatiales. On ne considère que l'axe  $Ox$ , c'est-à-dire la région de l'espace-temps où les coordonnées  $y$  et  $z$  sont nulles. Il reste ainsi deux coordonnées, la distance  $x$  et le temps  $t$ . De manière à n'utiliser que des grandeurs de même dimension, on remplace la coordonnée  $t$  par  $ct$ .

La figure 2.5 montre une représentation graphique possible d'un espace-temps à deux dimensions pour un référentiel particulier. La coordonnée spatiale  $x$  se trouve sur l'axe horizontal tandis que la coordonnée  $ct$  est sur l'axe vertical. Ces deux axes sont orthonormés et les coordonnées spatio-temporelles d'un événement s'obtiennent par projection parallèle. La ligne d'univers d'une particule  $A$  immobile est une droite verticale, car sa coordonnée  $x$  est constante. Celle d'une particule  $B$  en mouvement uniforme est une droite inclinée car on doit avoir  $\Delta x = (v/c) \Delta(ct)$  avec  $v$  constant. Si la particule est un photon, la droite est inclinée à  $45^\circ$  car on doit avoir dans ce cas  $v/c = \pm 1$ . Si la particule est matérielle, la droite correspondante est inclinée à moins de  $45^\circ$  par rapport à l'axe temporel car  $|v/c| < 1$  dans ce cas.

Insistons encore une fois sur le fait que le seul mouvement que l'on puisse observer est le mouvement relatif d'un objet par rapport à un autre. Dans un autre référentiel que celui considéré sur la figure 2.5, la particule  $A$  pourrait être animée d'un mouvement de translation uniforme, tandis que la particule  $B$  serait immobile. Dans un troisième référentiel, les particules  $A$  et  $B$  pourraient être toutes deux en mouvement de translation uniforme. Pourtant, dans tous les référentiels d'inertie, les photons se déplacent toujours à la vitesse de la lumière, et par conséquent leur ligne d'univers est toujours une droite inclinée à  $\pm 45^\circ$ .

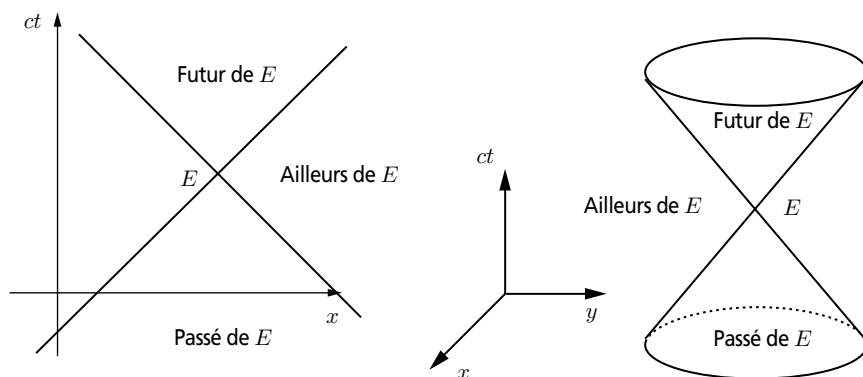


**Figure 2.6** Génération d'un cône de lumière futur dans l'espace-temps caractérisé par une ou deux dimensions spatiales.



On peut également garder deux dimensions spatiales. La totalité de l'espace-temps est alors représentée par un volume infini dont il est possible de dessiner une portion finie en perspective sur une feuille de papier. L'usage veut que l'axe du temps soit placé verticalement ; un plan perpendiculaire à cet axe contient la totalité de l'espace bidimensionnel à un moment donné. Une représentation graphique de l'espace-temps à deux ou trois dimensions est appelée diagramme d'espace-temps.

Supposons qu'une source lumineuse ponctuelle émette dans toutes les directions une impulsion lumineuse à un instant donné. Un front d'onde sphérique va se propager depuis la source avec la même vitesse  $c$  dans toutes les directions. Une particule matérielle quittant la source lumineuse à l'instant de l'émission de lumière va forcément se déplacer à une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière. Cette particule sera donc à tout instant à l'intérieur du front d'onde sphérique. Le front d'onde sphérique va « dessiner » dans l'espace-temps un hypercône qui contiendra la ligne d'univers de la particule. Pour visualiser ce phénomène, examinons-le dans un espace-temps à une ou deux dimensions spatiales, comme illustré sur la figure 2.6. Par exemple, dans l'espace-temps à deux dimensions spatiales, le front d'onde de lumière circulaire accroît son rayon de la quantité  $c\Delta t$  après chaque intervalle de temps  $\Delta t$ . Ce front d'onde génère clairement dans l'espace-temps un cône qui contient la ligne d'univers de toute particule matérielle passant par la source au moment de l'émission de l'impulsion lumineuse. Ce type de structure spatiotemporelle est appelé *cône de lumière futur*<sup>8</sup>. De même, tous les rayons lumineux venant du passé et arrivant à un point de l'espace-temps forment ce que l'on appelle un cône de lumière passé.

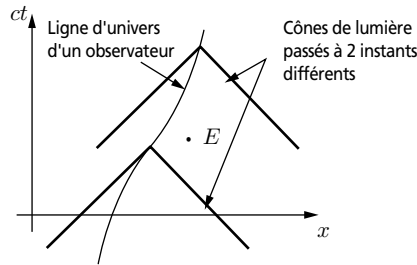


**Figure 2.7** Cônes de lumière associés à un événement  $E$  dans un espace-temps de Minkowski caractérisé par une ou deux dimensions spatiales.

Étant donné l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide, tous les observateurs pourront s'accorder sur la position dans l'espace-temps des cônes de lumière. Les cônes associés à chaque événement déterminent ainsi une structure

8. On garde le terme cône, quelle que soit la dimension de l'espace-temps.

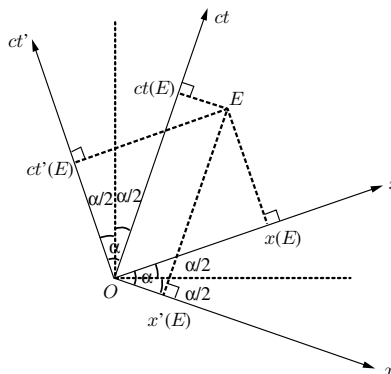
invariante dans l'espace-temps – structure qui a été proposée pour la première fois par H. Minkowski. C'est pourquoi l'espace-temps de la relativité restreinte porte le nom d'*espace-temps de Minkowski*.



**Figure 2.8** Un événement situé dans l'ailleurs d'un observateur à un instant donné peut se retrouver dans son passé à une date ultérieure.

Aucune information ne pouvant se déplacer à une vitesse supérieure à celle de la lumière (voir section 2.1.4), l'événement  $E$  ne peut être la cause d'autres événements que si ces derniers sont situés dans ou sur son cône de lumière futur (voir section 3.3), le futur de  $E$ . De même, cet événement  $E$  ne peut être le résultat d'événements antérieurs que s'ils sont situés dans ou sur son cône de lumière passé, le passé de  $E$ . La région de l'espace-temps qui n'est ni le futur ni le passé de l'événement  $E$  est appelée l'*ailleurs* de  $E$ . Les événements de l'ailleurs de  $E$  sont causalement totalement indépendants de  $E$ . En chaque point de l'espace-temps, on peut dessiner les cônes de lumière futur et passé qui fixent localement sa structure causale. La figure 2.7 illustre cette situation pour un espace de Minkowski à une ou deux dimensions spatiales. Signalons qu'au fur et à mesure qu'un observateur « avance » sur sa ligne d'univers, son futur se rétrécit alors que son passé s'élargit. C'est ainsi qu'un événement situé dans l'ailleurs d'un observateur à un instant donné peut se retrouver dans son passé à une date ultérieure (voir figure 2.8).

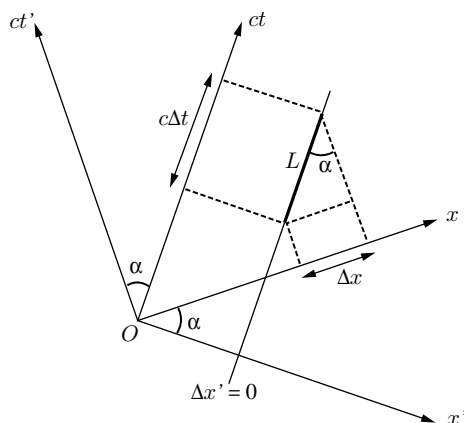
### 2.2.2 Diagramme de Lorentz



**Figure 2.9** Coordonnées spatio-temporelles d'un événement  $E$ , pour deux référentiels d'inertie unis par une transformation spéciale de Lorentz, dans un diagramme de Lorentz.

Francis W. Sears et Robert W. Brehme sont les auteurs d'une technique originale pour représenter graphiquement le passage d'un référentiel d'inertie à un autre, unis tous deux par une transformation spéciale de Lorentz<sup>9</sup>. On place deux systèmes de coordonnées comme illustré sur la figure 2.9, en convenant de repérer les coordonnées spatiotemporelles d'un événement par **projection perpendiculaire** sur les axes correspondants<sup>10</sup>. L'unité de longueur est identique sur les axes  $Ox$  et  $Ox'$ . Remarquons que les axes  $Ox$  et  $Oct'$  sont perpendiculaires. Il en est de même pour les axes  $Ox'$  et  $Oct$ . Ces diagrammes ont été baptisés par leurs auteurs *diagrammes de Lorentz*. Le symbole  $O$  désigne ici l'origine du repère spatiotemporel, c'est-à-dire l'origine du repère spatial au temps zéro. Comme nous ne travaillons que dans le cadre des transformations de Lorentz spéciales, les origines  $O$  et  $O'$  sont confondues. La ligne d'univers d'un photon dans un tel diagramme est évidemment une droite parallèle ou perpendiculaire à la bissectrice des axes  $Ox$  et  $Oct$  ( $Ox'$  et  $Oct'$ ) puisqu'on doit avoir  $\Delta x = \pm c\Delta t$  ( $\Delta x' = \pm c\Delta t'$ ) suivant que le photon se propage vers les valeurs de  $x$  ( $x'$ ) positives ou négatives.

Notons que sur la figure 2.9, les axes  $Ox$  et  $Ox'$  sont tous deux écartés d'un angle  $\alpha/2$  avec l'horizontale de référence. Cette disposition est choisie de manière à insister sur le fait qu'aucun des deux systèmes de référence n'est privilégié. Ni l'un, ni



**Figure 2.10** Calcul de l'angle  $\alpha$  dans un diagramme de Lorentz par examen de la ligne d'univers d'un objet immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , se déplaçant à la vitesse  $\Delta x / \Delta t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

9. Voir leur ouvrage cité dans la bibliographie. Une manière originale d'introduire ces diagrammes est présentée dans l'article de Robert W. Flynn, « Spacecraft navigation and relativity », *American Journal of Physics*, vol. 53, n° 2, February 1985, p. 113-119.

10. Abaisser les perpendiculaires d'un point sur les axes de coordonnées permet d'obtenir les composantes covariantes de ce point (voir chapitre 8). Les composantes contravariantes sont obtenues par la technique – plus traditionnelle – qui consiste à tracer des parallèles aux axes. Il est important de signaler que les deux méthodes se valent. Voir à ce sujet l'article de Robert W. Brehme, « A Geometric Representation of Galilean and Lorentz Transformations », *American Journal of Physics*, vol. 30, n° 7, July 1962, p. 489-496.

l'autre, ne doit être considéré comme étant « vraiment » en mouvement ou « vraiment » au repos. La seule réalité physique qui est contenue dans ce diagramme est le caractère relatif du mouvement des référentiels. De plus, avec cette configuration, la ligne d'univers d'un photon fait un angle de  $45^\circ$  avec l'horizontale de référence ; cela facilite les constructions graphiques.

La signification de l'angle  $\alpha$  entre les axes  $Ox$  et  $Ox'$  ( $Oct$  et  $Oct'$ ) peut être trouvée en examinant la ligne d'univers d'un objet immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Sa ligne d'univers est représentée sur la figure 2.10 ; c'est évidemment une droite perpendiculaire à l'axe  $Ox'$ . La vitesse  $V$  de l'objet dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est celle du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Elle est donnée par

$$\frac{V}{c} = \frac{\Delta x}{c\Delta t}. \quad (2.34)$$

Comme on peut le voir sur la figure 2.10, on a

$$\begin{aligned} \Delta x &= L \sin \alpha, \\ c\Delta t &= L, \end{aligned} \quad (2.35)$$

où la grandeur  $L$  est un intermédiaire de calcul représentant la longueur d'un segment. De ces relations, on tire

$$\frac{V}{c} = \sin \alpha. \quad (2.36)$$

Avec cette configuration, on a  $V \geq 0$  (pour obtenir une configuration correspondant à une vitesse  $V$  négative, il suffit de réaliser les permutations d'axes  $Ox \leftrightarrow Ox'$  et  $Oct \leftrightarrow Oct'$ ). D'après la figure 2.10, on constate qu'on a obligatoirement  $0 \leq \alpha < \pi/2$ .

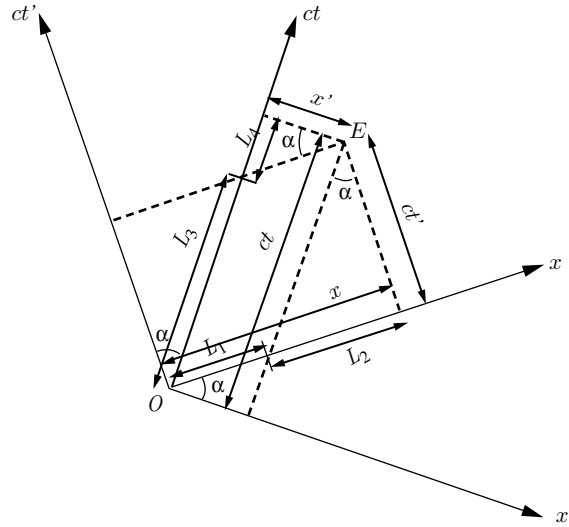
Montrons que ces diagrammes permettent bien de représenter les transformations de Lorentz. Sur la figure 2.11, les coordonnées spatiotemporelles d'un événement sont décomposées de la manière suivante :  $x = L_1 + L_2$  et  $ct = L_3 + L_4$ , avec  $L_1 \cos \alpha = x'$ ,  $L_2/(ct') = \tan \alpha$ ,  $L_3 \cos \alpha = ct'$  et  $L_4/x' = \tan \alpha$ . Cela implique que

$$\begin{aligned} ct &= ct' / \cos \alpha + x' \tan \alpha, \\ x &= ct' \tan \alpha + x' / \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Comme  $\sin \alpha = V/c = \beta$ , on a

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{et} \quad \tan \alpha = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \beta \gamma, \quad (2.38)$$

avec  $\cos \alpha > 0$  car  $0 \leq \alpha < \pi/2$ . On en déduit que les relations (2.37) sont bien les transformations de Lorentz spéciales (2.28).



**Figure 2.11** Les coordonnées  $(x, ct)$  et  $(x', ct')$  de l'événement  $E$  sont reliées par une transformation de Lorentz spéciale dans ce diagramme.

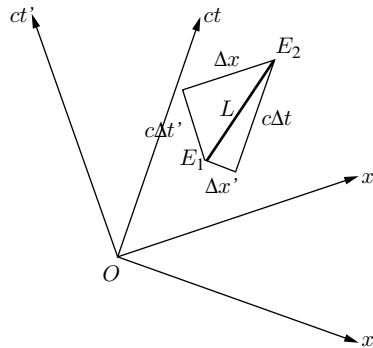
Évidemment, en exprimant  $x'$  et  $ct'$  en fonction de  $x$  et  $ct$  par une construction analogue à la figure 2.11, on trouve

$$ct' = ct / \cos \alpha - x \tan \alpha, \quad (2.39)$$

$$x' = x / \cos \alpha - ct \tan \alpha, \quad (2.40)$$

c'est-à-dire les relations (2.37) après le remplacement de  $V$  par  $-V$  et la permutation des coordonnées primées et non primées.

On peut également montrer, dans un diagramme de Lorentz, que l'intervalle d'espace-temps est une grandeur invariante. Dans deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$



**Figure 2.12** Intervalle d'espace-temps dans un diagramme de Lorentz.

en mouvement relatif, considérons l'intervalle de temps et la distance entre deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sur la ligne d'univers d'un mobile en mouvement uniforme, comme indiqué sur la figure 2.12. Du théorème de Pythagore, on déduit

$$L^2 = c^2 \Delta t'^2 + \Delta x^2 = c^2 \Delta t^2 + \Delta x'^2, \quad (2.41)$$

où la grandeur  $L$  est un intermédiaire de calcul. On en conclut que

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2. \quad (2.42)$$

Puisque les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont arbitraires, la quantité  $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$  est la même dans tous les référentiels d'inertie, et est donc bien une quantité invariante.

L'équivalent des diagrammes de Lorentz existe pour les transformations galiléennes. Baptisés diagrammes de Galilée, ils se distinguent de leurs contreparties relativistes par la présence d'un seul axe du temps commun aux deux référentiels représentés (le temps est en effet absolu en physique newtonienne)<sup>11</sup>.

Notons que les diagrammes de Lorentz présentent un inconvénient : on ne peut représenter que deux référentiels à la fois sur un même graphique. Toutefois, l'intérêt de ces diagrammes vient de ce que les calculs y sont très aisés et très rapides.

### 2.2.3 Autres diagrammes d'espace-temps

#### a) Diagramme de Loedel

Les diagrammes de Loedel sont similaires aux diagrammes de Lorentz, mais ont été développés antérieurement<sup>12</sup>. Les projections se font cette fois **parallèlement** aux axes et il convient d'invertir, par rapport aux diagrammes de Lorentz, la disposition des axes des deux référentiels représentés (voir figure 2.13).

Si  $V$  est la vitesse relative des deux référentiels et  $\alpha$  l'angle entre les deux axes  $Ox$  et  $Ox'$ , on peut vérifier, sur la figure 2.13.a, qu'on a toujours  $V/c = \sin \alpha$  ( $\Delta x = L \sin \alpha, \Delta(ct) = L$ ). On constate également, à l'aide de la figure 2.13.b, que

$$\begin{aligned} ct &= x \sin \alpha + ct' \cos \alpha, \\ x &= ct \sin \alpha + x' \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.43)$$

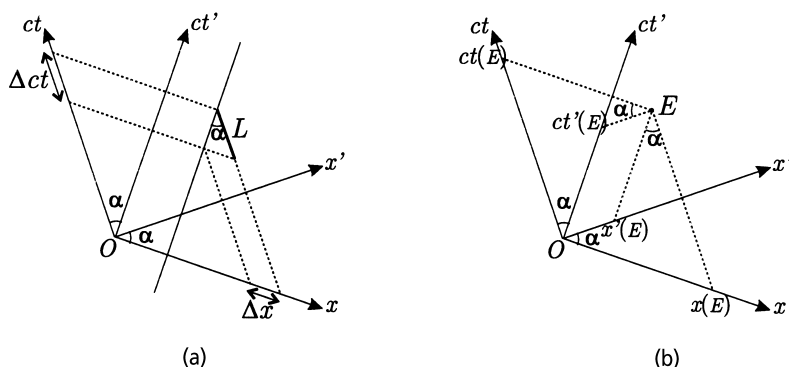
Ceci entraîne

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{1}{\cos \alpha} (ct - x \sin \alpha), \\ x' &= \frac{1}{\cos \alpha} (x - ct \sin \alpha). \end{aligned} \quad (2.44)$$

11. Voir l'ouvrage de F. W. Sears et R. W. Brehme (biblio).

12. Enrique Loedel, « Aberración y Relatividad », *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, vol. 145, 1948, p. 3-13 ; *American Journal of Physics*, vol. 25, n° 5, May 1957, p. 326-327.

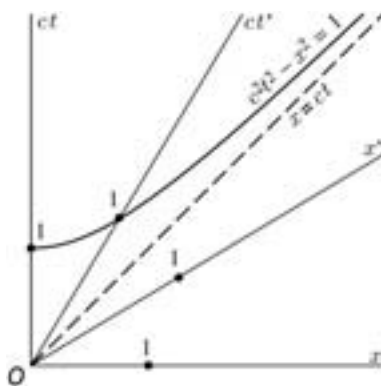
Ce sont bien les transformations de Lorentz (2.30) puisque  $\beta = \sin \alpha$  et  $\gamma = 1/\cos \alpha$ .



**Figure 2.13** Diagrammes de Loedel : (a) une portion de la ligne d'univers d'un objet immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est représentée ; (b) les coordonnées d'un événement  $E$  sont indiquées dans les deux référentiels.

On considère parfois que les diagrammes de Loedel sont plus faciles à utiliser que les diagrammes de Lorentz<sup>13</sup>, mais beaucoup plus d'articles ont été consacrés à ces derniers. C'est pourquoi les diagrammes de Lorentz sont utilisés dans cet ouvrage.

### b) Diagramme de Minkowski



**Figure 2.14** Diagramme de Minkowski. La ligne en pointillé représente une ligne d'univers de photons. L'unité de longueur est indiquée sur les axes.

13. J. Rekvelde, « New Aspects of the Teaching of Special Relativity », *American Journal of Physics*, vol. 37, n° 7, July 1969, p. 716-721.

Il est également possible de représenter graphiquement les transformations de Lorentz en partant d'un diagramme d'espace-temps comme celui de la figure 2.5. Les relations (2.30) impliquent que les points tels que  $t' = 0$  sont donnés par la droite d'équation  $ct = \beta x$  et que les points tels que  $x' = 0$  sont donnés par la droite d'équation  $x = \beta ct$ . Ces deux droites sont respectivement les axes  $Ox'$  et  $Oct'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$ , animé d'une vitesse  $\beta c$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  (voir figure 2.14). Elles sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Sur un tel diagramme, dit de Minkowski, plus de deux référentiels en mouvement relatif peuvent être dessinés, ce qui est impossible avec les diagrammes de Loedel et de Lorentz. Le diagramme de Minkowski est, de loin, la plus utilisée des représentations géométriques de l'espace-temps à deux dimensions. Cependant, cette représentation privilégie clairement un référentiel particulier « au repos », ce qui est contraire à l'esprit de la relativité restreinte. De plus, la longueur unité change avec le référentiel d'inertie. En effet, considérons la ligne d'équation  $c^2t^2 - x^2 = 1$ , qui passe par le point  $(ct, x) = (1, 0)$  du référentiel  $\mathcal{R}$  (voir figure 2.14). Pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}'$ , cette ligne obéit à l'équation  $c^2t'^2 - x'^2 = 1$ , qui passe par le point  $(ct', x') = (1, 0)$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  (voir section 2.1.3). Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , le point d'intersection de la courbe  $c^2t^2 - x^2 = 1$  et de l'axe  $Oct'$ , d'équation  $x = \beta ct$ , est  $(ct, x) = (\gamma, \beta\gamma)$ . Le point unité de l'axe  $Oct'$  se trouve donc, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , à une « distance »  $\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2} = \gamma(1 + \beta^2)^{1/2}$  de l'origine spatiotemporelle. On montre de même que le point unité sur l'axe  $Ox'$  se trouve à la distance  $\gamma(1 + \beta^2)^{1/2}$  de l'origine spatiotemporelle. Dans un diagramme de Minkowski, la ligne d'univers d'un photon est toujours une droite inclinée à  $45^\circ$  pour tous les référentiels représentés. Cependant, à cause de la distorsion de l'unité d'un référentiel à l'autre, les calculs sont moins aisés à mener dans un diagramme de Minkowski que dans un diagramme de Loedel ou de Lorentz. C'est pourquoi nous avons choisi de travailler avec ces derniers dans cet ouvrage.

### c) Diagrammes circulaires

Les diagrammes de Minkowski, de Loedel et de Lorentz sont des cas particuliers d'une représentation géométrique de l'espace-temps plus générale<sup>14</sup>. Signalons, pour être complet, qu'une représentation d'un tout autre genre a été développée<sup>15</sup>. Elle est basée sur des cercles mais reste cependant peu utilisée et nous semble moins intéressante, d'un point de vue pédagogique, que les diagrammes de Lorentz.

14. Robert W. Brehme, « Geometric Representations of the Lorentz Transformations », *American Journal of Physics*, vol. 32, n° 3, March 1964, p. 233.

15. Seïichi Asano et Shiro Asano, *A Novel Concept for Understanding the Special Theory of Relativity. The Space-Time Circular Diagram Method*, Gakujutsu Tosho Publishing Company, 1994.



## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 261.

Dans les exercices suivants,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont deux référentiels d'inertie dont les mesures sont reliées par une transformation spéciale de Lorentz de vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$ . Les coordonnées d'un événement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sont notées  $(t, x)$  ; celles du même événement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  sont notées  $(t', x')$ .

### 2.1 Synchronisation des horloges

Trouver des procédures pour synchroniser des horloges d'un référentiel d'inertie, autres que celle décrite dans la section 2.1.2.

### 2.2 Changement d'origine

Que deviennent les transformations de Lorentz (2.15) si le signal lumineux de la figure 2.2 est émis depuis le point de coordonnées spatiotemporelles  $(ct_0, x_0, y_0, z_0)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ?

### 2.3 Une rotation particulière

Montrer que si les coordonnées spatiotemporelles  $(ct, x)$  et  $(ct', x')$  sont reliées par une transformation spéciale de Lorentz, alors les coordonnées spatiotemporelles  $(ct, x')$  et  $(ct', x)$  sont reliées par une rotation. Illustrer avec les diagrammes de Lorentz.

### 2.4 Une vitesse particulière

Dans un diagramme de Lorentz, la ligne d'univers d'un mobile particulier est la droite bissectrice des axes  $Oct$  et  $Oct'$ . Déterminer la vitesse de ce mobile dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Qu'a de particulier l'équation du mouvement ?

### 2.5 Une particularité graphique

Expliquer pourquoi les facteurs  $\gamma$ ,  $\beta\gamma$  et  $K$  ont un comportement quasi-linéaire en fonction de  $\beta$  dans le diagramme logarithmique de la figure 2.4.

### 2.6 Événements ponctuels

(a) Si deux événements se produisent en un même point d'un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , montrer que leur ordre temporel est le même dans tous les référentiels d'inertie et que leur écart en temps est minimal dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

- (b)** Si deux événements se produisent au même instant dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , montrer qu'il n'existe pas de limite à leur écart en temps dans les autres référentiels d'inertie possibles et que leur séparation en espace varie de l'infini à une valeur minimale qui est précisément celle mesurée dans  $\mathcal{R}$ .

## 2.7 Détermination du facteur $\gamma$

On considère un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$ , dont l'axe  $O'x'$  se déplace avec la vitesse  $V_1$  le long de l'axe  $Ox$  d'un autre référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . On écrit les formules de transformation entre les coordonnées sous la forme

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(V_1)(t - \alpha(V_1)x), \\ x' &= \gamma(V_1)(x - V_1t), \end{aligned}$$

Soit un troisième référentiel  $\mathcal{R}''$ , dont l'axe  $O''x''$  est en translation rectiligne uniforme avec la vitesse  $V_2$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$ , toujours le long de l'axe  $Ox$ .

- (a)** En imposant que le passage des référentiels  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}''$  et des référentiels  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}''$  s'écrit sous la forme donnée précédemment, déduire la forme de la fonction  $\alpha(V)$ .
- (b)** En examinant le mouvement d'un photon le long de l'axe  $Ox$ , préciser l'expression de  $\alpha(V)$ .
- (c)** Montrer que  $\gamma(V)$  est une fonction paire, puis trouver son expression. Vérifier que nous avons affaire à la transformation de Lorentz spéciale (2.30).

## Chapitre 3

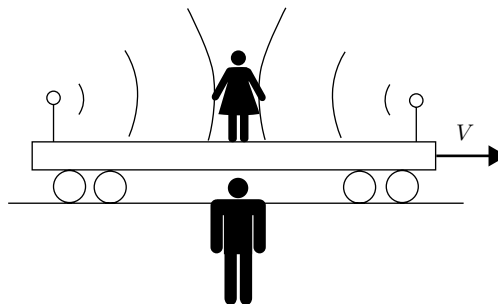
# Le temps et la relativité

*Il était une fois une dame appelée Claire  
Qui voyageait plus vite que la lumière.  
Elle partit un jour relativement  
Et revint le soir précédent.*

A. H. R. BULLER (1923)

Nous nous plaçons dans la situation particulière où les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ont des axes parallèles et où le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplace à la vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Les transformations de Lorentz correspondantes sont données par les formules (2.28).

### 3.1 LA NOTION DE SIMULTANÉITÉ



**Figure 3.1** Expérience de pensée illustrant le caractère relatif de la notion de simultanéité : les signaux lumineux émis par deux lampes fixées aux extrémités d'un véhicule en mouvement atteignent le passager situé au centre du véhicule quand celui-ci passe devant l'observateur au sol.

Soient deux événements  $A$  et  $B$ , de coordonnées respectives  $(t_A, x_A)$  et  $(t_B, x_B)$ , simultanés dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , ce qui implique donc  $t_A = t_B$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , les mêmes événements se produiront à des instants  $t'_A$  et  $t'_B$  donnés, en vertu des relations (2.28), par

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) \quad \text{et} \quad ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B). \quad (3.1)$$

En soustrayant ces relations membre à membre et, en tenant compte de la condition de simultanéité dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on obtient

$$t'_A - t'_B = \frac{\gamma\beta}{c}(x_B - x_A) = \frac{V(x_B - x_A)}{c^2\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (3.2)$$

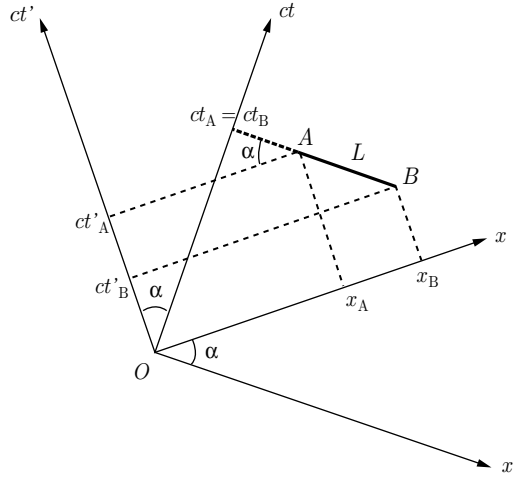
Les instants  $t'_A$  et  $t'_B$  indiqués par les horloges du référentiel  $\mathcal{R}'$  sont donc différents si  $x_A \neq x_B$ , de sorte que la simultanéité perd le caractère absolu qu'on lui attribue en relativité galiléenne.

Cette conclusion peut sembler étrange mais c'est une conséquence inévitable des transformations de Lorentz. Imaginons la situation suivante : un observateur se trouve au milieu d'un véhicule qui passe rapidement devant un autre observateur immobile au sol. Aux deux extrémités du véhicule sont fixées deux lampes. Elles s'allument un bref moment de telle manière que les éclairs de lumière sont perçus par l'observateur du véhicule au moment où il passe devant l'observateur au sol (voir figure 3.1). Pour chacun des deux personnages, les deux signaux lumineux sont reçus au même moment. Quelles conclusions vont donc tirer ces deux observateurs quant aux moments d'allumage des lampes ?

L'observateur dans le véhicule se dit : « Je me trouve au milieu du véhicule à égale distance des deux lampes. Je vois les deux éclairs lumineux au même moment. Puisque la vitesse de la lumière est toujours la même et égale à  $c$ , les deux lampes ont évidemment été allumées au même moment. »

L'observateur au sol arrive cependant à une conclusion différente. En effet, il se dit : « Je vois les deux éclairs de lumière alors que je suis exactement en face du milieu du véhicule, à la même distance des deux lampes. Les rayons lumineux ont mis un certain temps pour me parvenir, alors que le véhicule se déplaçait pendant ce temps. La lampe en queue de véhicule était donc plus éloignée de moi que celle en tête au moment de l'émission des signaux lumineux. La lumière émise par les deux lampes a ainsi parcouru des trajets inégaux ; celle émise en queue de véhicule a traversé une plus grande distance. Puisque la vitesse de la lumière est toujours la même et égale à  $c$ , et que j'ai vu les deux éclairs au même moment, j'en conclus que la lampe en queue de véhicule a été allumée avant celle en tête. Les deux émissions n'ont donc pas été simultanées. »

Bien que cet exemple soit particulièrement parlant, il fait intervenir un effet visuel dû aux délais de transmission de la lumière. Il est important de signaler que le caractère relatif de la notion de simultanéité est indépendant de toute perception visuelle. On peut s'en convaincre en examinant le diagramme de Lorentz de la



**Figure 3.2** Deux événements simultanés dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ne le sont plus dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

figure 3.2 où sont représentés deux événements  $A$  et  $B$ , simultanés uniquement dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . En introduisant la grandeur intermédiaire  $L$ , on obtient

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= L \cos \alpha, \\ c(t'_A - t'_B) &= L \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.3)$$

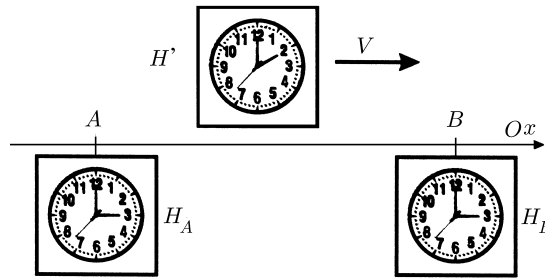
c'est-à-dire  $c(t'_A - t'_B) = (x_B - x_A) \tan \alpha$ . En utilisant les relations (2.38), on retrouve bien l'expression (3.2).

Remarquons enfin que, tout comme dans le cas de l'horloge à photons (voir section 1.5), les rayons lumineux jouent le rôle privilégié de messenger fiable. Cela est dû au fait que leur vitesse de propagation est la même pour tous les observateurs. Il est bien sûr possible d'utiliser d'autres vecteurs d'information, mais il faut alors être particulièrement prudent quant à l'interprétation des observations qui en résultent.

## 3.2 TEMPS PROPRE ET DILATATION DES TEMPS

Considérons dans le référentiel  $\mathcal{R}$  deux horloges  $H_A$  et  $H_B$  synchronisées, au repos sur l'axe  $Ox$  et, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , une horloge  $H'$  au repos sur l'axe  $O'x'$ . Désignons par  $A$  ( $B$ ) l'événement qui correspond au passage de  $H'$  à l'endroit occupé par  $H_A$  ( $H_B$ ). Cette situation est illustrée sur la figure 3.3.

Ces événements  $A$  et  $B$  sont caractérisés par les coordonnées d'espace-temps respectives  $(t_A, x_A)$  et  $(t_B, x_B)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et par  $(t'_A, x'_A)$  et  $(t'_B, x'_B)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Étant donné que  $H'$  est au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , nous avons  $x'_A = x'_B$ . En vertu des relations (2.28) on a alors



**Figure 3.3** Illustration du phénomène de dilatation des temps par des horloges en mouvement relatif.

$$ct_A = \gamma(ct'_A + \beta x'_A) \quad \text{et} \quad ct_B = \gamma(ct'_B + \beta x'_B). \quad (3.4)$$

En soustrayant ces relations membre à membre et en tenant compte de la condition  $x'_A = x'_B$ , on obtient

$$t_B - t_A = \gamma(t'_B - t'_A). \quad (3.5)$$

Un intervalle de temps  $T(0)$  mesuré par un observateur au repos par rapport à une horloge ( $T(0) = t'_B - t'_A$  pour l'horloge  $H'$ ) est donc uni à l'intervalle de temps correspondant  $T(V)$  mesuré dans un référentiel où cette horloge se déplace à la vitesse  $V$  constante ( $T(V) = t_B - t_A$ ) par la relation

$$T(V) = \frac{T(0)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \geq T(0). \quad (3.6)$$

Cette relation traduit le phénomène de dilatation des temps (voir section 1.5). On constate donc que la marche d'une horloge en mouvement est plus lente que celle d'une horloge au repos. Cependant, la modification de l'écoulement du temps est réciproque : si du point de vue du référentiel  $\mathcal{R}$  l'horloge du référentiel  $\mathcal{R}'$  retarde, du point de vue du référentiel  $\mathcal{R}'$  c'est l'horloge du référentiel  $\mathcal{R}$  qui retarde<sup>1</sup>. C'est la preuve que le phénomène est uniquement d'origine cinématique et n'est pas lié aux propriétés des horloges qui changeraient lors de leur déplacement.

La mesure d'intervalles de temps est une procédure délicate (et source de faux paradoxes) en relativité restreinte. Profitons de l'expérience décrite ci-dessus pour introduire la notion de *temps propre*.

On appelle temps propre écoulé entre deux événements la durée mesurée **par une horloge unique**, l'horloge occupant successivement les mêmes coordonnées d'espace que ces événements.

1. Cette situation ne génère pourtant aucun paradoxe (voir section 3.7).

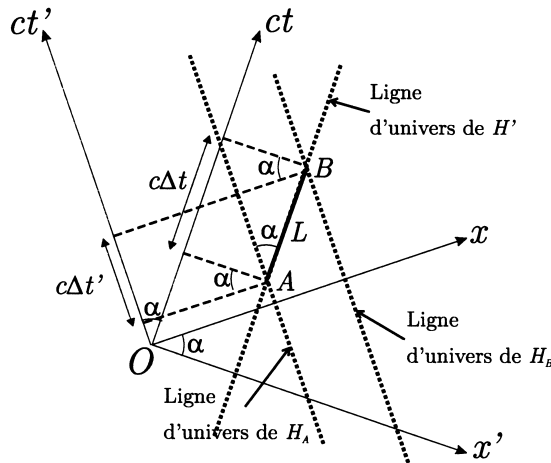
Ainsi dans l'exemple qui précède,  $t'_B - t'_A$  est un intervalle de temps propre : il est mesuré par une seule horloge  $H'$ , les deux événements « rencontre avec l'horloge  $H_A$  » et « rencontre avec l'horloge  $H_B$  » ayant lieu tous deux au point de l'espace où se trouve l'horloge  $H'$ . L'intervalle de temps  $t_B - t_A$  est bien la durée écoulée entre les deux mêmes événements mais mesurée par deux horloges distinctes  $H_A$  et  $H_B$  de l'axe  $Ox$  du référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans ce cas, on parle parfois d'intervalle de temps impropre. Nous reviendrons sur ces importantes notions dans la section 8.4.

La conclusion à laquelle nous sommes arrivés peut donc s'énoncer sous la forme suivante : « Un intervalle de temps impropre séparant deux événements est dilaté par rapport à l'intervalle de temps propre correspondant aux mêmes événements ».

L'expérience ci-dessus peut être représentée graphiquement. Considérons la figure 3.4 sur laquelle sont indiquées les lignes d'univers des horloges  $H_A$ ,  $H_B$  et  $H'$ , et les événements  $A$  et  $B$ . On voit que

$$\begin{aligned} c\Delta t &= L, \\ c\Delta t' &= L \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.7)$$

c'est-à-dire  $c\Delta t' = c\Delta t \cos \alpha = c\Delta t \sqrt{1 - V^2/c^2}$ , ce qui est bien la formule (3.6).



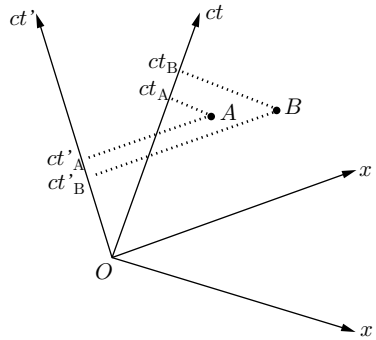
**Figure 3.4** Illustration du phénomène de dilatation des temps dans un diagramme de Lorentz.

Le phénomène de la dilatation des temps a pu être vérifié expérimentalement au moyen d'horloges atomiques très précises embarquées à bord d'avions de ligne et dont les indications ont été comparées à une horloge atomique témoin restée au sol<sup>2</sup>

2. J. C. Hafele et Richard E. Keating, « Around-the-World Atomic Clocks », *Science*, vol. 177, 14 July 1972, p. 166-170. Il est à noter que, la gravitation jouant un rôle important dans l'expérience, la relativité restreinte ne suffit pas à analyser les résultats ; la relativité générale est absolument nécessaire.

(voir exercice 1.2). Dans la section 4.5, nous verrons que seule la dilatation des temps peut expliquer le comportement des mésons rapides produits dans la haute atmosphère par les rayons cosmiques. Nous reviendrons également sur ce phénomène dans les sections 3.7, 8.4 et 8.8.

### 3.3 STRUCTURE CAUSALE DE L'ESPACE-TEMPS



**Figure 3.5** Les deux événements  $A$  et  $B$  ne peuvent être causalement connectés car leur ordre d'apparition s'inverse en passant du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ .

Soit un événement  $A$  qui est la cause de l'événement  $B$ . Cela signifie que  $B$  ne peut exister que si  $A$  a préalablement existé. L'événement  $A$  est donc antérieur à l'événement  $B$ . Il semble logique de demander que si  $A$  est la cause de  $B$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , il en soit de même dans tout autre référentiel  $\mathcal{R}'$ , et donc que l'événement  $A$  soit également antérieur à l'événement  $B$  dans les autres référentiels. C'est ce qu'on appelle le principe de *causalité*.

Dans le cadre de la relativité galiléenne, il ne peut en être autrement car le temps absolu est le même pour tous les référentiels. Cependant sous les transformations de Lorentz, les intervalles de temps sont relatifs. Soient  $(t_A, x_A)$  et  $(t_B, x_B)$  les coordonnées spatiotemporelles respectives des événements  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , avec forcément  $t_B - t_A \geq 0$ . Pour fixer la situation, supposons en outre que  $x_B - x_A > 0$ . Puisque  $A$  est la cause de  $B$ , il faut qu'une information physique soit parvenue de  $x_A$  à  $x_B$ . La vitesse moyenne de propagation de cette information est donnée par  $w = (x_B - x_A)/(t_B - t_A)$ . Dans un autre référentiel, les événements  $A$  et  $B$  sont respectivement de coordonnées  $(t'_A, x'_A)$  et  $(t'_B, x'_B)$ . Calculons l'intervalle de temps  $t'_B - t'_A$ . En fonction des relations (2.28), on trouve

$$t'_B - t'_A = \gamma \left( (t_B - t_A) - \frac{\beta}{c} (x_B - x_A) \right). \quad (3.8)$$

Si  $A$  est la cause de  $B$ , on s'attend à avoir  $t'_B - t'_A \geq 0$ . Pour que cette relation soit satisfaite, il faut, d'après la formule (3.8), que



$$t_B - t_A \geq \frac{\beta}{c}(x_B - x_A), \quad (3.9)$$

c'est-à-dire

$$\beta \leq \frac{c}{w}. \quad (3.10)$$

Si  $w \leq c$  alors  $c/w \geq 1$ , et la condition (3.10) est toujours satisfaite quelle que soit la vitesse  $V$  (inférieure à  $c$ ) du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Si  $w > c$ , alors on peut toujours trouver un référentiel  $\mathcal{R}'$  dont la vitesse relative au référentiel  $\mathcal{R}$  soit suffisamment importante, tout en restant inférieure à  $c$ , pour que la condition (3.10) ne soit pas remplie. Dans ce cas, l'ordre des événements est inversé dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

On peut en conclure que pour que deux événements soient causalement connectés, il faut que

$$\left| \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \right| \leq c. \quad (3.11)$$

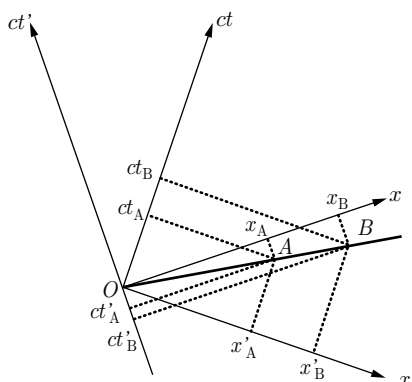
Autrement dit, une information « physique », c'est-à-dire voyageant à une vitesse **toujours** inférieure ou égale à celle de lumière, doit pouvoir se propager d'un événement à l'autre. La figure 3.5 montre deux événements manifestement causalement indépendants.

### 3.4 VITESSES SUPRALUMINIQUES ET VOYAGES DANS LE TEMPS

Les transformations de Lorentz (2.28) nous indiquent que la vitesse d'un mobile matériel ne peut excéder la vitesse de la lumière dans le vide. Imaginons cependant qu'une particule puisse se déplacer à une vitesse *supraluminique*, c'est-à-dire supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Cette situation est illustrée sur la figure 3.6. La ligne d'univers de la particule est telle que, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , elle atteint le point  $x_A$  au temps  $t_A$  (événement  $A$ ) et un peu plus tard le point  $x_B$  au temps  $t_B$  (événement  $B$ ). Pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$ , cette particule se déplace manifestement plus vite que la lumière ( $x_B - x_A$  est supérieur à  $ct_B - ct_A$ ) mais progresse dans le sens normal du temps (vers le futur). Cependant pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}'$ , l'événement  $B$  se produit avant l'événement  $A$ , c'est-à-dire que la particule remonte le temps<sup>3</sup>. Ceci est évidemment relié à ce qui a été vu dans la section précédente.

---

3. Signalons d'intéressantes discussions sur les *tachyons*, particules susceptibles de se déplacer plus vite que la lumière (voir aussi l'exercice 9.7), dans les références suivantes : P. J. Nahin, Tech Note 7, p. 475 (biblio); O. M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande et E. C. G. Sudarshan, « "Meta" Relativity », *American Journal of Physics*, vol. 30, n° 10, October 1962, p. 718-723 ; G. Feinberg, « Possibility of Faster-Than-Light Particles », *Physical Review*, vol. 159, n° 5, 25 July 1967, p. 1089-1105 ; O. M. P. Bilaniuk et E. C. G. Sudarshan, « Particles beyond the



**Figure 3.6** Une particule supraluminique progressant normalement vers le futur dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , mais remontant le temps dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

Un véhicule capable d'atteindre des vitesses supraluminiques pourrait sans doute voyager dans le temps vers le passé. Le problème est que le « mur de la lumière » est infranchissable. Cela sera illustré, par exemple, dans les sections 8.8, 9.2 et 10.2.1.



**Illustration 3.1** Dessins de Raoul Giordan, extraits de *Météor* n° 110 (Artima, 1962). La description de l'univers tel qu'il pourrait être perçu par des voyageurs temporels en route vers le passé restera sans doute à jamais un privilège d'auteurs de science-fiction.

Signalons que dans le cadre de la relativité générale, certaines distorsions subtiles de l'espace-temps autorisent, en principe, l'exploration du passé sans jamais dépasser la vitesse de la lumière. Une particule, empruntant ce que l'on appelle

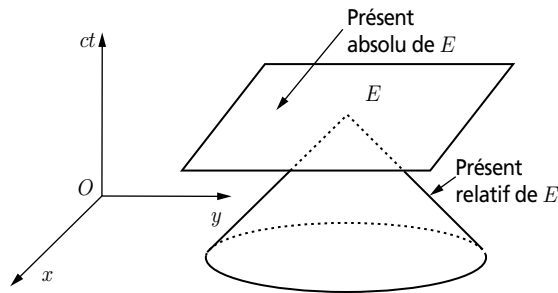
Light Barrier », *Physics Today*, May 1969, p. 43-51 ; O. M. P. Bilaniuk *et al.*, « More About Tachyons », *Physics Today*, December 1969, p. 47-52.

communément un trou de ver<sup>4</sup>, pourrait rejoindre son propre passé et ainsi modifier son futur en engendrant *a priori* toutes sortes de paradoxes temporels. Certains physiciens pensent toutefois que les lois (encore à venir) de la *gravité quantique* interdisent la création d'une « machine temporelle ». D'autres pensent que le voyage dans le temps pourrait être possible sans que cela implique l'existence du moindre paradoxe temporel<sup>5</sup>.

À quelles observations pourraient donc se livrer des voyageurs temporels remontant le cours de l'histoire au rythme de plusieurs siècles par seconde ? Nul ne le saura sans doute jamais. Un voyage temporel vers le futur, sans retour possible, est en revanche tout à fait envisageable, du moins en théorie (voir sections 3.7, 8.8 et 10.2.1). La perception du monde extérieur que pourrait avoir un être humain effectuant un tel voyage est partiellement étudiée dans les sections 3.7.1, 5.3 et 9.5.4.

### 3.5 PRÉSENTS ABSOLU ET RELATIF

Toutes les informations lumineuses que nous percevons à un endroit et à un instant donnés, qui définissent l'événement  $E$ , proviennent d'événements situés sur le cône de lumière passé issu de cet événement  $E$ . Ce cône de lumière constitue ce que l'on appelle le *présent relatif* de l'événement  $E$ . Le présent est donc une coupe conique à trois dimensions effectuée dans notre espace-temps à 4 dimensions<sup>6</sup>. Le *présent absolu* du même événement  $E$  est constitué de l'ensemble des événements possé-



**Figure 3.7** Portions du présent absolu et du présent relatif d'un événement  $E$  dans un espace-temps de Minkowski caractérisé par deux dimensions spatiales.

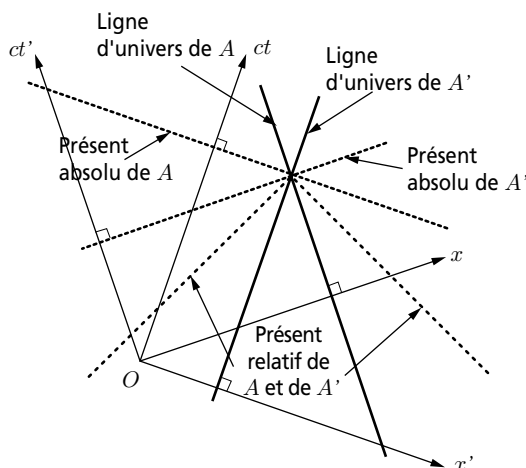
4. « Wormhole » dans la terminologie anglophone. Voir, par exemple, Michael S. Morris et Kip S. Thorne, « Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity », *American Journal of Physics*, vol. 56, n° 5, May 1988, p. 395-412 ; Michael S. Morris, Kip S. Thorne et Ulvi Yurtsever, « Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition », *Physical Review Letters*, vol. 61, n° 13, 26 September 1988, p. 1446-1449.

5. Pour une discussion approfondie de ces problèmes, on peut consulter, par exemple, les livres de P. J. Nahin (biblio), de I. D. Novikov (biblio) et de K. S. Thorne, chap. 14 (biblio).

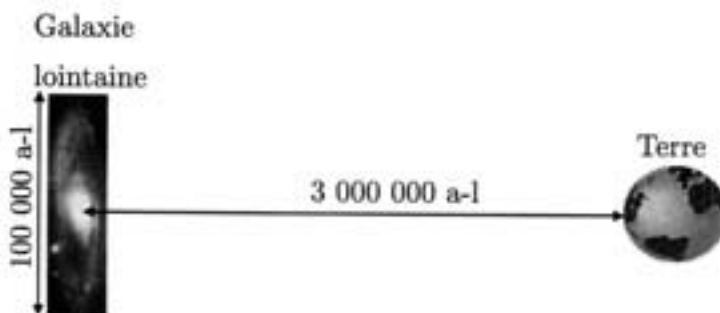
6. Lorsque vous regardez le ciel la nuit, le présent relatif est tout simplement la voûte céleste !

dant la même coordonnée temporelle que  $E$ , c'est-à-dire la totalité de l'univers au même instant. Ces notions sont illustrées sur la figure 3.7.

Au moment où deux observateurs en mouvement relatif se croisent, ils ont le même présent relatif, mais ils ne peuvent s'accorder sur les événements qui sont simultanés à leur rencontre ; ils ont des présents absolus différents (voir section 3.1). Cette situation est illustrée sur la figure 3.8. Même si leur vitesse relative est très faible, un événement se produisant très loin du lieu de rencontre peut être associé à des dates très différentes par chaque observateur. Par exemple, une différence de date de 5 jours sépare un événement localisé dans la galaxie d'Andromède pour deux observateurs se déplaçant sur Terre avec une vitesse relative de 5 km/h (voir équations (2.31)).



**Figure 3.8** Diagramme de Lorentz représentant les présents absolus et relatifs de deux observateurs en mouvement relatif de vitesse uniforme, au moment où ils se croisent.



**Figure 3.9** La lumière émise du centre d'une galaxie circulaire d'un diamètre de 100 000 années-lumière, dont le centre est distant de 3 millions d'années-lumière de la Terre, et dont le plan est perpendiculaire à la ligne de visée, nous parvient 417 ans avant celle émise du bord de la galaxie.

Le fait de ne recevoir que les signaux lumineux issus d'événements du présent relatif signifie que plus un événement que nous percevons est éloigné dans l'espace, plus il est loin dans le passé. En particulier, la perception que nous avons d'une galaxie est une perception spatiotemporelle. Nous la voyons telle qu'elle était loin dans le passé mais, de plus, les parties de la galaxie les plus proches de nous sont perçues bien avant les parties les plus éloignées. On peut donc dire qu'une galaxie, d'un point de vue observationnel, est un objet très étendu à la fois dans l'espace et le temps (voir figure 3.9).

### 3.6 \* LA FLÈCHE DU TEMPS

Pour la physique newtonienne, l'espace et le temps sont absolus. Ce dernier s'écoule uniformément au même rythme en tout point de l'univers. Avec la physique d'Einstein, le temps devient relatif puisque son écoulement dépend en fait du mouvement de l'observateur. Les transformations de Lorentz, généralisations de celles de Galilée, traduisent le fait que le temps d'un observateur inertiel est un mélange du temps et de l'espace d'un autre observateur animé d'un mouvement uniforme par rapport à lui. Toutefois, l'espace-temps garde son caractère absolu (voir section 6.4) puisqu'il est toujours le cadre immuable dans lequel se déroulent les phénomènes physiques. La relativité générale fait subir aux concepts d'espace et de temps une modification encore plus radicale que la relativité restreinte : l'espace-temps n'est plus indépendant des corps qu'il contient. Sa structure n'est plus immuable et universelle ; elle est imposée par la distribution de la masse-énergie des corps. Avec la relativité générale, la dissociation entre le contenant de l'univers (l'espace-temps) et le contenu (les corps) se voit abolie car les propriétés de structure du premier dépendent en fait du second.

Toutefois, le temps garde pour lui une particularité essentielle. Alors que le mouvement dans l'espace peut se faire dans n'importe quelle direction, nous sommes irrémédiablement entraînés du passé vers le futur, sans possibilité d'inverser ce processus. L'observation nous force à constater que la succession des événements et des phénomènes est irréversible : la cause précède toujours l'effet. Cette règle, connue sous le nom de causalité et imposée par la raison, est un des quatre grands principes de base sur lesquels repose la théorie de la relativité restreinte (voir section 6.2). Remarquons que, dans le cadre de cette théorie, même certaines régions de l'espace-temps dans le futur d'un observateur sont inaccessibles en raison de l'impossibilité de dépasser la vitesse de la lumière (voir la notion de l'ailleurs d'un événement, section 2.2.1). D'un point de vue pratique, nul n'a jamais observé de phénomène remontant le cours du temps (voir sections 3.3 et 3.4).

Il existe manifestement une direction privilégiée du temps, ce que l'on appelle depuis Eddington la *flèche du temps*. En fait, chaque domaine de la science recense sa propre flèche du temps. Citons-en trois parmi celles qui sont le plus souvent discutées :

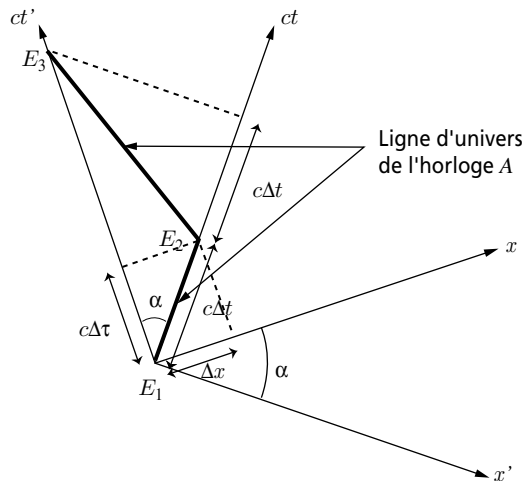
- *La flèche radiative* : dans tous les phénomènes radiatifs, une onde apparaît toujours après son émission par une source, ce qui conduit inévitablement à l'extinction progressive de celle-ci.

- *La flèche thermodynamique* : l'entropie d'un système fermé (mesure de son désordre) ne peut que rester constante ou augmenter ; connue aussi comme *seconde loi de la thermodynamique*, cette flèche est la plus ancienne reconnue par la physique.
- *La flèche cosmologique* : l'expansion de l'univers détermine manifestement une direction temporelle.

D'autres flèches du temps peuvent être définies. Par exemple, la flèche psychologique est liée à la perception que nous avons de la durée. Elle est très certainement une conséquence de la flèche biologique traduisant les capacités d'auto-organisation de la matière vivante. Cette dernière propriété semble être en contradiction avec l'orientation de la flèche thermodynamique mais elle est probablement en accord avec elle si l'entropie de l'environnement est prise en compte.

L'un des buts de la physique est certainement d'établir les connexions entre les différentes flèches du temps pour rechercher une éventuelle flèche maîtresse, dont certains pensent qu'il pourrait s'agir de la flèche cosmologique. C'est un problème largement ouvert et une discussion approfondie du problème de la flèche du temps sort du cadre de ce livre ; il est heureusement évoqué dans de nombreux ouvrages et articles <sup>7</sup>.

### 3.7 LE « PARADOXE » DES JUMEAUX



**Figure 3.10** Illustration du paradoxe des jumeaux de Langevin : diagramme de Lorentz pour le trajet aller retour d'une horloge se déplaçant à une même vitesse constante sur les deux parties du trajet ; point de vue des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

7. Voir par exemple : Stephen Hawking, *Une brève histoire du temps*, Flammarion, 1989, chap. 9 ; Roger Penrose, *L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique*, InterEditions, 1992, chap. 7 ; Étienne Klein et Michel Spiro édit., *Le temps et sa flèche*, Diderot Éditeur, 1995 ; H. D. Zeh, *The Physical Basis of The Direction of Time*, Springer, 4<sup>e</sup> éd., 2001 ; l'ouvrage de I. D. Novikov (biblio).

Les critiques les plus fréquentes qui ont été faites à l'encontre de la relativité restreinte concernent le comportement des horloges en mouvement relatif. Considérons deux telles horloges  $A$  et  $B$ , qui sont synchronisées au moment où elles passent l'une devant l'autre. En raison du phénomène de dilatation des temps, un observateur accompagnant l'horloge  $A$  devrait constater que l'horloge  $B$  retarde par rapport à la sienne. De même, un observateur accompagnant l'horloge  $B$  devrait également constater que l'horloge  $A$  retarde par rapport à la sienne. Supposons qu'après s'être éloignée de l'horloge  $B$  pendant un certain temps, l'horloge  $A$  fasse demi-tour et repasse devant  $B$ . Lorsque les deux horloges se retrouveront au même point de l'espace, leurs mesures de temps pourront être facilement comparées. La relativité semble donner un résultat absurde puisque chacune des deux horloges devrait indiquer un temps inférieur à l'autre.

Il n'en est en fait rien, car la relativité restreinte fait une très nette distinction entre référentiels inertiels et non inertiels. Pour comparer les horloges au même point, au moins une des deux horloges doit subir une accélération par rapport à un référentiel d'inertie. Or, contrairement à la vitesse, l'accélération est une grandeur absolue<sup>8</sup> : elle peut être mesurée à l'aide d'un accéléromètre emporté par un observateur sans qu'il soit nécessaire de se rapporter à d'autres référentiels (voir section 8.7). Comme nous allons le voir, le résultat est que l'horloge de l'observateur qui a subi des accélérations mesure une durée moins importante que l'horloge qui n'en n'a pas subi.

Ce phénomène est connu sous le nom de paradoxe des jumeaux de Langevin. Ce nom vient du fait que, si on remplace les horloges par des frères jumeaux et que l'un des deux est envoyé dans l'espace à bord d'un astronef très rapide tandis que l'autre reste sur Terre, alors à son retour l'astronaute aura moins vieilli que son frère<sup>9</sup>. Ce phénomène surprenant, mais indiscutable, a été présenté de cette manière pour la première fois en 1911 par le physicien Paul Langevin<sup>10</sup>.

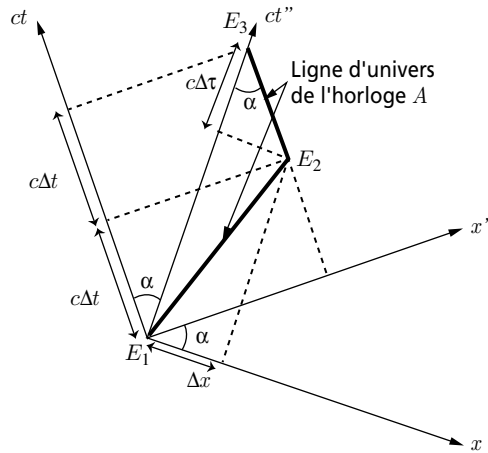
Considérons trois référentiels  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  unis par des transformations spéciales de Lorentz, de telle manière que le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplace dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $V$  suivant l'axe  $Ox$ , tandis que le référentiel  $\mathcal{R}''$  se déplace dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $-V$  suivant le même axe. Imaginons que l'horloge  $A$ , initialement au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , accélère instantanément jusqu'à la vitesse  $V$ , se déplace uniformément à cette vitesse suivant l'axe  $Ox$ , s'arrête instantanément et répète les mêmes manœuvres en sens inverse pour finalement revenir à son point de départ. Cette situation est illustrée sur la figure 3.10, où l'on suppose que l'horloge  $A$  part de  $x = 0$  en  $t = 0$ , tandis que l'horloge  $B$  reste au repos dans le référentiel

8. Cette affirmation est à nuancer dans le cadre de la relativité générale.

9. Le paradoxe des jumeaux de Langevin est beaucoup plus délicat à résoudre dans un espace-temps plat spatialement fermé sur lui-même. On peut voir à ce sujet l'article de Carl H. Brans et Dennis Ronald Stewart, « Unaccelerated-Returning-Twin Paradox in Flat Space-Time », *Physical Review D*, vol. 8, n° 6, 15 September 1973, p. 1662-1666.

10. Paul Langevin, « L'évolution de l'espace et du temps », *Scientia* (Bologna), vol. X, 1911, p. 31-54.

$\mathcal{R}$ . Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est le référentiel propre de l'horloge  $A$  durant son trajet aller. Le référentiel propre  $\mathcal{R}''$  de cette horloge durant son trajet retour ne peut pas être dessiné sur la même figure. Dans ce cas d'école, on considère que les périodes d'accélération sont nulles et qu'elles ne contribuent donc pas à la durée du voyage. Pendant la totalité du trajet aller, l'horloge  $A$  est donc considérée en mouvement uniforme. Il en est de même pour le trajet retour.



**Figure 3.11** Illustration du paradoxe des jumeaux de Langevin : diagramme de Lorentz pour le trajet aller retour d'une horloge se déplaçant à une même vitesse constante sur les deux parties du trajet ; point de vue des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}''$ .

Soient  $E_1, E_2, E_3$ , les événements correspondant respectivement au départ de  $A$ , à l'arrêt de  $A$  pour faire demi-tour et au retour de  $A$ . Notons par  $\Delta t$  le temps requis pour le trajet aller de l'horloge  $A$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , mesuré par l'horloge  $B$ . La distance parcourue lors de ce trajet dans ce référentiel est  $\Delta x = V\Delta t$ . Le trajet retour de l'horloge  $A$  s'effectuant à la même vitesse  $V$ , sa durée est également  $\Delta t$ . Les coordonnées spatio-temporelles  $(t_E, x_E)$  des événements  $E_1, E_2$  et  $E_3$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sont alors respectivement  $(0,0)$ ,  $(\Delta t, \Delta x)$  et  $(2\Delta t, 0)$ . On constate sur la figure 3.10, que l'on a bien  $\Delta x = \sin \alpha c\Delta t = (V/c)c\Delta t = V\Delta t$ . La durée entre les événements  $E_1$  et  $E_2$  mesurée par l'horloge  $A$  est par hypothèse la durée mesurée par les horloges immobiles et synchronisées du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Ce temps  $\Delta\tau$  est égal à

$$c\Delta\tau = c\Delta t \cos \alpha. \quad (3.12)$$

La durée entre les événements  $E_2$  et  $E_3$  mesurée par l'horloge  $B$  est donc égale à  $\Delta t$ . Cette même durée mesurée par l'horloge  $A$  ne peut pas être déterminée sur la figure 3.10 car, durant ce trajet,  $A$  n'est au repos ni dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ni dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Il faut construire un second diagramme similaire à la figure 3.10 mais



avec  $ct' \rightarrow ct$  et  $ct \rightarrow ct''$ . De cette manière, le référentiel  $\mathcal{R}''$  est bien caractérisé par une vitesse relative  $-V$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  (voir section 2.2.2). Cette situation est illustrée sur la figure 3.11. À nouveau, on trouve  $c\Delta\tau = c\Delta t \cos \alpha$ .

Finalement, on trouve que la durée totale  $T_A$  du voyage mesurée par l'horloge A et la durée totale  $T_B$  du voyage mesurée par l'horloge B sont données par

$$T_A = 2\Delta\tau, \quad T_B = 2\Delta t \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (3.13)$$

Les durées  $T_A$  et  $T_B$  sont respectivement les durées propres mesurées respectivement par les horloges A et B (voir section 3.2). L'horloge qui a effectué le voyage aller retour mesure donc bien une durée inférieure à celle mesurée par l'horloge au repos. On retrouve à nouveau le phénomène de dilatation des temps. L'élément essentiel de la démonstration est que l'horloge qui accomplit le voyage aller retour change de référentiel d'inertie en cours de route. Il faut donc qu'elle subisse une accélération. Ce n'est cependant pas l'accélération qui cause directement le décalage temporel des deux horloges, mais bien leur vitesse relative<sup>11</sup>. Nous étudierons dans la section 8.8 le cas plus réaliste d'un mobile soumis non pas à des accélérations instantanées mais à une accélération constante.

Cette expérience nous montre également que le phénomène de dilatation des temps a un statut particulier : son effet est cumulatif, contrairement au phénomène de contraction des longueurs. Cela est dû au fait que le temps s'écoule. En effet,



**Illustration 3.2** Dessins de Raoul Giordan, extraits de *Météor* n° 58 (Artima, 1958). Les deux astronautes voyagent sans doute à bord d'un astronef capable de se déplacer à une vitesse proche de celle de la lumière.

11. Voir à ce sujet l'article de Ronald P. Gruber et Richard H. Price, « Zero time dilatation in an accelerating rocket », *American Journal of Physics*, vol. 65, n° 10, October 1997, p. 979-980.

après son périple, l'horloge qui a effectué le voyage aller retour retrouve son écoulement du temps au repos. Mais, elle retarde : elle n'a pas « vieilli » autant que l'horloge qui n'a subi aucune accélération. Parce que le temps s'écoule toujours dans le même sens, cela a produit un effet permanent.

Considérons à nouveau nos deux frères jumeaux. La durée du voyage aller retour est plus courte pour l'astronaute que pour son frère resté sur Terre. Il est donc tout à fait équivalent de considérer que le voyage à vitesse relativiste a eu pour résultat de faire accomplir à l'astronaute un saut dans le futur de la Terre. Nous reparlerons de ce phénomène dans la section 8.8.

### 3.7.1 Communications relativistes

Examinons comment deux « jumeaux de Langevin » en mouvement relatif pourraient comparer leurs mesures de temps. Ils ne peuvent le faire simplement que lorsqu'ils occupent le même endroit, ce qui ne se produit qu'au début et à la fin du voyage. À un autre moment, ils peuvent se communiquer les indications respectives de leurs horloges par des messages radio. Évidemment, il faut tenir compte dans l'analyse du problème de la vitesse finie des signaux radio.

Considérons une situation similaire à celle étudiée précédemment : un des jumeaux fait un voyage aller retour en mouvement de translation uniforme, les changements de vitesse se faisant instantanément. Travaillons dans un référentiel  $\mathcal{T}$ , que nous supposons d'inertie, attaché à la Terre. Dans ce référentiel, l'astronaute se déplace avec une vitesse de module constant  $\beta c$  durant un temps total  $T$ . Il part de la Terre ( $x = 0$ ) au temps  $t = 0$  en ayant pris soin de synchroniser son horloge avec celle de son frère. Son équation du mouvement est donc donnée par

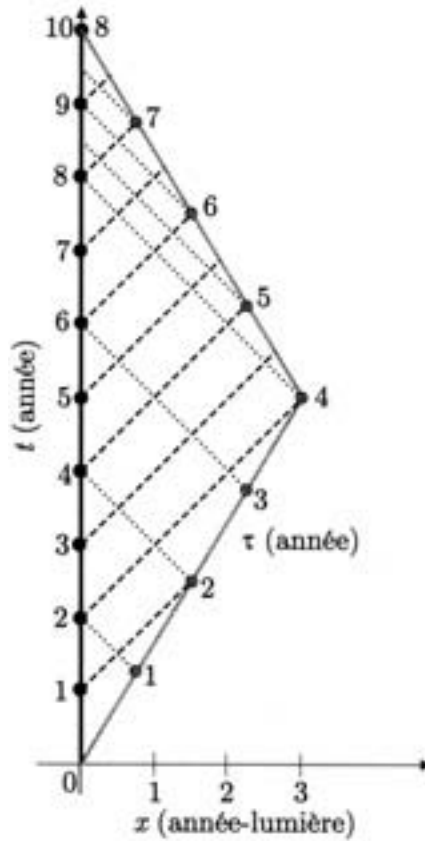
$$\begin{aligned} x &= \beta ct && \text{pour } 0 \leq t \leq T/2, \\ &\beta c(T - t) && \text{pour } T/2 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Au temps  $t^*$  dans le référentiel  $\mathcal{T}$  correspond le temps propre  $\tau^* = t^*/\gamma$  pour l'astronaute, avec  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Si un photon est émis au temps  $t_e$  depuis la Terre vers l'astronaute, son équation du mouvement est  $x = c(t - t_e)$ . Il n'est pas difficile d'en déduire son temps de réception par l'astronaute dans le référentiel  $\mathcal{T}$ , et de là le temps propre de réception  $\tau_r$  pour l'astronaute. On trouve

$$\tau_r = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} t_e \quad \text{si } t_e \leq \frac{1 - \beta}{2} T, \quad (3.15)$$

$$\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} (t_e + \beta T) \quad \text{autrement.} \quad (3.16)$$

Il faut évidemment tenir compte du fait que les trajets aller et retour de l'astronaute obéissent à des équations du mouvement différentes, données par les relations (3.14). Un photon émis vers la Terre par l'astronaute au temps propre  $\tau_e$  est émis au



**Figure 3.12** Diagramme de Minkowski (voir section 2.2.3) d'un astronaute (ligne d'univers épaisse grise) faisant un voyage aller retour dans l'espace avec une vitesse de module constant  $0,6\,c$  durant une période qu'il mesure égale à 8 années. La durée de ce voyage pour son frère jumeau resté sur Terre est de 10 ans (ligne d'univers épaisse noire). Une fois par année de leur temps propre, les deux frères s'envoient un message radio. L'année d'émission depuis la Terre est représentée par un rond noir, celle depuis la fusée par un rond gris. La ligne d'univers des photons émis depuis la Terre est symbolisée par un trait tireté, celle des photons émis par la fusée par un trait pointillé.

temps  $\gamma\tau_e$  dans le référentiel  $\mathcal{T}$ . L'équation du mouvement de ce photon est  $x = c\gamma\tau_e(1 + \beta) - ct$  si l'émission a lieu pendant le trajet aller et  $x = c\gamma\tau_e(1 - \beta) + c(\beta T - t)$  si l'émission a lieu pendant le trajet retour. De ces expressions, on tire le temps de réception  $t_r$  du signal par le frère resté sur Terre

$$t_r = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tau_e \quad \text{si } \tau_e \leq \frac{T}{2\gamma}, \quad (3.17)$$

$$\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tau_e + \beta T \quad \text{autrement.} \quad (3.18)$$

Remarquons qu'au début et à la fin du voyage la situation est parfaitement symétrique, comme le montrent les formules (3.15) à (3.18). Aucun point de vue n'est privilégié tant que l'astronaute ne change pas de référentiel d'inertie en faisant demi-tour. Signalons, pour être complet, qu'en raison du mouvement relatif entre l'émetteur et le récepteur les signaux radio sont captés avec des caractéristiques (direction de propagation, fréquence, intensité) différentes de celles avec lesquelles ils sont émis (voir sections 3.7.2, 9.5.2 et 9.5.3) <sup>12</sup>.

À titre d'exemple, considérons  $\beta = 0,6$  et  $T = 10$  ans. L'astronaute s'éloigne alors de 3 années-lumière de la Terre avant de faire demi-tour ; pour lui le voyage n'aura duré que 8 ans puisque  $\gamma = 1,25$ . Une fois par année de leur temps propre, les deux frères s'envoient un message radio. Cette situation est illustrée sur la figure 3.12. L'astronaute recevra en tout 10 messages ; il en conclura que 10 ans se sont écoulés sur Terre. Son frère ne recevra que 8 messages ; pour lui l'astronaute n'aura vieilli que de 8 années. Durant son voyage aller, l'astronaute va recevoir deux messages, un après 2 ans, l'autre au bout de 4 ans. Par contre, durant le trajet retour, il va capter un message tous les six mois. Sur Terre, on recevra pendant 8 ans un message tous les 2 ans. Ensuite un message sera capté tous les six mois jusqu'au retour du voyageur (voir exercice 3.2).

### 3.7.2 Première approche de l'effet Doppler

Supposons donc que l'astronaute envoie ses messages vers la Terre avec une période  $\Delta\tau$ , mesurée par son horloge. Les formules (3.17) et (3.18) impliquent que, sur Terre, les périodes entre les réceptions des signaux, pendant que l'astronaute s'éloigne  $\Delta t_{\text{él.}}$  et se rapproche  $\Delta t_{\text{rap.}}$ , sont données par

$$\Delta t_{\text{él.}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \Delta\tau, \quad (3.19)$$

$$\Delta t_{\text{rap.}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \Delta\tau. \quad (3.20)$$

Le signal électromagnétique de période donnée, qui transporte l'information, va lui aussi être affecté par ce phénomène. La longueur d'onde  $\lambda$ , la période  $T$  et la fréquence  $\nu$  d'un rayonnement électromagnétique monochromatique sont reliées par les formules  $\lambda = c T = c/\nu$ . Si on convient que  $\beta$  est positif (négatif) quand la source  $S$  s'éloigne (se rapproche) de l'observateur  $R$ , on déduit immédiatement, des formules (3.19) et (3.20), que les caractéristiques  $\lambda_S$  et  $\nu_S$  du rayonnement électro-

12. Les problèmes de communication avec un observateur uniformément accéléré (voir section 8.8) sont étudiés dans l'article de Gerald M. Anderson, « Some problems in communications with relativistic interstellar rockets », *Journal of the British Interplanetary Society*, vol. 28, 1975, p. 168-174.

magnétique, émis par la source, sont reliées aux mêmes grandeurs  $\lambda_R$  et  $\nu_R$ , mesurées par l'observateur, au moyen des formules

$$\lambda_R = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_S, \quad (3.21)$$

$$\nu_R = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu_S. \quad (3.22)$$

Cet effet, qui résulte à la fois du phénomène de dilatation des temps et du temps de transit fini que met la lumière pour atteindre l'observateur, est appelé effet Doppler longitudinal. Il sera étudié en détail dans la section 9.5.2.

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 262.

Dans les exercices suivants,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont deux référentiels d'inertie dont les mesures sont reliées par une transformation spéciale de Lorentz de vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$ . Les coordonnées d'un événement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sont notées  $(t, x)$  ; celles du même événement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  sont notées  $(t', x')$ .

### 3.1 Événements causalement indépendants

Deux événements  $E_1$  et  $E_2$  se produisent sur l'axe  $Ox$ . Ils ont pour coordonnées respectives dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :  $(t_1 = \tau, x_1 = a)$ ,  $(t_2 = \tau/2, x_2 = 2a)$ .

- (a) Calculer le carré de l'intervalle d'espace-temps entre ces deux événements. Quelle est la vitesse  $V$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  dans lequel ces deux événements sont simultanés ? Quelles conditions doivent vérifier les paramètres  $a$  et  $\tau$  pour que ces événements soient reliés causalement ?
- (b) À quel instant  $t'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  ces événements se produisent-ils simultanément ?

### 3.2 Communications relativistes

- (a) Démontrer les formules (3.15) à (3.18).
- (b) Dessiner l'équivalent de la figure 3.12 au moyen de deux diagrammes de Lorentz.

### 3.3 Plus vite que la lumière

- (a) Montrer que si on dispose d'un appareil capable de transmettre de l'information plus rapidement que la vitesse de la lumière dans le vide, alors on peut communiquer avec le passé. Imaginer une situation paradoxale qui pourrait résulter de ce type d'action.
- (b) On dit parfois d'une particule qu'elle est luminique si elle se déplace à la vitesse de la lumière. Une particule est dite infraluminique (supraluminique) si elle se déplace moins (plus) rapidement que la lumière. On peut introduire le qualificatif d'ultraluminique pour une particule supraluminique remontant le cours du temps. Cette dernière distinction est-elle vraiment significative ?

### 3.4 Oscillateur harmonique

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , un mobile effectue le long de l'axe  $Ox$  un mouvement oscillatoire harmonique de période  $T$  autour de l'origine ; en  $t = t_0 = 0$ , le mobile se trouve à son point d'élongation maximum  $x = d > 0$  (le temps correspondant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est noté  $t'_0$ ). Soit  $t_1$  ( $t_2$ ) le temps correspondant au premier (second) extremum du mouvement pour les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}$  pour  $t > 0$ . Les temps correspondants pour les observateurs de  $\mathcal{R}'$  sont notés  $t'_1$  et  $t'_2$ .

- (a) Comparer les intervalles de temps  $t'_1 - t'_0$  et  $t_1 - t_0$  mesurés dans les deux référentiels ; commenter ce résultat.
- (b) Comparer les intervalles de temps  $t'_2 - t'_0$  et  $t_2 - t_0$  mesurés dans les deux référentiels ; commenter ce résultat.

Le même mobile effectue cette fois un mouvement oscillatoire harmonique de même période autour de l'origine le long de l'axe  $Oy$ . En  $t = 0$ , le mobile se trouve à son point d'élongation maximum  $y = d > 0$ . Quelle est l'équation du mouvement pour les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}'$  ? Commenter ce résultat.

### 3.5 Fusée et miroir

Un miroir, placé perpendiculairement à l'axe  $Ox$ , est situé à l'origine du référentiel  $\mathcal{R}$ , tandis qu'une fusée occupe l'origine du référentiel  $\mathcal{R}'$ . La fusée envoie un signal lumineux vers le miroir qui le réfléchit vers la fusée. Le signal arrive sur le miroir au temps  $T$  pour les observateurs de  $\mathcal{R}$ .

- (a) Déterminer, dans les deux référentiels, les coordonnées spatiotemporelles des événements suivants :  $E$  réflexion du signal sur le miroir ;  $E_1$  émission du signal par la fusée ;  $E_2$  réception du signal par la fusée après réflexion.
- (b) Déterminer, dans les deux référentiels, les durées  $\Delta t_i$  et  $\Delta t'_i$  du trajet de la lumière incidente et les durées  $\Delta t_r$  et  $\Delta t'_r$  du trajet de la lumière réfléchie.
- (c) Comparer les durées  $\Delta t_i + \Delta t_r$  et  $\Delta t'_i + \Delta t'_r$ , et interpréter le résultat.

### 3.6 Une horloge au télescope

Une horloge s'éloigne de la Terre avec une vitesse constante  $V$ . Un astronome l'observe à l'aide de son (puissant !) télescope. L'horloge et la montre de l'astronome indiquaient toutes deux zéro au moment du départ de l'horloge.

- (a) Quelle indication l'astronome **observe-t-il** dans son instrument sur le cadran de l'horloge en mouvement quand sa propre montre indique l'heure  $T$  ?
- (b) Quelle est l'heure **réelle** indiquée par l'horloge en mouvement quand la montre de l'astronome indique  $T$  ?

### 3.7 Le plan d'égale heure

Un événement  $E$  sur l'axe  $Ox$  est repéré par ses coordonnées  $(t, x)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et par  $(t', x')$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

- (a) Montrer qu'à tout instant  $t$  il existe un plan  $P$  parallèle à  $Oyz$  dans lequel les horloges liées à chacun des référentiels donnent la même heure. Calculer l'abscisse  $x_P$  de ce plan dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et son abscisse  $x'_P$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

Montrer que ce plan se déplace à la vitesse  $c \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Faire le lien avec l'exercice 2.4.

- (b) Le plan  $P$  se trouve-t-il au milieu du segment  $OO'$  ?
  - pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$  ?
  - pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}'$  ?
  - pour un observateur du référentiel lié au plan  $P$  ?
- (c) Deux événements  $E_1$  et  $E_2$  se produisent dans le plan  $P$ . Pour un observateur de ce plan, ils sont séparés d'une durée  $\tau$ .
  - Calculer l'intervalle de temps  $T$  qui les sépare dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ?
  - Peut-il exister entre ces deux événements un lien de causalité ?

### 3.8 Sources de lumière équidistantes

On considère deux sources lumineuses situées aux points  $A$  et  $B$  de l'axe  $Ox$ , à égale distance  $a$  de part et d'autre de l'origine  $O$ . Ces sources sont immobiles dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

À l'instant  $t = 0$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , un bref signal lumineux est émis par  $A$  (événement  $E_1$ ) et par  $B$  (événement  $E_2$ ). Le signal émis par  $A$  parvient à l'origine  $O'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  (événement  $E_3$ ), et la réception du signal émis par  $B$  en  $O'$  constitue l'événement  $E_4$ .

- (a) À quel instant  $t_3$  le signal émis par  $A$  parvient-il en  $O'$  ? Quelle est la position  $x_3$  de  $O'$  à ce moment ?
- (b) Calculer  $t'_3$ . Comparer cette valeur à  $t_3$  et justifier.
- (c) À quel instant  $t_4$  le signal émis par  $B$  parvient-il en  $O'$  ? Quelle est la position  $x_4$  de  $O'$  à ce moment ?
- (d) Calculer  $t'_4$ . Les événements  $E_3$  et  $E_4$  sont-ils simultanés dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ?
- (e) Calculer  $x'_1$  et  $t'_1$ ,  $x'_2$  et  $t'_2$ . Les événements  $E_1$  et  $E_2$  sont-ils simultanés dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ? Justifier.
- (f) Comparer  $t'_2 - t'_1$  et  $t'_4 - t'_3$ . Décrire la situation vue par un observateur du référentiel  $\mathcal{R}'$ .

### 3.9 Gardes dans un train

Trois gardes sont assis dans un train qui se déplace, par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ , à la vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$ . Le premier,  $T$ , est en tête de train, le deuxième,  $M$ , au milieu, le troisième,  $Q$ , en queue de train. La longueur du train mesurée par ces personnes est  $L$ . À l'instant où  $M$  passe devant un observateur  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}$ , il reçoit simultanément un signal lumineux d'alerte émis de la part de  $T$  et  $Q$ .

- (a) Trouver les coordonnées spatiotemporelles des événements  $E_1$ , « émission en  $T$  », et  $E_2$ , « émission en  $Q$  », dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au train et dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , sachant que les coordonnées de l'événement « réception en  $M$  » dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont nulles.
- (b) Quelle est la durée qui sépare les événements  $E_1$  et  $E_2$  dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ? Dans ces référentiels, calculer le carré de l'intervalle d'espace-temps qui sépare ces deux événements.

### 3.10 Écrasement d'une fusée

Une fusée pénètre dans les couches de la haute atmosphère à l'altitude  $H$ , selon la verticale (ce qui n'est pas recommandé !) à la vitesse initiale  $V_0$ . Les horloges de bord et celles de la Terre marquent à ce moment le temps 0. Nous supposons l'accélération de la pesanteur  $g$  constante.

À ce moment-là, les astronautes constatent avec effroi que le système de ralentissement est en panne : la fusée est livrée à elle-même et à l'attraction de la pesanteur. Nous cherchons à connaître la durée de chute  $T$  avant l'écrasement dans le référentiel terrestre (temps laissé aux contrôleurs au sol pour tenter une manœuvre de sauvetage), sa vitesse au moment de l'impact  $V_e$ , et la même durée  $\tau$  mesurée par les horloges embarquées à bord (temps laissé aux astronautes pour tenter une réparation).

Nous voulons répondre à ces questions dans le cadre des approximations décrites dans chaque question. On sera amené à faire les développements limités d'usage.



Pour les applications numériques et les approximations résultantes, nous prendrons les valeurs suivantes :  $H = 60$  km,  $V_0 = 4$  km/s,  $c = 300\,000$  km/s,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

- (a) La vitesse reste constante  $V = V_0$  au cours de la chute. Cette approximation ne prend en compte, ni l'accélération de la pesanteur, ni le freinage dû à l'atmosphère. Calculer  $T^{(1)}$ ,  $V_e^{(1)}$  et  $T^{(1)} - \tau^{(1)}$ .
- (b) On néglige complètement le frottement de l'atmosphère, mais on tient compte de l'accélération de la pesanteur. La vitesse  $V(t)$  dépend du temps. Le référentiel de la fusée n'est plus inertiel, mais à chaque instant on peut considérer un référentiel d'inertie dans lequel la fusée est au repos. Calculer  $T^{(2)}$ ,  $V_e^{(2)}$  et  $T^{(2)} - \tau^{(2)}$  ; le changement de variable  $y = \arcsin((gt + V_0)/c)$  est suggéré. Pour simplifier les calculs, on recommande d'utiliser les paramètres sans dimension  $\alpha = 2gH/V_0^2$  et  $\varepsilon = gT^{(2)}/c$ .
- (c) On prend toujours en compte l'accélération de la pesanteur, mais on essaie de traiter les frottements dus à l'atmosphère de façon approchée. Pour cela, on suppose que la force de freinage est proportionnelle à la vitesse instantanée. Montrer l'existence d'une vitesse limite  $V_l$ . Pour l'application numérique, on choisira  $V_l = 400$  km/h. Montrer que le temps de chute  $T^{(3)}$  vérifie l'équation transcendante

$$H = V_l T^{(3)} + \frac{(V_0 - V_l)V_l}{g} \left(1 - e^{-gT^{(3)}/V_l}\right) \quad (3.23)$$

et la vitesse d'écrasement  $V_e^{(3)}$  l'équation

$$V_e^{(3)} = V_0 + gT^{(3)} - \frac{gH}{V_l}. \quad (3.24)$$

Résoudre numériquement ces équations. Un programme de calcul formel simplifie largement la tâche. La fusée a-t-elle atteint sa vitesse limite (à 1 % près) au moment de l'impact ?

On introduira les paramètres  $\eta = V_l/c$ ,  $\eta_0 = (V_0 - V_l)/c$ ,  $\eta_1 = (V_e^{(3)} - V_l)/c$ . Calculer les valeurs numériques de ces quantités et montrer que  $\eta_1 \ll \eta < \eta_0 \ll 1$ . Montrer que la vitesse de la fusée s'écrit  $V(t)/c = \eta + \eta_0 e^{-gt/V_l}$ . Pour le calcul de  $\tau^{(3)}$ , on a intérêt à faire le changement de variable  $y = \eta_0 e^{-gt/V_l}$  et à utiliser dans l'intégrale correspondante les approximations résultant des très faibles valeurs des  $\eta_i$ . Calculer  $T^{(3)} - \tau^{(3)}$ .

Conclusions (à part que les astronautes n'ont aucune chance de survivre dans chacune des situations !) ?

## Chapitre 4

# L'espace et la relativité

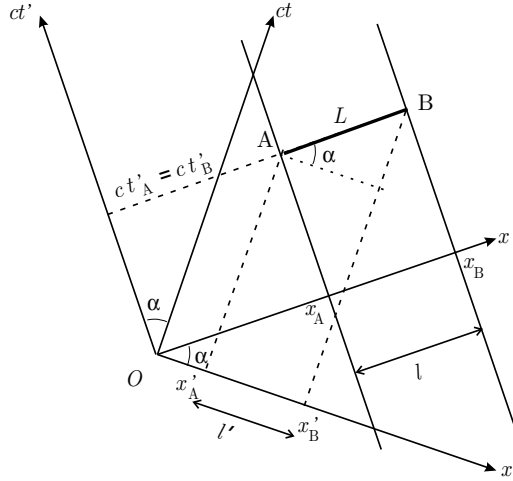
*Le chercheur, tout particulièrement en recherche fondamentale, doit être libre de tenter des expériences audacieuses, de soutenir des théories révolutionnaires, voire paradoxales. En un mot, il doit disposer du droit à l'erreur.*

Pierre JOLIOT (2001)

Nous nous plaçons dans la situation particulière où les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ont des axes parallèles et où le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplace à la vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Les transformations de Lorentz correspondantes sont données par les formules (2.28).

### 4.1 CONTRACTION DES LONGUEURS

Soit dans le référentiel  $\mathcal{R}$  une règle au repos dont les extrémités ont pour coordonnées  $x_A$  et  $x_B$ . Sa longueur  $\ell$  est donc égale à  $x_B - x_A$  (on suppose  $x_B > x_A$ ). On rappelle que les graduations d'une règle peuvent être déterminées de façon non ambiguë et très précise grâce à l'utilisation de signaux lumineux (voir section 2.1.2). Pour les observateurs d'un référentiel  $\mathcal{R}'$ , uni au référentiel  $\mathcal{R}$  par une transformation spéciale de Lorentz, la règle est en mouvement de translation uniforme. Mesurer sa longueur exige donc une procédure bien définie : il faut déterminer les coordonnées des extrémités de la règle **au même moment** dans ce référentiel.



**Figure 4.1** Illustration du phénomène de contraction des longueurs dans un diagramme de Lorentz.

Soient  $A$  et  $B$  les événements correspondant à la mesure des extrémités de la règle, de coordonnées spatiotemporelles respectives  $(t'_A, x'_A)$  et  $(t'_B, x'_B)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Dans ce référentiel, la longueur de la règle est égale à  $\ell' = x'_B - x'_A$ , si les coordonnées des extrémités sont mesurées au même moment dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , ce qu'on exprime par la contrainte  $t'_A = t'_B$ . En utilisant la relation (2.28) de la transformation de Lorentz, on a

$$x_A = \gamma(x'_A + \beta ct'_A) \quad \text{et} \quad x_B = \gamma(x'_B + \beta ct'_B). \quad (4.1)$$

En soustrayant ces relations membre à membre et, en tenant compte de la condition  $t'_A = t'_B$ , on obtient

$$\ell = x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma \ell'. \quad (4.2)$$

La longueur  $\ell(V) = \ell'$  d'une règle mesurée par les observateurs du référentiel où cette règle est en mouvement avec une vitesse  $V$  et la longueur  $\ell(0) = \ell$  de la même règle mesurée dans le référentiel où elle est au repos sont donc unies par l'équation

$$\ell(V) = \sqrt{1 - V^2/c^2} \ell(0) \leq \ell(0). \quad (4.3)$$

Cette relation traduit la contraction des longueurs. Comme dans le cas de la dilatation des temps, cet effet est réciproque : si nous considérons deux règles de même longueur propre en mouvement relatif, alors, pour chacune, l'autre sera plus courte. Cette contraction est uniquement d'origine cinématique et ne signifie pas que les règles sont le siège de forces.

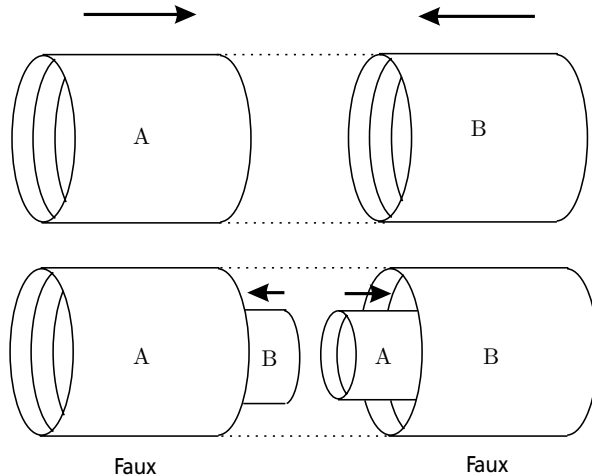
Ce phénomène de contraction des longueurs peut être représenté graphiquement. Considérons la figure 4.1 sur laquelle sont indiquées les lignes d'univers des extrémités de la règle. On voit que (le segment de longueur  $L$  représenté sur la figure **n'est pas** la règle ; ce n'est qu'un intermédiaire de calcul)

$$\begin{aligned}\ell &= L, \\ \ell' &= L \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.4}$$

c'est-à-dire  $\ell' = \ell \cos \alpha = \ell \sqrt{1 - V^2/c^2}$ , ce qui est bien la formule (4.3).

Si la règle est disposée parallèlement à l'axe  $Oy$ , par exemple, on mesure la même longueur dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , en vertu des transformations (2.28). Ce résultat est clairement différent du résultat (4.3). Quand la règle est orientée perpendiculairement à la vitesse relative, les moments de mesure des positions des extrémités de la règle sont sans importance, les coordonnées  $y, z, y'$  et  $z'$  ne variant au cours du temps dans aucun des deux référentiels. Quand la règle est orientée parallèlement à la vitesse relative, la question de la simultanéité des mesures doit être examinée.

## 4.2 INVARIANCE DE LA DIMENSION TRANSVERSALE



**Figure 4.2** Expérience de pensée illustrant l'invariance de la dimension transversale.

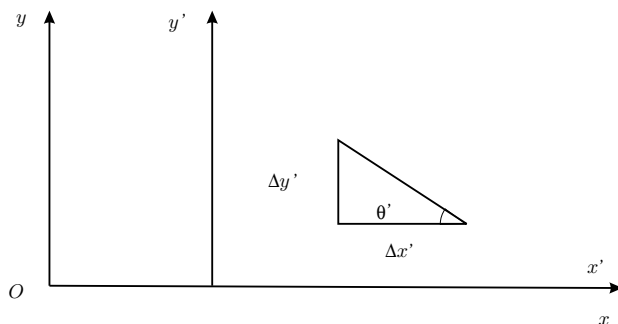
Lorsque nous avons établi la forme des transformations de Lorentz (voir section 2.1.4), nous avons supposé que les dimensions dans les directions perpendiculaires à la direction du mouvement n'étaient en rien affectées par les transformations. C'est cette même hypothèse que nous avons utilisée pour établir le phénomène de dilatation des temps au moyen de l'horloge à photons (voir section 1.5). Cette invariance de la dimension transversale est confirmée expérimentalement par l'observation de faisceaux de protons et d'électrons traversant un accélérateur à des vitesses

relativistes : aucune modification de largeur n'est mesurée. Une démonstration rigoureuse de cette propriété sera présentée dans la section 6.2.3. Ici, nous nous contentons d'en démontrer la validité au moyen d'une simple expérience de pensée <sup>1</sup>.

Considérons, par exemple, deux cylindres creux de même diamètre, aux extrémités ouvertes, se déplaçant l'un vers l'autre à vitesse constante sur un axe qui passe par les axes de symétrie des deux cylindres (voir figure 4.2). On suppose pouvoir distinguer ces deux cylindres, par exemple, par leur couleur ; un cylindre est baptisé *A*, l'autre *B*. Supposons qu'un objet en mouvement soit perçu comme étant plus étroit. La situation étant parfaitement symétrique dans toutes les directions transversales, l'effet de contraction doit s'exercer identiquement dans toutes les directions. Alors, un observateur accompagnant le cylindre *A*, doit voir le cylindre *B* entrer dans *A*. De même, un observateur accompagnant le cylindre *B*, doit voir le cylindre *A* entrer dans *B*. Cette situation est évidemment absurde. La seule conclusion possible est que la vitesse n'a aucun effet mesurable sur la dimension transversale (ni contraction, ni dilatation) et que les deux cylindres vont entrer en collision.

La contraction des longueurs dans la direction de la vitesse relative n'entraîne aucune contradiction. Cela sera illustré par l'expérience de pensée « Le train et le tunnel » décrite dans la section 4.6.

### 4.3 TRANSFORMATION DES ANGLES



**Figure 4.3** Transformation d'un angle pour un objet en mouvement.

Il convient d'attacher une attention particulière à la transformation des angles. En effet, le calcul n'est pas le même suivant qu'on cherche à décrire la transformation d'angles qui définissent la forme des objets, ou d'angles en tant que direction du mouvement d'un objet par rapport à un système d'axes. Dans tous les cas, il convient de revenir à la définition des angles en fonction des variables cinématiques et appliquer les lois de transformation de ces variables.

1. Voir, par exemple, l'ouvrage de E. F. Taylor et J. A. Wheeler, p. 65 (biblio), ou le cours de Berkeley, p. 353 (biblio).

Dans le cas d'objets en mouvement, considérons, par exemple, une équerre liée au référentiel  $\mathcal{R}'$ , dont un des côtés de l'angle droit est parallèle à l'axe  $O'x'$ , comme illustré sur la figure 4.3. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on écrira naturellement

$$\tan \theta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}. \quad (4.5)$$

Le même angle, vu du référentiel  $\mathcal{R}$ , sera également calculé par sa tangente

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'/\gamma} = \gamma \tan \theta', \quad (4.6)$$

en vertu de la contraction des longueurs. La forme dans le référentiel  $\mathcal{R}$  d'un objet plan quelconque immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  pourra être déterminée en triangulant l'objet à l'aide de triangles droits. Dans le cas d'un objet tridimensionnel, sa déformation pourra toujours être calculée en décomposant l'objet en « tranches » parallèles à la vitesse relative des deux référentiels.

Remarquons que lorsque  $\theta' = 90^\circ$ , on trouve  $\theta = 90^\circ$  également. Une direction perpendiculaire à l'axe  $O'x'$ , c'est-à-dire perpendiculaire à la vitesse relative dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , reste perpendiculaire pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$ . En particulier, cela signifie que les axes spatiaux des deux référentiels restent parallèles deux à deux ; ceci est évidemment compatible avec la définition des transformations spéciales de Lorentz donnée dans la section 2.1.4.

Les mesures de la direction de la vitesse d'une particule, faites par deux observateurs inertiels en mouvement relatif, ne concordent pas. Pour déterminer le changement apparent de direction de cette particule, on peut utiliser son équation du mouvement, les composantes de sa vitesse, ou éventuellement les composantes de son impulsion. Ce problème sera abordé dans les sections 7.5 et 8.5 pour les particules matérielles, et dans les sections 9.5.2 et 9.5.4 pour les photons.

## 4.4 TRANSFORMATION DES VOLUMES

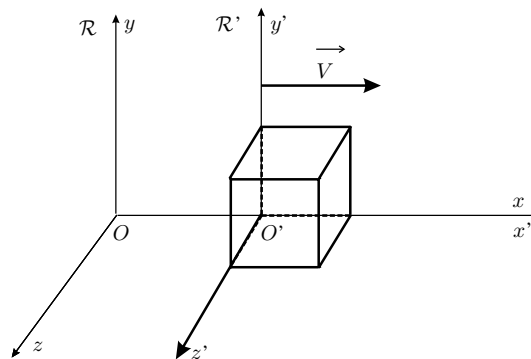
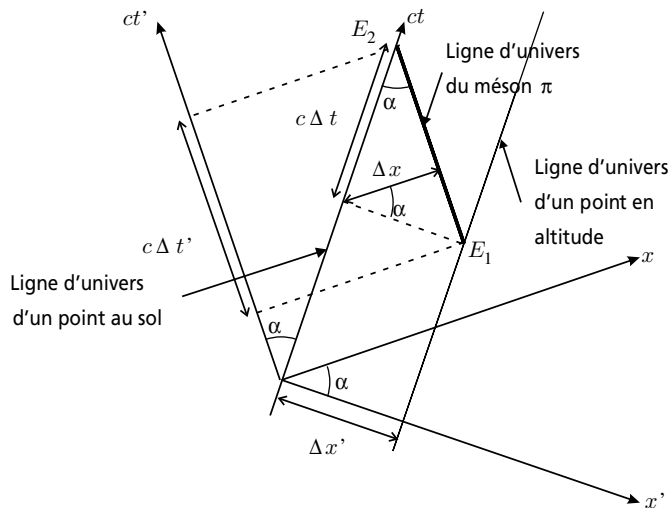


Figure 4.4 Transformation du volume d'un cube en mouvement.

Considérons un cube au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  (voir figure 4.4). Supposons que ses côtés soient de longueur  $D$  et que quatre de ses sommets soient localisés aux points  $(0,0,0)$ ,  $(D,0,0)$ ,  $(0,D,0)$ ,  $(0,0,D)$  dans le système orthonormé de coordonnées  $(x',y',z')$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les côtés parallèles à l'axe  $Ox$  apparaîtront contractés par un facteur  $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - V^2/c^2}$ , tandis que les côtés parallèles aux axes  $Oy$  et  $Oz$  garderont la même longueur  $D$  que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Donc, un observateur dans le référentiel  $\mathcal{R}$  mesure un volume  $\gamma^{-1} D^3$  à chaque instant et l'objet n'est plus considéré comme un cube mais comme un parallélépipède rectangle. Puisque n'importe quel solide peut être décomposé en volumes cubiques élémentaires, le volume d'un solide arbitraire en mouvement uniforme est contracté par le même facteur. De manière générale, les caractéristiques métriques des objets physiques (angles, aires, volumes) perdent leur caractère absolu dans le cadre de la relativité restreinte.

## 4.5 MÉSON $\pi$ EN MOUVEMENT RAPIDE



**Figure 4.5** Un méson  $\pi$  est créé dans la haute atmosphère et se déplace verticalement vers le sol à la surface duquel il se désintègre. L'événement  $E_1$  correspond à sa création dans la haute atmosphère et l'événement  $E_2$  à sa désintégration au sol.

Le méson  $\pi$  (pion) chargé est une particule instable qui, après sa création, se désintègre en d'autres particules. Dans son référentiel propre, sa durée de vie moyenne (entre sa création et sa désintégration) est d'environ  $2,60 \times 10^{-8}$  s. Les pions sont constamment créés dans la haute atmosphère par les rayons cosmiques primaires.

La mesure de la durée de vie d'un pion en mouvement rapide peut donner une valeur beaucoup plus importante que  $2,60 \times 10^{-8}$  s, à cause du phénomène de dilatation des temps. Une évidence expérimentale de ce fait est que des pions créés dans

la haute atmosphère sont capables d'atteindre le sol avant leur désintégration. Même si ces pions se déplaçaient à la vitesse de la lumière, il leur faudrait beaucoup plus de  $2,60 \times 10^{-8}$  s pour traverser toute l'atmosphère ; en effet  $c \times 2,60 \times 10^{-8}$  s = 7,8 m seulement. En revanche, pour un observateur se déplaçant avec le pion, la dilatation du temps ne joue pas. La capacité qu'a le pion de traverser l'atmosphère vient, du point de vue cet observateur, de la contraction relativiste de l'atmosphère due au mouvement rapide du pion.

Comme indiqué sur la figure 4.5, associons à l'événement  $E_1$  la création d'un pion. Supposons qu'une fois créée, cette particule se déplace verticalement vers le centre de la Terre et se désintègre en touchant le sol. L'événement  $E_2$  est associé à cette désintégration. Le pion est au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Le point de l'atmosphère où la création du pion intervient et le point d'impact au sol sont au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , attaché à la Terre. Les référentiels sont choisis de telle manière que les axes  $Ox$  et  $O'x'$  sont orientés verticalement vers le haut. Les événements  $E_1$  et  $E_2$  sont séparés par un intervalle d'espace-temps dont les composantes respectives sont  $(c\Delta t, \Delta x)$  et  $(c\Delta t', \Delta x')$  dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Comme, dans notre exemple, le pion se désintègre en touchant le sol, l'intervalle de temps  $\Delta t$  dans le référentiel du pion est égal à sa durée de vie. La distance traversée par le pion est  $\Delta x'$  dans le référentiel attaché à la Terre. Du point de vue d'un observateur lié au pion, l'épaisseur de l'atmosphère est donnée par  $\Delta x$ , c'est-à-dire la distance entre le sol et l'extrémité de l'atmosphère mesurée à deux instants identiques dans le laboratoire du pion. La figure 4.5 montre que

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= c\Delta t / \cos \alpha \quad \text{avec} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - V^2/c^2} \leq 1, \\ \Delta x &= \Delta x' \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour un observateur terrestre, la durée de vie du pion est augmentée, tandis que pour un observateur lié au pion, l'épaisseur de l'atmosphère est réduite.

Calculons la vitesse minimale nécessaire pour que le pion traverse la totalité de l'atmosphère avant de se désintégrer. Nous supposons que la durée de vie du pion est exactement égale à sa durée de vie moyenne,  $\Delta t = 2,60 \times 10^{-8}$  s, et nous supposons également que  $\Delta x' = 48$  km (altitude moyenne de création des pions). D'après la figure 4.5 nous avons

$$\Delta x' = c\Delta t \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4,8 \times 10^4}{(3 \times 10^8)(2,6 \times 10^{-8})} = 6154, \quad (4.8)$$

c'est-à-dire  $v/c = 0,999\,999\,987$ . La durée de vie du pion pour un observateur terrestre vaut

$$\Delta t' = \Delta t / \cos \alpha = 1,6 \times 10^{-4} \text{ s}, \quad (4.9)$$

ce qui correspond bien à l'épaisseur de l'atmosphère (48 km) divisée par la vitesse du pion (presque la vitesse de la lumière). En revanche, pour un observateur lié au pion, l'épaisseur de l'atmosphère vaut



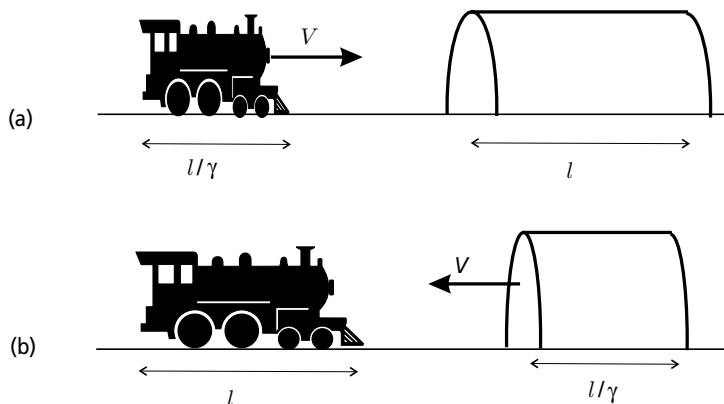
$$\Delta x = \Delta x' \cos \alpha = 7,8 \text{ m.} \quad (4.10)$$

On constate que la dilatation des temps et la contraction des longueurs permettent une interprétation cohérente du phénomène pour l'observateur lié au pion et celui lié à la Terre.

## 4.6 LE TRAIN ET LE TUNNEL

Outre le problème des jumeaux de Langevin, un autre paradoxe apparent a été proposé dans le cadre des phénomènes de contraction des longueurs. Supposons qu'un train de longueur  $\ell$  (dans son référentiel propre) se dirige vers un tunnel de même longueur  $\ell$  (dans son référentiel propre). Ce tunnel est muni d'une porte d'entrée ( $E$ ) et d'une porte de sortie ( $S$ ) qui peuvent être fermées par un opérateur au repos dans le référentiel d'inertie du tunnel. Du point de vue de l'opérateur, le train aura une longueur inférieure à  $\ell$  en vertu du phénomène de contraction des longueurs et pourra donc être complètement enfermé dans le tunnel. Par contre, le conducteur du train verra un tunnel de longueur inférieure à  $\ell$  et va donc penser que son train ne pourra pas être entièrement contenu dans le tunnel (voir figure 4.6).

Supposons que l'opérateur du tunnel ait fait en sorte que les deux portes se ferment simultanément quand l'extrémité avant du train arrive à la sortie du tunnel. Le train pourra-t-il être enfermé dans le tunnel ?



**Figure 4.6** Problème du train et du tunnel : (a) point de vue de l'opérateur du tunnel ; (b) point de vue du conducteur du train.

Pour résoudre ce problème, l'approche graphique est intéressante. Sur la figure 4.7, nous supposons que le référentiel  $\mathcal{R}$  est attaché au tunnel tandis que le référentiel  $\mathcal{R}'$  est attaché au train. Définissons les événements suivants :

- $E_1$  : l'avant du train passe l'entrée du tunnel ; c'est l'intersection de la ligne d'univers de l'avant du train avec la ligne d'univers de  $(E)$ .
- $E_2$  : l'avant du train sort du tunnel ; c'est l'intersection de la ligne d'univers de l'avant du train avec la ligne d'univers de  $(S)$ .
- $E_3$  : l'arrière du train entre dans le tunnel ; c'est l'intersection de la ligne d'univers de l'arrière du train avec la ligne d'univers de  $(E)$ .
- $E_4$  : l'arrière du train sort du tunnel ; c'est l'intersection de la ligne d'univers de l'arrière du train avec la ligne d'univers de  $(S)$ .

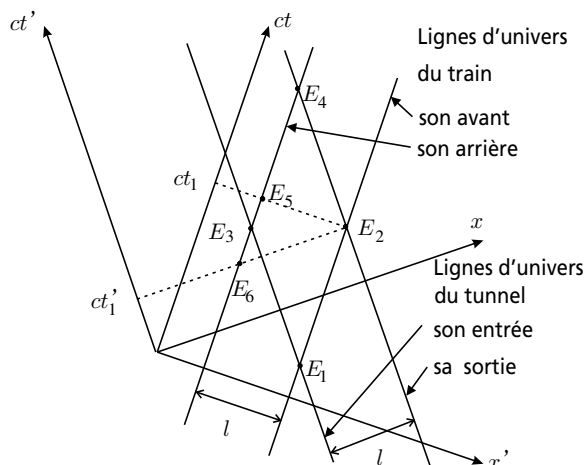
Pour l'opérateur du tunnel, la fermeture simultanée des portes se fait au temps  $t_1$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Ce temps est la coordonnée de  $E_2$  sur l'axe des temps  $ct$ . Dans le référentiel du train, la fermeture de  $(S)$  se produit au temps  $t'_1$ . Prenons garde que si la fermeture de  $(E)$  et de  $(S)$  sont des événements simultanés dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , ils **ne le sont plus** dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . C'est cette non-simultanéité qui résout le paradoxe. Discutons ce point un peu plus en détail. Pour cela, nous avons besoin d'introduire deux nouveaux événements :

- $E_5$  est l'événement « position de l'arrière du train au moment de la fermeture des portes dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ». C'est le point de la ligne d'univers de l'arrière du train qui a pour coordonnée temporelle  $ct_1$  sur l'axe des temps  $ct$ . Pour l'opérateur du tunnel, le train est représenté au temps  $t_1$  par le segment  $E_2E_5$ , compris entièrement entre les lignes d'univers de  $(E)$  et de  $(S)$ . Ainsi, pour lui, le train est entièrement contenu dans le tunnel !
- $E_6$  est l'événement « position de l'arrière du train au moment de la fermeture de  $(S)$ , du point de vue du conducteur du train ». C'est le point de la ligne d'univers de l'arrière du train, qui a pour coordonnée temporelle  $ct'_1$  sur l'axe des temps  $ct'$ . On voit que  $E_6$  est en dehors des lignes d'univers de  $(E)$  et  $(S)$  ; donc l'arrière du train n'a pas encore pénétré dans le tunnel. De plus, à ce moment-là pour le conducteur, la porte  $(E)$  n'est pas encore fermée, et l'arrière du train a encore du temps pour s'y engouffrer.

Dans le référentiel propre du train, la porte  $(S)$  se ferme avant la porte  $(E)$ .

Ce faux paradoxe illustre l'importance de l'identification correcte des événements dans les problèmes relativistes. La solution du problème est d'identifier l'ordre dans lequel les événements apparaissent pour chaque référentiel. Plutôt que de tenter de discuter le paradoxe en comparant les longueurs relatives du train et du tunnel à un instant donné – ce qui est une procédure délicate car la simultanéité est relative, il vaut mieux identifier les événements dans un diagramme d'espace-temps. Une fois les coordonnées spatio-temporelles des événements déterminées dans un référentiel d'inertie donné, on peut faire une transformation de Lorentz pour trouver ces coordonnées dans un autre référentiel.

Si les portes du tunnel sont en papier, le train franchira la porte  $(S)$  sans difficulté. Le conducteur du train ne verra jamais le train complètement enfermé dans le tunnel car l'extrémité avant du train franchira la porte  $(S)$  alors que l'extrémité arrière du train n'est toujours pas dans le tunnel et que la porte  $(E)$  ne s'est toujours pas abaissée. L'opérateur du tunnel verra, par contre, le train complètement contenu dans le tunnel à l'instant où les deux portes s'abaisseront simultanément pour lui.



**Figure 4.7** Diagramme de Lorentz pour le « paradoxe » du train et du tunnel.

Si les portes sont en acier, il se peut que l'extrémité avant du train s'écrase sur la porte ( $S$ ) sans pouvoir la franchir. Dans ce cas, l'extrémité arrière ne peut pas connaître instantanément le sort de l'extrémité avant puisqu'aucune information ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière. Le reste du train continuera donc de s'enfoncer dans le tunnel alors que l'avant est immobilisé – on se rappellera que la notion de corps parfaitement solide doit être abandonnée en relativité (voir section 4.4). La porte ( $E$ ) s'abaissera alors que le train sera complètement contenu dans le tunnel – mais, concédons-le, dans un état tout juste bon pour la ferraille !

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 263.

Dans les exercices suivants,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont deux référentiels d'inertie dont les mesures sont reliées par une transformation spéciale de Lorentz de vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$ . Les coordonnées d'un événement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sont notées  $(t, x)$  ; celles du même événement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  sont notées  $(t', x')$ .

### 4.1 Mouvement d'une règle

Pour les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}'$ , une règle, parallèle à l'axe  $O'x'$  se déplace parallèlement à l'axe  $O'y'$  avec une vitesse constante  $v'$ .

- (a) Calculer l'angle formé par cette règle avec l'axe  $Ox$  pour les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}$ .

- (b) Même question si la règle est cette fois parallèle à l'axe  $O'y'$  pour les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}'$ .

## 4.2 Contraction des longueurs

Grâce à l'horloge à photons, nous avons montré qu'il y a dilatation du temps par un facteur  $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$  entre l'horloge au repos et l'horloge en mouvement à la vitesse de translation uniforme  $V$ . En utilisant toujours le principe de l'horloge à photons, montrer que les longueurs sont contractées du même facteur  $\gamma$  entre les deux mêmes référentiels.

## 4.3 Le cylindre « tordu »

Un cylindre, dont le centre de gravité est immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , a son axe de symétrie aligné sur l'axe  $Ox$ . Il est animé dans ce référentiel d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de son axe de symétrie. Montrer que, pour les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}'$ , le cylindre est « tordu », autour de son axe de symétrie, d'un angle  $\beta \omega/c$  par unité de longueur propre (si des génératrices parallèles à l'axe sont peintes sur le cylindre au repos, ces génératrices ont la forme d'hélices dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ ).

## 4.4 Distance de deux impulsions lumineuses

Deux impulsions lumineuses se déplacent le long de l'axe  $Ox$  du référentiel  $\mathcal{R}$  ; la distance entre ces deux impulsions est  $L$  pour les observateurs du référentiel  $\mathcal{R}$ .

- (a) Calculer la distance séparant ces deux impulsions dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .  
 (b) Interpréter ce résultat en terme d'effet Doppler. Pourquoi ne retrouve-t-on pas simplement le phénomène de contraction des longueurs ?  
 (c) Retrouver ce résultat au moyen d'un diagramme de Lorentz.

## 4.5 Liaison radio entre une fusée et une station terrestre

Une fusée, de longueur  $l = 90$  m dans son référentiel propre  $\mathcal{R}'$ , se déplace selon une trajectoire rectiligne par rapport à la Terre, à la vitesse uniforme de  $V = 0,8 c$ . Elle est équipée à l'avant d'un récepteur radio qui lui permet de communiquer avec une station au sol, fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Lorsque l'arrière de la fusée passe devant la station située à l'origine  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}$ , cette dernière lui envoie, à l'instant pris comme origine à la fois par les horloges terrestres et par celles embarquées dans la fusée, un message que le récepteur de la fusée reçoit à l'instant  $t'_r$ .

- (a) Calculer  $t'_r$  en nanosecondes.

- (b) À quel instant  $t_r$ , pour les horloges de la station, le signal est-il capté par le récepteur de la fusée ? Proposer deux méthodes pour le calcul de  $t_r$ . Pourquoi n'existe-t-il pas entre  $t_r$  et  $t'_r$  le facteur de dilatation habituel ?
- (c) En déduire la distance parcourue par l'avant de la fusée à la réception du signal.

#### 4.6 Loi de Descartes

Un photon se déplaçant dans le plan  $Oxy$  du référentiel  $\mathcal{R}$  se réfléchit sur un miroir immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , placé perpendiculairement à l'axe  $O'x'$ . Donner le lien entre les angles d'incidence et de réflexion mesurés par un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$ .

#### 4.7 Forme d'une ellipse

Une ellipse, centrée sur  $O'$ , est fixe dans le plan  $O'x'y'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  et se déplace donc à la vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$  du référentiel  $\mathcal{R}$ .

- (a) Son demi-grand axe, parallèle à  $O'x'$ , a pour longueur  $a'$  et son demi-petit axe, parallèle à  $O'y'$ , a pour longueur  $b'$ . Montrer que la forme de cette ellipse, déterminée par un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$ , est encore une ellipse dont on donnera les caractéristiques en fonction de  $a'$ ,  $b'$  et  $V$ . En particulier on s'intéressera à sa vitesse de déplacement d'ensemble, à la position de ses axes de symétrie et aux longueurs  $a$  du demi-grand axe et  $b$  du demi-petit axe. Pour quelle valeur de la vitesse  $V$ , la forme de cette ellipse est-elle un cercle dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ?
- (b) On reprend ce problème lorsque les axes de l'ellipse dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , sont tournés d'un angle  $\alpha'$  par rapport au cas précédent (les longueurs des demi-axes restent égales à  $a'$  et  $b'$ ). On notera  $\alpha$  l'angle de rotation des axes par rapport à la direction  $Ox$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

#### 4.8 Passage de règles

- (a) Préambule : On considère deux événements  $E_1$  et  $E_2$  ayant lieu à l'origine  $O'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  ; l'événement  $E_1$  est la coïncidence de  $O$  et  $O'$ .
- Quelle est la relation liant  $x_2$  et  $t_2$  ? Quelle est la valeur de  $x'_2$  ?
  - Quelle relation l'invariant  $s^2$  permet-il d'écrire entre les coordonnées de ces deux événements ?
  - En déduire la relation entre  $t_2$  et  $t'_2$ .
- (b) Événements concernant une règle : Une règle  $O'A'$ , de longueur propre  $l'$ , est fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . On considère deux événements : la coïncidence de l'origine  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  avec chacune des deux extrémités  $O'$  et  $A'$  de la règle.

- i. Que vaut  $x'_2 - x'_1$  ?
  - ii. Exprimer  $t'_2 - t'_1$  en fonction de  $t_2 - t_1$ .
  - iii. Écrire l'invariant  $s^2$  pour ces deux événements. En déduire  $l'$  en fonction de  $t_2 - t_1$ .
  - iv. Que représente la longueur  $l = V(t_2 - t_1)$  ? Interpréter la question précédente.
- (c)** Événements concernant deux règles : On considère deux règles de même longueur propre  $l$  : une règle  $OA$  fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ( $x_A = l$ ), une règle  $O'A'$  fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ( $x'_{A'} = -l$ ).
- i. La rencontre des extrémités  $O'$  et  $A$  des deux règles constitue l'événement  $E_1$ . Calculer  $t_1$  et en déduire  $t'_1$ .
  - ii. La rencontre des extrémités  $O$  et  $A'$  des deux règles constitue l'événement  $E_2$ . Montrer, sans calcul supplémentaire, comment écrire directement les expressions de  $t_2$  et  $t'_2$ . Comparer  $t_1$  et  $t_2$ .
  - iii. En utilisant la transformation de Lorentz, trouver
    - l'abscisse du point  $B'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  coïncidant avec  $O$  lors de l'événement  $E_1$ .
    - l'abscisse du point  $B$  du référentiel  $\mathcal{R}$  coïncidant avec  $O'$  lors de l'événement  $E_2$ .
  - iv. Les deux événements  $E_1$  et  $E_2$  se succèdent-ils dans le même ordre dans les deux référentiels. Conclusion ?

## Chapitre 5

# La vitesse et la relativité

*Il n'y a pas meilleure illustration des imprévisibles retombées de la recherche fondamentale que l'histoire d'Albert Einstein et du système de positionnement global [GPS]... la prochaine fois que votre avion s'approchera d'un aéroport par mauvais temps, et que vous êtes occupé à vous demander « la recherche fondamentale est-elle utile ? », pensez à Einstein et au décodeur GPS dans le poste de pilotage, vous guidant pour un atterrissage en toute sécurité.*

Clifford WILL

Nous nous plaçons dans la situation particulière où les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ont des axes parallèles et où le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplace à la vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$ . Les transformations de Lorentz correspondantes sont données par les formules (2.28).

## 5.1 COMPOSITION DES VITESSES

### 5.1.1 Position du problème

Soit un mobile, considéré comme ponctuel, dans un référentiel  $\mathcal{R}$  se déplaçant selon une loi connue  $\vec{r}(t)$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , l'équation du mouvement est donnée par une autre loi  $\vec{r}'(t')$ .

Choisissons un événement particulier de la ligne d'univers correspondant à la position au temps  $t$  dans  $\mathcal{R}$  ; ses coordonnées sont  $(ct, x, y, z)$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  le même événement a pour coordonnées  $(ct', x', y', z')$ . Un événement infiniment voisin

de la ligne d'univers a pour coordonnées respectives  $(ct + cdt, x + dx, y + dy, z + dz)$  et  $(ct' + cdt', x' + dx', y' + dy', z' + dz')$  dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Par définition, la vitesse instantanée du mobile au temps  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est  $\vec{v} = d\vec{r}/dt = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$  ; la vitesse correspondante dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est  $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt' = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt')$ . Déterminons le lien entre  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$ , que l'on appelle loi de composition des vitesses.

Par différentiation de la transformation (2.28) par rapport temps, il vient

$$cdt = \gamma(cdt' + \beta dx'). \quad (5.1)$$

Le couple  $(t, x)$  jouant par essence un rôle différent du couple  $(y, z)$ , il convient d'étudier séparément la composante longitudinale de la vitesse (parallèle à la vitesse d'entraînement) et les composantes transversales (perpendiculaires à la vitesse d'entraînement).

### 5.1.2 Composante longitudinale de la vitesse

Différentions la relation concernant la coordonnée  $x$  dans les formules (2.28)

$$dx = \gamma(\beta cdt' + dx'). \quad (5.2)$$

De cette expression et de la relation sur le temps (5.1), on tire

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}, \quad (5.3)$$

c'est-à-dire

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad (5.4)$$

La relation (5.4) est la loi d'addition de deux vitesses sur un même axe en relativité restreinte. Il est à noter que cette formule d'addition des vitesses peut être obtenue sans utiliser les transformations de Lorentz ; l'invariance de la vitesse de la lumière suffit <sup>1</sup>.

### 5.1.3 Composantes transversales de la vitesse

Toujours grâce à la transformation de Lorentz, on obtient par différentiation

$$dy = dy' \quad \text{et} \quad dz = dz'. \quad (5.5)$$

1. Voir l'article de N. David Mermin, « Relativistic addition of velocities directly from the constancy of the velocity of light », *American Journal of Physics*, vol. 51, n° 12, December 1983, p. 1130-1131.



En vertu de la relation (5.1), on obtient par division

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma \left( dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right)} \quad (5.6)$$

et une expression analogue pour  $v_z$ . Finalement nous parvenons à l'expression de la loi de transformation pour les composantes transversales

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left( 1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right)} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left( 1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right)}. \quad (5.7)$$

Remarquons que cette loi de transformation implique que  $v_y \neq v'_y$  et  $v_z \neq v'_z$ , alors que  $y = y'$  et  $z = z'$ . Ceci est dû au fait que dans le calcul de la vitesse intervient l'intervalle de temps  $dt$  qui n'est pas invariant.

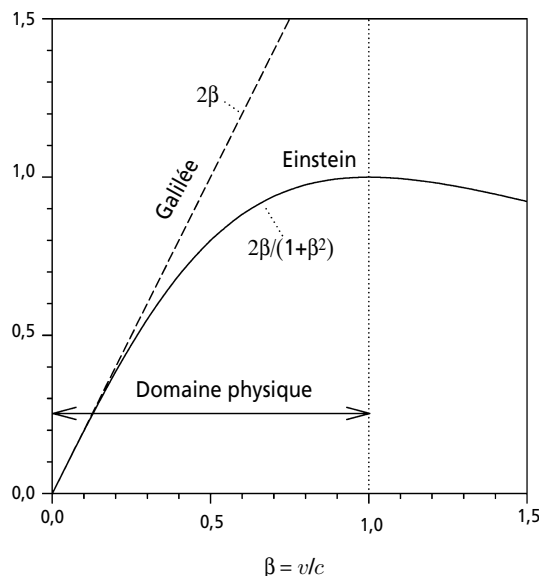
### 5.1.4 Propriétés des lois de composition

Ces lois de composition sont caractérisées par les propriétés suivantes :

- Cette loi se ramène à la loi galiléenne classique lorsque le produit  $v'_x V$  peut être négligé par rapport à  $c^2$ .
- On montre également (voir exercice 5.3) que l'inversion des formules de composition (5.4) et (5.7) s'obtient simplement en changeant le signe de la vitesse d'entraînement et en intervertissant les grandeurs primées et non primées.
- Il est important de comprendre que, dans ces formules, la vitesse d'entraînement  $V$  est constante, mais la vitesse du mobile  $\vec{v}$  où  $\vec{v}'$  peut très bien dépendre du temps.
- Supposons une vitesse purement longitudinale dans  $\mathcal{R}'$  ( $v'_x = v'$  et  $v'_y = v'_z = 0$ ) ; on voit immédiatement que la vitesse est aussi purement longitudinale dans  $\mathcal{R}$  ( $v_x = v$  et  $v_y = v_z = 0$ ). Le dénominateur dans la relation (5.4) a pour effet de limiter la valeur maximum de  $|v|$  à  $c$ . En mettant la relation (5.4) sous la forme

$$v = c \left\{ 1 - \frac{\left( 1 - \frac{v'}{c} \right) \left( 1 - \frac{V}{c} \right)}{1 + \frac{v' V}{c^2}} \right\}, \quad (5.8)$$

on constate en effet l'impossibilité d'obtenir une vitesse supraluminique puisque l'addition de deux vitesses inférieures à  $c$  ne peut jamais donner une valeur supérieure à la vitesse de la lumière. Cette situation est illustrée sur la figure 5.1 dans le cas particulier de deux vitesses égales ( $v' = V$ ).



**Figure 5.1** Composition sur un axe de deux vitesses de même sens égales en grandeur, de module  $\beta c$ . Lorsque  $\beta$  est supérieur à 1, le résultat diminue quand  $\beta$  augmente dans le cas de la composition relativiste des vitesses.

On peut également y remarquer l'étrange comportement de cette loi d'addition pour des valeurs non physiques de la vitesse. Pour  $v' = c$ , la loi d'addition donne  $v = c$  quel que soit  $V$ , en accord avec le fait que la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante de l'état du mouvement de sa source. Notons que ces remarques s'appliquent encore dans le cas plus général d'une vitesse avec des composantes arbitraires (voir exercice 5.4).

## 5.2 EXPÉRIENCE DE FIZEAU

En 1851, Fizeau, qui suppose l'existence de l'éther, réalise une expérience d'interférométrie pour mesurer la vitesse de la lumière dans un milieu transparent en mouvement <sup>2</sup>. Si  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide (par rapport à l'éther), la vitesse de la lumière dans un milieu transparent (immobile par rapport à l'éther) est donnée par  $v' = c/n$ , où  $n$  est l'indice de réfraction <sup>3</sup> de ce milieu. Supposons que

2. Une version moderne de l'expérience de Fizeau est décrite, par exemple, dans l'article de H. R. Bilger et A. T. Zavodny, « Fresnel Drag in a Ring Laser: Measurement of the Dispersive Term », *Physical Review A*, vol. 5, n° 2, February 1972, p. 591-599.

3. Pour une interprétation physique de l'indice de réfraction, on peut consulter les références suivantes : Feynman, Leighton et Sands, *Le cours de physique de Feynman, Mécanique*, InterEditions, 2<sup>e</sup> part., 1979, p. 66-81 ; Roald K. Wangsness, « Effect of matter on the phase velocity of an electromagnetic wave », *American Journal of Physics*, vol. 49, n° 10, October 1981, p. 950-953.

ce milieu transparent soit en mouvement avec la vitesse constante  $V$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Si l'éther est complètement entraîné par le milieu transparent, la vitesse de la lumière dans ce milieu est donnée par  $\frac{c}{n}$ , et la vitesse correspondante dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est égale à  $\frac{c}{n} + V$ , dans le cadre de la mécanique classique. Le résultat surprenant obtenu expérimentalement par Fizeau est

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V. \quad (5.9)$$

On pourrait en déduire que l'éther existe vraiment et qu'il est partiellement entraîné par les milieux transparents <sup>4</sup> avec un « facteur d'entraînement » égal à  $1 - \frac{1}{n^2}$ . En réalité, la théorie de la relativité restreinte permet d'expliquer le résultat de Fizeau sans faire appel à l'existence de l'éther.

Conformément au premier postulat de la relativité restreinte, il faut supposer que la lumière se propage toujours avec la vitesse  $c/n$  dans le milieu transparent, que ce milieu soit ou non en mouvement par rapport à d'autres corps. Par conséquent, la vitesse de la lumière par rapport au milieu transparent et la vitesse de ce dernier par rapport au laboratoire étant connues, on peut déterminer la vitesse de la lumière par rapport au laboratoire. Si on utilise la loi relativiste d'addition des vitesses (5.4) au lieu de la loi galiléenne, on trouve, pour  $v' = \frac{c}{n}$ ,

$$v = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{nV}{c}\right) \left(1 + \frac{V}{cn}\right)^{-1}. \quad (5.10)$$

Pour  $V \ll c$ , ce qui était effectivement le cas dans les expériences de Fizeau puisque  $V$  était de l'ordre d'une dizaine de mètres par seconde, on peut ne retenir dans l'expression (5.10) que les termes d'ordre inférieur à  $V^2/c^2$ . En tenant compte du fait que  $n$  est de l'ordre de l'unité on obtient ainsi

$$v = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{nV}{c} - \frac{V}{cn} + \dots\right), \quad (5.11)$$

---

4. Ce résultat venait corroborer les conclusions de Fresnel concernant l'entraînement partiel de l'éther par les milieux transparents. Voir, par exemple, l'ouvrage de M. Boratav et R. Kerner, p. 22 (biblio).

c'est-à-dire

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V + \dots, \quad (5.12)$$

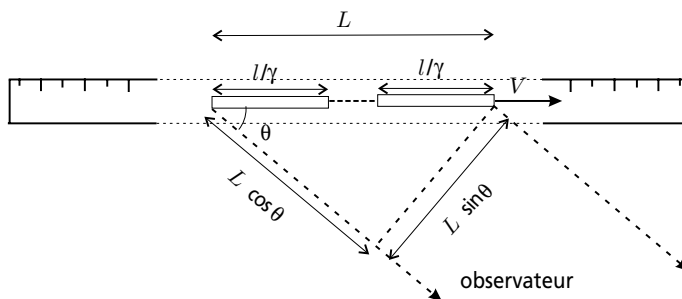
en accord avec la relation (5.9). Le résultat obtenu par Fizeau, plus de cinquante ans avant la naissance de la relativité restreinte, peut donc être considéré comme une vérification expérimentale de cette théorie.

## 5.3 ILLUSIONS RELATIVISTES

Nous avons vu dans les sections 4.1, 4.2 et 4.4 que le phénomène de contraction des longueurs faisait qu'un objet, à la limite des vitesses proches de  $c$ , était « aplati » dans la direction parallèle à la vitesse de déplacement de cet objet. Il ne faut pas en conclure que l'apparence visuelle (ou photographique) d'une sphère en mouvement rapide est celle d'un ellipsoïde aplati. Dans la détermination de l'aspect que présente un objet en mouvement, il faut tenir compte du temps de transit des rayons lumineux émis par les différents points de l'objet.

### 5.3.1 Apparence d'une tige en mouvement

Considérons une tige de longueur  $\ell$  (dans son référentiel propre) se déplaçant à grande vitesse  $V = \beta c$  devant une règle graduée (voir figure 5.2). Un observateur la photographie et définit une longueur  $L$ , différence des graduations de la règle qui coïncident, sur la photographie, avec les deux extrémités de la tige. L'image de l'objet se forme sur la plaque photographique avec la lumière qui arrive simultanément de tous les points de la tige : celle provenant de parties de la tige plus éloignées de l'observateur quitte sa source avant celle provenant de parties de la tige plus proches de l'observateur.



**Figure 5.2** La déformation apparente d'une tige se déplaçant devant un observateur n'est en général pas la contraction des longueurs. L'image perçue par l'observateur se forme avec des photons émis à des moments différents par les différentes parties de la tige.

Supposons que l'observateur soit assez éloigné pour que l'on puisse considérer les rayons lumineux issus de la tige comme tous parallèles et arrivant sous un même angle  $\theta$ . La différence des temps de départ  $\Delta t$  entre les rayons lumineux issus des deux extrémités de la tige est

$$\Delta t = \frac{L \cos \theta}{c}, \quad (5.13)$$

comme on le voit sur la figure 5.2. Pendant cet intervalle de temps, la tige a parcouru une distance  $V\Delta t$ . On a donc

$$L = \frac{\ell}{\gamma} + \beta c \frac{L \cos \theta}{c}, \quad (5.14)$$

puisque pour l'observateur la longueur de la tige est  $\ell/\gamma$  (voir section 4.1). En vertu des équations (5.13) et (5.14), on trouve

$$L = \frac{\ell}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (5.15)$$

La déformation de la tige n'est donc en général pas la contraction des longueurs <sup>5</sup> (sauf quand  $\theta = \pi/2$ ) et dépend, de plus, de la direction d'observation. Dans le cas limite  $\theta = 0$ , on a

$$L = \ell \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (5.16)$$

La longueur  $L$  est alors plus importante que la longueur réelle  $\ell$  de la tige. L'équation (5.16) est à mettre en rapport avec les expressions que l'on obtient dans le cadre des phénomènes d'aberration et d'effet Doppler (voir sections 3.7.2 et 9.5.2).

Dans la détermination de l'impression visuelle de la tige que peut en avoir l'observateur, il faut également tenir compte de l'angle d'observation  $\theta$ . La longueur apparente  $L_{\text{app}}$  de la tige est ainsi donnée par  $L_{\text{app}} = L \sin \theta$  comme on peut le constater sur la figure 5.2. On a donc

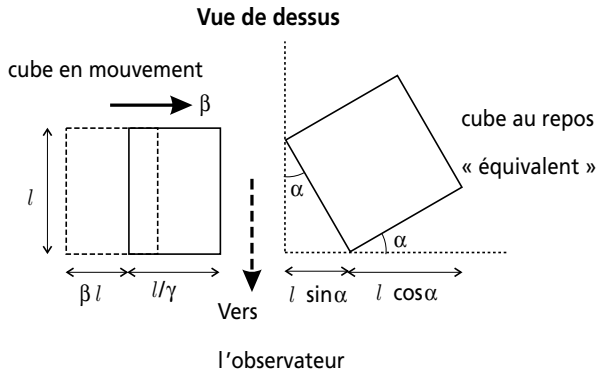
$$L_{\text{app}} = \frac{\ell \sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (5.17)$$

Photographier un objet est, en quelque sorte, faire une opération de mesure sur lui ; mais c'est une détermination de forme et de dimensions incorrectes car les positions des différents points de l'objet ne sont pas mesurées au même moment.

---

5. Contrairement à une image naïve mais fort répandue. Voir, par exemple, les illustrations du livre de G. Gamow et R. Stannard (biblio).

### 5.3.2 Apparence de solides en mouvement

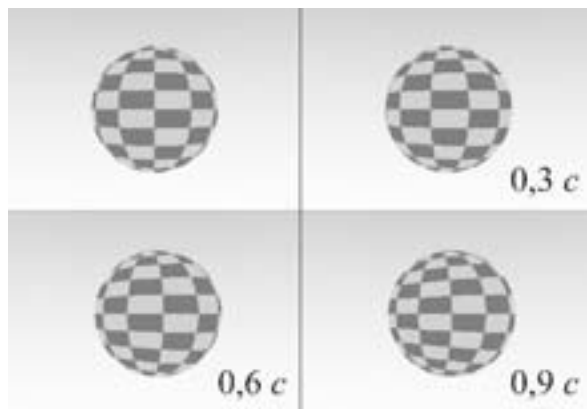


**Figure 5.3** Un cube en mouvement, passant loin devant un observateur, lui semblera avoir subi une rotation. Le dessin correspond à une vitesse du cube telle que  $\beta = 0,6$ .

Un solide se déplaçant loin d'un observateur (tous les rayons lumineux qui en sont issus sont parallèles) semble subir une rotation. Certaines parties de l'objet, visibles quand il est au repos, sont masquées lorsque l'objet est en mouvement : les rayons lumineux qui quittent ces parties en direction de l'œil de l'observateur sont interceptés par l'objet qui a voyagé à leur rencontre. Au contraire, certaines parties deviennent visibles car les rayons lumineux qui en sont émis ne sont plus arrêtés par l'objet qui s'est déplacé. Examinons le cas d'un cube passant devant un observateur avec une vitesse de module  $\beta c$ . On suppose que le cube se déplace parallèlement à une de ses faces. Un peu comme une voiture, il possède une face avant (pare-brise), une face arrière (coffre) et deux faces de côté (portières). Enfin on suppose que l'observateur immobile regarde le cube perpendiculairement à sa face de côté la plus proche. Tous les rayons lumineux issus du cube et qui parviennent à l'œil de l'observateur sont donc émis perpendiculairement à son sens de déplacement (voir figure 5.3).

La face du cube la plus proche paraît avoir une largeur  $\ell/\gamma$  (voir formule (5.17) avec  $\theta = \pi/2$ ). La face arrière est, contrairement à la face avant, tout à fait visible. Les rayons lumineux émis par la face arrière du cube doivent, pour arriver en même temps que ceux émis par la face proche, partir avec un temps d'avance  $\Delta t = \ell/c$  (pour le point le plus à l'arrière). Pendant ce temps, le cube a avancé de  $\beta c \Delta t = \beta \ell$ . La face arrière est donc visible sur cette largeur. Puisque  $\beta^2 + 1/\gamma^2 = 1$ , l'image obtenue est celle d'un cube au repos mais tourné d'un angle  $\alpha$  tel que  $\sin \alpha = \beta$ .

L'analyse qui vient d'être faite n'est valable que si l'objet examiné est situé suffisamment loin de l'observateur pour que l'on puisse considérer que tous les rayons lumineux qui en sont issus sont parallèles. La détermination de l'apparence visuelle d'un objet quelconque en mouvement rapide à distance finie est un problème fort compliqué qui sort du cadre de ce cours. Outre une rotation apparente d'ensemble,



**Figure 5.4** Apparence d'une sphère en mouvement relativiste à distance finie. Image en haut à gauche : la sphère est au repos. Autres images : la même sphère se déplace de gauche à droite avec différentes vitesses <sup>6</sup>. Les phénomènes de changement de luminosité et de teinte ne sont pas pris en compte.

des déformations visuelles importantes peuvent apparaître <sup>7</sup>. De plus, une description réaliste des observations devrait également tenir compte des phénomènes de changement de luminosité et de couleur (voir sections 9.5.2 et 9.5.3). Signalons qu'un objet de forme sphérique (dans son référentiel propre) est toujours vu avec un contour circulaire par un observateur quelconque <sup>8</sup> (voir figure 5.4). Curieusement, ces phénomènes semblent n'avoir été remarqués que plus de 50 ans après la création de la relativité restreinte.

### 5.3.3 Jets relativistes de matière

Certains quasars et noyaux actifs de galaxies éjectent de grandes quantités de matière en deux jets diamétralement opposés <sup>9</sup>. Cette matière émet du rayonnement électromagnétique qui peut être détecté sur Terre. Il est donc possible de détermi-

6. Ces images ont été obtenues avec le logiciel de Hans-Josef Patt et Peter Nemec, *Relativity for Windows*, Springer, 2000.

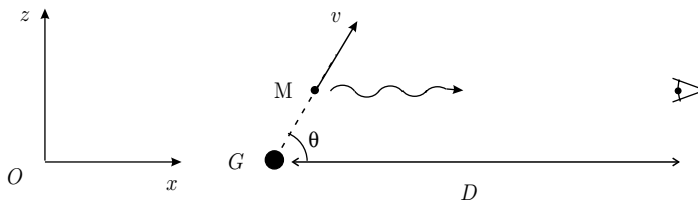
7. James Terrel, « Invisibility of the Lorentz Contraction », *Physical Review*, vol. 116, 1959, p. 1041-1045 ; V. F. Weisskopf, « The Visual Appearance of Rapidly Moving Objects », *Physics Today*, September 1960, p. 24-27 ; G. D. Scott et M. R. Viner, « The Geometrical Appearance of Large Objects Moving at Relativistic Speeds », *American Journal of Physics*, vol. 33, n° 7, July 1965, p. 534-536.

8. Roger Penrose, « The apparent shape of a relativistically moving sphere », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 55, 1959, p. 137-139 ; Mary L. Boas, « Apparent Shape of Large Objects at Relativistic Speeds », *American Journal of Physics*, vol. 29, n° 5, May 1961, p. 283-286.

9. Les phénomènes physiques susceptibles d'être à l'origine des jets relativistes sont décrits, par exemple, dans le livre de K. S. Thorne, chap. 9 (biblio).

ner la vitesse de la matière dans ces jets si on connaît la distance de la source. Dans certains cas, la mesure donne des valeurs supérieures à la vitesse de la lumière. Voilà qui semble contredire la théorie de la relativité restreinte. En fait, la matière des jets se déplace à des vitesses proches mais inférieures à  $c$ . C'est la vitesse **apparente** de la matière qui peut dans certains cas dépasser la vitesse de la lumière<sup>10</sup>. Supposons qu'un nuage de matière, expulsé par une source quelconque, voyage en direction de la Terre avec une vitesse proche de  $c$ . Au fur et à mesure qu'il se rapproche, la lumière qu'il émet a besoin de moins en moins de temps pour nous parvenir. C'est cela qui crée l'illusion de vitesse supraluminique. Cette hypothèse a été confirmée par l'observation de tels jets relativistes de matière dans notre galaxie, la source étant probablement constituée par un trou noir ou une étoile à neutrons<sup>11</sup>.

Analysons le phénomène en détail. Supposons qu'une galaxie lointaine  $G$ , immobile par rapport à un observateur et située à une distance  $D$  de cet observateur, éjecte de la matière  $M$  lumineuse. Cette matière, qui peut donc être observée, se déplace avec une vitesse de module  $v$  faisant un angle  $\theta$  avec la ligne de visée. Cette situation est illustrée sur la figure 5.5.



**Figure 5.5** Une galaxie  $G$ , immobile, située à une distance  $D$  d'un observateur, éjecte de la matière lumineuse  $M$ , se déplaçant dans le plan  $Oxz$  avec une vitesse  $v$  dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec la ligne de visée.

Si un morceau de matière, éjecté au temps  $t_0$ , émet de la lumière au temps  $t_i$  ( $> t_0$ ) dans le référentiel de l'observateur, celle-ci sera perçue par l'observateur à un temps  $T_i$  ( $> t_i$ ) donné par

$$T_i = t_i + \frac{D - v(t_i - t_0) \cos \theta}{c}. \quad (5.18)$$

En effet, les photons se propagent à la vitesse  $c$ , quelle que soit la vitesse de la matière éjectée. Ceux-ci parcourent la distance qui existe, au moment de leur émission, entre la matière éjectée et l'observateur. On suppose également que la galaxie est suffisamment lointaine pour que les photons émis à des instants différents aient

10. M. J. Rees, « Appearance of relativistically expanding radio sources », *Nature*, vol. 211, 1966, p. 468-470.

11. I. F. Mirabel et L. F. Rodríguez, « A superluminal source in the Galaxy », *Nature*, vol. 371, 1994, p. 46-48.



des trajectoires parallèles à la ligne de visée. Si un intervalle de temps  $\Delta t$  sépare l'émission de deux photons, leur perception par l'observateur se fera dans un intervalle de temps  $\Delta T$  égal à

$$\Delta T = \Delta t - \frac{v}{c} \cos \theta \Delta t. \quad (5.19)$$

Pendant cet intervalle de temps  $\Delta t$ , la matière éjectée parcourt dans la direction  $Oz$  une distance  $\Delta z$  égale à

$$\Delta z = v \sin \theta \Delta t. \quad (5.20)$$

La vitesse réelle de la matière suivant l'axe  $Oz$  est bien sûr donnée par  $\Delta z/\Delta t$ , mais la vitesse apparente  $v_{\text{app}}$  mesurée par l'observateur distant sera égale  $\Delta z/\Delta T$ . On a donc

$$v_{\text{app}} = \frac{v \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (5.21)$$

L'analyse de la formule (5.21) montre que pour une vitesse d'éjection fixée, la vitesse apparente sera maximale si l'angle d'éjection est tel que  $\cos \theta = v/c$ . On a alors

$$\max_{v \text{ fixé}} v_{\text{app}} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{pour} \quad \theta = \arccos \frac{v}{c}. \quad (5.22)$$

On en déduit donc que la vitesse apparente  $v_{\text{app}}$  peut dépasser la vitesse de la lumière si la vitesse de la matière éjectée  $v$  est telle que  $v \geq c/\sqrt{2}$ .

Avec une analyse classique, on trouve également une vitesse apparente différente de la vitesse réelle. Cependant, le résultat est différent de la formule (5.21) car, en mécanique newtonienne, la vitesse des photons varie avec la vitesse de la matière éjectée.

### 5.3.4 Le mirage du pulsar

Un pulsar est une étoile à neutrons en rotation rapide qui émet deux puissants faisceaux d'ondes radio par ses pôles magnétiques. Lorsque l'axe de rotation du pulsar ne passe pas par ses pôles, les faisceaux sont entraînés dans le mouvement giratoire. Le pulsar se comporte alors comme un phare cosmique balayant l'univers de son signal radio. La trace tournoyante de ce signal projetée sur les lointaines galaxies atteint des vitesses qui peuvent largement dépasser  $c$ . Pourtant, les lois de la relativité restreinte ne sont aucunement violées, car les seuls objets qui se déplacent réellement sont les photons qui jaillissent en ligne droite du pulsar à la vitesse de la lumière. Les galaxies « illuminées » par le flux radio sont comme les ampoules des guirlandes lumineuses dont les allumages successifs donnent l'illusion de mouvement.

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 265.

Dans les exercices suivants,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont deux référentiels d'inertie dont les mesures sont reliées par une transformation spéciale de Lorentz de vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$ . Les coordonnées d'un événement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sont notées  $(t, x)$  ; celles du même événement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  sont notées  $(t', x')$ .

### 5.1 Changement de direction d'un photon

Un photon se déplace le long de l'axe  $O'y'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$ , en direction de  $O'$ . En utilisant la loi de composition des vitesses, calculer l'angle  $\theta$  que fait la direction de propagation du photon dans le référentiel  $\mathcal{R}$  avec l'axe  $Oy$ . La vitesse du photon est-elle bien invariante ?

### 5.2 Jets de matière

Démontrer la formule (5.22).

### 5.3 Loi de composition des vitesses

(a) À partir de la loi d'addition des vitesses longitudinales (5.4), démontrer la relation

$$\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma^2}.$$

(b) Montrer que la loi de composition des vitesses donnant  $\vec{v}'$  en fonction de  $\vec{v}$  s'obtient simplement des relations (5.4) et (5.7) en permutant les quantités primées et non primées, et en changeant le signe de  $V$ .

### 5.4 Limitation de la vitesse

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , un objet possède une vitesse  $\vec{v}' = \vec{u}'c$  de module inférieur à  $c$ . Nous avons montré que le principe de relativité impose  $V < c$ . La vitesse de l'objet dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est notée  $\vec{v} = \vec{u}c$ .

(a) Démontrer la relation

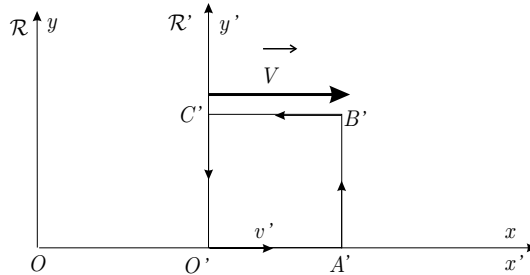
$$u^2 = 1 - \frac{(1 - \beta^2)(1 - u'^2)}{(1 + u'_x \beta)^2}.$$

(b) En déduire que la vitesse de l'objet est inférieure ou égale à la vitesse de la lumière dans n'importe quel référentiel.

(c) Vérifier l'invariance de la vitesse de la lumière.

### 5.5 Un tour de carré

Un mobile parcourt le trajet autour d'un carré  $O'A'B'C'O'$  avec une vitesse constante  $v'$  dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$  (voir figure ci-dessous) ; Les points  $O'$ ,  $A'$ ,  $B'$ , et  $C'$  sont fixes dans ce référentiel et tels que  $|O'A'| = |A'B'| = |B'C'| = |C'O'| = \ell'$ .



- Calculer les temps de parcours  $\Delta t'_{O'A'}$ ,  $\Delta t'_{A'B'}$ ,  $\Delta t'_{B'C'}$  et  $\Delta t'_{C'O'}$  de chacun des côtés du carré dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Calculer les temps de parcours correspondants  $\Delta t_{O'A'}$ ,  $\Delta t_{A'B'}$ ,  $\Delta t_{B'C'}$  et  $\Delta t_{C'O'}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à partir des résultats de mesure dans  $\mathcal{R}'$ .
- Comparer les temps de parcours totaux du carré dans les deux référentiels. Commenter.
- Calculer les temps de parcours  $\Delta t_{O'A'}$  et  $\Delta t_{B'C'}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , en effectuant directement les calculs dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , sans utiliser les résultats de mesure dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

### 5.6 Loi de transformation des accélérations

De la loi de composition des vitesses longitudinales sur un axe, déduire la loi de transformation des accélérations pour un mobile dont le mouvement ne se déroule que le long de l'axe  $Ox$ .

### 5.7 La tige déformée

Une tige verticale de hauteur  $h$  se déplace horizontalement, à la vitesse  $\beta c$ , devant un appareil photographique. Le mouvement de la tige se fait dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'appareil et le milieu de la tige passe à la hauteur du centre de l'objectif. Une photographie de cette tige est instantanément prise, à un moment tel

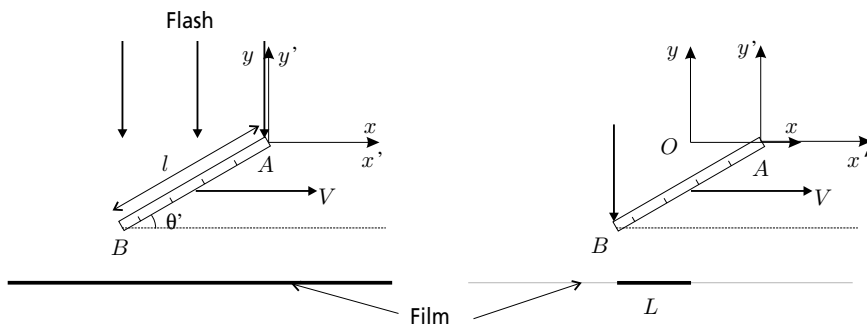
que la lumière émise par le centre de la tige atteint le centre de la photographie. Montrer que l'image de la tige sur la photographie dessine un morceau d'hyperbole.

### 5.8 Apparence d'un cube en mouvement

Montrer qu'un cube en mouvement, passant loin devant un observateur à la hauteur de ses yeux, semble subir une rotation d'angle  $\alpha$ , même si les rayons lumineux proviennent d'une direction non perpendiculaire à la trajectoire du cube. Calculer l'angle  $\alpha$  en fonction de l'angle de visée  $\theta$  (angle entre la direction des photons impressionnant la rétine et la direction de déplacement du cube) et de la vitesse de déplacement  $V = \beta c$ . Montrer qu'il existe un angle de visée particulier  $\theta_0$  pour lequel le cube nous apparaît vu de face. Comment varie l'apparence du cube lorsque  $\theta$  passe continûment de l'incidence rasante ( $\theta = 0$ ) à la visée perpendiculaire ( $\theta = \pi/2$ ) ?

### 5.9 Photographie d'une règle en mouvement

Une règle opaque, de longueur propre  $l$ , est inclinée d'un angle  $\theta'$  sur l'axe  $O'x'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  auquel elle est liée ; elle se déplace à la vitesse  $V = \beta c$  le long de l'axe  $Ox$  du référentiel  $\mathcal{R}$  (voir figure ci-dessous). Un film photographique est déroulé dans  $\mathcal{R}$ , parallèlement à  $Ox$ . Une impulsion lumineuse très brève est envoyée dans  $\mathcal{R}$ , à l'aide d'un flash éloigné, perpendiculairement au film (les directions des photons sont parallèles à l'axe  $Oy$ ). Les photons qui ne sont pas arrêtés par la règle impressionnent la pellicule, tandis que les photons arrêtés ne l'impressionnent pas et laissent donc une ombre sur le film (il sera astucieux de choisir l'origine spatio-temporelle des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  à l'extrémité  $A$  de la règle au moment où les photons sont arrêtés par celle-ci).



- (a) Montrer que la longueur  $L$  de film non impressionné par la lumière a pour expression

$$L = l \left| \beta \sin \theta' - \frac{\cos \theta'}{\gamma} \right|.$$

- (b) Examiner les cas particuliers  $\theta' = 0$  et  $\theta' = \pi/2$ .  
(c) Peut-on avoir  $L = 0$  ? Commenter.

---

### 5.10 Un « paradoxe » symétrique

Dans le référentiel d'inertie attaché à une station spatiale, deux astronefs se déplacent sur une même droite et convergent avec la même vitesse constante vers la station. Leurs trajectoires sont telles que, à un instant donné dans le référentiel de la station spatiale, les deux astronefs se trouvent toujours de part et d'autre et à même distance de la station. À un moment donné, la station envoie un signal radio aux deux astronefs. Dès la réception de ce signal, chacun des pilotes remet l'horloge du bord à zéro. Connaissant le plan de vol des deux astronefs, le contrôleur de la station met également sa propre horloge à zéro, au moment où les horloges à bord des astronefs sont réinitialisées.

Du point de vue du contrôleur, les horloges des deux astronefs vont indiquer la même heure, au moment où ils vont atteindre la station, puisque la situation est parfaitement symétrique. Cependant, l'heure des astronefs et celle de la station seront différentes à cause du phénomène de dilatation des temps. Du point de vue d'un pilote, la situation est fort différente : il voit la station spatiale venir à sa rencontre et l'autre astronef se rapprocher encore plus rapidement de lui que la station. Il en déduit donc que, puisqu'il mesure des vitesses différentes pour ces deux mobiles, son horloge, celle de l'autre astronef et celle de la station vont toutes les trois indiquer des heures différentes.

- (a) Déterminer qui a raison, le pilote ou le contrôleur ? Justifier la réponse.  
(b) Faire l'analyse complète du problème au moyen des transformations de Lorentz, du point de vue du contrôleur et d'un des pilotes.

## Chapitre 6

# Reconstruire la relativité restreinte

*Les poètes disent que la science ternit quelque peu la beauté des étoiles  
– de simples amas d’atomes de gaz. Rien n’est « simple ». Je peux, moi aussi,  
voir les étoiles la nuit dans le désert, et en éprouver une sensation.  
Mais en vois-je moins ou plus ? [...] Cela ne fait point de mal au mystère d’en  
connaître un petit peu sur lui. Car la vérité est bien plus merveilleuse  
que ce que les artistes ont pu imaginer dans le passé !*

Richard FEYNMAN (1963)

### 6.1 DÉFINITION D’UN GROUPE

Un groupe  $\mathcal{G}$  est un ensemble d’éléments  $A, B, C$ , etc. muni d’une loi de composition, notée  $*$ , qui satisfait aux quatre conditions suivantes <sup>1</sup> :

6.1 la loi de composition est interne : le résultat de la composition  $A * B$  de deux éléments  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{G}$  est un élément de  $\mathcal{G}$  ;

6.2 la loi de composition est associative :  $A * (B * C) = (A * B) * C$  ;

6.3 il existe un élément neutre dans  $\mathcal{G}$ , noté  $E$ , tel que  $E * A = A * E = A$  pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{G}$  ;

6.4 chaque élément  $A$  de  $\mathcal{G}$  possède un inverse, noté  $A^{-1}$ , appartenant à  $\mathcal{G}$ , et tel que  $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$ .

---

1. Il est à noter que des postulats 3 et 4 moins contraignants peuvent être choisis (voir exercice 6.1).

On dit que deux éléments  $A$  et  $B$  d'un groupe commutent si  $A * B = B * A$ . Lorsque cette relation est satisfaite pour tous les éléments du groupe, alors le groupe est dit commutatif ou abélien <sup>2</sup>.

## 6.2 \* NOUVELLE DÉRIVATION DES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

La procédure pour établir la transformation de Lorentz dans la section 2.1 est certainement l'une des plus simples et des plus attrayantes. Elle a l'avantage de conduire au résultat à moindre frais, sans demander des calculs longs et complexes. Elle a l'inconvénient de se baser sur le postulat que la vitesse de la lumière dans le vide est invariante quelle que soit la vitesse de l'observateur qui la mesure. *A priori*, cette étrange propriété de la lumière ne concerne que les phénomènes électromagnétiques. Or, la voici qui déborde largement de ce cadre pour régir l'ensemble des phénomènes physiques, de la force nucléaire à la gravité, des quarks aux étoiles. Par exemple, on montre, dans le cadre de la théorie d'Einstein, que la vitesse d'une particule massive ne peut jamais égaler, ni évidemment dépasser, la vitesse d'un photon. Comment accepter l'idée que la vitesse de la lumière dans le vide soit invariante? Et comment comprendre que la théorie de Maxwell dicte son comportement à l'ensemble de la physique ?

### 6.2.1 Principe de relativité

En fait, on peut montrer l'existence d'une vitesse limite invariante dans l'univers en partant d'hypothèses très raisonnables sur la structure de l'espace-temps, et cela indépendamment de la théorie électromagnétique. Admettons qu'il existe des référentiels équivalents dans lesquels les lois de la nature s'expriment de la même façon ; autrement dit, aucune expérience de physique réalisée dans un de ces référentiels ne permet de le distinguer des autres. L'expérience nous montre que l'existence de référentiels équivalents repose sur le principe de relativité, c'est-à-dire le fait qu'il n'existe pas d'état de mouvement (ou de repos) absolu. Les référentiels équivalents se déplacent donc tous à vitesse constante les uns par rapport aux autres ; ils sont dits d'inertie (ou inertiels).

Cela ne nous dit pas encore comment sont reliées entre elles les mesures faites dans ces différents référentiels. Recherchons les relations qui unissent les coordonnées spatio-temporelles respectives  $(t, x, y, z)$  et  $(t', x', y', z')$  d'un événement dans deux référentiels d'inertie. Une transformation d'inertie générale dépend, *a priori*, d'un certain nombre de paramètres  $\{a_1, \dots, a_n\}$  et peut s'écrire

---

2. Pour plus d'informations sur les groupes, on peut consulter, par exemple, le livre de Morton Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

$$\begin{aligned}
t' &= L_t(t, x, y, z; a_1, \dots, a_n), \\
x' &= L_x(t, x, y, z; a_1, \dots, a_n), \\
y' &= L_y(t, x, y, z; a_1, \dots, a_n), \\
z' &= L_z(t, x, y, z; a_1, \dots, a_n).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Pour déterminer, sans ambiguïté, les équations des transformations d'inertie entre les référentiels inertiels, il est nécessaire de supposer que l'espace-temps possède certaines caractéristiques bien précises. En voici la liste <sup>3</sup> :

- 6.1 **Homogénéité de l'espace-temps** : les lois de la nature ne dépendent ni de l'endroit, ni du moment où elles s'expriment ; autrement dit, il n'y a pas de position ni de moment privilégiés.
- 6.2 **Isotropie de l'espace** : les lois de la nature ne dépendent pas de la direction dans laquelle elles s'expriment ; autrement dit, il n'y a pas d'orientation privilégiée.
- 6.3 **Structure de groupe** : l'équivalence entre tous les référentiels d'inertie implique que les transformations d'inertie entre référentiels ont une structure de groupe ; autrement dit, il existe une transformation identique, l'inverse d'une transformation existe, et la succession de deux transformations d'inertie est une transformation d'inertie.
- 6.4 **Causalité** : la cause doit toujours précéder l'effet ; autrement dit, le passé et le futur sont absolus.

### 6.2.2 Homogénéité de l'espace-temps

L'hypothèse d'homogénéité de l'espace-temps signifie que celui-ci a « partout et en tout temps » les mêmes propriétés : l'espace et le temps sont invariants par translation. En particulier, les propriétés de transformation d'un intervalle spatiotemporel ( $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ ) ne peuvent dépendre que de l'intervalle lui-même et non pas de la position absolue de ses extrémités.

En reprenant les notations (6.1), écrivons, par exemple, la loi de transformation d'une différence infinitésimale  $dx'$ . Celle-ci peut s'obtenir par différentiation

$$dx' = \frac{\partial L_x}{\partial t} dt + \frac{\partial L_x}{\partial x} dx + \frac{\partial L_x}{\partial y} dy + \frac{\partial L_x}{\partial z} dz. \tag{6.2}$$

En vertu de l'hypothèse d'homogénéité de l'espace-temps, la quantité  $dx'$  doit être indépendante de l'origine spatiotemporelle choisie, c'est-à-dire des coordonnées

3. La démonstration réalisée ici s'inspire de celle développée dans l'article de Jean-Marc Lévy-Leblond, « One more derivation of the Lorentz transformation », *American Journal of Physics*, vol. 44, n° 3, March 1976, p. 271-277. On y trouvera également développés certains points très techniques de la démonstration non traités ici.



$(t, x, y, z)$ , et ceci en quelque point de l'espace-temps où l'on se place. Cela implique donc que les coefficients des grandeurs  $dt$ ,  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  sont indépendants de ces coordonnées et doivent être des constantes  $\partial L_x / \partial t = A$ ,  $\partial L_x / \partial x = B$ ,  $\partial L_x / \partial y = C$ ,  $\partial L_x / \partial z = D$ . Par intégration directe de la relation (6.2), on trouve

$$L_x(t, x, y, z) = A t + B x + C y + D z + E, \quad (6.3)$$

La transformation  $L_x$  est donc linéaire en ces coordonnées.

Nous nous limitons ici à l'étude des transformations homogènes, c'est-à-dire des transformations de Lorentz telles que les origines spatiotemporelles des deux référentiels d'inertie considérés sont confondues. Cela implique que le terme indépendant  $E$  est nul. Les transformations correspondant à un simple changement d'origine spatiotemporelle sont supposées laisser les lois de la physique invariantes. Nous reparlerons des transformations non homogènes dans la section 7.4.

Nous avons particularisé la démonstration à la coordonnée  $x$ , mais il est évident qu'aucune coordonnée ne joue de rôle privilégié (voir section suivante). On aboutit finalement à la conclusion que les fonctions  $L_t$ ,  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$  sont toutes linéaires en les coordonnées d'espace-temps. Le changement de coordonnées spatiotemporelles d'un référentiel à l'autre est une transformation linéaire, et les coefficients de cette transformation ne dépendent que des paramètres  $\{a_1, \dots, a_n\}$ <sup>4</sup>.

### 6.2.3 Isotropie de l'espace

Pour simplifier les calculs nous allons considérer deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  d'axes parallèles, le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$ . Les horloges indiquent toutes le temps 0 lorsque les origines  $O$  et  $O'$  coïncident. Dans ces conditions, la transformation entre les deux référentiels se réduit à l'identité quand  $V = 0$ . Nous verrons dans le chapitre suivant comment généraliser cette situation particulière.

L'hypothèse d'isotropie de l'espace signifie qu'il n'existe pas de direction privilégiée : l'espace est invariant par rotation. On en déduit que l'orientation des axes des référentiels est arbitraire et ne doit en rien influencer la structure des transformations. Considérons d'abord le couple  $(t', x')$ . Les résultats obtenus dans la section ci-dessus nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} t' &= A t + B x + C y + D z, \\ x' &= P t + Q x + R y + S z, \end{aligned} \quad (6.4)$$

---

4. Pour être complet, signalons que les transformations de Lorentz ne sont correctement définies que dans un espace-temps infini dans toutes les directions d'espace et de temps. Dans un espace de topologie complexe, où certains points sont identifiés (la causalité interdit l'existence de boucles temporelles), ces transformations bien que valables **localement** ne sont plus **globalement** applicables. Pour plus d'informations, voir l'article de Jean-Philippe Uzan, Jean-Pierre Luminet, Roland Lehoucq et Patrick Peter, « The twin paradox and space topology », *European Journal of Physics*, vol. 23, 2002, p. 277- 284. Voir également note de bas de page n° 9, p. 62.

où les coefficients  $A$ ,  $B$ , etc. ne peuvent plus dépendre que d'un seul paramètre, la vitesse  $V$ . Effectuons dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ( $\mathcal{R}'$ ) une rotation des axes de  $\pi/2$  autour de l'axe  $Ox$  ( $O'x'$ ), de telle manière qu'il en résulte un changement des coordonnées  $y \rightarrow z$  et  $z \rightarrow -y$  ( $y' \rightarrow z'$  et  $z' \rightarrow -y'$ ), sans que la direction de la vitesse relative soit modifiée. Les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} t' &= A t + B x + C z - D y, \\ x' &= P t + Q x + R z - S y. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ces relations sont tout aussi valables que les précédentes pour décrire la même situation physique. En combinant les formules (6.4) et (6.5), on obtient

$$\begin{aligned} (C + D)y &= (C - D)z, \\ (R + S)y &= (R - S)z. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ces relations doivent être vérifiées quel que soit le couple  $(y, z)$ . On en tire  $C = D = R = S = 0$ . Ceci implique donc

$$\begin{aligned} t' &= A t + B x, \\ x' &= P t + Q x. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Un objet au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en mouvement avec la vitesse  $V$  dirigée le long de l'axe  $Ox$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . D'après la deuxième relation (6.7), on doit donc avoir

$$x'_0 = P(V) t + Q(V) x, \quad (6.8)$$

avec  $x'_0$  constant et  $V = -P(V)/Q(V)$ . Avec un changement de notation judicieux, on peut écrire la loi de transformation du couple  $(t', x')$  sous la forme

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(V) [\lambda(V) t - \mu(V) x], \\ x' &= \gamma(V) [x - V t], \end{aligned} \quad (6.9)$$

où les trois fonctions  $\gamma$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  doivent être déterminées.

La structure de la transformation ne peut également pas dépendre de l'orientation des axes  $Ox$  et  $O'x'$ . En inversant le sens de ces deux axes (opération de parité), la vitesse relative du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  est alors de  $-V$ . La loi de transformation (6.9) devient

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(-V) [\lambda(-V) t + \mu(-V) x], \\ -x' &= \gamma(-V) [-x + V t]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

La comparaison des relations (6.9) et (6.10) montre que l'on doit avoir

$$\gamma(-V) = \gamma(V), \quad \lambda(-V) = \lambda(V) \quad \text{et} \quad \mu(-V) = -\mu(V). \quad (6.11)$$

Considérons à présent le couple  $(y', z')$ . Nous avons

$$y' = \alpha y + \delta z + \varepsilon x + \eta t. \quad (6.12)$$

Effectuons la même rotation d'angle  $\pi/2$  que précédemment, avec les mêmes contraintes, pour obtenir

$$z' = \alpha z - \delta y + \varepsilon x + \eta t. \quad (6.13)$$

Sur ces deux dernières équations, faisons à présent une opération de symétrie par rapport au plan  $Oxy$  et au plan  $O'x'y'$ . Seules les coordonnées  $z$  et  $z'$  changent de signe. On a ainsi

$$y' = \alpha y - \delta z + \varepsilon x + \eta t, \quad (6.14)$$

$$-z' = -\alpha z - \delta y + \varepsilon x + \eta t. \quad (6.15)$$

En comparant les expressions (6.12) et (6.14), on obtient la condition  $\delta = 0$ . De plus, en comparant les expressions (6.13) et (6.15), on obtient les conditions supplémentaires  $\varepsilon = \eta = 0$ . Finalement, la transformation sur le couple  $(y, z)$  se résume à

$$\begin{aligned} y' &= \alpha y, \\ z &= \alpha z. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Avec la situation particulière choisie pour les deux référentiels, on sait que lorsque les origines  $O$  et  $O'$  coïncident, les axes  $Oy$  et  $O'y'$  coïncident, ainsi que les axes  $Oz$  et  $O'z'$ . Comme le coefficient  $\alpha$  ne dépend que de la vitesse et pas de  $t$ , on en déduit que  $\alpha = 1$ . Nous n'aurons donc plus à considérer ces deux coordonnées dans la suite.

## 6.2.4 Structure de groupe

Quatre conditions doivent être remplies pour que les transformations obéissent à une structure de groupe.

### ► Existence de l'identité

Les deux référentiels sont tels qu'ils coïncident quand  $V = 0$ . On doit donc avoir

$$\gamma(0) = 1, \quad \lambda(0) = 1 \quad \text{et} \quad \mu(0) = 0. \quad (6.17)$$

### ► Existence de l'inverse

La loi de transformation inverse de la loi (6.9), donnant le couple  $(t, x)$  en fonction du couple  $(t', x')$ , doit avoir la même forme que la loi (6.9) mais avec la vitesse  $V$

changée en  $-V$ . En effet, un objet au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est en mouvement avec la vitesse  $-V$  dirigée le long de l'axe  $O'x'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ <sup>5</sup>. On doit donc avoir, en utilisant les propriétés (6.11),

$$\begin{aligned} t &= \gamma(V) [\lambda(V) t' + \mu(V) x'], \\ x &= \gamma(V) [x' + V t']. \end{aligned} \quad (6.18)$$

En exprimant dans les relations (6.9), les coordonnées  $t$  et  $x$  par leurs expressions données par les formules (6.18), il vient, par exemple,

$$x' = \gamma^2(V) [x' + V t'] - V \gamma^2(V) [\lambda(V) t' + \mu(V) x']. \quad (6.19)$$

Les coordonnées  $t'$  et  $x'$  étant quelconques, on trouve  $\lambda(V) = 1$  et

$$\gamma^2(V) = \frac{1}{1 - V\mu(V)}. \quad (6.20)$$

La loi de transformation recherchée est donc de la forme

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(V) [t - \mu(V) x], \\ x' &= \gamma(V) [x - V t], \end{aligned} \quad (6.21)$$

où les fonctions  $\gamma(V)$  et  $\mu(V)$  sont reliées par la relation (6.20).

### ► Loi interne

La structure (6.21) de la loi de transformation est obtenue pour une configuration particulière des systèmes d'axes des repères ; en particulier la vitesse relative n'a qu'une seule composante non nulle dans la direction commune des axes  $Ox$  et  $O'x'$ . On ne peut donc considérer ici que la composition de deux transformations de cette nature. Nous verrons dans le chapitre suivant, et en particulier dans les sections 7.2 et 7.3, comment traiter la composition de deux transformations dans des directions différentes.

Considérons une première transformation de vitesse  $V_1$  entre un référentiel  $\mathcal{R}$  et un référentiel  $\mathcal{R}_1$ , et une deuxième transformation de vitesse  $V_2$  entre le référentiel  $\mathcal{R}_1$  et un référentiel  $\mathcal{R}_2$

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma(V_1) [t - \mu(V_1) x], \\ x_1 &= \gamma(V_1) [x - V_1 t], \\ t_2 &= \gamma(V_2) [t_1 - \mu(V_2) x_1], \\ x_2 &= \gamma(V_2) [x_1 - V_2 t_1]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

5. Bien qu'elle semble assez naturelle, la nécessité de l'inversion de la vitesse relative peut être rigoureusement démontrée (J.-M. Lévy-Leblond, *loc. cit.*).

La transformation liant les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_2$  est donc donnée par

$$\begin{aligned} t_2 &= \gamma(V_1)\gamma(V_2) (1 + V_1\mu(V_2)) \left[ t - \frac{\mu(V_1) + \mu(V_2)}{1 + V_1\mu(V_2)} x \right], \\ x_2 &= \gamma(V_1)\gamma(V_2) (1 + V_2\mu(V_1)) \left[ x - \frac{V_1 + V_2}{1 + V_2\mu(V_1)} t \right]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Ces relations ne peuvent être de la forme (6.21) que si la condition  $V_1\mu(V_2) = V_2\mu(V_1)$  est remplie. Cela signifie que

$$\frac{\mu(V_1)}{V_1} = \frac{\mu(V_2)}{V_2} = \kappa, \quad (6.24)$$

où  $\kappa$  est une constante puisque les vitesses  $V_1$  et  $V_2$  sont arbitraires. Les relations (6.21) deviennent alors

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(V) [t - \kappa V x], \\ x' &= \gamma(V) [x - V t], \end{aligned} \quad (6.25)$$

avec

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa V^2}}. \quad (6.26)$$

Le signe positif est choisi puisqu'on doit avoir  $\gamma(0) = 1$ . On en déduit également que la loi de composition des vitesses est donnée par

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \kappa V_1 V_2}. \quad (6.27)$$

Il apparaît aussi clairement que la grandeur  $\kappa$  a la dimension de l'inverse du carré d'une vitesse. Enfin, on vérifie aisément que le coefficient  $\gamma(V_1)\gamma(V_2) (1 + \kappa V_1 V_2)$  intervenant dans les relations (6.23) est bien égal à  $\gamma(V)$  avec  $V$  donné par la formule (6.27).

#### ► Associativité et commutativité

L'associativité de la loi de transformation (6.25) se vérifie en effectuant trois transformations successives de vitesses  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  suivant le même axe. La composition de ces trois vitesses donne

$$V = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + \kappa V_1 V_2 V_3}{1 + \kappa(V_1 V_2 + V_1 V_3 + V_2 V_3)}. \quad (6.28)$$

Cette expression est manifestement symétrique en les trois vitesses et, donc, ne dépend pas de la façon avec laquelle on a regroupé les termes.

On montre facilement que les transformations de la forme (6.25) sont commutatives. Nous verrons dans la section 7.1 que la commutativité disparaît si les transformations successives se font dans des directions différentes.

### 6.2.5 Causalité

Si la valeur du paramètre  $\kappa$  est nul, la transformation (6.25) est identique à la transformation de Galilée. La causalité est alors toujours respectée puisque le temps est le même pour tous les référentiels.

Avec un paramètre  $\kappa$  négatif, la vitesse  $V$  composée suivant la loi (6.27) peut devenir arbitrairement grande. Il n'y a donc pas *a priori* de vitesse relative limite entre deux référentiels. De plus la composition de deux vitesses positives peut donner une vitesse négative (par exemple,  $V_1 = 1/\sqrt{-\kappa}$  et  $V_2 = 2/\sqrt{-\kappa}$  implique  $V = -3/\sqrt{-\kappa}$ ). La loi de transformation d'un intervalle de temps étant donnée par

$$\Delta t' = \gamma(V) [\Delta t - \kappa V \Delta x] \quad (6.29)$$

avec  $0 < \gamma(V) \leq 1$ , on constate que, pour des vitesses relatives bien choisies,  $\Delta t'$  peut ne pas avoir le même signe que  $\Delta t$ , c'est-à-dire que l'ordre des événements peut se trouver inversé en passant d'un référentiel à l'autre. Si le paramètre  $\kappa$  est négatif, la causalité peut ne pas être respectée pour certaines vitesses relatives permises entre deux référentiels.

Si  $\kappa$  est positif, on peut poser  $\kappa = 1/c^2$ , où  $c$  est une constante, que l'on peut prendre positive, ayant la dimension d'une vitesse. La loi de transformation s'écrit alors

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - Vx/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, \\ x' &= \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

et la loi de composition des vitesses est donnée par

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2 / c^2}. \quad (6.31)$$

La relation (6.31) implique que la vitesse relative entre deux référentiels doit obligatoirement avoir une valeur absolue inférieure à  $c$  (voir section 5.1). De plus la causalité est respectée pour tout intervalle d'espace-temps tels que  $|\Delta x / \Delta t| \leq c$  (voir section 3.3). L'ordre d'apparition de deux événements peut être déterminé sans ambiguïté dans tous les référentiels, si une information ne dépassant jamais la vitesse  $c$  peut circuler entre ces deux événements. Il faut donc prendre le paramètre  $\kappa$  positif car, dans ce cas, une certaine forme de causalité est toujours possible.

La vitesse  $c$  apparaît donc comme une vitesse limite, **infranchissable**, intimement liée à la structure de notre espace-temps. Si on adjoint aux formules de transformation (6.30) sur le couple  $(t, x)$  les expressions déjà démontrées concernant les coordonnées transversales par rapport à la vitesse relative,  $y' = y$  et  $z' = z$ , on se rend compte que les lois de transformation obtenues sont formellement identiques aux transformations de Lorentz obtenues dans le chapitre 2. Il y a toutefois une nuance conceptuelle importante. Nous n'avons pas fait appel au postulat d'invariance de la vitesse de la lumière, mais seulement à celui du respect de la causalité qui apparaît plus général et moins artificiel car frappé du bon sens. La vitesse  $c$  qui intervient dans les formules (6.30) n'est pas *a priori* la vitesse de la lumière même si, dans la pratique, elle doit lui être identifiée. Nous discutons ce point crucial un peu plus loin. On peut dire que la reconstruction des lois de transformation présentées dans ce chapitre leur confère un caractère d'universalité qu'elles n'avaient pas dans la démonstration plus simple établie dans le chapitre 2.

Il est intéressant de comparer la démarche choisie dans cette section avec celle développée dans le chapitre 2. L'homogénéité de l'espace-temps implique en fait la linéarité des transformations ; c'est également un des principes de base sur lequel nous nous étions appuyés pour établir les transformations de Lorentz (voir la discussion dans la section 2.1.4). Il en est de même pour l'isotropie de l'espace et la structure de groupe des transformations. Ces deux propriétés ont été prises en compte dès le départ pour établir les transformations de Lorentz (voir équation (2.6) de la section 2.1.3).

## 6.2.6 Vitesse limite

Il faut maintenant déterminer quelle est la valeur de  $c$  dans notre univers. Si cette vitesse est infinie, les transformations (6.30) se réduisent aux transformations de Galilée, la formule (6.31) de composition des vitesses devenant une simple addition<sup>6</sup>. De plus, la vitesse relative de deux référentiels d'inertie peut devenir arbitrairement grande.

Si la vitesse  $c$  est finie, comment la déterminer ? La formule (6.31) nous indique que la composition de la vitesse limite avec n'importe quelle autre vitesse donne toujours  $c$  (voir section 5.1). Un objet se déplaçant à la vitesse limite dans un référentiel d'inertie sera observé se déplaçant à la même vitesse par tous les observateurs inertiels d'autres référentiels. La vitesse limite est donc invariante. Pour la mesurer expérimentalement, il faut détecter dans l'univers un phénomène ayant une vitesse invariante pour tous les référentiels d'inertie. Cette vitesse ne peut être alors que la vitesse limite.

Or, on constate que la vitesse de la lumière dans le vide est invariante. Les expériences, réalisées avec une précision toujours croissante, n'ont pu trouver la moind-

---

6. Les équations (2.31), limites à faible vitesse des équations (2.28), ne sont pas des relations de groupe. C'est pourquoi la « véritable » limite non relativiste des transformations de Lorentz est donnée par les équations (1.2) et (1.3), équations correspondant à une vitesse  $c$  infinie.

dre variation significative de cette vitesse. Kenneth Brecher<sup>7</sup>, de l'université de Boston, a récemment montré que la vitesse de la lumière est constante avec une erreur relative inférieure à  $10^{-20}$ . La vitesse de la lumière semble donc être un bon candidat pour la vitesse limite. La valeur exacte de  $c$  dépend évidemment des unités choisies pour mesurer les distances et les durées (voir section 1.7).

On ne peut cependant affirmer avec une certitude absolue que  $c$  est bien la vitesse de la lumière. En effet, dans la suite nous montrerons que seules les particules de masse nulle peuvent se déplacer à la vitesse limite (voir section 9.5). On sait que la masse du photon est très petite, mais on ne peut pas démontrer expérimentalement qu'elle est nulle<sup>8</sup>. On ne peut donc prouver que  $c$  est la vitesse de lumière dans le vide. Si on constate un jour que la masse des photons n'est pas égale à zéro, alors il faudra se résoudre à ce que la lumière dans le vide ne se déplace pas à la vitesse  $c$ , c'est-à-dire ce que l'on appelle la vitesse de la lumière. On a donc proposé de rebaptiser  $c$  *vitesse limite* ou *constante d'Einstein*. Cette dernière appellation ferait ainsi élégamment écho à la constante de la gravitation universelle<sup>9</sup> et à la constante de Planck pour la mécanique quantique. Par tradition, dans la suite du cours, nous désignerons cependant toujours la vitesse limite  $c$  par « vitesse de la lumière dans le vide ».

Le caractère raisonnable des hypothèses à la base de cette construction des équations de la relativité restreinte ne dispense pas les transformations de Lorentz de vérifications expérimentales approfondies. Jusqu'à présent, aucune déviation notable par rapport à la théorie d'Einstein n'a pu être mise en évidence (voir section 1.1.4).

## 6.3 STRUCTURE DE GROUPE ET RAPIDITÉ

Les propriétés de groupe des transformations spéciales de Lorentz apparaissent très clairement en étudiant ces transformations écrites en terme de rapidité (voir section 2.1.4). Soient un référentiel  $\mathcal{R}_1$ , de coordonnées  $ct'$  et  $x'$ , uni au référentiel  $\mathcal{R}$ , de coordonnées  $ct$  et  $x$ , par une transformation spéciale de Lorentz de vitesse  $V_1$  et un référentiel  $\mathcal{R}_2$ , de coordonnées  $ct''$  et  $x''$ , uni au référentiel  $\mathcal{R}_1$  par une transformation spéciale de Lorentz de vitesse  $V_2$ , parallèle à  $V_1$ . En vertu des relations (2.22) on a, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta_1 & \sinh \theta_1 \\ \sinh \theta_1 & \cosh \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tanh \theta_1 = \frac{V_1}{c} \quad (6.32)$$

7. The American Institute of Physics Bulletin of Physics News, n° 484, 11 May 2000.

8. Des mesures expérimentales de grande précision montrent que si le photon est massif, sa masse ne peut excéder la valeur de  $1,2 \times 10^{-51}$  g, ce qui est environ  $10^{-21}$  fois plus petit que la masse de l'électron (S. Eidelman *et al.* (Particle Data Group), *Physics Letters B*, vol. 592, 2004, p. 1.)

9. La constante de la gravitation universelle est parfois appelée constante de Cavendish ou constante de Newton.



et

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta_2 & \sinh \theta_2 \\ \sinh \theta_2 & \cosh \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tanh \theta_2 = \frac{V_2}{c}. \quad (6.33)$$

Rappelons que la valeur d'une rapidité  $\theta$  est strictement comprise entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . En éliminant  $ct'$  et  $x'$  entre les relations (6.32) et (6.33) on obtient

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

avec

$$\theta = \theta_1 + \theta_2. \quad (6.35)$$

La composition de deux transformations spéciales de Lorentz suivant un même axe est donc une transformation du même genre. La transformation identité est une transformation de rapidité  $\theta = 0$ . Une transformation de rapidité  $-\theta$  est l'inverse d'une transformation de rapidité  $\theta$ . On retrouve donc que les transformations spéciales de Lorentz suivant un même axe forment un groupe commutatif<sup>10</sup>.

La loi d'addition (6.35) n'est autre que la loi relativiste pour la composition des vitesses. En effet, en notant que

$$\tanh \theta = \frac{V}{c} \quad (6.36)$$

où  $V$  est la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}_2$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ , on a

$$\frac{V}{c} = \tanh \theta = \tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh \theta_1 + \tanh \theta_2}{1 + \tanh \theta_1 \tanh \theta_2} = \frac{V_1/c + V_2/c}{1 + V_1 V_2/c^2}, \quad (6.37)$$

c'est-à-dire, la formule (6.31),

On constate ainsi que la composition relativiste des vitesses longitudinales est équivalente à l'addition simple des rapidités. Si on convient de noter  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ ,  $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - V_1^2/c^2}$ ,  $\gamma_2 = 1/\sqrt{1 - V_2^2/c^2}$ , les relations (2.25) et (6.35) impliquent que

$$\gamma = \cosh \theta = \cosh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_1 \sinh \theta_2 = \gamma_1 \gamma_2 \left( 1 + \frac{V_1 V_2}{c^2} \right), \quad (6.38)$$

$$\gamma \frac{V}{c} = \sinh \theta = \sinh \theta_1 \cosh \theta_2 + \cosh \theta_1 \sinh \theta_2 = \gamma_1 \gamma_2 \left( \frac{V_1}{c} + \frac{V_2}{c} \right). \quad (6.39)$$

---

10. Plus précisément un sous-groupe commutatif d'un groupe plus vaste, voir section 8.3.

On peut également obtenir ces formules en examinant les relations (6.23).

En relativité restreinte, la notion de rapidité semble plus naturelle que la notion de vitesse <sup>11</sup> : *i*) elle permet de simplifier les équations de transformation ; *ii*) pour composer deux rapidités, il suffit de les additionner ; *iii*) une vitesse égale à celle de la lumière correspond à une rapidité infinie.

La théorie des groupes nous apprend qu'il existe généralement des « objets » que les transformations d'un groupe donné n'affectent pas. On montre facilement que pour la transformation spéciale (2.22), la grandeur  $c^2 t^2 - x^2$  est invariante (voir section 2.1.3). Nous reviendrons sur cette remarque dans la section 8.4.

Considérons maintenant une transformation spéciale du type (2.22) pour une vitesse relative infinitésimale, c'est-à-dire de paramètre  $d\beta$ . Dans ce cas, la transformation prend la forme simplifiée  $ct = ct' + d\beta x'$  et  $x = x' + d\beta ct'$  (voir relation (2.31)), ou encore  $d(ct') = d\beta x'$  et  $dx' = d\beta (ct')$ . C'est ce qu'on appelle en théorie des groupes la transformation infinitésimale génératrice du groupe. On peut remarquer la simplicité et l'élégance de ce résultat <sup>12</sup>.

## 6.4 DU RELATIF ET DE L'ABSOLU

La durée d'un phénomène, le volume d'un objet, le caractère simultané de deux événements sont, parmi d'autres, des grandeurs relatives. Le fait que les mesures de ces grandeurs effectuées par deux observateurs en mouvement relatif ne coïncident pas est un simple **effet de perspective dans l'espace-temps**. On peut s'en convaincre en examinant la description d'opérations de mesure dans un diagramme de Lorentz : les axes d'espace et (surtout) de temps des deux observateurs ne pointent pas dans les mêmes directions de l'espace-temps.

Cependant, tout n'est pas relatif en relativité restreinte : la vitesse de la lumière est absolue, l'espace-temps et les lignes d'univers qui le parcourent sont absolus. De même, l'intervalle d'espace-temps entre deux événements est absolu. En fait, malgré son nom, ce qui est important en relativité, c'est précisément ce qui est absolu. Pour cette raison, certains considèrent que la théorie est mal nommée <sup>13</sup>. Einstein lui-même, apparemment, n'était pas satisfait de cette appellation.

11. Pour plus d'informations, voir l'article de Jean-Marc Lévy-Leblond et Jean-Pierre Provost, « Additivity, rapidity, relativity », *American Journal of Physics*, vol. 47, n° 12, December 1979, p. 1045-1049.

12. On trouvera plus d'informations sur les transformations de Lorentz infinitésimales dans le livre de J. D. Jackson, sect. 11.7 (biblio).

13. Le physicien Jean-Marc Lévy-Leblond a proposé de rebaptiser la relativité restreinte « chronogéométrie ».

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 266.

### 6.1 Définition d'un groupe

Les postulats 3 et 4 définissant un groupe dans la section 6.1 peuvent être remplacées par des conditions moins fortes :

3'. il existe un élément  $E$  appelé identité gauche tel que  $E * A = A$  pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{G}$  ;

4'. chaque élément  $A$  de  $\mathcal{G}$  possède un inverse gauche, noté  $A^{-1}$ , appartenant à  $\mathcal{G}$ , et tel que  $A^{-1} * A = E$ .

Montrer que l'identité gauche est aussi une identité droite ( $A * E = A$ ) et est unique, et que l'inverse gauche  $A^{-1}$  est aussi un inverse droit ( $A * A^{-1} = E$ ) et est uniquement déterminé par  $A$ . Les conditions 3 et 4 sont donc le résultat des conditions 3' et 4'.

### 6.2 Loi de composition des vitesses longitudinales

Montrer que la loi de composition de deux vitesses longitudinales  $\beta_1 c$  et  $\beta_2 c$  résultant de la relation (5.4) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2}.$$

Faites le lien avec l'addition des rapidités.

### 6.3 Une nouvelle forme de la transformation de Lorentz

En introduisant la rapidité  $\theta$  de façon habituelle  $\tanh \theta = V/c$ , montrer que la transformation de Lorentz pour le couple  $(ct, x)$  peut se mettre sous la forme suivante

$$\begin{aligned} ct' + x' &= e^{-\theta}(ct + x), \\ ct' - x' &= e^{\theta}(ct - x). \end{aligned}$$

Retrouver rapidement l'invariance de la forme quadratique  $c^2 t^2 - x^2$ .

### 6.4 Addition des rapidités

La rapidité  $\theta$  d'une particule se déplaçant à la vitesse  $V$  est définie, de façon habituelle, par  $\tanh \theta = V/c$ . Notons  $y = e^{2\theta}$ . Montrer que si, à partir du référentiel au

repos d'une particule, on lui communique un accroissement de vitesse  $V$ ,  $n$  fois consécutives, la vitesse finale de cette particule par rapport au référentiel original est donnée par  $c \frac{y^n - 1}{y^n + 1}$ .

---

### 6.5 Propriété du facteur $\gamma$

Le facteur  $\gamma$  de la transformation est défini par la formule (6.26). Montrer que le coefficient  $\gamma(V_1)\gamma(V_2)(1 + \kappa V_1 V_2)$  intervenant dans les relations (6.23) est bien égal à  $\gamma(V)$  avec  $V$  donné par la formule (6.27).

---

### 6.6 Associativité des transformations de Lorentz

Montrer que la composition de trois transformations de Lorentz spéciales suivant un même axe est une loi associative. Retrouver la formule (6.28).

---

### 6.7 Homogénéité et isotropie

Au moyen d'expériences de pensée, montrer que l'isotropie de l'univers implique son homogénéité. Montrer également que la proposition réciproque n'est pas vraie.

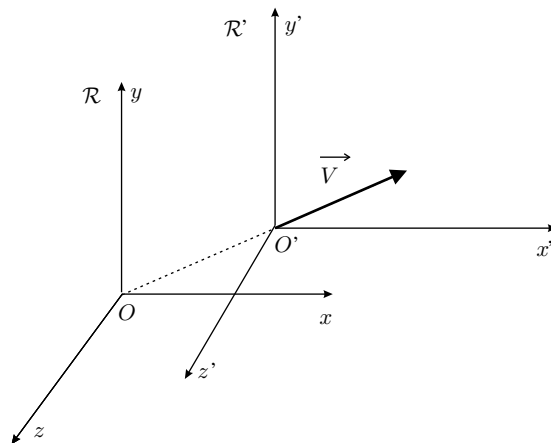
## Chapitre 7

# Transformations de Lorentz générales

*Marty, il te faut penser en quatre dimensions !*

D<sup>r</sup> Emmett L. BROWN

### 7.1 NON-COMMUTATIVITÉ DES TRANSFORMATIONS SPÉCIALES



**Figure 7.1** Deux référentiels d'inertie liés par une transformation de Galilée sans rotation.

En cinématique galiléenne, deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont reliés par une *transformation sans rotation* si les axes des repères spatiaux  $(O; x, y, z)$  et  $(O'; x', y', z')$  choisis dans chacun de ces référentiels restent parallèles deux à deux. Cette situation est illustrée sur la figure 7.1. Pour une transformation homogène de vitesse  $\vec{V}$ , les relations unissant les coordonnées  $(t, x, y, z)$  et  $(t', x', y', z')$  d'un même événement sont alors données par (voir équations (1.2) et (1.3))

$$\begin{aligned} t &= t', \\ x &= x' + V_x t', \\ y &= y' + V_y t', \\ z &= z' + V_z t', \end{aligned} \quad (7.1)$$

où  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  sont les projections de la vitesse relative  $\vec{V}$  dans le repère  $(O; x, y, z)$ . On peut considérer les relations (7.1) comme le résultat de transformations « élémentaires » successives le long des différents axes du repère  $(O; x, y, z)$ , ces transformations élémentaires étant effectuées dans un ordre quelconque. En effet, les relations (7.1) peuvent s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{M_x M_y M_z}_{\text{ordre quelconque}} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

avec

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ V_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

En cinématique relativiste cette procédure est inapplicable car les transformations spéciales de Lorentz successives, dans différentes directions, aboutissent à des résultats qui dépendent de l'ordre dans lequel on les considère. Par exemple, une transformation spéciale de Lorentz de vitesse  $V_x$  le long de l'axe  $Ox$  est décrite par

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x & \gamma_x \beta_x & 0 & 0 \\ \gamma_x \beta_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \beta_x = \frac{V_x}{c}, \quad \gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2}}. \quad (7.4)$$

Une transformation de vitesse  $V_y$  le long de l'axe  $Oy$  est décrite par

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_y & 0 & \gamma_y \beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_y \beta_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \beta_y = \frac{V_y}{c}, \quad \gamma_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_y^2}}. \quad (7.5)$$

Les matrices de transformation dans les relations (7.4) et (7.5) ne commutent pas, de sorte que le résultat du produit des deux transformations spéciales de Lorentz correspondantes n'est pas uniquement déterminé par la seule donnée de  $V_x$  et  $V_y$ . Nous verrons dans la section suivante comment écrire une transformation de Lorentz quelconque (non spéciale).

## 7.2 TRANSFORMATIONS DE LORENTZ AVEC ET SANS ROTATION

L'étude des phénomènes physiques à l'aide des transformations spéciales de Lorentz n'est en aucun cas une perte de généralité, dans le cas où on a affaire à seulement deux référentiels. On peut en effet toujours effectuer sur les systèmes de coordonnées des rotations et des translations de façon à se ramener à ce type de transformations (voir section 2.1.5). Cependant, il peut exister des situations où il est nécessaire de considérer trois référentiels ou plus. Dans ce cas, s'il est loisible de changer les axes des deux premiers pour se conformer à une transformation de Lorentz spéciale, ces axes deviennent alors figés pour les comparaisons au troisième référentiel. Il n'y a alors aucune raison (sauf cas très particulier) pour que le passage du premier au troisième, ou du deuxième au troisième, s'accomplisse par une transformation de Lorentz spéciale.

Il est par conséquent utile et même nécessaire d'écrire les transformations de Lorentz sous forme vectorielle, indépendamment de tout repère particulier. L'idée est de décomposer les vecteurs position  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$  en composantes longitudinales et transversales par rapport à la vitesse relative  $\vec{V}$  des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , comme indiqué sur la figure 7.2.

On pose

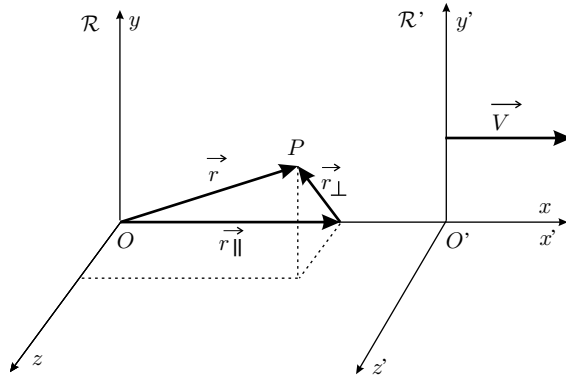
$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \quad \text{et} \quad \vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}. \quad (7.6)$$

Les vecteurs  $\vec{r}_{\parallel}$  et  $\vec{r}'_{\parallel}$ , parallèles au vecteur  $\vec{V}$ , sont donnés par

$$\vec{r}_{\parallel} = \hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{r}) = \frac{\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{r})}{\vec{\beta}^2} \quad \text{et} \quad \vec{r}'_{\parallel} = \hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{r}') = \frac{\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{r}')}{\vec{\beta}^2}, \quad (7.7)$$

où  $\vec{\beta} = \vec{V}/c$  et  $\hat{\beta} = \vec{\beta}/|\vec{\beta}|$  est le vecteur unitaire le long de la vitesse relative. Un calcul élémentaire montre que les vecteurs  $\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$  et  $\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' - \vec{r}'_{\parallel}$  sont bien perpendiculaires au vecteur  $\vec{V}$  (voir exercice 7.1).

En utilisant ces notations, on peut mettre les transformations de Lorentz (2.28) sous une forme plus générale. Considérons le cas d'une transformation spéciale suivant l'axe  $Ox$  :  $\vec{\beta} = (\beta, 0, 0)$ . Si, dans les deux repères, les coordonnées d'un point quelconque sont respectivement notées  $\vec{r} = (x, y, z)$  et  $\vec{r}' = (x', y', z')$ , les composantes des différents vecteurs définis ci-dessus sont alors données par



**Figure 7.2** Décomposition d'un vecteur en composantes parallèle et perpendiculaire dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , lié à un autre référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$  par une transformation spéciale de Lorentz.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\parallel} &= (x, 0, 0), & \vec{r}'_{\parallel} &= (x, 0, 0), \\ \vec{r}_{\perp} &= (0, y, z), & \vec{r}'_{\perp} &= (0, y', z').\end{aligned}\quad (7.8)$$

On peut ainsi écrire (voir les relations (2.28))

$$ct = \gamma(ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}') \Rightarrow ct = \gamma(ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}'). \quad (7.9)$$

En écrivant sous forme vectorielle l'égalité  $x = \gamma(x' + \beta ct')$ , on trouve

$$(x, 0, 0) = \gamma((x', 0, 0) + (\beta, 0, 0) ct') \Rightarrow \vec{r}_{\parallel} = \gamma(\vec{r}'_{\parallel} + \vec{\beta} ct'). \quad (7.10)$$

Pour la direction perpendiculaire à la vitesse, on a

$$(0, y, z) = (0, y', z') \Rightarrow \vec{r}_{\perp} = \vec{r}'_{\perp}. \quad (7.11)$$

Finalement les relations vectorielles sont donc

$$\begin{aligned}ct &= \gamma(ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}'), \\ \vec{r}_{\parallel} &= \gamma(\vec{r}'_{\parallel} + \vec{\beta} ct'), \\ \vec{r}_{\perp} &= \vec{r}'_{\perp},\end{aligned}\quad (7.12)$$

avec  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}$ . Les composantes de la vitesse relative  $\vec{V}$  dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont donc respectivement données par  $(V, 0, 0)$  et  $(-V, 0, 0)$ . Supposons maintenant que les deux systèmes de référence soient soumis individuellement à des rotations identiques (caractérisées, par exemple, par les mêmes angles d'Euler dans chaque référentiel). Dans ces nouveaux repères, les composantes de la vitesse relative dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont maintenant respectivement données par



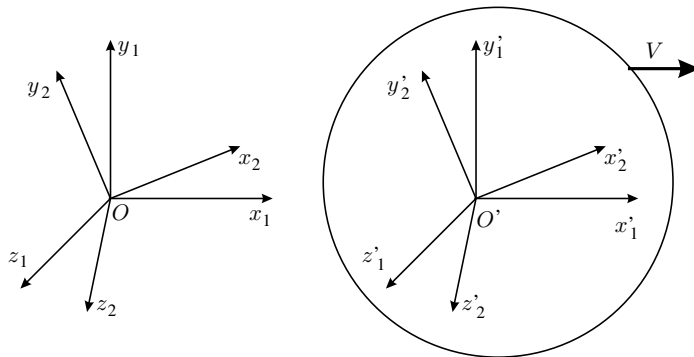
$(V_x, V_y, V_z)$  et  $(-V_x, -V_y, -V_z)$ , avec  $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ . Les deux référentiels ont subi la même rotation ; les repères spatiaux sont donc caractérisés, dans un certain sens, par la même orientation. Ces rotations des systèmes d'axes n'altèrent en rien les relations (7.12). Celles-ci sont donc également valables pour une vitesse relative ayant une orientation quelconque, puisqu'un produit scalaire est invariant sous une rotation, à condition de comprendre toujours  $\vec{r}_{\parallel}$  et  $\vec{r}_{\perp}$  comme les composantes longitudinales et transverses par rapport à la vitesse relative considérée.

Les relations (7.7) et (7.12) entraînent

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}'), \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \gamma\vec{\beta} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot \vec{r}' + ct' \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Écrites sous cette forme, les transformations de Lorentz se voient ainsi affranchies de tout repère particulier, avec cependant deux contraintes. Premièrement, les horloges des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  marquent l'instant zéro quand leurs origines spatiales se croisent. Deuxièmement, on remarque que si la vitesse relative est nulle, les deux référentiels ont leurs axes confondus. Cela signifie qu'il n'existe pas de rotation entre les deux repères orthonormés. On qualifie ainsi de « sans rotation » une telle transformation de Lorentz (voir figure 7.3). Les équations (7.13) s'inversent en remplaçant  $\vec{\beta}$  par  $-\vec{\beta}$  et en permutant les coordonnées primées et non primées. Elles se réduisent aux relations galiléennes (1.3) et (1.2) quand  $|\vec{\beta}| \ll 1$ .

Les coordonnées spatio-temporelles de l'origine du repère spatial du référentiel  $\mathcal{R}'$ , à un instant donné  $t'$ , sont  $(ct', \vec{r}' = \vec{0})$  dans ce référentiel. En utilisant la transformation (7.13), on trouve que les coordonnées spatio-temporelles de cet événement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sont  $(ct, \vec{r}) = (\gamma ct', \gamma\vec{\beta} ct')$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on obtient donc  $\vec{r} = \vec{V} t$ , ce qui est bien l'équation du mouvement de l'origine du repère spatial du référentiel  $\mathcal{R}'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .



**Figure 7.3** Les deux référentiels d'inertie numérotés 1 sont liés par une transformation spéciale de Lorentz. Les deux référentiels d'inertie numérotés 2 sont liés par une transformation de Lorentz sans rotation. La rotation qui amène les coordonnées 1 sur les coordonnées 2 est la même dans les référentiels primé et non primé.

Une représentation matricielle des équations de transformation s'obtient en projetant les relations vectorielles (7.13) sur les axes de chacun des référentiels. On obtient alors

$$X = \Lambda(\vec{\beta}) X', \quad (7.14)$$

où  $X$  et  $X'$  désignent respectivement les matrices colonnes  $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , et où

$\Lambda(\vec{\beta})$  est la représentation matricielle d'une transformation de Lorentz sans rotation. Si on pose  $\beta_x = V_x/c$ ,  $\beta_y = V_y/c$  et  $\beta_z = V_z/c$ , et si on note  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ , la matrice  $\Lambda$  peut s'écrire ( $\vec{\beta} \cdot \vec{r}' = \beta_x x' + \beta_y y' + \beta_z z'$ , etc.) :

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1 + \frac{\gamma^2\beta_x^2}{\gamma+1} & \frac{\gamma^2\beta_x\beta_y}{\gamma+1} & \frac{\gamma^2\beta_x\beta_z}{\gamma+1} \\ \gamma\beta_y & \frac{\gamma^2\beta_x\beta_y}{\gamma+1} & 1 + \frac{\gamma^2\beta_y^2}{\gamma+1} & \frac{\gamma^2\beta_y\beta_z}{\gamma+1} \\ \gamma\beta_z & \frac{\gamma^2\beta_x\beta_z}{\gamma+1} & \frac{\gamma^2\beta_y\beta_z}{\gamma+1} & 1 + \frac{\gamma^2\beta_z^2}{\gamma+1} \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Cette matrice satisfait à la condition (2.7) ; elle correspond donc bien à une transformation de Lorentz <sup>1</sup>. De plus, on peut vérifier que la matrice inverse s'obtient en changeant  $\vec{\beta}$  en  $-\vec{\beta}$  (voir exercice 7.3),

$$\Lambda^{-1}(\vec{\beta}) = \Lambda(-\vec{\beta}), \quad (7.16)$$

que  $\Lambda(\vec{0})$  est bien la matrice identité, et que la matrice  $\Lambda(\vec{\beta})$  se réduit à une transformation spéciale sur un axe si deux des composantes de la vitesse relative sont nulles.

Pourquoi prendre toutes ces précautions pour établir les relations (7.13) et (7.15) ? Nous avons choisi de prendre orthonormés les repères spatiaux ( $O; x, y, z$ ) du référentiel  $\mathcal{R}$  et ( $O'; x', y', z'$ ) du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Supposons, comme nous venons de le faire, que la vitesse relative  $\vec{V}$  ne soit pas dirigée suivant un des axes des repères. Alors, en vertu de la loi de transformation des angles établie dans la section 4.3, pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$ , les axes du référentiel  $\mathcal{R}'$  ne feront plus entre eux des angles droits, c'est-à-dire que pour cet observateur, le repère de  $\mathcal{R}'$  ne sera pas orthonormé. On peut s'en rendre compte en considérant l'axe  $O'y'$  du repère de

1. Une autre procédure pour obtenir la forme (7.15) est décrite dans le livre de J. D. Jackson, sect. 11.7 (biblio).

$\mathcal{R}'$  à l'instant  $t' = 0$ , instant auquel les origines des deux repères spatiaux coïncident. Les points de cet axe sont caractérisés par

$$t' = x' = z' = 0.$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on trouve donc

$$x = \frac{\gamma^2 \beta_x \beta_y}{\gamma + 1} y'. \quad (7.18)$$

Si les axes  $O'y'$  et  $Oy$  coïncidaient à cet instant, on devrait obtenir  $x = 0$ . Ce n'est manifestement pas le cas. On en conclut que l'axe  $O'y'$  forme un angle avec l'axe  $Oy$ . La situation est évidemment similaire pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Il n'est donc plus possible de définir simplement, comme en relativité galiléenne, deux référentiels d'inertie en mouvement relatif dont les axes restent parallèles deux à deux, sauf dans le cas particulier des transformations spéciales (voir section 4.2).

Avant de poursuivre, il nous semble important de préciser un point qui est en général peu abordé. Soit  $A$  un observateur du référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  ; il a vérifié, par tous les moyens géométriques dont il dispose, que son système d'axes est orthonormé. L'observateur  $B$ , au repos dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$ , a vérifié de même l'orthonormalité de son système d'axes. Les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont supposés unis par une transformation de Lorentz **sans rotation**. Nous avons vu que  $A$  constate que les axes de  $B$  ne sont pas mutuellement orthogonaux, et réciproquement.  $A$  et  $B$  connaissent bien la relativité et savent parfaitement que cela ne signifie pas forcément que leurs axes ne sont pas parallèles ; il peut s'agir d'un effet purement cinématique de modification des angles due au phénomène de contraction des longueurs. Alors comment ces observateurs vont-ils être convaincus que leurs axes sont bien parallèles et qu'ils sont liés par une transformation de Lorentz sans rotation ? Et bien la recette est relativement simple.  $A$  mesure la vitesse relative  $\vec{V}$  de  $B$  par rapport à lui et calcule les cosinus directeurs de  $\vec{V}$  par rapport à ses axes. De même,  $B$  mesure la vitesse relative  $\vec{V}'$  de  $A$  par rapport à lui et calcule les cosinus directeurs de  $\vec{V}'$  par rapport à ses axes. Ils se communiquent leurs résultats ; si leurs cosinus directeurs sont identiques, leurs axes sont parallèles ! Rappelons nous en effet que  $\vec{V}' = -\vec{V}$  et que, par conséquent, les directions sont confondues.

Signalons également que les relations (7.13) peuvent se mettre sous une forme plus symétrique (mais inutilement compliquée) en les variables de temps et d'espace

$$\begin{aligned} ct &= ct' + \vec{\gamma\beta} \cdot \left( \frac{\vec{\gamma\beta}}{\gamma + 1} ct' + \vec{r}' \right), \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{\gamma\beta} \left( \frac{\vec{\gamma\beta}}{\gamma + 1} \cdot \vec{r}' + ct' \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

La transformation de Lorentz la plus générale s'obtient en faisant subir à deux systèmes de référence, initialement unis par une transformation spéciale de Lorentz, des rotations différentes. On obtient alors ce que l'on appelle une transformation de Lorentz avec rotation<sup>2</sup>. Considérons deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  unis par une transformation de Lorentz avec rotation. Si  $\vec{V}$  est la vitesse relative de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$ , alors la vitesse relative  $\vec{V}'$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  n'est pas égale à  $-\vec{V}$ , comme dans le cas d'une transformation de Lorentz sans rotation. C'est une rotation particulière, liée à la rotation relative des deux référentiels, qui amène  $\vec{V}$  sur  $\vec{V}'$ .

### 7.3 \* PRÉCESSION DE THOMAS

La composition de deux transformations de Lorentz sans rotation donne, en général, une transformation de Lorentz avec rotation. Considérons deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  caractérisés respectivement par des vitesses  $c\vec{\beta}$  et  $c(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta})$  par rapport à un troisième référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . On suppose que les coordonnées  $(X')$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  et les coordonnées  $(X)$  du référentiel  $\mathcal{R}$  sont reliées par une transformation de Lorentz sans rotation, notée matriciellement (voir notation (7.14))

$$X = \Lambda(\vec{\beta}) X'. \quad (7.20)$$

De même, les coordonnées  $(X'')$  du référentiel  $\mathcal{R}''$  et les coordonnées  $(X)$  du référentiel  $\mathcal{R}$  sont reliées par une transformation de Lorentz sans rotation, notée matriciellement

$$X = \Lambda(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) X''. \quad (7.21)$$

La relation matricielle unissant les coordonnées des deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  est  $X' = \Lambda_T X''$ , où

$$\Lambda_T = \Lambda(-\vec{\beta}) \Lambda(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}). \quad (7.22)$$

Après un long calcul, qui est proposé dans l'exercice 7.5, on trouve, au premier ordre en  $\delta\vec{\beta}$ ,

$$\begin{aligned} ct' &= ct'' + \Delta\vec{\beta} \cdot \vec{r}'', \\ \vec{r}' &= \vec{r}'' + \Delta\vec{\beta} ct'' + \Delta\vec{\Omega} \wedge \vec{r}'', \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \Delta\vec{\beta} &= \gamma \delta\vec{\beta}_\perp + \gamma^2 \delta\vec{\beta}_\parallel, \\ \Delta\vec{\Omega} &= \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta} \wedge \delta\vec{\beta}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

2. Voir, par exemple, les livres de C. Møller, p. 41 (biblio), et de Henri Arzeliers, *Relativistic Kinematics*, Pergamon Press, 1966, p. 72.

où  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}$ , et où  $\delta\vec{\beta}_{\parallel}$  et  $\delta\vec{\beta}_{\perp}$  sont les composantes de  $\delta\vec{\beta}$  respectivement parallèle et perpendiculaire à  $\vec{\beta}$ . On peut donc écrire, au premier ordre en  $\delta\vec{\beta}$ ,

$$\Lambda_T = \Lambda(-\vec{\beta}) \Lambda(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) = \Lambda(\Delta\vec{\beta}) R(\Delta\vec{\Omega}) = R(\Delta\vec{\Omega}) \Lambda(\Delta\vec{\beta}), \quad (7.24)$$

où  $\Lambda(\Delta\vec{\beta})$  est une matrice de transformation de Lorentz sans rotation, infinitésimale, de vitesse  $\Delta\vec{\beta}$  (voir la relation (7.13) pour une vitesse relative infinitésimale), et où  $R(\Delta\vec{\Omega})$  est une matrice de rotation infinitésimale<sup>3</sup> caractérisée par le vecteur (axial)  $\Delta\vec{\Omega}$ . Ces deux transformations sont commutatives (une contribution du second ordre est négligée).

La relation (7.24) montre que l'ensemble des transformations sans rotation ne forme pas un groupe, contrairement à l'ensemble des transformations avec rotation (voir section 8.3). Toutefois, lorsque deux transformations de Lorentz sans rotation sont caractérisées par des vitesses parallèles, le résultat de leur composition est encore une transformation de Lorentz sans rotation. On constate en effet que  $\Delta\vec{\Omega} = \vec{0}$  si  $\delta\vec{\beta}$  est parallèle à  $\vec{\beta}$  (voir section 6.3). Cette propriété reste valable dans tous les cas, même lorsque les deux vitesses d'entraînement diffèrent d'une grandeur arbitraire (voir exercice 7.6).

Le fait que deux transformations de Lorentz successives sont équivalentes à une transformation de Lorentz plus une rotation dans l'espace a plusieurs conséquences cinématiques. Un exemple célèbre est donné par le phénomène de *précession de Thomas* qui fournit une interprétation des interactions spin-orbite atomique et nucléaire<sup>4</sup>. Si la variation de vitesse provient d'une accélération  $\vec{a}$  du référentiel  $\mathcal{R}''$ , alors pendant le temps  $dt$  on a  $\delta\vec{\beta} = \vec{a} dt/c$  ; si, de plus, la vitesse d'entraînement est faible ( $\beta \ll 1$ ), alors  $\gamma^2/(\gamma + 1) \approx 1/2$ . La variation de l'angle de rotation correspond à une précession des axes avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega} = -\Delta\vec{\Omega}/dt$ , appelée vitesse de précession de Thomas (le signe  $-$  vient du fait que nous sommes intéressés par l'angle de rotation qui lie les vecteurs de base et qui vaut l'opposé de l'angle de rotation  $\Delta\vec{\Omega}$  liant les coordonnées entre les deux systèmes). Explicitement, on a

$$\vec{\omega} = -\frac{\vec{V} \wedge \vec{a}}{2c^2}. \quad (7.25)$$

La dérivation ci-dessus a l'avantage d'être générale et valable pour une vitesse d'entraînement quelconque ; elle a l'inconvénient d'être très formelle et longue à

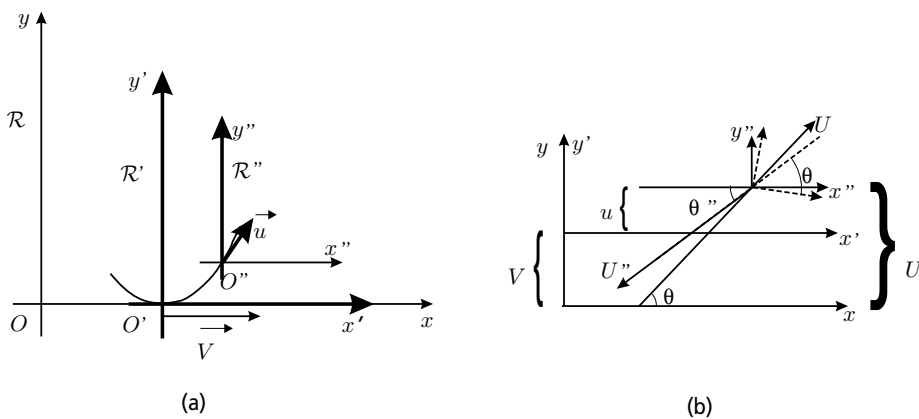
3. Sous l'effet d'une rotation  $R$ , d'angle infinitésimal  $d\omega$  autour d'un axe pointant dans la direction du vecteur unitaire  $\hat{n}$ , un vecteur  $\vec{a}$  devient  $R\vec{a} = \vec{a} + d\vec{\omega} \wedge \vec{a}$ , où le vecteur axial  $d\vec{\omega}$  est parallèle au vecteur  $\hat{n}$  et est tel que  $|d\vec{\omega}| = d\omega$ . Voir, par exemple, l'ouvrage de H. Goldstein, C. Poole et J. Safko, sect. 4.8 (biblio).

4. Pour plus d'informations, voir, par exemple, le livre de J. D. Jackson, sect. 11.8 et 11.11 (biblio).

démontrer. De plus, elle masque l'origine physique du phénomène de précession. Nous allons donner ci-dessous une démonstration plus simple, adaptée au cas d'un électron orbitant autour d'un noyau avec une vitesse bien inférieure à celle de la lumière. Elle nous permettra de préciser certains points très importants et fera comprendre plus clairement l'origine de la précession.

La précession de Thomas est un phénomène qui se produit chaque fois que l'on transporte un vecteur toujours parallèlement à lui-même dans son référentiel au repos, qui possède lui-même une accélération par rapport à un référentiel inertiel. Un observateur de ce référentiel d'inertie a l'impression que le vecteur change d'orientation pendant son parcours. Llewellyn Thomas en a donné une explication dès 1926<sup>5</sup>. Thomas considère un atome ; son référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$  est celui du noyau, qui est à peu de choses près celui du laboratoire. Schématiquement, le référentiel propre d'un électron  $\mathcal{P}$  tourne autour du noyau le long d'un cercle. Même s'il tourne à vitesse angulaire constante, il n'en subit pas moins une accélération  $\vec{a}$ . Bien que ce référentiel  $\mathcal{P}$  ne soit pas inertiel, l'étude peut être réalisée dans le cadre de la relativité restreinte : Thomas considère des référentiels galiléens qui coïncident momentanément avec le référentiel  $\mathcal{P}$ .

Soit  $\mathcal{R}'$ , le référentiel galiléen qui coïncide avec le référentiel  $\mathcal{P}$  au temps  $t$ . Nous pouvons toujours modifier les axes des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  pour qu'ils soient parallèles et que la vitesse relative  $\vec{V}$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  soit dirigée le long de l'axe  $Ox$ . Nous supposons que  $V \ll c$  et définissons, comme



**Figure 7.4** Dans la partie gauche (a) de la figure, nous avons représenté les référentiels mis en jeu dans la précession de Thomas. Les référentiels coïncidant avec le référentiel au repos de l'électron sont en gras. Dans la partie droite (b), nous avons noté de façon simplifiée les référentiels et les vitesses relatives correspondantes. Nous avons fait figurer, en pointillé, les axes du référentiel  $\mathcal{R}''$  tels qu'ils apparaissent pour un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$ .

5. Dans un article très difficile à lire : L. H. Thomas, « The Motion of the Spinning Electron », *Nature*, vol. 117, n° 2945, 10 April 1926, p. 514.

d'habitude,  $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ . Les deux référentiels sont donc unis par une transformation de Lorentz spéciale. Au temps  $t + dt$ , le référentiel propre à l'électron a évolué sur une courbe plane contenue dans le plan  $Oxy$  et le référentiel galiléen qui coïncide avec celui-ci à cet instant est noté  $\mathcal{R}''$ . On suppose que le référentiel propre se déplace en gardant toujours ses axes parallèles. Ainsi les référentiels  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  possèdent des axes parallèles, et la vitesse relative du référentiel  $\mathcal{R}''$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$  est notée  $\vec{u}$ . Cette vitesse a des composantes  $u_x$  et  $u_y$  par rapport aux axes  $O'x'$  et  $O'y'$ . La situation est illustrée sur la figure 7.4. Ainsi, nous avons affaire à une transformation de Lorentz sans rotation générale. Bien que, par le protocole expérimental expliqué plus haut, les observateurs des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  d'une part, et les observateurs des référentiels  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  d'autre part, soient tombés d'accord pour admettre que leurs axes sont parallèles, nous allons voir qu'il n'en est plus de même pour les observateurs des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}''$ . Un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$  constate en fait que les axes du référentiel  $\mathcal{R}''$  ont légèrement tourné.

Entrons à présent dans la description mathématique du phénomène. On se place dans une situation où  $z = z' = z''$  ; on ne s'intéresse donc plus à ces coordonnées. Les coordonnées  $(ct, x, y)$  du référentiel  $\mathcal{R}$  sont liées à celles  $(ct', x', y')$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  par une transformation de Lorentz spéciale

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + Vx'/c^2), \\ x &= \gamma(x' + Vt'), \\ y &= y'. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Le passage du référentiel  $\mathcal{R}'$  au référentiel  $\mathcal{R}''$  s'effectue *a priori* par une transformation de Lorentz générale sans rotation. Il n'est cependant pas nécessaire d'entrer dans ces complications. En effet, la durée  $dt$  est très faible et la vitesse a peu évolué dans cet intervalle, donc  $u \ll V \ll c$ . La vitesse relative  $u$  est donc infiniment petite par rapport à  $c$  (même du second ordre en  $V/c$ ) et la transformation des coordonnées s'identifie pratiquement à une transformation de Galilée

$$\begin{aligned} t'' &= t', \\ x'' &= x' - u_x t', \\ y'' &= y' - u_y t'. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Calculons d'abord la vitesse relative  $\vec{U}$  du référentiel  $\mathcal{R}''$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Le plus simple est de choisir un point fixe du référentiel  $\mathcal{R}''$ , par exemple l'origine  $x'' = y'' = 0$ , et de voir comment ses coordonnées  $x$  et  $y$  évoluent dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Faisons donc  $x'' = y'' = 0$  dans l'équation (7.27), pour trouver  $x' = u_x t'$  et  $y' = u_y t'$ . En reportant ces valeurs dans l'équation (7.26), il vient  $x = \gamma(u_x + V)t'$ ,  $y = u_y t'$  et  $t = \gamma(1 + u_x V/c^2)t'$ . En tirant  $t'$  en fonction de  $t$  de cette dernière égalité, et en reportant dans les expressions de  $x$  et  $y$ , on trouve  $x = U_x t$  et  $y = U_y t$ , avec pour les composantes de la vitesse

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{u_x + V}{1 + u_x V/c^2}, \\ U_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 + u_x V/c^2)}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Nous reconnaissons la loi d'addition des vitesses habituelle. L'angle  $\theta$  que fait cette vitesse par rapport à l'axe  $Ox$  vaut donc  $\tan\theta = U_y/U_x = u_y/[\gamma(u_x + V)]$ . Compte tenu de la condition  $u \ll V$ , on voit que  $\theta \approx \tan\theta$  et finalement

$$\theta \approx \frac{u_y}{\gamma V}. \quad (7.29)$$

Cherchons à présent la vitesse relative  $\vec{U}''$  du référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}''$ . Choisissons donc un point fixe du référentiel  $\mathcal{R}$ , par exemple l'origine  $x = y = 0$ , et voyons comment ses coordonnées  $x''$  et  $y''$  évoluent dans le référentiel  $\mathcal{R}''$ . Faisons donc  $x = y = 0$  dans l'équation (7.26), pour trouver  $x' = -Vt'$  et  $y' = 0$ . En reportant ces valeurs dans l'équation (7.27), il vient  $x'' = -(u_x + V)t'$  et  $y'' = -u_y t'$ . Comme, de plus,  $t' = t''$ , on trouve  $x'' = U_x'' t''$  et  $y'' = U_y'' t''$ , avec pour les composantes de la vitesse

$$\begin{aligned} U_x'' &= -(u_x + V), \\ U_y'' &= -u_y. \end{aligned} \quad (7.30)$$

L'angle  $\theta''$  que fait cette vitesse par rapport à l'axe  $O''x''$  vaut donc  $\tan\theta'' = U_y''/U_x'' = u_y/(u_x + V)$ . Avec les mêmes approximations qu'auparavant

$$\theta'' \approx \frac{u_y}{V}. \quad (7.31)$$

On voit donc que les angles  $\theta$  et  $\theta''$  ne sont pas identiques, ce qui indique aux observateurs des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}''$  que leurs axes de référence ne sont pas parallèles. De plus la différence  $d\theta = \theta - \theta''$  représente l'angle avec lequel les axes du référentiel  $\mathcal{P}$  ont tourné par rapport à ceux du référentiel  $\mathcal{R}$  pendant le temps  $dt$  (voir la figure 7.4). En effectuant le calcul, et en tenant compte de la condition  $V \ll c$ , on trouve

$$d\theta = \frac{u_y}{V} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \approx -\frac{u_y V}{2c^2}. \quad (7.32)$$

Au premier ordre en  $V/c$ , nous avons  $u_y = U_y$ . De plus  $U_y$ , qui représente la variation de vitesse de l'électron selon l'axe  $Oy$  pendant le temps  $dt$  est liée à l'accélération par  $U_y = a_y dt$ . Cela permet d'écrire l'angle de rotation des axes comme



$d\theta = -a_y V dt / (2c^2)$ . On voit naturellement apparaître la vitesse angulaire de précession de cet angle  $\omega = d\theta/dt = -a_y V / (2c^2)$ . On remarque que  $a_y V = (\vec{V} \wedge \vec{a})_z$ ; comme de plus les axes tournent dans le plan  $Oxy$ , le vecteur rotation instantanée est dirigé le long de l'axe  $Oz$ . On peut finalement écrire la vitesse angulaire de précession de Thomas sous la forme vectorielle (7.25) déjà présentée <sup>6</sup>.

Toute grandeur physique, comme un moment angulaire, constante dans le référentiel de la particule accélérée subit donc une rotation dans un référentiel d'inertie. Par exemple, en physique atomique, il est nécessaire d'ajouter cette vitesse de précession de Thomas, d'origine purement relativiste, à la vitesse de précession de Larmor, plus traditionnelle et d'origine classique.

## 7.4 TRANSFORMATIONS NON HOMOGÈNES

Jusqu'à présent, nous avons toujours considéré que les origines spatiotemporelles des deux référentiels coïncidaient. Comment faut-il modifier les équations de transformation si cette condition n'est pas remplie ? Considérons deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  unis par une transformation de Lorentz sans rotation. Supposons que l'observateur attaché au référentiel  $\mathcal{R}'$  constate que son horloge marque le temps  $t' = t'_0$  quand le point  $\vec{r}'_0$  de son repère spatial se trouve à la position  $\vec{r}_0$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , ce qui se passe à l'instant  $t = t_0$  dans ce référentiel. Les équations de transformation entre ces deux référentiels, qui doivent évidemment rester linéaires, s'obtiennent à partir des relations (7.13), en tenant simplement compte du changement d'origine. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} c(t - t_0) &= \gamma \left[ c(t' - t'_0) + \vec{\beta} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}'_0) \right], \\ \vec{r} - \vec{r}_0 &= \vec{r}' - \vec{r}'_0 + \gamma \vec{\beta} \left[ \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}'_0) + c(t' - t'_0) \right]. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Vérifions que ces équations ont bien les propriétés attendues. Si  $t_0 = t'_0 = 0$  et  $\vec{r}_0 = \vec{r}'_0 = \vec{0}$ , on retrouve les équations (7.13). Le point de référence du référentiel  $\mathcal{R}'$  de coordonnées  $(ct', \vec{r}') = (ct'_0, \vec{r}'_0)$  dans ce référentiel a bien pour coordonnées spatiotemporelles  $(ct_0, \vec{r}_0)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Par un raisonnement analogue à celui mené pour la transformation (7.13) dans la section 7.2, on trouve que la condition  $\vec{r}' = \vec{r}'_0$  implique  $\vec{r} = \vec{V}(t - t_0) + \vec{r}_0$ , ce qui est bien l'équation du mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du point de référence du repère spatial du référentiel  $\mathcal{R}'$ .

6. Pour établir cette formule, nous nous sommes fortement inspirés de l'article de S. Dancoff et D. R. Inglis, « On the Thomas Precession of Accelerated Axes », *Physical Review*, vol. 50, 1936, p. 784.

Les équations (7.33) s'inversent en remplaçant  $\vec{\beta}$  par  $-\vec{\beta}$ , en permutant les coordonnées primées et non primées, et en tenant compte du changement d'origine spatiotemporelle

$$\begin{aligned} c(t' - t'_0) &= \gamma \left[ c(t - t_0) - \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \right], \\ \vec{r}' - \vec{r}'_0 &= \vec{r} - \vec{r}_0 + \gamma \vec{\beta} \left[ \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - c(t - t_0) \right]. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Considérons deux événements distincts. Soient  $c\Delta t$  et  $\Delta \vec{r}$  les composantes spatio-temporelles dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de l'intervalle d'espace-temps bâti sur ces deux événements. En appliquant les équations de transformation (7.33) aux événements extrémités de cet intervalle, on trouve

$$\begin{aligned} c\Delta t &= \gamma(c\Delta t' + \vec{\beta} \cdot \Delta \vec{r}'), \\ \Delta \vec{r} &= \Delta \vec{r}' + \gamma \vec{\beta} \left( \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \Delta \vec{r}' + c\Delta t' \right). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Les composantes de l'intervalle d'espace-temps se transforment donc avec les relations (7.13), indépendamment de tout changement d'origine spatiotemporelle.

## 7.5 LOI GÉNÉRALE DE COMPOSITION DES VITESSES

Dans la section 5.1, nous avons examiné la loi de transformation d'une vitesse **quelconque** lors d'une transformation de Lorentz **spéciale**. Nous sommes à présent armés pour étudier le cas plus général de la loi de transformation d'une vitesse **quelconque** lors d'une transformation de Lorentz sans rotation **générale**.

Considérons un mobile dans un référentiel  $\mathcal{R}$  se déplaçant d'un vecteur élémentaire  $d\vec{r}$  en un temps  $dt$ . Sa vitesse instantanée est donc donnée par  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ . La loi de transformation des grandeurs  $d\vec{r}$  et  $dt$  s'obtient en différentiant les relations vectorielles (7.13)

$$dt = \gamma \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{v}'}{c} \right) dt', \quad (7.36)$$

$$\vec{v} = \left[ \vec{v}' + \gamma \vec{\beta} \left( c + \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{v}') \right) \right] \frac{dt'}{dt}, \quad (7.37)$$

dans lesquelles  $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$ . On a donc

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \gamma \vec{\beta} \left( c + \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{v}') \right)}{\gamma \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{v}'}{c} \right)}. \quad (7.38)$$

Cette relation s'inverse en remplaçant  $\vec{\beta}$  par  $-\vec{\beta}$  et en permutant les coordonnées primées et non primées. Si  $\vec{v}' = \vec{0}$  c'est-à-dire si le mobile est au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on a évidemment  $\vec{v} = \vec{V}$ . Dans le cas où  $\vec{v} = \vec{0}$ , on trouve  $\vec{v}' = -\vec{V}$ . De plus, si  $|\vec{v}'| = c$ , alors on trouve  $|\vec{v}| = c$ , ce qui est bien le résultat attendu (voir exercice 7.4).

En décomposant les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  en composantes parallèle et perpendiculaire au vecteur  $\vec{V}$ , la relation (7.38) se réduit aux deux expressions suivantes

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}}, \quad (7.39)$$

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp}}{\gamma \left( 1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2} \right)}. \quad (7.40)$$

car on a  $\gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{v}') = \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{v}'_{\parallel}) = \vec{\beta}^2 \vec{v}'_{\parallel}$ . Les équations (7.39) et (7.40) sont en fait les formes vectorielles des équations (5.4) et (5.7).

Avec la procédure décrite ci-dessus pour établir la relation (7.38), il est clair que les vitesses instantanées  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  doivent être évaluées au même événement de la ligne d'univers du mobile. Autrement dit, supposons que la vitesse  $\vec{v}$  soit mesurée alors que l'objet occupe la position  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Ce point de l'espace-temps a pour coordonnées  $\vec{r}'$  et  $t'$  dans l'autre référentiel. C'est à cette position et à cet instant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  que se rapporte la vitesse  $\vec{v}'$ . D'une manière générale, les mesures d'une grandeur physique quelconque (vitesse, accélération, impulsion, etc.) réalisées dans deux référentiels d'inertie différents peuvent être connectées par des équations de transformation, dérivées des transformations de Lorentz, si ces mesures se rapportent à **un seul et même événement**.

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 266.

### 7.1 Composantes longitudinale et transversale d'un vecteur

Dans la décomposition d'un vecteur  $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$  en composantes longitudinale  $\vec{r}_{\parallel}$  et transversale  $\vec{r}_{\perp}$  par rapport au vecteur unitaire  $\hat{\beta}$ , montrer que  $\vec{r}_{\parallel} = \hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{r})$  et  $\vec{r}_{\perp} = \hat{\beta} \wedge (\vec{r} \wedge \hat{\beta})$ .

7. Si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont deux vecteurs parallèles, alors on peut écrire  $\vec{a} = a\hat{n}$  et  $\vec{b} = b\hat{n}$  où  $\hat{n}$  est un vecteur unitaire. On a alors  $\vec{b}(\vec{b} \cdot \vec{a}) = b^2 a \hat{n}(\hat{n} \cdot \hat{n}) = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{b}) = \vec{b}^2 \vec{a}$ .

## 7.2 Manipulations de formules

- Montrer, à partir des relations (7.12), que la quantité  $c^2 t^2 - \vec{r}^2$  est bien invariante.
- Établir les relations (7.13) à partir des relations (7.12).
- Établir les relations (7.39) et (7.40) à partir de la relation (7.38).

## 7.3 Calcul matriciel avec $\Lambda$

Montrer, en utilisant la matrice (7.15), que  $\Lambda^{-1}(\vec{\beta}) = \Lambda(-\vec{\beta})$ , que  $\Lambda(\vec{0})$  est la matrice identité, et que la matrice  $\Lambda(\vec{\beta})$  se réduit à une transformation spéciale sur un axe si deux des composantes de la vitesse relative sont nulles.

## 7.4 Composition générale des vitesses

À partir de la relation (7.38), montrer que  $\vec{v}' = \vec{0}$  si  $\vec{v} = \vec{V}$ , que  $\vec{v} = \vec{0}$  si  $\vec{v}' = -\vec{V}$  et que  $|\vec{v}| = c$  si  $|\vec{v}'| = c$ .

## 7.5 Précession de Thomas

Établir les relations (7.23) (le calcul est assez long) et interpréter  $\Delta\vec{\beta}$  si  $\delta\vec{\beta}$  est parallèle à  $\vec{\beta}$ . On se servira de la définition de la décomposition d'un vecteur  $\vec{a}$  en composantes longitudinale  $\vec{a}_{\parallel}$  et transversale  $\vec{a}_{\perp}$  :  $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ . On utilisera aussi avec profit l'égalité du double produit vectoriel :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ .

## 7.6 Composition de deux transformations de Lorentz générales sans rotation

On considère un référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse constante  $\vec{V}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  et un référentiel  $\mathcal{R}''$  se déplaçant à la vitesse constante  $\vec{V}'$ , parallèle à  $\vec{V}$ , par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$ .

(a) Montrer la relation suivante sur les facteurs cinématiques

$$\gamma((\vec{V} + \vec{V}')/(1 + \vec{V} \cdot \vec{V}'/c^2)) = \gamma(\vec{V})\gamma(\vec{V}') (1 + \vec{V} \cdot \vec{V}'/c^2).$$

(b) Montrer que le référentiel  $\mathcal{R}''$  est lié au référentiel  $\mathcal{R}$  par une transformation de Lorentz générale sans rotation. Donner l'expression de la vitesse d'entraînement correspondante en fonction de  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$ . La relation démontrée dans la première question peut être utile. Conclure.

---

### 7.7 Inclinaison de deux référentiels

Deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont dans la configuration standard, avec une vitesse d'entraînement  $V$  le long de  $Ox$ . Un troisième référentiel  $\mathcal{R}''$  est lié au référentiel  $\mathcal{R}'$  par une transformation de Lorentz spéciale le long de l'axe  $Oy$  avec une vitesse  $V'$ .

- (a) Calculer l'angle  $\theta$  entre l'axe  $Ox$  et la direction de la vitesse relative du référentiel  $\mathcal{R}''$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .
- (b) Calculer l'angle  $\theta''$  entre l'axe  $O''x''$  et la direction de la vitesse relative du référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}''$ .
- (c) On appelle inclinaison de  $\mathcal{R}''$  par rapport à  $\mathcal{R}$  la différence  $\theta'' - \theta$ . Calculer l'inclinaison dans la situation précédente. On étudiera ensuite les deux cas particuliers :
  - i.  $V'$  est peu différent de  $V$  :  $V' = V + dV$  ;
  - ii.  $V$  et  $V'$  sont faibles devant la vitesse de la lumière.

## Chapitre 8

# Quadrivecteurs

*Les vues de l'espace et du temps que je veux poser devant vous sont sorties du sol de la physique expérimentale ; c'est là que réside leur force. Elles sont radicales. Dorénavant, l'espace en tant que tel et le temps en tant que tel sont condamnés à s'évanouir en fumée, et seule une sorte d'union des deux pourra préserver une réalité indépendante.*

Hermann MINKOWSKI (1908)

Nous allons donner un cadre plus formel à la théorie de la relativité restreinte par l'utilisation du calcul tensoriel <sup>1</sup>. L'introduction du calcul tensoriel dans le cadre de la relativité d'Einstein ne se fait pas pour le plaisir de « mathématiser » cette théorie. Elle se révèle être un outil de calcul très efficace et constitue la base grâce à laquelle la relativité restreinte a pu être généralisée pour intégrer la gravitation. Dans la suite, nous utilisons des indices grecs ( $\mu$ ,  $\nu$ , etc.) pour numérotter des composantes spatiotemporelles (0, 1, 2, 3) des tenseurs, et des indices latins ( $i$ ,  $j$ , etc.) pour numérotter leurs composantes spatiales (1, 2, 3).

On peut définir l'espace-temps de Minkowski comme l'espace de tous les événements. Du point de vue mathématique, l'espace-temps de la relativité restreinte, ou espace-temps de Minkowski, est un *espace ponctuel affine* muni d'une *métrique* particulière, dite *métrique de Minkowski*. Un espace vectoriel est associé à cet espace-temps, dont les éléments sont appelés des *quadrivecteurs* <sup>2</sup>. Nous allons développer ces points dans les trois sections suivantes.

---

1. Voir les ouvrages consacrés au calcul tensoriel (biblio).

2. On écrit parfois 4-vecteur pour quadrivecteur.

## 8.1 L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI

Pour bien comprendre le formalisme qui va être introduit, faisons une analogie avec l'espace ponctuel de la géométrie ordinaire à 3 dimensions. Ses éléments sont des points et, avec ces points, on peut construire des vecteurs : les vecteurs du calcul vectoriel élémentaire. On a, par exemple, les propriétés suivantes : une paire ordonnée de points  $(A, B)$  permet de construire un vecteur unique qui est généralement noté  $\overrightarrow{AB}$ , un troisième point  $C$  permet d'écrire l'égalité  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ , un nombre réel  $\lambda$  permet de définir un nouveau vecteur  $\lambda \overrightarrow{AB}$ , etc.

L'espace-temps de Minkowski est, au départ, un espace de points, ou espace ponctuel, de dimension 4. Le temps et l'espace étant intimement liés par les transformations de Lorentz, il est assez naturel d'intégrer toutes les coordonnées spatio-temporelles dans un même formalisme. Un point de cet espace-temps est en fait un événement (voir section 2.1.1). Une paire ordonnée d'événements  $(A, B)$  permet de définir un vecteur dans l'espace-temps, c'est-à-dire un élément d'un espace vectoriel (avec toutes les propriétés qui en découlent) associé à cet espace ponctuel. Muni de cet espace vectoriel, l'espace-temps est dit affine. Nous appelons quadrivecteur un élément de cet espace vectoriel.

On peut construire un repère dans l'espace-temps en se donnant un point particulier  $O$  de cet espace-temps, appelé origine spatio-temporelle, et quatre quadrivecteurs particuliers  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$ <sup>3</sup> constituant une base de l'espace vectoriel associé à l'espace-temps. De manière abrégée, ce repère associé au référentiel  $\mathcal{R}$  pourra être noté  $(O; e_\mu)$ . Les coordonnées d'un événement  $X$ ,  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , sont les composantes du *quadrivecteur position*  $x(OX)$ , qui joint l'origine  $O$  au point  $X$ , dans la base  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  (voir figure 8.1)

$$x(OX) = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu. \quad (8.1)$$

Dans la suite nous utiliserons toujours la convention, dite d'Einstein, de sommation sur les indices répétés figurant une fois en indice supérieur et une fois en indice inférieur, étant entendu que l'indice de sommation varie de 0 à 3. La relation (8.1) devient donc simplement

$$x(OX) = x^\mu e_\mu. \quad (8.2)$$

Si deux événements  $A$  et  $B$  ont respectivement pour coordonnées  $x^\mu(A)$  et  $x^\mu(B)$ , le *quadrivecteur déplacement*  $d(AB)$  entre ces deux événements est par définition

---

3. Dans cet ouvrage, un quadrivecteur, et plus généralement un tenseur, de l'espace-temps est désigné par un symbole en gras, afin d'éviter toute confusion avec un scalaire (nombre). La présence d'une « flèche » au-dessus d'un symbole désignera des composantes particulières d'un vecteur de l'espace ordinaire à 3 dimensions (voir section 8.2).

$$d(AB) = x(AO) + x(OB) = x(OB) - x(OA). \quad (8.3)$$

Dans la base  $(e_\mu)$ , ce quadrivecteur a donc pour composantes les grandeurs  $d^\mu(AB) = x^\mu(B) - x^\mu(A)$ .

L'espace-temps contient trois dimensions d'espace et une dimension temporelle. Il est donc logique et naturel de choisir une base qui reflète cette structure. On peut, par exemple, choisir trois quadrivecteurs  $e_x, e_y, e_z$  qui servent à repérer un point dans l'espace ordinaire et un quadrivecteur  $e_t$  qui permet le repérage sur l'axe temporel. Il est traditionnel de faire l'identification

$$e_0 = e_t, e_1 = e_x, e_2 = e_y, e_3 = e_z. \quad (8.4)$$

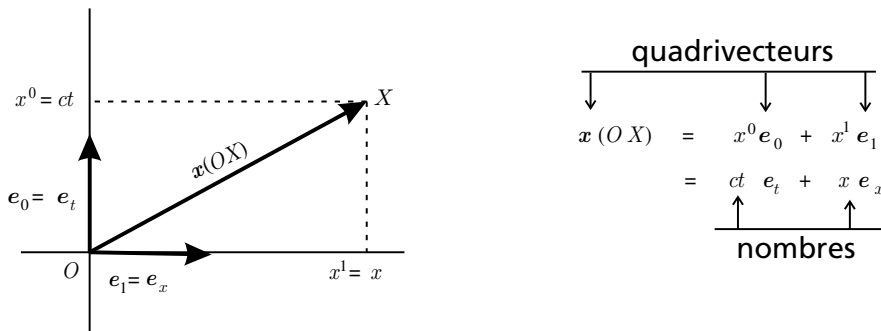
Avec ce choix de quadrivecteurs de base, un événement se produisant à l'instant  $t$  au point de l'espace  $(x, y, z)$  a pour coordonnées spatiotemporelles

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, \quad (8.5)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Les composantes  $x^\mu$  d'un quadrivecteur position ont les dimensions d'une longueur; les quadrivecteurs de base  $e_\mu$  sont, eux, dépourvus de dimension.

Comme nous allons le voir ci-dessous, la position de l'indice – inférieure ou supérieure – sur une grandeur a une signification profonde. Il ne s'agit pas que d'une facilité de notation. Se donner un repère  $(O; e_\mu)$ , c'est faire le choix d'un référentiel dans l'espace de Minkowski. Considérons maintenant deux repères dans l'espace-temps  $(O; e_\mu)$  et  $(O; e'_\mu)$  caractérisés par la même origine spatiotemporelle  $O$  (nous avons fait maintes fois un tel choix dans les référentiels considérés jusqu'à présent) et par des quadrivecteurs de base  $e_\mu$  et  $e'_\mu$  différents. Dans ces deux bases, le quadrivecteur position associé à un événement  $X$  peut s'écrire

$$x(OX) = x^\mu e_\mu = x'^\mu e'_\mu. \quad (8.6)$$



**Figure 8.1** Coordonnées contravariantes d'un événement dans un espace-temps de Minkowski à deux dimensions.



Un quadrivecteur position existe indépendamment de tout choix de la base ; cela implique donc l'égalité (8.6). Ces deux bases sont reliées par une matrice <sup>4</sup> de changement de base  $\Lambda_\mu^\nu$

$$e'_\mu = \Lambda_\mu^\nu e_\nu \quad \text{et} \quad e_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu e'_\nu. \quad (8.7)$$

Introduisons le symbole de Kronecker, ou delta de Kronecker,  $\delta_\nu^\mu$  défini par les propriétés suivantes

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu, \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (8.8)$$

Mis sous forme matricielle, il est représenté par la matrice identité  $4 \times 4$ . On peut alors écrire

$$\Lambda_\alpha^\mu (\Lambda^{-1})_\nu^\alpha = (\Lambda^{-1})_\alpha^\mu \Lambda_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu. \quad (8.9)$$

Afin de satisfaire à l'égalité (8.6), les coordonnées spatio-temporelles d'un événement doivent se transformer suivant la loi

$$x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x'^\nu \quad \text{et} \quad x'^\mu = (\Lambda^{-1})_\nu^\mu x^\nu. \quad (8.10)$$

De façon générale, une grandeur avec un indice en position inférieure, comme un vecteur de base  $e_\mu$ , est dite *covariante* ; elle se transforme lors d'un changement de base suivant la loi (8.7). Une grandeur avec un indice en position supérieure, comme une coordonnée spatio-temporelle  $x^\mu$ , est dite *contravariante* ; elle se transforme lors d'un changement de base suivant la loi (8.10). Notons que cette transformation est bien caractérisée par le fait que les origines spatio-temporelles des deux référentiels coïncident car  $x'^\mu = 0 \Leftrightarrow x^\mu = 0$ . Elle est donc homogène.

Si l'origine du repère spatio-temporel est déplacée de  $O$  à  $O'$ , le quadrivecteur position associé à un événement  $X$  particulier est modifié. De  $x(OX)$  il devient  $x'(O'X)$ , et les coordonnées de l'événement sont changées. Si, dans l'ancien repère, le quadrivecteur  $\lambda$  qui joint  $O$  à  $O'$  s'écrit  $\lambda(OO') = \lambda^\mu e_\mu$ , alors les nouvelles coordonnées de l'événement  $X$  sont  $x^\mu - \lambda^\mu$  car

$$x'(O'X) = x(OX) - \lambda(OO') = (x^\mu - \lambda^\mu) e_\mu. \quad (8.11)$$

---

4. Une grandeur caractérisée par deux indices peut être représentée par une matrice. Dans la suite nous utiliserons les conventions usuelles suivantes : *i*) lorsqu'un indice est en position inférieure et l'autre en position supérieure, l'indice supérieur désigne le numéro de ligne de la matrice et l'indice inférieur désigne le numéro de colonne ; *ii*) lorsque les deux indices sont en position inférieure ou supérieure, le premier indice désigne le numéro de ligne de la matrice et le second indice désigne le numéro de colonne.

Il découle des relations (8.3) et (8.11) qu'un **changement d'origine spatiotemporelle ne modifie pas les composantes d'un quadrivecteur déplacement**.

La relativité restreinte ne s'accommode pas de changements de base quelconques. Nous avons déjà vu que, d'une part, les référentiels considérés doivent être inertiels et, d'autre part, la vitesse de la lumière doit rester invariante dans un changement de référentiel. Cela nous impose le choix d'un produit scalaire bien défini et une forme particulière pour les matrices  $\Lambda$  admissibles, les transformations de Lorentz. Ces points font l'objet de la section suivante.

## 8.2 PROPRIÉTÉS DES QUADRIVECTEURS ET MÉTRIQUE DE MINKOWSKI

Commençons à nouveau cette section par une analogie avec l'espace ordinaire à 3 dimensions. Muni du produit scalaire habituel, cet espace est dit euclidien. Il est formé de points qui représentent la position des objets. La donnée de deux points définit un vecteur position, dont les composantes sur les vecteurs de base ont pour dimension une longueur. Pourtant, dans ce même espace, on peut définir d'autres quantités physiques (en général dérivées des vecteurs déplacement), comme une vitesse, une accélération, une force, etc., caractérisées par des composantes sur les mêmes vecteurs de base. En général, ces composantes ont des dimensions qui ne sont pas des longueurs. Si ces nouveaux êtres physiques ont des propriétés analogues à celles des vecteurs position sous un changement de base, nous les appelons aussi des vecteurs.

Il en va de même avec l'espace de Minkowski. Si celui-ci sert de support aux quadrivecteurs position, nous verrons, dans les sections suivantes, comment construire, à partir de quadrivecteurs déplacement (éventuellement infinitésimaux), différentes quantités dont les composantes spatiotemporelles ont la dimension d'une vitesse, d'une quantité de mouvement, etc. Un changement d'origine spatiotemporelle ne modifie pas ces quantités, et leurs composantes restent inchangées (voir sections 7.4 et 8.1). Si ces quantités se comportent comme les quadrivecteurs position lors des changements de quadrivecteurs de base, nous les appelons aussi quadrivecteurs. La différence fondamentale avec l'espace ordinaire est, outre une dimension supplémentaire, le fait que l'espace-temps n'est plus euclidien, mais minkowskien, comme nous allons le voir dans cette section.

Les quadrivecteurs sont les éléments d'un espace vectoriel. On en conclut qu'un **une combinaison linéaire de quadrivecteurs est encore un quadrivecteur**. En particulier, la multiplication d'un quadrivecteur par un terme constant est toujours un quadrivecteur. Ce facteur multiplicatif peut être une pure constante, comme 2,  $-1$ ,  $\pi$ , etc. Ce peut être aussi être une grandeur physique dimensionnée qui ne change pas lors d'un changement de base, comme la vitesse de la lumière  $c$ . Enfin, ce peut être une grandeur dynamique dépendant des quadrivecteurs mais invariante sous un changement de base, comme le temps propre.

Un quadrivecteur quelconque  $v$  existe indépendamment de tout référentiel (sauf un quadrivecteur position qui dépend de l'origine du repère). Un changement de base ne modifie évidemment pas le quadrivecteur, mais ses composantes sont modifiées. Connaissant le développement du quadrivecteur dans deux repères différents, on peut écrire

$$v = v^\mu e_\mu = v'^\mu e'_\mu. \quad (8.12)$$

Les nombres  $v^\mu$  ( $v'^\mu$ ) sont les *composantes contravariantes* du quadrivecteur  $v$  dans la base  $e_\mu$  ( $e'_\mu$ ). En vertu des relations (8.7) et (8.10), les lois de transformations associées sont

$$v'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu v^\nu \quad \text{et} \quad e'_\mu = \Lambda^\nu_\mu e_\nu. \quad (8.13)$$

L'espace-temps de Minkowski est muni d'un produit scalaire faisant correspondre à deux quadrivecteurs  $v$  et  $w$  un invariant noté  $v \cdot w$ . Avant de décrire ce qui fait la spécificité de cette opération dans le cadre de la relativité restreinte, étudions les propriétés générales du produit scalaire. Cette application est linéaire et symétrique ( $v \cdot w = w \cdot v$ ) ; elle est donc entièrement déterminée par les produits scalaires des quadrivecteurs de base. Si on convient de noter  $e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu}$ , on a

$$v \cdot w = (v^\mu e_\mu) \cdot (w^\nu e_\nu) = v^\mu w^\nu e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu, \quad (8.14)$$

en utilisant les propriétés de linéarité du produit scalaire. Les coefficients  $g_{\mu\nu}$  sont les composantes d'un objet que l'on appelle tenseur métrique  $g$ , ou plus simplement métrique. Ce tenseur est manifestement symétrique,  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . D'affine, l'espace-temps de Minkowski devient métrique.

La loi de transformation des composantes de la métrique pour un changement de base est donnée par

$$g'_{\mu\nu} = e'_\mu \cdot e'_\nu = (\Lambda^\alpha_\mu e_\alpha) \cdot (\Lambda^\beta_\nu e_\beta) = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g_{\alpha\beta}. \quad (8.15)$$

Ces composantes se transforment donc comme un quadrivecteur de base mais avec deux matrices de transformation : on dit que ce tenseur est deux fois covariant et, comme il se doit, les indices apparaissent en position inférieure. D'une manière générale, le nombre et la position des indices sur un tenseur déterminent sa *variance*. On définit également le tenseur inverse de composantes  $g^{\mu\nu}$  tel que

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (8.16)$$

On peut montrer que ce tenseur inverse doit être deux fois contravariant et symétrique (voir exercice 8.1).

Les composantes contravariantes  $v^\mu$  du quadrivecteur  $v$  sont définies par son développement (8.12) sur les quadrivecteurs de base. Une fois donné le produit scalaire, on peut tout aussi bien déterminer le quadrivecteur  $v$  par ses *composantes covariantes* (on parle aussi de projections orthogonales)  $v_\mu$  définies par

$$v_\mu = v \cdot e_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu. \quad (8.17)$$

Il est facile de vérifier que ces quantités se transforment de façon covariante lors d'un changement de base, c'est-à-dire comme les quadrivecteurs de base

$$v'_\mu = \Lambda_\mu^\nu v_\nu. \quad (8.18)$$

À l'aide des deux tenseurs métriques  $g_{\mu\nu}$  et  $g^{\mu\nu}$ , on peut passer des composantes contravariantes d'un vecteur à ses composantes covariantes correspondantes et réciproquement

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu \quad \text{et} \quad v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu. \quad (8.19)$$

De façon imagée, on dit que le tenseur  $g_{\mu\nu}$  fait « descendre les indices », tandis que le tenseur inverse  $g^{\mu\nu}$  fait « monter les indices ». Ces opérations de montée et de descente d'indices peuvent se faire avec des tenseurs de variance quelconque. Par exemple, au départ d'un tenseur  $t$  dont les composantes contravariantes sont  $t^{\mu\nu}$ , on peut fabriquer les composantes  $t_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} t^{\rho\sigma}$ . On peut considérer que les nombres  $t_{\mu\nu}$  sont les composantes covariantes du même tenseur  $t$ . Par définition, la *trace* du tenseur  $t$  est l'invariant  $\text{Tr } t = g^{\mu\nu} t_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} t^{\mu\nu}$ .

Dans ces conditions, le produit scalaire de deux quadrivecteurs peut s'écrire sous les formes alternatives suivantes

$$v \cdot w = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = v^\mu w_\mu = v_\mu w^\mu = g^{\mu\nu} v_\mu w_\nu. \quad (8.20)$$

Deux quadrivecteurs  $v$  et  $w$  sont dits *orthogonaux* si  $v \cdot w = 0$ . Signalons que la propriété d'invariance du produit scalaire fournit un puissant moyen de calcul dans de nombreux problèmes avec changement de référentiel.

Se pose maintenant le choix de la métrique de la relativité restreinte. Il semble naturel de demander que les quadrivecteurs de base définis par les relations (8.4) soient orthogonaux deux à deux. Il semble aussi naturel de ne privilégier aucun des quadrivecteurs de base pointant dans les différentes directions de l'espace, ce qui peut se traduire par  $g_{11} = g_{22} = g_{33}$ . Si on se restreint à l'espace seul, la métrique est euclidienne et le sous-espace correspondant est notre espace coutumier à 3 dimensions. Nous avons eu l'occasion à plusieurs reprises de souligner que le temps, bien que formant une coordonnée à part entière, est d'essence tout à fait différente ; la valeur de  $g_{00}$  peut donc être différente. Le choix  $g_{00} = g_{ii}$  conduit à une métrique euclidienne qui n'est pas compatible avec la relativité restreinte. Cette der-

nière ne peut être une théorie cohérente que si on fait le choix  $g_{00} = -g_{ii}$ . Il est toujours loisible de rendre les vecteurs de base normés. Ainsi la métrique, dite de Minkowski, qui régit toute la relativité restreinte, doit avoir la forme suivante

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{ll} +1 & \text{si } \mu = \nu = 0, \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu. \end{array} \quad (8.21)$$

Nous montrerons dans la section suivante que cette métrique permet de définir très naturellement les transformations de Lorentz. De plus, nous verrons à la fin de cette section que seuls les signes relatifs des coefficients non nuls de cette métrique sont significatifs. De façon exacte, nous pouvons maintenant définir l'espace-temps de Minkowski comme un espace ponctuel affine à 4 dimensions muni de la métrique (8.21).

En représentation matricielle, la métrique a la forme <sup>5</sup>

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (8.22)$$

Remarquons que la matrice (8.22) est sa propre inverse ; cela signifie que les composantes du tenseur métrique deux fois contravariant  $g^{\mu\nu}$  sont identiques à celles du tenseur métrique deux fois covariant  $g_{\mu\nu}$ .

Soit un quadrivecteur quelconque  $v = v^\mu e_\mu$  de composantes contravariantes

$$v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3) = (v^0, \vec{v}), \quad (8.23)$$

où  $\vec{v}$  désigne les trois composantes spatiales (contravariantes) du quadrivecteur et  $v^0$  sa composante temporelle (contravariante). Étant donné la forme de la métrique, les composantes covariantes de ce quadrivecteur sont données, en termes des composantes contravariantes, par

$$v_\mu = (v^0, -v^1, -v^2, -v^3) = (v^0, -\vec{v}). \quad (8.24)$$

Avec ces notations, le produit scalaire  $v \cdot w$  peut s'écrire

$$v \cdot w = v^0 w^0 - v^1 w^1 - v^2 w^2 - v^3 w^3 = v^0 w^0 - \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad (8.25)$$

où  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  représente le produit scalaire dans l'espace euclidien à 3 dimensions.

La figure 8.2 fournit quelques exemples de vecteurs orthogonaux. On peut être surpris par le résultat ; l'habitude de penser en termes de géométrie euclidienne en est responsable. À présent, il faut apprendre à raisonner avec une métrique min-

---

5. On rencontre parfois la notation  $\eta_{\mu\nu}$  pour désigner spécifiquement la métrique de Minkowski.

kowskienne. Le produit scalaire d'un quadrivecteur  $v$  avec lui-même  $v^2 = v \cdot v = (v^0)^2 - \vec{v}^2$  s'appelle la *pseudo-norme* du quadrivecteur  $v$ . Cette grandeur est donc un invariant. Le produit scalaire (8.25) est évidemment symétrique mais, contrairement au produit scalaire dans un espace euclidien, il n'est pas défini positif<sup>6</sup>. On distingue trois « genres » de quadrivecteurs suivant le signe de la pseudo-norme, comme indiqué dans le tableau 8.1.

TABLEAU 8.1 GENRES DES QUADRIVECTEURS DANS L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI  
( $s$  EST UN NOMBRE ARBITRAIRE NON NUL).

Pseudo-norme	Genre	Exemple
positive	temps	$(s,0,0,0)$
nulle	lumière	$(s,\pm s,0,0)$
négative	espace	$(0,s,0,0)$

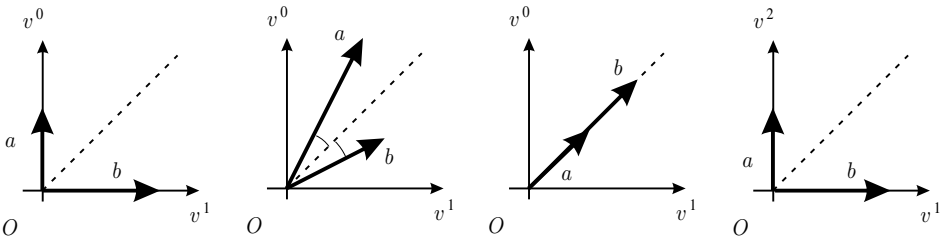
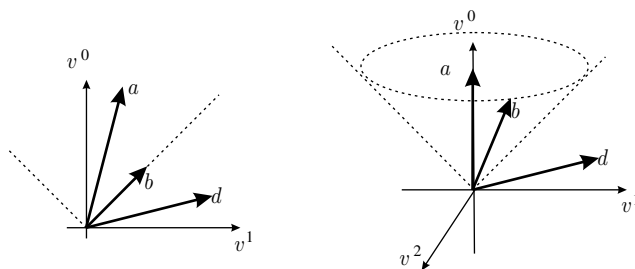


Figure 8.2 Dans les quatre situations présentées ci-dessus, les quadrivecteurs  $a$  et  $b$  sont orthogonaux au sens de Minkowski (deux axes du référentiel ne sont pas représentés).

Cette nomenclature trouve son origine dans le fait qu'un quadrivecteur de genre temps doit forcément posséder une composante temporelle non nulle, tandis qu'un quadrivecteur de genre espace doit forcément posséder une ou des composantes spatiales non nulles. Pour comprendre la dénomination « genre lumière », considérons la ligne d'univers d'un photon passant par l'événement  $E$  dont le quadrivecteur position est  $(ct_E, \vec{r}_E)$  ; l'équation du mouvement de ce photon pointant dans la direction quelconque  $\hat{k}$  (vecteur de l'espace avec  $\hat{k}^2 = 1$ ) est donnée par  $\vec{r} = c(t - t_E)\hat{k} + \vec{r}_E$ . Le vecteur vitesse est dans ce cas  $\vec{v} = d\vec{r}/dt = c\hat{k}$ , ce qui est bien un vecteur de module  $c$  pointant dans la direction  $\hat{k}$ . Le quadrivecteur déplacement entre deux événements distincts signalant la présence du photon est donné par  $(ct_A - ct_B, c(t_A - t_E)\hat{k} + \vec{r}_E - c(t_B - t_E)\hat{k} - \vec{r}_E) = (c\Delta t, c\Delta t \hat{k})$  où  $\Delta t = t_A - t_B$ . La pseudo-norme de ce quadrivecteur est évidemment nulle.

6. On utilise parfois l'appellation produit pseudo-scalaire. Le carré de la longueur d'un vecteur  $\vec{v}$  de l'espace ordinaire est toujours le nombre positif  $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$ .

Ajoutons qu'un quadrivecteur  $\mathbf{v}$  de genre lumière ou de genre temps tel que  $v^0 > 0$  ( $v^0 < 0$ ) est dit *pointant*, ou *orienté*, vers le futur (passé). Pour que cette définition ait un sens, il faut ne pas considérer des transformations de Lorentz qui peuvent renverser le sens du temps ( $t \rightarrow -t$ , voir section 2.1.3). Les quadrivecteurs de genre lumière pointant vers le futur (passé) issus de l'origine spatiotemporelle génèrent donc un cône de lumière futur (passé). La figure 8.3 illustre cette situation pour un espace de quadrivecteurs à une ou deux composantes spatiales. On se convainc aisément qu'un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur (passé) est nécessairement contenu à l'intérieur de ce cône de lumière futur (passé). Un vecteur de genre espace est forcément situé hors de ce cône de lumière. Notons qu'une ligne d'univers est dite de genre temps/espace/lumière si son quadrivecteur tangent est en tout point de genre temps/espace/lumière.



**Figure 8.3** Quadrivecteurs dont la composante temporelle est de nature  $v^0$  et les composantes spatiales de même nature  $\vec{v}$  :  $\mathbf{a}$  est de genre temps,  $\mathbf{b}$  de genre lumière et  $\mathbf{d}$  de genre espace.

Nous verrons plus loin que de nombreuses grandeurs physiques sont représentées par des quadrivecteurs de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur. Il est donc intéressant d'établir certaines propriétés de ce genre particulier de quadrivecteurs. Soient  $\mathbf{a}^\mu = (a^0, \vec{a})$  les composantes d'un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur et  $\mathbf{b}^\mu = (b^0, \vec{b})$  les composantes d'un quadrivecteur de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur. On a donc  $a^2 > 0$ ,  $b^2 \geq 0$ ,  $a^0 > 0$  et  $b^0 > 0$ . Calculons la pseudo-norme de la somme  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  de ces deux quadrivecteurs :

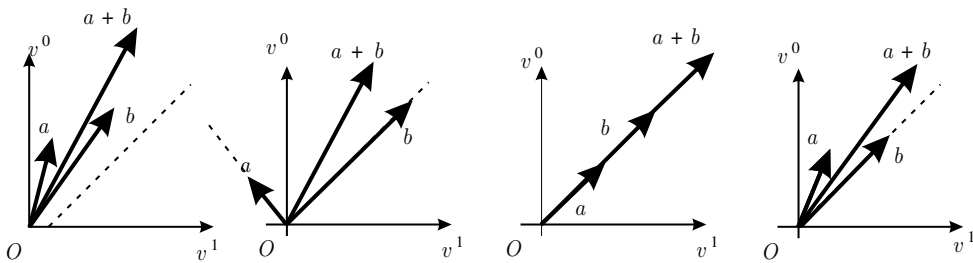
$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= a^2 + b^2 + 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\
 &> 2 \left( a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \right) \\
 &\geq 2 \left( a^0 b^0 - |\vec{a}| |\vec{b}| \right).
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

Comme nous avons  $a^0 > |\vec{a}|$  et  $b^0 \geq |\vec{b}|$ , il en résulte que  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 > 0$ . De plus  $a^0 + b^0$  est strictement positif. On peut donc en conclure que  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  est un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur. Si  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont tous les deux des quadrivecteurs de genre lumière, l'inégalité de la deuxième ligne des relations (8.26)

devient une égalité. On en conclut alors que  $a$  et  $b$  est un quadrivecteur de genre lumière ou de genre temps pointant vers le futur. On a donc les propriétés suivantes :

- La somme de deux quadrivecteurs de genre temps pointant vers le futur est un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur.
- La somme de deux quadrivecteurs de genre lumière pointant vers le futur est un quadrivecteur de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur.
- La somme d'un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur et d'un quadrivecteur de genre lumière pointant vers le futur est un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur.

Ces résultats peuvent aisément se généraliser à des sommes de plus de deux quadrivecteurs. Ces situations sont illustrées sur la figure 8.4. D'autres propriétés concernant le genre des quadrivecteurs sont proposées dans l'exercice 8.6.



**Figure 8.4** Situations illustrant les propriétés d'addition de quadrivecteurs de genre temps et/ou de genre lumière pointant vers le futur (deux axes du référentiel ne sont pas représentés).

On caractérise souvent une métrique par sa *signature*, c'est-à-dire l'ensemble des signes des coefficients diagonaux  $g_{\mu\mu}$  du tenseur métrique. La signature de la métrique (8.22) est  $(+ - - -)$ , mais une autre convention peut être choisie. Adopter la signature  $(- + + +)$  change le signe du produit scalaire. Dans ce cas, on dira qu'un vecteur est de genre temps (espace) si sa pseudo-norme est négative (positive). Cependant, les résultats physiques sont indépendants de ce choix de signe. Il faut juste veiller à garder la même convention tout au long des calculs (voir section 8.4).

## 8.3 GROUPE DE LORENTZ ET GROUPE DE POINCARÉ

Nous avons vu précédemment que les transformations de Lorentz sont les seules permises par la relativité restreinte entre deux référentiels d'inertie. Montrons que les transformations de Lorentz homogènes sont les changements de base (8.10) qui laissent invariante de forme la métrique de Minkowski. La traduction mathématique de cette propriété est donnée par l'équation suivante



$$g'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}. \quad (8.27)$$

En effet, nous avons vu dans la section 2.1.3 que les transformations de Lorentz sont définies comme celles qui laissent invariante la forme quadratique  $I = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ . Avec les conventions d'écritures (8.5), cette forme  $I$  peut s'écrire, dans un référentiel  $\mathcal{R}$  particulier,

$$I = x^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (8.28)$$

La grandeur  $I$  est bien un invariant. Dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$ , elle devient donc  $I = g'_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}$ . Grâce aux conditions (8.27), cette relation s'écrit finalement

$$I = g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2, \quad (8.29)$$

ce qui est bien le résultat attendu. On trouve également que l'intervalle de longueur élémentaire au carré  $ds^2 = dx^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$  dans l'espace-temps est un invariant de forme <sup>7</sup>

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \quad (8.30)$$

La condition (8.27) peut s'écrire sous forme matricielle

$$g = \tilde{\Lambda} g \Lambda, \quad (8.31)$$

où  $g$  et  $\Lambda$  représentent respectivement la matrice métrique et une matrice de transformation de Lorentz, et où  $\tilde{\Lambda}$  est la matrice transposée de  $\Lambda$ . Puisque  $g^2$  est la matrice identité, la relation (8.31) implique le lien suivant entre une matrice  $\Lambda$  et son inverse  $\Lambda^{-1}$

$$\Lambda^{-1} = g \tilde{\Lambda} g. \quad (8.32)$$

On peut montrer que l'ensemble des transformations de Lorentz (8.10) satisfaisant à la condition (8.31) forme un groupe (voir exercice 8.5), le *groupe de Lorentz homogène*. La relation (8.31) implique que  $(\det \Lambda)^2 \det g = \det g$ , c'est-à-dire que  $\det \Lambda = \pm 1$ . On a également

$$1 = g_{00} = \Lambda_0^{\mu} \Lambda_0^{\nu} g_{\mu\nu} = (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 - (\Lambda_0^2)^2 - (\Lambda_0^3)^2. \quad (8.33)$$

---

7. L'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide peut s'écrire  $\left[ g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right] \Psi = 0$  (voir section 11.2). Les relations (8.27) assurent que cette équation est bien invariante de forme.

Cela entraîne que  $|\Lambda_0^0| \geq 1$ . Les signes respectifs des deux grandeurs ( $\det \Lambda$ ) et  $\Lambda_0^0$  déterminent la *nappe* du groupe de Lorentz à laquelle appartient la transformation  $\Lambda$  (voir annexe C).

Un élément de ce groupe est déterminé par les seize paramètres  $\Lambda_\nu^\mu$  liés par les dix conditions (8.27), puisque le tenseur métrique est symétrique. Ceci permet de montrer que ce groupe comprend six paramètres essentiels (voir également exercice 8.5). Comme nous l'avons vu dans la section 2.1.3, trois des paramètres sont associés à des rotations du repère dans l'espace, tandis que les trois autres, associés à des rotations dans l'espace-temps, traduisent l'existence d'un mouvement relatif uniforme entre les deux repères (on peut vérifier que la matrice (7.15) satisfait à la relation (8.31), que son déterminant est bien égal à 1 et que sa composante  $\Lambda_0^0$  est bien supérieure ou égale à 1). Un élément général de ce groupe est donc une transformation de Lorentz homogène avec rotation (voir section 7.2). Le groupe de Lorentz homogène comprend également les transformations discrètes de renversement du temps et de parité (voir section 2.1.3)<sup>8</sup>. L'ensemble des transformations de Lorentz continues telles que  $\det \Lambda = 1$  et  $\Lambda_0^0 \geq 1$  forme un sous-groupe du groupe de Lorentz, appelé *groupe de Lorentz restreint*.

Rappelons que l'ensemble des transformations de Lorentz homogènes sans rotation ne forme pas un sous-groupe du groupe de Lorentz (voir section 7.3). Sous l'action d'une telle transformation, les composantes temporelle et spatiales d'un quadrivecteur position ( $x^0 = ct, \vec{r}$ ) se transforment suivant les relations (7.12). Les règles de transformation d'un quadrivecteur quelconque  $v$  de composantes contravariantes ( $v^0, \vec{v}$ ) s'écrivent donc

$$\begin{aligned} v^0 &= \gamma(v'^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{v}'), \\ \vec{v}_\parallel &= \gamma(\vec{v}'_\parallel + \vec{\beta} v'^0), \\ \vec{v}_\perp &= \vec{v}'_\perp, \end{aligned} \quad (8.34)$$

où les indices « parallèle » et « perpendiculaire » se réfèrent à la vitesse relative des deux référentiels d'inertie. La matrice de transformation peut s'écrire sous la forme (7.15).

Signalons qu'une transformation de Lorentz ne permet pas de changer le genre d'un quadrivecteur. En effet la pseudo-norme d'un quadrivecteur, qui détermine son genre, est un invariant relativiste. Elle ne peut donc être modifiée en passant d'un référentiel à l'autre. Une grandeur physique représentée par un quadrivecteur d'un genre particulier gardera donc ce genre quel que soit l'observateur.

De plus, une transformation de Lorentz de type (8.34) ne change pas le signe de la composante temporelle d'un quadrivecteur **de genre temps ou de genre lumière**. En effet, pour un quadrivecteur  $v$  de genre temps (lumière), on a  $|v^0| > |\vec{v}|$

8. Pour plus d'informations sur le groupe de Lorentz, on peut consulter, par exemple, les références suivantes : Morton Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1962, p. 491; J. D. Jackson, sect. 11.7 (biblio).

( $|v^0| = |\vec{v}|$ ). Puisque  $|\vec{v}| > |\beta| |\vec{v}| \geq \vec{\beta} \cdot \vec{v}$ , on constate que la première des relations (8.34) ne permet pas de modifier le signe de  $v^0$  par un changement de référentiel.

Les transformations de Lorentz les plus générales possibles (non homogènes) sont

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu + X^\mu, \quad (8.35)$$

où les nombres  $X^\mu$  traduisent une translation (dans le temps et dans l'espace) de l'origine du repère (voir sections 7.4 et 8.1). Les transformations de Lorentz homogènes forment un sous-groupe du groupe de transformations (8.35). Un élément de ce groupe, appelé *groupe de Poincaré*, est déterminé par les six paramètres de la transformation homogène plus les quatre paramètres liés à la translation. Le groupe de Poincaré comprend donc dix paramètres essentiels. Il admet également une représentation matricielle (voir annexe C). Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, les translations dans l'espace-temps n'affectent pas les quadrivecteurs construits à partir de quadrivecteurs déplacement.

## 8.4 INTERVALLE DE TEMPS PROPRE

Considérons deux événements infiniment voisins sur la ligne d'univers d'un mobile ponctuel. Les composantes contravariantes  $dx^\mu$  du quadrivecteur  $d\mathbf{x}$ , intervalle d'espace-temps déterminé par ces deux événements, sont données, dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , par

$$dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, d\vec{r}). \quad (8.36)$$

Ces grandeurs sont bien les composantes d'un quadrivecteur puisqu'elles résultent de la différence entre deux quadrivecteurs position (on peut également différentier les deux membres d'une transformation de Lorentz pour le démontrer). La pseudo-norme de ce quadrivecteur  $d\mathbf{x}$  est l'invariant relativiste (8.30)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (8.37)$$

L'invariant défini par

$$\frac{ds}{c} = d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \quad (8.38)$$

est appelé intervalle de temps propre (voir section 3.2). Dans cette expression,  $\vec{v}$  est la vitesse instantanée  $d\vec{r}/dt$  d'un mobile qui parcourt l'intervalle d'espace  $d\vec{r}$  durant l'intervalle de temps  $dt$ . Puisque  $d\tau$  est un invariant, on peut écrire, par exemple, dans deux référentiels d'inertie différents  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = dt', \quad (8.39)$$

où le référentiel  $\mathcal{R}'$  coïncide avec le référentiel propre du mobile à l'instant considéré puisque  $\vec{v}' = \vec{0}$  à cet instant. On voit donc que la grandeur  $d\tau$  définie par la relation (8.38) mesure l'intervalle de temps infinitésimal qui s'écoule dans le référentiel propre du mobile alors qu'un observateur inertiel, qui voit le mobile animé d'une vitesse  $\vec{v}$ , mesure un intervalle de temps  $dt$ . On peut également montrer directement que  $d\tau$  est bien un invariant en utilisant la loi de transformation (7.36) de  $dt$  et la loi de transformation (7.38) de la vitesse  $\vec{v}$ .

Il est important de noter que, contrairement à la vitesse relative  $\vec{V}$  de deux référentiels d'inertie, la vitesse  $\vec{v}$  n'est pas nécessairement constante ; dès lors, pour éviter toute confusion, nous utiliserons la notation explicite

$$\gamma(v) = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (8.40)$$

La notation  $\gamma = \gamma(V)$  sera réservée au facteur intervenant dans une transformation de Lorentz.

Pour établir l'expression de l'intervalle de temps propre, nous avons en fait adopté ce que l'on appelle l'*hypothèse de l'horloge*, qui affirme que deux horloges de même vitesse instantanée  $w$ , l'une étant accélérée (avec  $v(t) = w$  au temps considéré) et l'autre pas (avec  $v(t) = w$  constant pour toute valeur de  $t$ ), subissent instantanément le même facteur de dilatation du temps  $\gamma(w)$ . Einstein lui-même, dans sa communication de 1905, suppose que le taux d'écoulement du temps ne dépend que de la vitesse uniquement. Depuis, l'hypothèse de l'horloge a reçu des vérifications expérimentales probantes<sup>9</sup>.

Considérons la ligne d'univers d'une particule en mouvement quelconque dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Durant le trajet de la particule, entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  dans ce référentiel, une horloge constamment immobile par rapport à cette particule mesure un intervalle de temps propre fini  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  qui est donné par la relation

$$\Delta\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} dt. \quad (8.41)$$

Cette quantité est bien un invariant puisqu'elle résulte de l'addition de grandeurs invariantes. Le temps propre joue donc, en cinématique relativiste, le rôle de paramètre universel qu'avait le temps en cinématique newtonienne. Pour calculer l'in-

9. C. W. Sherwin, « Some Recent Experimental Tests of the "Clock Paradox" », *Physical Review*, vol. 120, n° 1, 1 October 1960, p. 17-21 ; J. Bailey *et al.*, « Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit », *Nature*, vol. 268, 28 July 1977, p. 301-305.

tégrale (8.41), il faut connaître la vitesse de la particule en fonction du temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . On peut cependant immédiatement constater que  $\Delta\tau \leq \Delta t = t_2 - t_1$  car  $\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \leq 1$  : on retrouve à nouveau le phénomène de dilatation des temps.

Si la signature  $(-+++)$  est choisie (voir section 8.2), l'invariant  $ds^2$  s'écrit  $ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2$ . Il a été avancé que cette convention est pédagogiquement intéressante car la métrique de Minkowski apparaît alors comme le prolongement naturel de la métrique euclidienne à trois dimensions<sup>10</sup>. Cependant, ce choix pourrait laisser supposer que l'intervalle spatio-temporel est la généralisation de l'intervalle spatial  $|d\vec{r}|$ , alors que cet intervalle n'est pas un invariant pour les transformations de Galilée. De plus, en relativité générale, cet argument tombe car les coefficients de la métrique n'ont plus les valeurs simples  $\pm 1$ .

## 8.5 QUADRIVECTEUR VITESSE

Soient  $dx^\mu = (cdt, d\vec{r})$  les composantes contravariantes du quadrivecteur  $dx$ , intervalle d'espace-temps déterminé par deux événements infiniment voisins sur la ligne d'univers d'un mobile ponctuel. En divisant ces différentielles par un invariant relativiste, en l'occurrence l'intervalle de temps propre  $d\tau$ , on obtient les composantes d'un nouveau quadrivecteur  $u$ , appelé *quadrivecteur vitesse* ou *quadrivitesse*, dont nous désignerons les composantes contravariantes par  $u^\mu$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (8.42)$$

Le quadrivecteur vitesse est donc la dérivée du quadrivecteur position par rapport au temps propre. En utilisant la relation (8.38) et la convention (8.40),  $d\tau = dt/\gamma(v)$ , on obtient

$$(u^0, \vec{u}) = (\gamma(v) c, \gamma(v) \vec{v}). \quad (8.43)$$

La pseudo-norme de ce quadrivecteur  $u^2 = (u^0)^2 - \vec{u}^2$  est un invariant relativiste. On peut donc l'évaluer, par exemple, dans le référentiel propre du mobile (dans ce référentiel,  $\vec{v} = \vec{0}$  à l'instant considéré). On obtient ainsi

$$u^2 = c^2 > 0. \quad (8.44)$$

Le quadrivecteur vitesse est donc toujours de genre temps. Il pointe vers le futur car  $u^0 > 0$ .

---

10. On introduit parfois la variable temporelle complexe  $\lambda = ict$ , avec  $i^2 = -1$ . On obtient ainsi  $ds^2 = d\lambda^2 + d\vec{r}^2$ . Cette convention, qui permet l'utilisation d'une métrique euclidienne  $4 \times 4$ , est encore parfois employée pour faciliter certains calculs. On est cependant en droit de douter de son intérêt pédagogique.

Par sa définition (8.42), le quadrivecteur vitesse est tangent à la ligne d'univers du mobile. Désignons par  $\mathcal{R}'$  le référentiel propre instantané de ce dernier ; dans ce référentiel, on a  $u'^{\mu} = (c, \vec{0})$ . Avec les conventions d'écriture tensorielle définies dans la section 8.1, il vient  $u = c e'_t$ , où  $e'_t$  est le quadrivecteur de base dans la direction du temps pour le référentiel  $\mathcal{R}'$ . On peut donc dire que le quadrivecteur vitesse indique la direction, dans l'espace-temps, de l'axe du temps instantané d'un mobile.

Soit un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$  animé d'une vitesse  $\vec{V}$  par rapport à un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . Les composantes  $(u^0, \vec{u})$  et  $(u'^0, \vec{u}')$  du quadrivecteur vitesse, relatives aux référentiels  $\mathcal{R}$  et à  $\mathcal{R}'$ , sont unies, comme pour n'importe quel quadrivecteur, par la loi de transformation (8.34)

$$\begin{aligned} u^0 &= \gamma(u'^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{u}'), \\ \vec{u}_{\parallel} &= \gamma(\vec{u}'_{\parallel} + \vec{\beta} u'^0), \\ \vec{u}_{\perp} &= \vec{u}'_{\perp}, \end{aligned} \quad (8.45)$$

où  $(\vec{u}_{\parallel}, \vec{u}_{\perp})$  et  $(\vec{u}'_{\parallel}, \vec{u}'_{\perp})$  sont les composantes longitudinales et transversales de  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  par rapport à la vitesse relative  $\vec{V}$ . Ces relations et l'expression (8.43) donnent pour les composantes spatiales

$$\gamma(v) \vec{v}_{\parallel} = \gamma \gamma(v') (\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}), \quad (8.46)$$

$$\gamma(v) \vec{v}_{\perp} = \gamma(v') \vec{v}'_{\perp}. \quad (8.47)$$

La loi de transformation de la composante temporelle  $u^0$  donne

$$\frac{\gamma(v)}{\gamma(v')} = \gamma \left( 1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2} \right). \quad (8.48)$$

On obtient donc pour la composante longitudinale de la vitesse

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}}, \quad (8.49)$$

en accord avec l'équation (7.39), et pour la composante transversale

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp}}{\gamma \left( 1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2} \right)}, \quad (8.50)$$

en accord avec l'équation (7.40). En additionnant les relations (8.49) et (8.50), on retrouve évidemment, après quelques manipulations algébriques, la loi vectorielle de transformation des vitesses (7.38).

## 8.6 VITESSE RELATIVE

Soient  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  les vitesses constantes de deux particules numérotées 1 et 2, en mouvement de translation uniforme dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . On appelle vitesse relative de la particule 1 par rapport à la particule 2,  $\vec{v}_{1/2}$ , la vitesse que possède la particule 1 pour un observateur au repos par rapport à la particule 2. On définit de même  $\vec{v}_{2/1}$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les quadrivitesse respectives  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  des deux particules sont données par

$$u_1^\mu = \gamma(v_1)(c, \vec{v}_1) \quad \text{et} \quad u_2^\mu = \gamma(v_2)(c, \vec{v}_2). \quad (8.51)$$

Du point de vue d'un observateur au repos par rapport à la particule 1 (référentiel  $\mathcal{R}'$ ), ces quadrivitesse s'expriment par

$$u_1'^\mu = (c, \vec{0}) \quad \text{et} \quad u_2'^\mu = \gamma(v_{2/1})(c, \vec{v}_{2/1}). \quad (8.52)$$

Un observateur au repos par rapport à la particule 2 (référentiel  $\mathcal{R}''$ ) trouve quant à lui

$$u_1''^\mu = \gamma(v_{1/2})(c, \vec{v}_{1/2}) \quad \text{et} \quad u_2''^\mu = (c, \vec{0}). \quad (8.53)$$

L'invariance du produit scalaire des deux quadrivecteurs  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  permet d'obtenir très simplement les modules des vitesses relatives en fonction des vitesses dans le référentiel  $\mathcal{R}$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \gamma(v_1)\gamma(v_2)(c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \gamma(v_{2/1})c^2 = \gamma(v_{1/2})c^2. \quad (8.54)$$

On en déduit que  $\vec{v}_{1/2}^2 = \vec{v}_{2/1}^2$ , puisque la fonction  $\gamma(v)$  ne dépend que de  $\vec{v}^2$ . De plus, on constate que  $\vec{v}_{1/2}^2$  est, comme  $\gamma(v_{1/2})$ , un invariant relativiste : tous les observateurs peuvent donc s'accorder sur le module de la vitesse relative entre les deux particules. Les composantes de la vitesse relative dépendent évidemment du choix du système de référence de chaque observateur. Cependant, comme  $\vec{v}_{1/2}^2 = \vec{v}_{2/1}^2$ , ces deux vitesses relatives sont simplement liées par une rotation (voir section 7.2). Sachant que  $\vec{v}^2/c^2 = 1 - 1/\gamma(v)^2$ , on trouve

$$\vec{v}_{1/2}^2 = \vec{v}_{2/1}^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2}, \quad (8.55)$$

en utilisant l'identité vectorielle  $(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ . Si  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ , on obtient bien que la vitesse relative est nulle. Lorsque les modules des vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont petits devant  $c$ , on retrouve la relation classique  $\vec{v}_{1/2}^2 = \vec{v}_{2/1}^2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$ .

## 8.7 QUADRIVECTEUR ACCÉLÉRATION

Le *quadrivecteur accélération*, ou *quadriaccélération*, est par définition la dérivée du quadrivecteur vitesse par rapport au temps propre. Les composantes contravariantes  $a^\mu$  de ce quadrivecteur sont donc données par

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}. \quad (8.56)$$

En cinématique classique, l'accélération  $\vec{\phi}$  d'un mobile est définie par

$$\vec{\phi} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (8.57)$$

Partons d'une relation, facile à établir, qui nous sera utile par la suite

$$\frac{d}{dt}\gamma(v) = \gamma(v)^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{\phi}}{c^2}. \quad (8.58)$$

En utilisant les relations (8.38) et (8.43), on obtient donc

$$a^0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\phi}}{c \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^2}, \quad (8.59)$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{\phi}}{\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)} + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{\phi})\vec{v}}{c^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^2}. \quad (8.60)$$

La pseudo-norme du quadrivecteur accélération peut être évaluée dans le référentiel propre du mobile, plus précisément dans un référentiel d'inertie  $\mathcal{I}$  coïncidant instantanément avec le référentiel propre. Dans ce référentiel  $\mathcal{I}$ , la vitesse instantanée est



nulle  $\vec{v} = \vec{0}$ . Par contre, comme la vitesse n'est pas constante, la vitesse à un instant ultérieur infinitésimal  $dt$  n'est plus nulle, mais vaut  $d\vec{v}$ . Le mobile est donc soumis à une accélération  $\vec{\phi}(0) = d\vec{v}/dt$ , qu'on appelle *l'accélération propre* à l'instant considéré. Évidemment, dès cet instant  $dt$ , le référentiel propre n'est plus équivalent au référentiel  $\mathcal{I}$ , et il faut changer à nouveau de référentiel d'inertie pour s'adapter à la condition de vitesse nulle. Dans le référentiel propre, les expressions (8.59) et (8.60) se réduisent à

$$a^0 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{a} = \vec{\phi}(0), \quad (8.61)$$

On peut en déduire que

$$a^2 = (a^0)^2 - \vec{a}^2 = -\vec{\phi}^2(0). \quad (8.62)$$

La pseudo-norme  $a^2$  du quadrivecteur accélération propre  $\mathbf{a}$  étant un invariant, la relation ci-dessus nous indique que tous les observateurs d'inertie peuvent s'accorder sur la grandeur de l'accélération propre subie par le mobile, qui n'est en général pas constante. La relation (8.62) nous indique également que le quadrivecteur accélération est toujours de genre espace. On trouve de la même manière

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = u^0 a^0 - \vec{u} \cdot \vec{a} = 0. \quad (8.63)$$

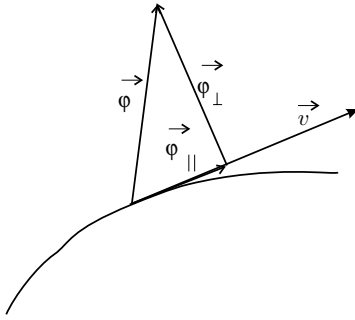
Les quadrivecteurs vitesse et accélération sont donc orthogonaux (au sens de Minkowski). Ce résultat peut être obtenu autrement, en notant que la pseudo-norme  $u^2$  du quadrivecteur vitesse est égale à  $c^2$ . On en déduit

$$0 = \frac{d}{d\tau} u^2 = 2 \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = 2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}. \quad (8.64)$$

Soit un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$  animé d'une vitesse  $\vec{V}$  par rapport à un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . Les composantes  $(a^0, \vec{a})$  et  $(a'^0, \vec{a}')$  du quadrivecteur accélération, relatives aux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , sont unies par la loi de transformation (8.34)

$$\begin{aligned} a^0 &= \gamma(a'^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{a}'), \\ \vec{a}_{\parallel} &= \gamma(\vec{a}'_{\parallel} + \vec{\beta} a'^0), \\ \vec{a}_{\perp} &= \vec{a}'_{\perp}, \end{aligned} \quad (8.65)$$

où  $(\vec{a}_{\parallel}, \vec{a}_{\perp})$  et  $(\vec{a}'_{\parallel}, \vec{a}'_{\perp})$  sont les composantes longitudinales et transversales de  $\vec{a}$  et  $\vec{a}'$  par rapport à la vitesse relative  $\vec{V}$ .



**Figure 8.5** Décomposition du vecteur accélération  $\vec{\phi}$  en ses composantes parallèle et perpendiculaire par rapport à la vitesse instantanée  $\vec{v}$ .

Au moyen des relations (8.65), il est possible de relier les vecteurs accélération  $\vec{\phi}$  et  $\vec{\phi}'$  dans deux référentiels différents. En particulier, regardons comment s'exprime l'accélération  $\vec{\phi}$  mesurée dans un référentiel d'inertie quelconque en fonction de l'accélération propre du mobile. Pour cela supposons que le référentiel  $\mathcal{R}'$  coïncide à l'instant considéré avec le référentiel propre du mobile, c'est-à-dire que  $\vec{v}' = \vec{0}$  et  $\vec{v} = \vec{V}$ ; à cet instant l'accélération  $\vec{\phi}'$  est égale à l'accélération propre du mobile,  $\vec{\phi}(0)$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on peut décomposer les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{\phi}$  en leurs composantes parallèles et perpendiculaires par rapport à la vitesse instantanée  $\vec{v}$  du mobile (c'est-à-dire par rapport à la vitesse relative  $\vec{V}$ ), comme illustré sur la figure 8.5. En écrivant, pour le vecteur  $\vec{\phi}$ ,

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_{||} + \vec{\phi}_{\perp} \quad \text{avec} \quad \vec{v} \cdot \vec{\phi}_{\perp} = 0, \quad (8.66)$$

et les relations équivalentes pour le vecteur  $\vec{a}$ , on obtient à partir de la relation (8.60)

$$\vec{a}_{||} = \frac{\vec{\phi}_{||}}{\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\perp} = \frac{\vec{\phi}_{\perp}}{\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)}, \quad (8.67)$$

en notant <sup>11</sup> que  $(\vec{v} \cdot \vec{\phi})\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\phi}_{||})\vec{v} = \vec{v}^2 \vec{\phi}_{||}$ .

Écrites dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , les relations (8.59) et (8.60) deviennent

$$a'^0 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{a}' = \vec{\phi}(0), \quad (8.68)$$

c'est-à-dire

$$\vec{a}'_{||} = \vec{\phi}_{||}(0) \quad \text{et} \quad \vec{a}'_{\perp} = \vec{\phi}_{\perp}(0). \quad (8.69)$$

En utilisant les relations (8.67) et (8.69) dans les formules (8.65) on obtient

$$\vec{\phi}_{||} = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{3/2} \vec{\phi}_{||}(0) \quad \text{et} \quad \vec{\phi}_{\perp} = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) \vec{\phi}_{\perp}(0) \quad (8.70)$$

car  $\vec{v} = \vec{V}$ . Donc, les expressions (8.59) et (8.67) du quadrivecteur accélération peuvent également s'écrire

11. Voir note de bas de page n° 7, p. 130.

$$a^0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\varphi}(0)}{c \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad \vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{\varphi}_{\parallel}(0)}{\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad \vec{a}_{\perp} = \vec{\varphi}_{\perp}(0). \quad (8.71)$$

## 8.8 MOBILE À ACCÉLÉRATION PROPRE CONSTANTE

Le référentiel attaché à un mobile accéléré n'est pas un référentiel d'inertie. Cependant, à chaque instant, on peut définir un référentiel d'inertie qui est au repos par rapport au mobile : le référentiel propre instantané du mobile. À chaque instant, l'accélération  $\vec{\varphi}(0)$  ressentie par le mobile est l'accélération mesurée dans son référentiel propre instantané (voir section précédente). En relativité galiléenne, l'accélération est la même dans tous les référentiels d'inertie, et est égale à  $\vec{\varphi}(0)$  ; on peut le montrer en dérivant une fois par rapport au temps la relation (1.7) et en tenant compte du fait que  $t = t'$ . Par contre, dans le cadre de la relativité restreinte, l'accélération  $\vec{\varphi}$  mesurée dans un référentiel d'inertie est reliée à l'accélération propre  $\vec{\varphi}(0)$  par les relations (8.70).

Étudions le cas d'un mobile se déplaçant sur l'axe  $Ox$  d'un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , et subissant une accélération propre constante de module  $A$ . On suppose que les conditions initiales sont telles que

$$x = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0. \quad (8.72)$$

En mécanique newtonienne, nous avons  $\varphi = \varphi(0) = A$ . Le mouvement de ce mobile est donc régi par les équations

$$\frac{dv}{dt} = A \quad \text{et} \quad v = \frac{dx}{dt}. \quad (8.73)$$

En imposant les conditions initiales (8.72), la solution des équations (8.73) est

$$v = At \quad \text{et} \quad x = \frac{A}{2}t^2. \quad (8.74)$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, nous avons  $\varphi(0) = A$ . En vertu de la relation (8.70), les équations du mouvement sont

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} A \quad \text{et} \quad v = \frac{dx}{dt}. \quad (8.75)$$

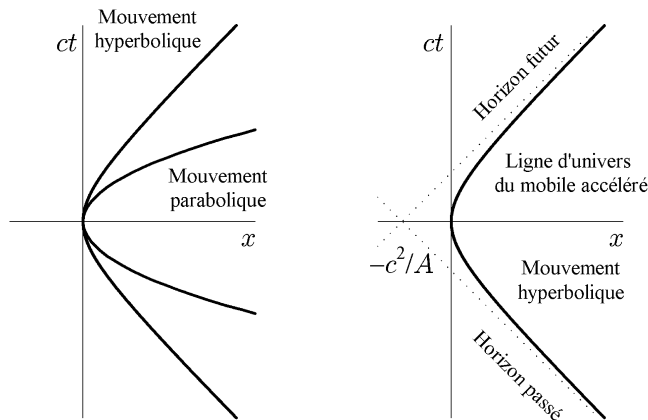
En imposant les conditions initiales (8.72), l'intégration des équations (8.75) donne<sup>12</sup>

$$v = \frac{At}{\left(1 + \frac{A^2 t^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad \text{et} \quad x = \frac{c^2}{A} \left[ \left(1 + \frac{A^2 t^2}{c^2}\right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (8.76)$$

Remarquons que  $v$  tend vers la vitesse de la lumière quand  $t$  tend vers l'infini. Au contraire, pour un temps  $t$  suffisamment petit, la vitesse du mobile n'est pas très élevée et les effets relativistes restent faibles. On trouve facilement que les équations (8.76) se réduisent aux relations non relativistes (8.74) pour  $t \ll c/A$ . La relation donnant  $x$  en fonction de  $t$  peut également s'écrire

$$\left(\frac{Ax}{c^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{Act}{c^2}\right)^2 = 1. \quad (8.77)$$

Dans l'espace-temps rapporté au repère orthonormé  $(O; ct, x)$  cette équation décrit une hyperbole de centre  $(0, -c^2/A)$  dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices  $ct = \pm x$ ; c'est pourquoi le mouvement relativiste du mobile à accélération propre constante est parfois appelé *mouvement hyperbolique*. En vertu de l'équation (8.74) la solution classique de ce problème est un *mouvement parabolique*. Ces situations sont illustrées sur la figure 8.6. On voit clairement que pour des temps suffisamment petits, c'est-à-dire pour des vitesses petites devant la vitesse de la lumière, les deux lignes d'univers, parabolique et hyperbolique, coïncident.



**Figure 8.6** Ligne d'univers d'un mobile maintenant une accélération propre constante, de module  $A$ , suivant l'axe  $Ox$  d'un référentiel d'inertie et passant à vitesse nulle par l'abscisse  $x = 0$  en  $t = 0$ .

12. Primitives utiles pour cette section :  $\int dx / (1 - x^2)^{3/2} = x / (1 - x^2)^{1/2}$ ,  $\int x dx / (1 + x^2)^{1/2} = (1 + x^2)^{1/2}$ ,  $\int dx / (1 + x^2)^{1/2} = \arg \sinh x$ .

Aucune information ne pouvant se propager plus vite que la lumière, on voit sur la figure 8.6 que les événements du demi-plan situé à gauche de l'asymptote d'équation  $ct = x + c^2/A$  ne peuvent pas envoyer de l'information vers le mobile. Cette asymptote définit ce que l'on appelle un *horizon événementiel futur*. De même, le mobile ne peut envoyer aucune information vers les événements du demi-plan situé à gauche de l'asymptote d'équation  $ct = -(x + c^2/A)$ . Cette asymptote définit ce que l'on appelle un *horizon événementiel passé*. La notion d'horizon est très importante en relativité générale.

Comme on vient de le voir, la théorie de la relativité restreinte permet de décrire le mouvement d'un mobile uniformément accéléré. Cependant, le référentiel propre de ce mobile n'est pas un référentiel d'inertie et donc la métrique qui lui est associée n'est pas de type Minkowski <sup>13</sup>.

Notons encore qu'en dérivant la première relation (8.76) par rapport à  $t$  on obtient

$$\varphi = \frac{A}{\left(1 + \frac{A^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (8.78)$$

Donc, pour les observateurs au repos dans le laboratoire d'inertie, l'accélération n'est pas constante mais tend vers zéro, ce qui traduit le fait que la vitesse du mobile s'approche progressivement de la vitesse de la lumière sans jamais la dépasser.

Les grandeurs position, vitesse et accélération peuvent également être exprimées en fonction du temps propre  $\tau$  marqué par les horloges qui accompagnent le mobile. En imposant la synchronisation des horloges du mobile et du laboratoire à l'instant zéro ( $t = \tau = 0$ ) et en utilisant la première relation (8.76), l'intégration de l'expression (8.38) donne

$$t = \frac{c}{A} \sinh\left(\frac{A\tau}{c}\right). \quad (8.79)$$

À partir des relations (8.76) et (8.78) on obtient

$$v = c \tanh\left(\frac{A\tau}{c}\right), \quad x = \frac{c^2}{A} \left[ \cosh\left(\frac{A\tau}{c}\right) - 1 \right], \quad \varphi = \frac{A}{\cosh^3\left(\frac{A\tau}{c}\right)}. \quad (8.80)$$

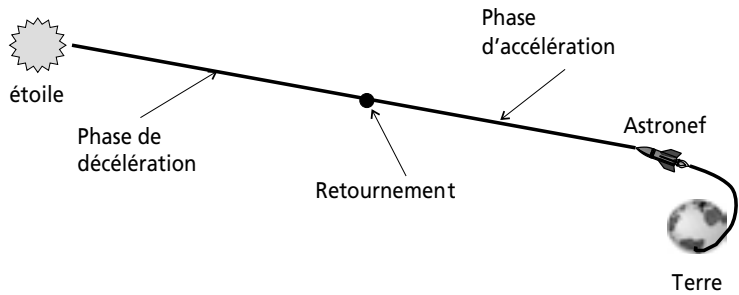
La ligne d'univers de ce mobile, paramétrée par son temps propre, peut donc s'écrire dans le référentiel d'inertie

$$(ct, x, y, z) = \left( \frac{c^2}{A} \sinh\left(\frac{A\tau}{c}\right), \frac{c^2}{A} \left[ \cosh\left(\frac{A\tau}{c}\right) - 1 \right], 0, 0 \right) \quad (8.81)$$

avec  $-\infty < \tau < +\infty$ ,

13. Voir l'ouvrage de F. W. Sears et R. W. Brehme (biblio).

où l'on suppose que les coordonnées initiales  $y$  et  $z$  sont nulles. On voit que lorsque  $A\tau/c$  croît au-delà de 1 les effets relativistes deviennent très importants. Les relations (8.79) et (8.80) sont les équations paramétriques de la trajectoire en fonction du temps propre. Remarquons que  $x = \pm\infty$  quand  $\tau = \pm\infty$  ; on en conclut que, malgré le phénomène de dilatation des temps, on met un temps infini pour parcourir une distance infinie.



**TABEAU 8.2** CARACTÉRISTIQUES D'UN VOYAGE ALLER RETOUR POUR UN ASTRONEF MAINTENANT UNE ACCÉLÉRATION PROPRE CONSTANTE DE MODULE ÉGAL À  $10 \text{ m/s}^2$  (LE SYMBOLE « a-l » SIGNIFIE ANNÉE-LUMIÈRE). L'ILLUSTRATION ACCOMPAGNANT LE TABLEAU NE PRÉSENTE QUE LE TRAJET ALLER.

Objectif	Distance de l'objectif	Durée sur Terre	Durée à bord	Vitesse maximale	Facteur $\gamma$ maximal
Lune	384 000 km	6,88 heures	6,88 heures	62 km/s	1,000 000 02
Pluton	$6 \times 10^9$ km	35,9 jours	35,9 jours	7 744 km/s	1,000 3
Proxima du Centaure	4,3 a-l	11,8 ans	7,0 ans	0,952 $c$	3,26
Nébuleuse du Crabe	1000 a-l	2003,8 ans	26,5 ans	0,999 998 $c$	527
Centre de la Galaxie	30 000 a-l	60 003,8 ans	39,4 ans	0,999 999 998 $c$	15 780
Galaxie d'Andromède	$3 \times 10^6$ a-l	$6 \times 10^6$ ans	56,9 ans	$(1 - 2 \times 10^{-13}) c$	$1,58 \times 10^6$
Limites de l'univers	$1,5 \times 10^{10}$ a-l	$3 \times 10^{10}$ ans	89,3 ans	$(1 - 8 \times 10^{-21}) c$	$7,89 \times 10^9$

Les formules (8.79) et (8.80) indiquent qu'une vitesse proche de  $c$  peut être atteinte après un temps ( $t$  ou  $\tau$ ) de l'ordre de  $c/A$ . Supposons, par exemple, qu'un astronef maintienne une accélération propre constante de module égal à  $10 \text{ m/s}^2$ . Dans ce cas, les astronautes à bord ressentiront une pesanteur semblable à celle

qu'ils ressentent sur Terre <sup>14</sup>. Il leur faudra alors environ un an pour atteindre une vitesse proche de celle de la lumière.

Si la mission spatiale consiste en un trajet aller retour le plus rapidement possible, alors l'astronef va commencer par accélérer vers son objectif. À mi-parcours, il effectue une « manœuvre de retournement » pour décélérer jusqu'à son objectif. À peine arrivé (le temps pour l'équipage de prendre une photo souvenir), l'astronef repart vers la Terre, en effectuant également une manœuvre de retournement à mi-distance pour s'arrêter dans le Système solaire. Durant le premier et le troisième quart du voyage, la vitesse du vaisseau ne cesse d'augmenter pour culminer à chaque fois au moment des manœuvres de retournement. Si l'objectif est extrêmement lointain, la vitesse du vaisseau peut approcher de très près celle de la lumière. Dans ce cas, le décalage temporel entre les astronautes et la Terre peut devenir très important. Ce phénomène est illustré dans le tableau 8.2 pour quelques objectifs « possibles » de missions spatiales. La distance de l'objectif est indiquée en kilomètres ou en années-lumière. La colonne « Durée sur Terre » indique le temps qui s'écoule sur Terre entre le départ et le retour des astronautes, celle « Durée à bord » indique la durée du voyage pour les astronautes. La vitesse atteinte juste avant chaque manœuvre de retournement est reprise dans la colonne « Vitesse maximale ». À cette vitesse correspond un facteur  $\gamma$  indiqué dans la dernière colonne. Chose proprement stupéfiante, un voyage aller retour jusqu'au centre de la Galaxie ne prendrait ainsi pour les astronautes qu'un peu moins de 40 années alors que, sur Terre, il se serait écoulé plus de 60 000 ans <sup>15</sup>. Le monde qu'ils découvriraient à leur retour n'aurait plus rien de commun avec celui qu'ils ont connu. De même, les confins de l'univers observable pourraient être atteints (en théorie) dans la durée d'une vie humaine. La Terre attendrait cependant 30 milliards d'années le rapport des hardis explorateurs.

Un astronef relativiste fonctionne donc comme une machine à voyager dans le temps, mais uniquement vers le futur <sup>16</sup>. Les principes physiques sur lesquels pourrait s'appuyer le fonctionnement d'un tel astronef seront partiellement discutés dans la section 10.2.

---

14. L'accélération de la pesanteur normalisée est égale à  $9,806\,65\text{ m/s}^2$ . Maintenir une telle accélération pendant un temps qui excède quelques minutes demande une débauche d'énergie absolument prohibitive dans l'état actuel de notre technologie.

15. Le fait qu'un astronef puisse accomplir un trajet aller retour de 60 000 années-lumière en moins de 40 ans n'implique nullement qu'une vitesse supraluminique a été atteinte puisque la distance et la durée sont mesurées dans des référentiels différents : la distance est mesurée dans le référentiel de la Terre et la durée est mesurée à bord de l'astronef.

16. Voir, par exemple, le livre de P. J. Nahin, Tech Note 6, p. 467 (biblio).



**Illustration 8.1** Dessins de Raoul Giordan, extraits de *Sidéral* n° 34 (Arédit, 1973). Un astronef relativiste fonctionne comme une machine à explorer le futur mais sans retour possible vers le présent.

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 267.

### 8.1 Calcul tensoriel

- Montrer qu'un tenseur dont les composantes sont  $\delta_{ij}^k$  dans une base donnée garde les mêmes composantes dans n'importe quelle base.
- Montrer que le tenseur métrique inverse est symétrique et deux fois contravariant.
- Montrer qu'un tenseur deux fois covariant (ou contravariant) symétrique dans une base est symétrique dans n'importe quelle base.
- Montrer que les formules (8.19) sont correctes du point de vue tensoriel.
- Montrer que la trace d'un tenseur est un invariant. Calculer la trace du tenseur métrique.
- Montrer que les relations (8.20) impliquent que le produit scalaire de deux quadrivecteurs est bien un invariant.



## 8.2 Calcul matriciel avec $\Lambda$

Montrer, en utilisant la matrice (7.15), que  $g = \tilde{\Lambda} g \Lambda$  et que  $\det \Lambda = 1$ . Calculer la trace de cette matrice ; pourquoi n'est-ce pas un invariant ?

## 8.3 Manipulations de formules

Établir les relations (8.55), (8.58), (8.59) et (8.60).

## 8.4 Intervalle de temps propre

Montrer, au moyen des relations (7.36) et (7.38), que l'intervalle de temps propre  $d\tau$  est un invariant.

## 8.5 Groupe de Lorentz

- (a) Montrer que les transformations de Lorentz générales forment un groupe, appelé groupe de Lorentz homogène.
- (b) Montrer, à l'aide de transformations infinitésimales, que le groupe de Lorentz ne comprend que 6 paramètres essentiels (une transformation de Lorentz est infinitésimale si la matrice correspondante peut s'écrire comme  $I + M$  avec  $I$  la matrice identité  $4 \times 4$  et  $M$  une matrice dont tous les éléments sont infinitésimaux).
- (c) Montrer que l'ensemble des transformations de Lorentz  $\Lambda$  vérifiant les conditions  $\det \Lambda = 1$  et  $\Lambda_0^0 \geq 1$  est un sous-groupe du groupe de Lorentz homogène, appelé groupe de Lorentz restreint. Donner un argument simple montrant que les transformations telles que  $\det \Lambda = -1$  ou  $\Lambda_0^0 \leq -1$  ne peuvent pas former un sous-groupe.

## 8.6 Propriétés des genres de quadrivecteurs

On désigne par  $u$  et  $v$  deux quadrivecteurs.

- (a) Montrer que si  $u$  et  $v$  sont de genre temps ou de genre lumière,  $u^0 v^0$  est du même signe que  $u \cdot v$  dans tout référentiel.
- (b) Montrer que si  $u$  et  $v$  sont de genre lumière, une condition nécessaire et suffisante pour que  $u$  et  $v$  soient orthogonaux ( $u \cdot v = 0$ ) est qu'ils soient parallèles ( $u = \lambda v$ ).
- (c) Montrer que si  $u$  est de genre temps et  $u \cdot v = 0$ , avec  $v \neq 0$ , alors  $v$  est de genre espace. Que peut-on dire si  $u$  est de genre lumière ?

- (d) Montrer qu'un quadrivecteur de genre temps, ou de genre espace, peut toujours s'exprimer comme la somme (ou la différence) de deux quadrivecteurs de genre lumière.
- (e) Si  $u$  et  $v$  sont de genre temps, montrer que  $(u \cdot v)^2 \geq u^2 v^2$ . Quand a-t-on l'égalité ?
- (f) Si  $u$  et  $v$  sont de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur, montrer que  $\sqrt{(u+v)^2} \geq \sqrt{u^2} + \sqrt{v^2}$ . Quand a-t-on l'égalité ?

## 8.7 Quadrivitesse, simultanéité et accélération

Soit un observateur de quadrivitesse  $u_O$  en mouvement uniforme dans un référentiel d'inertie, une particule  $P$  de quadriaccélération  $a_P$  se déplaçant avec une vitesse variable dans ce référentiel et deux événements  $A$  et  $B$  reliés par un quadrivecteur déplacement  $x$ .

- (a) Montrer que  $A$  et  $B$  sont simultanés pour cet observateur si  $u_O \cdot x = 0$ . Sous cette condition, donner la forme invariante de la distance spatiale  $d$  entre les deux événements.
- (b) Si on a toujours la propriété  $u_O \cdot a_P = 0$  au cours du déplacement de  $P$ , que peut-on dire de la vitesse de  $P$  dans le référentiel où  $O$  est au repos (attention ! Nous avons montré dans le cours une relation toujours vraie  $u \cdot a = 0$ , mais dans celle-ci  $u$  et  $a$  sont des quadrivecteurs relatifs à un **même objet**, par exemple une particule, tandis que, dans la relation proposée, les quadrivecteurs se réfèrent à **deux objets différents**) ?

## 8.8 Colinéarité de trois particules

On dit que trois particules se déplacent de façon colinéaire si, dans un **certain référentiel galiléen**, leurs vitesses sont parallèles. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit le cas est que les quadrivitesse  $u$ ,  $v$  et  $w$  de ces particules soient linéairement dépendantes.

## 8.9 Accélération sur une hélice

Dans un référentiel galiléen, une particule effectue un mouvement hélicoïdal, dont l'équation paramétrique est donnée par

$$x = R \cos(\omega t), \quad y = R \sin(\omega t), \quad z = ht,$$

où  $R$ ,  $\omega$  et  $h$  sont des constantes.

- (a) Montrer que, dans ce référentiel, son accélération est transversale.  
 (b) Calculer son accélération propre.  
 (c) Quel doit être le lien entre  $R$ ,  $\omega$  et  $h$  pour que le mouvement ait un sens ?

### 8.10 Accélération et loi de transformation

Soit, dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , une particule possédant une vitesse  $\vec{v}$  et une accélération  $\vec{\phi} = d\vec{v}/dt$ .

- (a) Montrer que  $\vec{\phi}^2(0) = \gamma(v)^6 [\vec{\phi}^2 - (\vec{v} \wedge \vec{\phi})^2/c^2]$ . Cette quantité est un invariant.  
 (b) Soit un autre référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  uni au premier par une transformation de Lorentz sans rotation de vitesse  $\vec{V}$ . Montrer que la loi de transformation de l'accélération est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_{\parallel} &= \frac{\vec{\phi}'_{\parallel}}{\gamma^3 (1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2)^3}, \\ \vec{\phi}_{\perp} &= \frac{1}{\gamma^2 (1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2)^3} \left[ \vec{\phi}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} \vec{V} \wedge (\vec{\phi}' \wedge \vec{v}') \right].\end{aligned}$$

### 8.11 Le mouvement hyperbolique sous forme covariante

- (a) Une particule se déplace sur un droite avec une accélération propre constante  $\phi(0) = A$ , ce qui correspond à un mouvement hyperbolique dans l'espace-temps. On note  $u$  sa quadrivitesse,  $a$  sa quadriaccélération,  $\theta$  sa rapidité et  $\tau$  le temps propre sur sa ligne d'univers.  
 i. Montrer que  $a^2 = -c^2 (d\theta/d\tau)^2$ .  
 ii. Démontrer la relation

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{A^2}{c^2} u.$$

- (b) On s'intéresse à présent à la propriété réciproque : montrer que la relation ci-dessus implique un mouvement rectiligne à accélération propre constante.  
 i. En différentiant l'équation, toujours vraie,  $u \cdot a = 0$ , montrer que l'accélération propre possède un module constant  $|\vec{\phi}(0)| = A$ .  
 ii. En intégrant l'équation (8.82), montrer qu'elle implique un mouvement rectiligne, dans un référentiel convenablement choisi. Montrer que ce résultat est compatible avec les formules établies dans la section 8.8.

### 8.12 Le photon peut-il rattraper le mobile ?

Dans un référentiel galiléen, un mobile possède une accélération propre constante  $A$ , et suit donc, dans l'espace-temps  $(ct, x)$ , un mouvement hyperbolique. Le mobile

passé par l'origine avec une vitesse nulle au temps  $t = 0$ . Au même moment, un photon est émis en direction du mobile, à une distance  $c^2/A$  en arrière de ce mobile.

- (a) Quelle est, dans le référentiel galiléen, la distance qui sépare le photon du mobile au cours du temps ?
- (b) Montrer que la distance entre le photon et le mobile reste constamment égale à  $c^2/A$  dans le référentiel propre du mobile.
- (c) Illustrer ce phénomène dans un diagramme de Minkowski.

### 8.13 Forme d'une transformation de Lorentz générale

Une transformation de Lorentz  $\Lambda$  change les coordonnées contravariantes d'un quadrivecteur selon la formule (8.10) et vérifie la relation (8.31). L'ensemble des transformations de Lorentz  $\Lambda$  vérifiant, en outre, les conditions  $\det \Lambda = 1$  et  $\Lambda_0^0 \geq 1$  forme un groupe, appelé groupe de Lorentz restreint (voir le problème 8.5). Le but de ce problème est de montrer que toute matrice  $\Lambda$  du groupe de Lorentz restreint peut s'exprimer à l'aide de deux rotations et d'une transformation de Lorentz spéciale le long de l'axe  $Ox$ .

- (a) Montrer qu'il est toujours possible de paramétrer les éléments de matrice de la colonne temporelle de  $\Lambda$  sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\Lambda_0^0 &= \cosh \alpha, \quad \Lambda_0^1 = \sinh \alpha \cos \theta, \quad \Lambda_0^2 = \sinh \alpha \sin \theta \sin \phi, \\ \Lambda_0^3 &= -\sinh \alpha \sin \theta \cos \phi.\end{aligned}$$

Montrer qu'on peut limiter les domaines de variation des paramètres aux valeurs :  $\alpha \geq 0$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

- (b) Toujours avec les conventions résultant des relations (8.10) et (8.31), rappeler les formes des transformations de Lorentz  $R_x(\phi)$ , rotation d'un angle  $\phi$  autour de l'axe  $Ox$ ,  $R_y(\theta)$ , rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oy$ ,  $L_x(\alpha)$ , transformation de Lorentz spéciale le long de l'axe  $Ox$  avec une vitesse  $V = c \tanh \alpha$ . Déterminer la forme de la rotation  $R(\theta, \phi) = R_x(\phi)R_y(\theta)$ .
- (c) Vérifier que  $\Lambda$  et  $R(\theta, \phi)L_x(\alpha)$  produisent la même action sur un quadrivecteur de la forme  $(x'^0, \vec{0})$ .
- (d) En déduire que la matrice  $\Lambda$  se met sous la forme

$$\Lambda = R(\theta, \phi)L_x(\alpha)R',$$

où  $R'$  est une rotation pure.

### 8.14 Mouvement d'un gyroscope

On considère un petit gyroscope monté sur un mobile, le gyroscope et le mobile étant supposés ponctuels. Cette situation peut, par exemple, illustrer le spin d'un

électron tournant autour du noyau d'un atome. En un événement  $E_1$  donné sur la ligne d'univers du mobile, on définit le référentiel propre du mobile  $\mathcal{R}_1$ , comme le référentiel d'inertie dans lequel le mobile est au repos. Dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$ , le gyroscope est caractérisé par son moment cinétique  $\vec{l}$ . On suppose qu'aucun couple n'agit sur le gyroscope (des forces peuvent agir sur le mobile, mais celles-ci déterminent seulement sa ligne d'univers et sont sans objet ici). Afin de gérer facilement les changements de référentiels, on définit un quadrivecteur  $\mathbf{L}$  (appelé de Pauli-Lubanski) par ses composantes dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$  :  $L^\mu = (L'^0 = 0, \vec{L}' = \vec{l})$ .

- (a) Rappeler l'équation du mouvement  $d\vec{L}'/dt'$  du gyroscope au voisinage de l'événement  $E_1$ . C'est une équation de la mécanique classique. Que dit la mécanique classique pour  $dL'^0/dt'$  ?
- (b) Rappeler la valeur, dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$ , des composantes  $u'^\mu = (u'^0, \vec{u}')$  de la quadrivitesse  $\mathbf{u}$  du mobile en l'événement  $E_1$ .
- (c) Dédurre la forme d'une relation entre  $dL^\alpha/d\tau$  et  $u^\alpha$  qui s'applique dans tout référentiel et à tout instant.
- (d) En se basant sur les valeurs de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}$  et de  $d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{L})/d\tau$ , préciser davantage la forme de la relation précédente. Montrer que  $d\mathbf{L}/d\tau$  peut s'exprimer à l'aide de la quadrivitesse  $\mathbf{u}$ , de la quadriaccélération  $\mathbf{a}$  du mobile et du quadrivecteur  $\mathbf{L}$  du gyroscope. Cette forme n'est en fait rien d'autre que l'expression covariante de la précession de Thomas.

## 8.15 Symétries dans l'espace-temps

On se place dans l'espace-temps de Minkowski (espace à 4 dimensions muni de la métrique  $g_{\mu\nu}$  habituelle dans une base cartésienne). Nous définissons une transformation de Lorentz  $\Lambda$  comme une transformation linéaire qui conserve le produit scalaire de 2 quadrivecteurs  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\Lambda\mathbf{a}) \cdot (\Lambda\mathbf{b})$ .

Dans le cours, la transformation de Lorentz a été introduite du point de vue passif. Elle correspond à un **changement des vecteurs de base**, et en examinant les changements sur les coordonnées contravariantes **d'un même quadrivecteur**. Dans le point de vue actif, adopté ici, la transformation **change un quadrivecteur**, mais en **conservant les états de base**. Le nouveau quadrivecteur possède d'autres composantes que celles du quadrivecteur original.

On considère un quadrivecteur  $\mathbf{a}$  de genre temps ou de genre espace ( $a^2 \neq 0$ ). On désigne par  $\Sigma_{\mathbf{a}}$ , l'opération de symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $\mathbf{a}$  : elle change  $\mathbf{a}$  en  $-\mathbf{a}$  et laisse invariant un quadrivecteur orthogonal à  $\mathbf{a}$ .

- (a) Montrer que tout quadrivecteur  $\mathbf{v}$  se décompose, de façon unique, en une composante  $v_{\parallel}$ , parallèle à  $\mathbf{a}$ , et une composante  $v_{\perp}$ , orthogonale à  $\mathbf{a}$ . Exprimer  $v_{\parallel}$  et  $v_{\perp}$  en fonction de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{v}$ .
- (b) Montrer que  $\Sigma_{\lambda\mathbf{a}} = \Sigma_{\mathbf{a}}$ , si  $\lambda$  est un nombre réel  $\neq 0$ . Montrer que  $\Sigma_{\mathbf{a}}^2 = I$  est la matrice identité dans l'espace de Minkowski, quel que soit le quadrivecteur  $\mathbf{a}$ .

À l'aide de la première question, écrire l'expression de  $\Sigma_a v$  en fonction de  $a$  et  $v$ .

- (c) Montrer que  $\Sigma_a$  est une transformation de Lorentz avec  $(\det \Sigma_a) = -1$  et  $(\text{Tr} \Sigma_a) = 2$ .
- (d) Soit  $\Lambda$  la transformation de Lorentz qui transforme  $a$  en  $b$  :  $b = \Lambda a$ . Montrer l'égalité

$$\Lambda \Sigma_a \Lambda^{-1} = \Sigma_b.$$

- (e) On considère deux quadrivecteurs  $a$  et  $b$  de même pseudo-norme  $a^2 = b^2$ , avec  $(a - b)^2 \neq 0$ . Montrer que la matrice  $\Sigma_{a-b} = \Sigma_{b-a}$  échange les quadrivecteurs  $a$  et  $b$ .

- (f) La matrice identité  $I$  peut toujours se mettre sous la forme d'un produit de 2 symétries :  $\Sigma_a^2 = I$ . Le but de cette question est de montrer que

*N'importe quelle transformation de Lorentz  $\Lambda$  se met sous la forme d'un produit d'au plus 4 symétries.*

La propriété étant vraie pour  $I$ , on se bornera par la suite à l'étude des matrices  $\Lambda \neq I$ .

Dans un sous-espace à  $n = 1$  dimension  $\mathcal{E}_1$ , montrer qu'une matrice  $\Lambda$  donnée, qui laisse invariant ce sous-espace ( $a \in \mathcal{E}_1 \Rightarrow \Lambda a \in \mathcal{E}_1$ ), s'exprime à l'aide d'une symétrie.

Le principe de la démonstration est basé sur un raisonnement par récurrence. Supposons que dans un sous espace  $\mathcal{E}_{n-1}$  à  $n - 1$  dimensions, toute matrice de Lorentz  $\Lambda$ , qui laisse invariant ce sous-espace, s'exprime à l'aide d'au plus  $n - 1$  symétries :  $\Lambda = \Sigma_{a_1} \Sigma_{a_2} \dots \Sigma_{a_{n-1}}$ . Il s'agit de montrer que, dans ces conditions, toute matrice  $\Lambda$  d'un sous espace  $\mathcal{E}_n$  à  $n$  dimensions, qui laisse invariant ce sous-espace, s'exprime à l'aide d'au plus  $n$  symétries. Le théorème cherché s'obtient alors en faisant  $n = 4$  et en remarquant que  $\mathcal{E}_4$  est l'espace de Minkowski.

Pour cette partie délicate de la démonstration, on étudiera deux cas : *i)* il existe un quadrivecteur  $v \in \mathcal{E}_n$  tel que  $\Lambda v = v$  ; *ii)* il n'existe pas un tel vecteur. Dans ce dernier cas, il sera utile d'introduire le quadrivecteur  $w = \Lambda v - v$  ; on sera encore amené à considérer le cas  $w^2 = 0$ ,  $\forall v$  et  $w^2 \neq 0$ .

- (g) Soient 2 quadrivecteurs  $a$  et  $b$  de genre temps, pointant vers le futur et de même pseudo-norme  $a^2 = b^2$ ,  $a^0 > 0, b^0 > 0$ . On définit une transformation de Lorentz particulière  $\Lambda_{a \rightarrow b}$ , de déterminant unité  $(\det \Lambda_{a \rightarrow b}) = +1$ , qui transforme  $a$  en  $b$  ( $\Lambda_{a \rightarrow b} a = b$ ) et qui laisse invariant tout quadrivecteur  $u$  orthogonal à la fois à  $a$  et  $b$  ( $\Lambda_{a \rightarrow b} u = u$  si  $a \cdot u = b \cdot u = 0$ ). Montrer qu'une forme possible est

$$\Lambda_{a \rightarrow b} = \Sigma_{a+b} \Sigma_a.$$

Expliciter son action sur un quadrivecteur quelconque  $v$ , à l'aide de  $a$ ,  $b$  et  $v$ . Est-il possible d'avoir  $\Lambda_{a \rightarrow b} = \Lambda_{b \rightarrow a}$  ?

## Chapitre 9

# Dynamique relativiste

*Avant tout, il faut considérer la matière  
comme un transformateur d'énergie,  
comme une source d'énergie.*

Gaston BACHELARD (1934)

### 9.1 ÉQUATION FONDAMENTALE

Puisque les lois de la mécanique newtonienne sont invariantes pour les transformations de Galilée (voir section 1.2), elles sont incompatibles avec la théorie de la relativité restreinte. Ainsi, nous avons été amenés à formuler une loi relativiste de composition des vitesses qui se réduit à la loi galiléenne d'addition lorsque les vitesses sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière. De même, il faut remplacer la dynamique classique de Newton par une dynamique relativiste, c'est-à-dire qui soit invariante pour les transformations de Lorentz. Comme les lois classiques sont très bien vérifiées par l'expérience usuelle, il faut que les nouvelles lois se réduisent aux lois classiques dans le domaine des faibles vitesses.

La loi fondamentale de la mécanique de Newton pour une particule peut se mettre sous la forme

$$\vec{F}_N = \frac{d\vec{p}_N}{dt}, \quad (9.1)$$

où l'indice N désigne des grandeurs définies dans le cadre de la mécanique newtonienne. Dans cette équation,  $t$  est le temps (absolu) et  $\vec{F}_N$  est la force qui modifie l'impulsion  $\vec{p}_N$ . Cette dernière grandeur est donnée par la relation

$$\vec{p}_N = m \vec{v}, \quad (9.2)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse de la particule et  $m$  est sa masse d'inertie, considérée comme invariante en mécanique classique. De la loi (9.1) découlent des lois de conservation d'une importance capitale en mécanique classique : la conservation de l'impulsion et la conservation de l'énergie<sup>1</sup> pour un système isolé.

L'homologue relativiste de l'équation fondamentale de la dynamique newtonienne doit être un invariant de forme pour les transformations de Lorentz, ce qui est manifestement le cas si cette équation se présente comme l'égalité de deux quadrivecteurs. À partir du quadrivecteur vitesse  $\mathbf{u}$  défini par la relation (8.42), on peut construire un quadrivecteur  $\mathbf{p}$  pour une particule massive (le cas des particules de masse nulle sera traité dans la section 9.5), que nous appellerons provisoirement « quadrivecteur impulsion »,

$$\mathbf{p} = m \mathbf{u}. \quad (9.3)$$

Dans cette formule, la masse  $m$ , supposée invariante, est identique à la masse d'inertie utilisée en mécanique newtonienne. On définit généralement la masse d'un corps comme la « quantité de matière » qui lui est associée, mais ce concept est mal défini. Il est préférable de relier la masse à des notions plus facilement mesurables : l'inertie, le contenu énergétique, la capacité de générer un champ de gravitation. Cette dernière propriété concerne directement la relativité générale et ne sera pas traitée ici. Il est tout à fait remarquable que la masse soit associée à trois propriétés qui peuvent *a priori* paraître sans rapport entre-elles. Par exemple, nous verrons que c'est le même paramètre qui intervient dans la formule (9.6), reliée à l'inertie d'un corps, et dans la formule (9.19), exprimant son contenu en énergie<sup>2</sup>.

Les composantes de ce quadrivecteur  $\mathbf{p}$  ont bien la dimension d'une impulsion ; ses parties temporelle et spatiale sont

$$p^0 = m \gamma(v) c, \quad (9.4)$$

$$\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}, \quad (9.5)$$

où  $\gamma(v)$  est donné par la formule (8.40). Nous conviendrons d'appeler la grandeur (9.5) *impulsion relativiste*. À la limite non relativiste, celle-ci se réduit à la défini-

1. Il faut évidemment tenir compte du fait que de l'énergie mécanique peut se transformer en d'autres formes d'énergie, comme de l'énergie calorifique par exemple.

2. Pour plus d'informations sur ce sujet, on peut consulter les références suivantes : John Roche, « What is mass ? », *European Journal of Physics*, vol. 26, 2005, p. 225-242 ; l'ouvrage de F. W. Sears et R. W. Brehme, p. 111 (biblio).



tion newtonienne de l'impulsion,  $m \vec{v}$ . La partie temporelle du quadrivecteur  $\vec{p}$  sera discutée dans les sections suivantes. La version relativiste la plus naturelle de l'équation (9.1) est une égalité entre quadrivecteurs. On peut raisonnablement penser à la forme suivante

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}, \quad (9.6)$$

où  $d\tau$  est la variation de temps propre pour la particule ;  $d\vec{p}/d\tau$  est manifestement un quadrivecteur et  $\vec{K}$  est ce que l'on conviendra d'appeler le *quadrivecteur force*, ou *force de Minkowski*. La fabrication de quadrivecteurs n'est pas un but en soi. Il faut que les grandeurs ainsi définies présentent une quelconque utilité pour la physique. La démarche adoptée ici consiste à mettre en évidence les équivalents relativistes des grandeurs entrant dans les lois classiques pour retrouver ces mêmes lois dans un cadre plus général.

L'équation (9.6) n'a un sens que si on est à même d'exprimer les composantes de ces quadrivecteurs en fonction de grandeurs mesurables. C'est manifestement le cas pour les quantités du deuxième membre de cette équation. On peut raisonnablement s'attendre à ce qu'il existe un lien entre le quadrivecteur force  $\vec{K}$  et la force  $\vec{F}$  au sens classique du terme. L'équation (9.1) ne signifie pas que la partie spatiale  $\vec{K}$  du quadrivecteur  $\vec{K}$  s'identifie au vecteur force  $\vec{F}$  ; elle implique uniquement que  $\vec{K}$  tende vers  $\vec{F}$  pour des vitesses faibles devant celle de la lumière. Le lien exact entre ces deux vecteurs dépend des propriétés de transformation des composantes de la force. Deux approches sont possibles pour déterminer le comportement de  $\vec{F}$  pour les transformations de Lorentz.

Une première procédure consiste à se baser sur le fait que, fondamentalement, une force ne peut provenir que d'un nombre limité de sources. La force peut avoir une origine gravitationnelle, électromagnétique, ou éventuellement nucléaire. C'est donc à la théorie décrivant un de ces phénomènes de fournir l'expression de la force correspondante sous une forme covariante, de manière à connaître automatiquement ses propriétés de transformation. Malheureusement, il n'est pas (encore) possible d'obtenir une théorie covariante pour toutes les sources possibles de forces. Il n'y a que pour la théorie électromagnétique classique que l'on puisse obtenir une équation covariante de la force<sup>3</sup> (rappelons que les transformations de Lorentz ont été construites à l'origine de manière à préserver l'invariance de cette théorie). Mais cela est suffisant pour établir le lien entre  $\vec{K}$  et  $\vec{F}$ , puisque les propriétés de transformation des forces doivent être indépendantes de leur origine. Le calcul de la force électromagnétique sous forme covariante sera abordé dans la section 11.7. Signalons que le lien entre  $\vec{K}$  et  $\vec{F}$  que l'on peut en déduire concorde avec celui présenté dans la section 9.4.

---

3. L'introduction des forces de gravité dans le formalisme d'Einstein ne peut se faire qu'au prix d'une refonte de la relativité restreinte en une autre théorie, la relativité générale.

La procédure alternative est d'éviter la nécessité d'utiliser une théorie physique autre que la mécanique, en donnant une **définition** de la force semblable à celle de la mécanique classique :

Dans un référentiel d'inertie, une force  $\vec{F}$ , agissant sur une particule, modifie son impulsion relativiste d'une quantité  $d\vec{p}$  pendant un intervalle de temps  $dt$  suivant la loi

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9.7)$$

Cette définition implique que l'impulsion d'une particule ne varie pas en l'absence de force agissant sur cette particule. Que se passe-t-il pour un système plus complexe de différents corps en interaction mutuelle ? Nous verrons dans le chapitre 10 consacré aux systèmes de particules qu'il est raisonnable de supposer que l'impulsion totale d'un système est une grandeur conservée lorsque ce système est isolé. De plus, si nous voulons que la conservation de l'impulsion dans un référentiel d'inertie entraîne sa conservation dans n'importe quel autre référentiel d'inertie, alors il faut nécessairement que l'impulsion d'une particule soit définie par la relation (9.5). Le concept d'impulsion relativiste, l'équation fondamentale (9.6) et la définition (9.7) semblent alors former un tout cohérent. Nous allons donc introduire le postulat suivant :

L'impulsion relativiste  $\vec{p}$  d'une particule libre de masse  $m$ , animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel d'inertie, est donnée par

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = m \gamma(v) \vec{v}. \quad (9.8)$$

Le lien entre la force agissant sur une particule et son accélération peut être établi au moyen des relations (9.7) et (9.8). En utilisant la relation (8.58), on trouve alors pour la force

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \gamma(v)^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{\Phi}}{c^2} \vec{v} + m \gamma(v) \vec{\Phi}. \quad (9.9)$$

Remarquons qu'en décomposant les vecteurs en leurs composantes parallèle et perpendiculaire à la vitesse instantanée, on obtient

$$\vec{F}_{\parallel} = m \gamma(v)^3 \vec{\Phi}_{\parallel}, \quad (9.10)$$

$$\vec{F}_{\perp} = m \gamma(v) \vec{\Phi}_{\perp}. \quad (9.11)$$

Ces deux relations peuvent également se mettre sous la forme

$$\vec{\phi} = \frac{\vec{F} - (\vec{\beta} \cdot \vec{F})\vec{\beta}}{m \gamma(v)}. \quad (9.12)$$

On en conclut donc que le vecteur force  $\vec{F}$  n'est pas parallèle au vecteur accélération  $\vec{\phi}$ . Cela vient du fait que ces vecteurs ne sont pas les parties spatiales de quadri-vecteurs. Nous reviendrons sur le lien entre la force  $\vec{F}$  et le quadrivecteur  $\mathbf{K}$  dans la section 9.4. Mais avant cela, il est nécessaire d'introduire la notion d'énergie en relativité restreinte.

## 9.2 ÉQUIVALENCE MASSE-ÉNERGIE

Considérons une particule soumise à l'action d'une force  $\vec{F}$ . Définissons, comme en mécanique classique, son énergie cinétique relativiste  $T$  comme étant le travail de la force appliquée  $T = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . On a donc

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (9.13)$$

dans le référentiel où la vitesse de la particule est  $\vec{v}$ . En vertu de la relation (9.9), on obtient

$$\frac{dT}{dt} = m \gamma(v)^3 \vec{\phi} \cdot \vec{v}. \quad (9.14)$$

En utilisant l'expression (8.58), on peut écrire

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} (m \gamma(v) c^2). \quad (9.15)$$

En intégrant on obtient

$$T = m \gamma(v) c^2 + T_0. \quad (9.16)$$

Mais par définition de l'énergie cinétique, on doit avoir  $T = 0$  quand  $\vec{v} = \vec{0}$ , ce qui fixe la constante d'intégration  $T_0 = -m c^2$ . On a finalement

$$T = m \gamma(v) c^2 - m c^2. \quad (9.17)$$

Alors, la grandeur

$$E = m c^2 + T = m \gamma(v) c^2 \quad (9.18)$$

est par définition l'énergie totale de la particule, composée de l'énergie cinétique (9.17) et de l'énergie dite « de repos »

$$E_0 = m c^2. \quad (9.19)$$

La notion d'énergie de repos n'a de sens physique que dans la mesure où il existe un ou des processus capables de transformer la masse d'une particule en une forme d'énergie, par exemple, du rayonnement ou de l'énergie cinétique pour d'autres particules. La théorie de la relativité restreinte ne peut pas nous dire si un tel mécanisme de conversion existe dans la nature, mais, dans l'hypothèse où un tel processus existe, elle fixe par la formule (9.19) la quantité d'énergie qui peut être libérée par la désintégration complète d'une masse donnée. Il est à noter qu'en raison du coefficient  $c^2$ , l'énergie libérée par *annihilation* est gigantesque. Par exemple, la transformation de 1 g de matière en énergie pure fournirait environ  $9 \times 10^{13}$  J, 25 millions de kWh, ce qui équivaut à la production quotidienne en énergie d'une centrale nucléaire d'une puissance de 1 GW. C'est également la quantité d'énergie qui est libérée par une charge nucléaire <sup>4</sup> de 20 kt.

Ce sont les physiciens travaillant sur les noyaux atomiques qui ont, les premiers, observé la transformation de la masse en énergie. Dès les années 30, différentes expériences de physique nucléaire ont parfaitement confirmé les prédictions de la relativité restreinte <sup>5</sup>. Par exemple, des protons rapides peuvent pénétrer un noyau de <sup>7</sup>Li pour former un noyau composé instable qui ne tarde pas à se désintégrer en deux particules  $\alpha$  (<sup>4</sup>He). La somme des masses des deux noyaux dans la voie de sortie est inférieure à la somme des masses des deux particules dans la voie d'entrée. Des mesures précises de masse des noyaux montrent que cette différence de masse a été convertie en énergie cinétique des deux particules  $\alpha$ .

Au cours d'une réaction de fission nucléaire, une fraction de la masse de l'ordre de  $8 \times 10^{-4}$  est convertie en énergie. Dans une réaction de fusion thermonucléaire, une fraction plus importante d'environ  $4 \times 10^{-3}$  peut être transformée. Ces processus de conversion, qui sont responsables de la production d'énergie dans les étoiles, sont malheureusement utilisés dans les bombes à hydrogène (ou bombes H) <sup>6</sup>. La conversion de la matière en énergie peut être totale dans une réaction d'annihilation matière-antimatière, comme par exemple la désintégration d'un électron et d'un positron en une paire de photons  $\gamma$ . En fait, même au cours d'une réaction chimique,

4. L'énergie dégagée par les explosifs nucléaires se mesure généralement en énergie équivalente libérée par une masse d'explosif chimique TNT (trinitrotoluène) mesurée en kilotonnes (kt) ou en mégatonnes (Mt). Une énergie de 1 kt correspond à  $4,2 \times 10^{12}$  J.

5. J. Cockcroft et E. Walton, « Experiments with high-velocity positive ions. II. Disintegration of elements by high-velocity protons », *Proceedings of the Royal Society*, vol. A 137, 1932, p. 229-242.

6. Il a été proposé d'utiliser des explosifs nucléaires pour propulser les véhicules spatiaux (voir par exemple l'article de Freeman J. Dyson, « Interstellar Transport », *Physics Today*, October 1968, p. 41-45.)

de la masse est transformée en énergie, mais la fraction de masse convertie est de l'ordre de  $1,5 \times 10^{-10}$ . Il existe donc bien une *équivalence masse-énergie*.

Examinons ce que devient l'énergie  $E$  donnée par la formule (9.18) à la limite des faibles vitesses. En utilisant le fait que

$$\lim_{x \ll 1} (1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad (9.20)$$

on trouve

$$E \approx m c^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \quad \text{pour } v \ll c. \quad (9.21)$$

Le second terme du membre de droite de la formule (9.21) est simplement l'énergie cinétique classique de la particule. On voit que la définition relativiste que nous avons donnée de l'énergie totale permet de retrouver la définition classique de l'énergie cinétique, avec toutefois en plus l'énergie de repos de la particule. Cette énergie résiduelle n'est pas gênante car, en mécanique newtonienne, la masse ne peut jamais être convertie en énergie dans les interactions entre particules. Dans ce cadre, l'énergie de repos ne joue donc aucun rôle et peut être tout simplement ignorée.

En raison du facteur  $\gamma(v)$  intervenant dans la formule de l'énergie cinétique, celle-ci peut croître indéfiniment avec la vitesse, et ce d'autant plus rapidement que  $v$  s'approche de  $c$ . Une masse de 1 kg se déplaçant à 4 % de la vitesse de la lumière possède une énergie cinétique équivalant à environ 20 kt, c'est-à-dire l'énergie dégagée par la première bombe atomique. Avec une vitesse de 0,3  $c$ , l'énergie cinétique de cette masse est d'environ 1 Mt, c'est-à-dire la charge d'une arme thermonucléaire classique. À 98 % de la vitesse de la lumière, la masse possède une énergie cinétique de l'ordre de 100 Mt, l'énergie dégagée par la plus puissante arme nucléaire jamais testée. Cette variation de l'énergie cinétique en fonction de la vitesse est illustrée sur la figure 9.1.

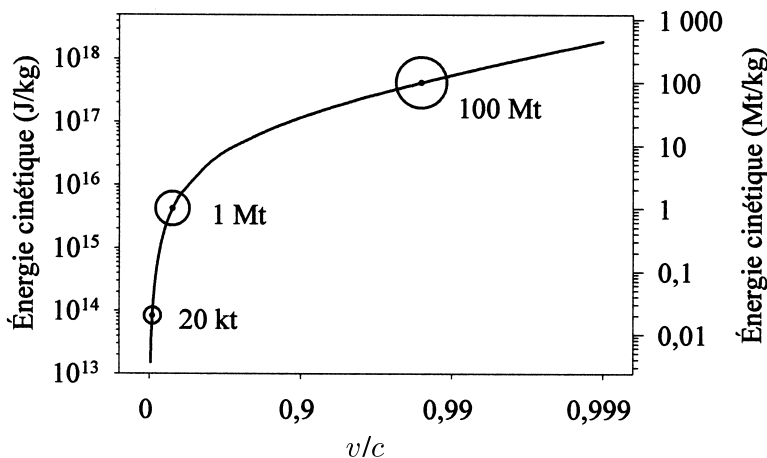


Figure 9.1 Énergie cinétique par unité de masse en fonction de la vitesse.

Des missions spatiales possibles pour un astronef relativiste sont proposées dans la section 8.8. Considérons un astronef de 1000 t se déplaçant à 99 % de la vitesse de la lumière ; un rapide calcul montre que son énergie cinétique est d'environ  $5,5 \times 10^{23}$  J, ce qui correspond à 130 millions de Mt. Cette fabuleuse quantité d'énergie doit être, à peu de chose près, l'énergie qui a été libérée par l'astéroïde ou le noyau de comète<sup>7</sup> qui a percuté la Terre voici 65 millions d'années, mettant probablement fin au règne des dinosaures. À titre de comparaison, la charge de l'arsenal nucléaire mondial a dû avoisiner 20 000 Mt en 1990.

On définit parfois la *masse relativiste*  $m(v)$  d'une particule par la formule  $m(v) = m \gamma(v)$ . Dans ce cas, l'impulsion d'une particule est simplement sa masse relativiste multipliée par sa vitesse, et son énergie totale sa masse relativiste multipliée par  $c^2$ . Cette notion de masse relativiste est peu (ou pas) utile<sup>8</sup>. En fait la masse d'un corps  $m$  est un invariant relativiste. Cette masse est parfois appelée masse au repos, mais le qualificatif de « au repos » est superflu.

### 9.3 QUADRIVECTEUR ÉNERGIE-IMPULSION

Si  $m$  est la masse d'une particule libre et  $\mathbf{u}$  son quadrivecteur vitesse, les parties temporelle et spatiale du quadrivecteur  $\mathbf{p} = m \mathbf{u}$  sont données par

$$p^0 = m \gamma(v) c = \frac{E}{c}, \quad (9.22)$$

$$\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}, \quad (9.23)$$

où  $E$  est l'énergie totale de la particule. On convient donc d'appeler  $\mathbf{p}$  le *quadrivecteur énergie-impulsion* associé à la particule<sup>9</sup>. Des expressions (9.22) et (9.23), on peut tirer deux relations qui sont utiles, l'une donnant la vitesse de la particule libre

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p} c}{E}, \quad (9.24)$$

et l'autre donnant son facteur  $\gamma(v)$

7. Imaginez un objet de près de 3 000 milliards de tonnes heurtant la Terre à la vitesse de 20 km/s.

8. Voir à ce sujet l'article de Lev B. Okun, « The Concept of Mass », *Physics Today*, vol. 42, n° 6, June 1989, p. 31-36. Ce texte est discuté dans *Physics Today*, vol. 43, n° 5, May 1990, p. 13, 15, 115, 117. Des informations complémentaires se trouvent dans un autre article de Lev B. Okun, « The concept of mass (mass, energy, relativity) », *Soviet Physics-Uspekhi*, vol. 32, n° 7, July 1989, p. 629-638.

9. Dans le cadre de la formulation lagrangienne de la mécanique, on montre qu'à toute invariance du lagrangien d'un système pour une translation dans l'espace correspond une impulsion conservée (Voir, par exemple, l'ouvrage de H. Goldstein, C. Poole et J. Saffko, p. 54 (biblio)). De même l'invariance du lagrangien pour les translations dans le temps signifie que l'énergie du système est conservée. Dans le cadre de la relativité restreinte, les coordonnées d'espace et de temps d'un événement deviennent les composantes d'un quadrivecteur position. Il n'est donc pas étonnant que l'énergie et l'impulsion se retrouvent également liées au sein d'un quadrivecteur.

$$\gamma(v) = \frac{E}{m c^2}. \quad (9.25)$$

La pseudo-norme  $\mathbf{p}^2$  du quadrivecteur énergie-impulsion est un invariant relativiste, et est égale à  $m^2 \mathbf{u}^2$ . En utilisant la relation (8.44), on obtient

$$\mathbf{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2. \quad (9.26)$$

On voit ainsi que le quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule matérielle est un quadrivecteur de genre temps. Ce quadrivecteur pointe vers le futur car sa composante temporelle  $E/c$  est par définition positive. Il est important de noter que la relation (9.26) n'est valable que pour une particule libre. On peut la récrire sous la forme

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (9.27)$$

Cette équation est connue sous le nom de *relation d'Einstein*. On peut en déduire le lien entre l'impulsion et l'énergie cinétique d'une particule libre

$$T^2 + 2mc^2 T = \vec{p}^2 c^2. \quad (9.28)$$

Pour de faibles valeurs de la vitesse, plus précisément quand l'énergie cinétique est petite devant l'énergie de repos,  $T \ll mc^2$ , on trouve

$$T \approx \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad (9.29)$$

ce qui est bien l'expression classique de l'énergie cinétique.

Pour les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion, les relations (8.34), (9.22) et (9.23) entraînent, lors d'un changement de référentiel de Lorentz sans rotation

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} &= \gamma \left( \frac{E'}{c} + \vec{\beta} \cdot \vec{p}' \right), \\ \vec{p}_{\parallel} &= \gamma \left( \vec{p}'_{\parallel} + \vec{\beta} \frac{E'}{c} \right), \\ \vec{p}_{\perp} &= \vec{p}'_{\perp}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Supposons que la ligne d'univers d'une particule croise celle d'un observateur et que, au point de l'espace-temps qui marque leur rencontre,  $\mathbf{p}$  soit le quadrivecteur énergie-impulsion de la particule et  $\mathbf{u}$  la quadrivitesse de l'observateur dans un référentiel d'inertie quelconque. L'énergie de la particule  $E(\mathbf{u})$  mesurée par l'observateur est alors donnée par

$$E(\mathbf{u}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}. \quad (9.31)$$

En effet, pour l'observateur, les composantes de sa quadrivitesse sont  $(c, \vec{0})$  et la composante temporelle du quadrivecteur énergie-impulsion de la particule est  $E(\mathbf{u})/c$ . L'invariance du produit scalaire donne bien le résultat (9.31).

## 9.4 QUADRIVECTEUR FORCE

Dans la section 9.1, nous avons défini le quadrivecteur force par la formule  $\mathbf{K} = d\mathbf{p}/d\tau$ . Les parties spatiale et temporelle de ce quadrivecteur peuvent être reliées à la force. En effet, on a

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma(v) \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma(v) \vec{F}, \quad (9.32)$$

car  $\gamma(v) d\tau = dt$  en vertu de la relation (8.38). On a également

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \gamma(v) \frac{d(E/c)}{dt} = \gamma(v) \frac{1}{c} \frac{dT}{dt} = \gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}. \quad (9.33)$$

Finalement, le quadrivecteur force peut s'écrire

$$K^\mu = \left( \gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \gamma(v) \vec{F} \right). \quad (9.34)$$

La loi de transformation de la force  $\vec{F}$  peut être obtenue en utilisant les lois de transformation (8.34) pour les composantes du quadrivecteur (9.34). On a ainsi (rappe-  
lons que  $\vec{\beta} = \vec{V}/c$  est la vitesse relative entre les deux référentiels et  $\gamma = \gamma(V)$ )

$$\begin{aligned} \gamma(v) \vec{F}_\parallel &= \gamma \gamma(v') \left( \vec{F}'_\parallel + \vec{\beta} \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}'}{c} \right), \\ \gamma(v) \vec{F}_\perp &= \gamma(v') \vec{F}'_\perp. \end{aligned} \quad (9.35)$$

En utilisant la formule (8.48), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \vec{F}_\parallel &= \frac{\vec{F}'_\parallel + \vec{\beta} (\vec{F}' \cdot \vec{v}')/c}{1 + \vec{\beta} \cdot \vec{v}'/c}, \\ \vec{F}_\perp &= \frac{\vec{F}'_\perp}{\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{v}'/c)}. \end{aligned} \quad (9.36)$$



La pseudo-norme du quadrivecteur force  $\mathbf{K}$  agissant sur un mobile peut être évaluée dans le référentiel propre du mobile. La relation (9.34) implique

$$\mathbf{K}^2 = -\vec{F}(0)^2, \quad (9.37)$$

où  $\vec{F}(0)$  est la force qui s'exerce sur le mobile dans son référentiel propre. Le quadrivecteur force est donc toujours de genre espace.

## 9.5 PARTICULES DE MASSE NULLE

### 9.5.1 Caractéristiques du quadrivecteur énergie-impulsion

Des considérations théoriques fondamentales font que le photon, particule associée aux ondes électromagnétiques, est considéré comme ayant une masse nulle<sup>10</sup>. Cependant, on montre expérimentalement qu'un photon transporte de l'énergie et de l'impulsion (voir section 10.5.2).

En mécanique newtonienne, l'impulsion d'une particule de masse nulle est nécessairement nulle. Ce n'est pas le cas dans le cadre de la mécanique relativiste. Si on fait l'hypothèse que la relation d'Einstein (9.27) est valable pour une particule de masse nulle, on obtient

$$|\vec{p}| = \frac{E}{c}. \quad (9.38)$$

En vertu de la relation (9.24), sa vitesse est nécessairement égale à  $c$ . En effet, l'énergie d'une particule se déplaçant à la vitesse de la lumière est une quantité finie seulement si la masse de la particule est nulle. Cela peut se montrer en écrivant la relation (9.25) sous la forme

$$m = \frac{E}{c^2} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}. \quad (9.39)$$

Quand  $v = c$ , alors  $\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$  est nul, et  $m = 0$  quelle que soit la valeur de l'énergie  $E$ . Remarquons qu'en tenant compte de la relation (8.41), le temps propre qui s'écoule entre deux événements quelconques situés sur la ligne d'univers d'une telle particule est nul.

La relation d'Einstein a été déduite des relations (9.22) et (9.23) qui ne sont définies que pour des particules massives. On peut obtenir indépendamment la formule (9.38) pour des particules de masse nulle à partir de considérations d'optique relativiste (voir section 9.6). On montre ainsi que la relation d'Einstein peut également s'appliquer aux particules de masse nulle.

---

10. Voir note de bas de page n° 8, p. 111.

L'impulsion d'une particule de masse nulle (9.38) peut également être mise sous la forme

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \hat{e}, \quad (9.40)$$

où le vecteur unitaire  $\hat{e}$  caractérise la direction de propagation de la particule considérée. Le quadrivecteur énergie-impulsion  $p$  associé à cette particule est donc donné par ses composantes

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \frac{E}{c} \hat{e} \right). \quad (9.41)$$

Ce quadrivecteur est de genre lumière et pointe vers le futur.

Le photon, véritable « grain » de lumière, a été proposé par Einstein pour expliquer les résultats expérimentaux concernant l'effet photoélectrique. Ainsi, un faisceau lumineux monochromatique de fréquence  $\nu$  peut être considéré comme étant composé de photons d'énergie égale à  $h\nu$ , expression dans laquelle  $h$  est la constante de Planck (voir section 9.6). L'impulsion de ces particules est donc donnée, en utilisant (9.38), par

$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda}, \quad (9.42)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du faisceau monochromatique considéré ( $E = h\nu$  et  $\nu = c/\lambda$ ). La relation (9.42), étendue aux particules matérielles, confère à celles-ci un aspect ondulatoire qui est un des fondements de la mécanique quantique.

La relation (9.38) nous montre qu'une quantité de mouvement de grandeur  $E/c$  est transférée à un atome quand un photon d'énergie  $E$  est absorbé par cet atome. Si le photon est réfléchi (absorbé puis réémis), l'impulsion transférée peut égaler  $2E/c$ . Cela signifie que les photons exercent sur les corps une pression, appelée *pression de radiation*.

Dans l'espace au niveau de l'orbite terrestre, la pression exercée par la lumière solaire sur un objet réfléchissant, placé perpendiculairement aux rayons du Soleil, est d'environ  $10^{-5}$  N/m<sup>2</sup>, ce qui correspond à peu près au poids d'une pièce de monnaie répartie sur un terrain de football. Cette pression est très faible mais elle agit en continu. Des études sont en cours pour la réalisation de voiliers solaires capables de réaliser des voyages interplanétaires. Une voile en aluminium de 640 000 m<sup>2</sup> et de 2,5 mm d'épaisseur serait susceptible de transporter 2 300 kg de charge utile sur Mars en 400 jours, ou 1 500 kg de charge utile sur Jupiter en 900 jours <sup>11</sup>.

11. Pour plus de détails, voir, par exemple, *Voiliers de l'espace* par Louis Friedman, Services Complets d'Éditions, 1989, coll. « L'Étincelle ».

### 9.5.2 Aberration et effet Doppler

Considérons deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  reliés par une transformation de Lorentz sans rotation de vitesse relative  $\vec{V}$ . Le vecteur unitaire indiquant la direction de propagation d'une particule de masse nulle peut être décomposé en composantes parallèle et perpendiculaire à la vitesse relative  $\vec{V}$  dans les deux référentiels. Par exemple, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on a

$$\hat{e} = \vec{e}_{\parallel} + \vec{e}_{\perp}, \quad \vec{e}_{\perp} \cdot \vec{V} = 0, \quad |\vec{e}_{\parallel}|^2 + |\vec{e}_{\perp}|^2 = 1. \quad (9.43)$$

En utilisant l'expression (9.41) dans les relations (9.30), on trouve que les grandeurs  $E$ ,  $\vec{e}_{\parallel}$  et  $\vec{e}_{\perp}$  satisfont aux lois de transformation

$$\begin{aligned} E &= \gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \hat{e}')E', \\ \vec{e}_{\parallel} &= \gamma(\vec{e}'_{\parallel} + \vec{\beta})\frac{E'}{E}, \\ \vec{e}_{\perp} &= \vec{e}'_{\perp}\frac{E'}{E}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

En introduisant la valeur de  $E'/E$ , tirée de la première de ces équations, dans les deux dernières, on obtient les relations

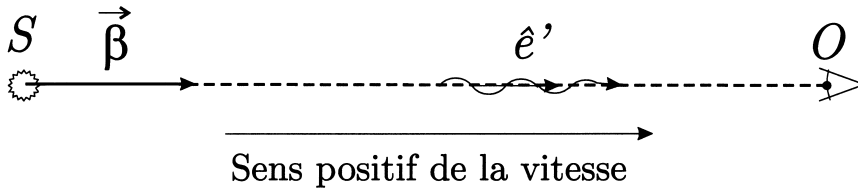
$$\vec{e}_{\parallel} = \frac{\vec{e}'_{\parallel} + \vec{\beta}}{1 + \vec{\beta} \cdot \hat{e}'} \quad \text{et} \quad \vec{e}_{\perp} = \frac{\vec{e}'_{\perp}}{\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \hat{e}')}. \quad (9.45)$$

Après inversion de ces relations, on peut vérifier que le vecteur  $\hat{e}' = \vec{e}'_{\parallel} + \vec{e}'_{\perp}$  est unitaire au même titre que le vecteur  $\hat{e}$  (voir exercice 9.3).

Les relations (9.45), homologues des relations (8.49) et (8.50) établies pour les particules de masse arbitraire, donnent le changement de la direction apparente d'un faisceau lumineux lors du passage du référentiel  $\mathcal{R}'$  au référentiel  $\mathcal{R}$ , d'où leur nom de *formules d'aberration*.

Il est à noter que ce phénomène d'aberration existe aussi en mécanique classique, que ce soit pour des particules matérielles ou des photons. On peut aisément en proposer une illustration. Imaginons un personnage, assis dans un train immobile, regardant tomber la pluie par une journée sans vent. Ce passager observe évidemment les gouttes de pluie tomber verticalement. Voilà que le train s'ébranle et prend de la vitesse. Si notre personnage jette un coup d'œil par la fenêtre, il voit cette fois les gouttes tomber suivant une trajectoire oblique, et cela bien qu'il n'y ait toujours pas de vent. En fait, pendant qu'une goutte parcourt la hauteur de la fenêtre en tombant, le train se déplace et la goutte semble donc décrire une trajectoire oblique. C'est bien un phénomène d'aberration.

Soit une source lumineuse  $S$  monochromatique de fréquence  $\nu_S$  au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Cette source émet donc des photons d'énergie  $E' = h\nu_S$ . Ces



**Figure 9.2** Situation physique dans laquelle un effet Doppler longitudinal peut être observé.

photons sont captés dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par un détecteur avec une énergie  $E = h\nu$ . En vertu de la première relation (9.44) les fréquences  $\nu$  et  $\nu_S$  sont unies par la relation

$$\nu = \gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \hat{e}')\nu_S. \quad (9.46)$$

Dans le cas particulier où les photons se déplacent parallèlement à la direction de la vitesse relative des deux référentiels, on a  $\vec{\beta} \cdot \hat{e}' = \beta$ , avec  $\beta$  est positif ou négatif selon que la source se rapproche ou s'éloigne du détecteur (voir figure 9.2). La relation (9.46) devient alors

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\nu_S. \quad (9.47)$$

Cette variation de fréquence du signal lumineux est l'*effet Doppler longitudinal*. On peut également obtenir cette relation en examinant comment se transforme la distance entre deux impulsions lumineuses quand on passe d'un référentiel d'inertie à un autre (voir exercice 4.4). Pour  $\beta \ll 1$ , la relation (9.47) et son équivalent classique<sup>12</sup> se réduisent toutes deux, au premier ordre en  $\beta$ , à

$$\nu = (1 + \beta)\nu_S. \quad (9.48)$$

Si la source se rapproche du détecteur, la radiation détectée est décalée vers des fréquences plus hautes, c'est-à-dire vers des longueurs d'onde plus courtes ; on a alors ce que l'on appelle un « décalage vers le bleu ». Dans le cas contraire, si la source s'éloigne, la radiation détectée est décalée vers des fréquences plus basses, c'est-à-dire vers des longueurs d'onde plus grandes ; ce phénomène est alors qualifié de « décalage vers le rouge ».

Notons encore que si la source et le détecteur sont disposés de sorte que  $\vec{\beta}$  soit orthogonal à  $\hat{e}'$  à l'instant considéré, la relation (9.46) donne

$$\nu = (1 - \beta^2)^{-1/2}\nu_S. \quad (9.49)$$

12. Voir, par exemple, le cours de Berkeley, p. 322 (biblio).

Cet effet, appelé *effet Doppler transversal*, est purement relativiste <sup>13</sup>.

Les galaxies distantes nous fuient avec une vitesse d'autant plus importante qu'elles sont lointaines. Cette observation capitale pour la compréhension des lois qui régissent notre univers a été faite par Edwin Hubble en 1929, sur base de décalages vers le rouge affectant systématiquement les spectres de ces galaxies. Un rayonnement de longueur d'onde  $\lambda_S$  émis par une galaxie lointaine est ainsi perçu avec une longueur d'onde  $\lambda$  plus grande. On mesure habituellement l'importance de ce phénomène par un nombre  $z$ , le décalage relatif en longueur d'onde, défini par la relation

$$\frac{\lambda}{\lambda_S} = 1 + z. \quad (9.50)$$

Il est important de signaler que le décalage vers le rouge cosmologique n'est pas dû qu'à un effet Doppler, comme on pourrait assez naturellement le penser. Il ne peut s'interpréter correctement que dans le cadre d'un univers en expansion régi par les lois de la relativité générale <sup>14</sup>.

### 9.5.3 Transformation d'intensité

Quand la longueur d'onde d'un faisceau de lumière monochromatique se transforme comme  $\nu = D\nu'$  ou  $\lambda = \lambda'/D$ , avec  $D = \gamma(1 + \beta \cdot \hat{e}')$ , en passant d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  à un référentiel  $\mathcal{R}$ , l'intensité du faisceau (c'est-à-dire l'énergie par unité de temps qui traverse une unité de surface) se transforme comme

$$I = D^2 I'. \quad (9.51)$$

Cette formule peut être démontrée de différentes manières.

La première méthode proposée par Einstein est basée sur la transformation du champ électrique et magnétique d'une onde plane (voir section 11.8). Si l'amplitude de l'onde est désignée par  $E_0$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , alors on trouve  $E_0^2 = D^2 E_0'^2$ , c'est-à-dire  $I = D^2 I'$  puisque l'intensité est proportionnelle à  $E_0^2$ .

Une autre méthode consiste à considérer le faisceau comme composé de photons. Si on considère que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  la séparation entre deux photons est proportionnelle à  $\lambda'$  alors dans le référentiel  $\mathcal{R}$  cette séparation sera proportionnelle à  $\lambda = \lambda'/D$ . Cela signifie que le nombre de photons par unité de volume dans  $\mathcal{R}$  est  $D$  fois le nombre correspondant dans  $\mathcal{R}'$ . Comme les photons progressent à la

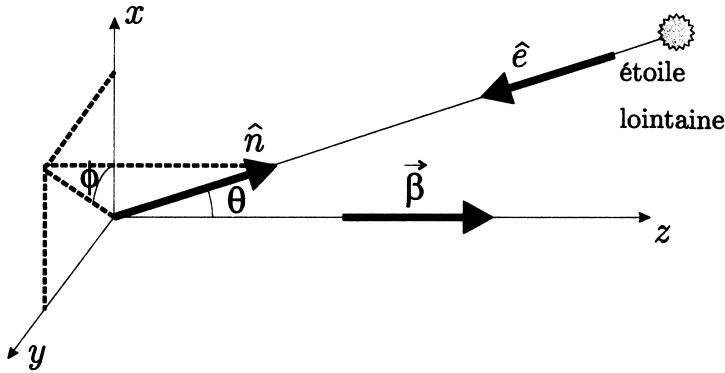
13. Diverses expériences d'« optique relativiste » sont décrites dans les articles suivants : A. Olin *et al.*, « Measurement of the Relativistic Doppler Effect Using 8.6-MeV Capture  $\gamma$  Rays », *Physical Review D*, vol. 8, n° 6, 15 September 1973, p. 1633-1639 ; Roger W. McGowan, David M. Giltner, Scott J. Sternberg et Siu Au Lee, « New Measurement of the Relativistic Doppler Shift in Neon », *Physical Review Letters*, vol. 70, n° 3, 18 January 1993, p. 251-254.

14. Voir, par exemple, l'ouvrage de C. W. Misner, K. S. Thorne et J. A. Wheeler, p. 772-780 (biblio).

vitesse  $c$  dans les deux référentiels, il y aura  $D$  fois plus de photons traversant une unité de surface par unité de temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$  que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Puisque chaque photon possède  $D$  fois plus d'énergie dans le référentiel  $\mathcal{R}$  que dans  $\mathcal{R}'$ , cela implique une transformation d'intensité  $I = D^2 I'$ .

#### 9.5.4 Aspect « relativiste » du ciel

Dans les sections précédentes, nous avons vu que les mesures de direction, fréquence et intensité d'une onde lumineuse pouvaient fortement différer entre deux référentiels d'inertie animés d'une grande vitesse relative. Examinons comment se transformerait l'aspect du ciel à bord d'un astronef animé d'une vitesse relativiste. Pour traiter ce problème, commençons par fixer les notations. Le référentiel  $\mathcal{R}$  est déterminé par le mouvement moyen des étoiles situées, par exemple, jusqu'à quelques milliers d'années-lumière du vaisseau. Les étoiles ont des vitesses de déplacement faibles dans ce référentiel, de l'ordre de  $10^{-4} c$ . Pour notre étude, ces étoiles seront considérées comme fixes. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  sera le référentiel propre de l'astronef, qui se déplace à la vitesse  $\vec{V}$  dans  $\mathcal{R}$ .



**Figure 9.3** Repérage d'une étoile lointaine sur la voûte céleste dans le référentiel lié aux étoiles. Le vecteur unitaire  $\hat{n}$  pointant vers une étoile est manifestement l'opposé du vecteur unitaire  $\hat{e}$  donnant la direction apparente de propagation d'un photon issu de cette étoile.

Choisissons les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  tels que le vecteur  $\vec{\beta} = \vec{V}/c$  soit dirigé suivant les axes  $Oz$  et  $Oz'$  (ce choix des axes va nous permettre d'utiliser facilement des coordonnées sphériques pour traiter le problème). Les formules (9.45) deviennent

$$\begin{aligned} e'^z &= \frac{e^z - \beta}{1 - \beta e^z}, \\ e'^x &= \frac{e^x}{\gamma(1 - \beta e^z)}, \\ e'^y &= \frac{e^y}{\gamma(1 - \beta e^z)}, \end{aligned} \quad (9.52)$$

car  $\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . L'observation consiste à mesurer la lumière émise par les étoiles fixes. Celles-ci sont si lointaines que leur lumière peut être considérée comme formée de photons ayant des directions parallèles. Chaque observateur détectera donc dans son référentiel, en provenance d'une étoile donnée, des photons possédant les mêmes caractéristiques (direction de propagation et énergie). Les directions apparentes de propagation vont être repérées par un système de coordonnées sphériques dans les deux référentiels. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , le vecteur unitaire  $\hat{n}$  qui pointe dans la direction apparente de propagation d'un photon a pour composantes  $(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , où l'angle  $\theta$  est l'angle polaire (par rapport à l'axe  $Oz$ ) et où l'angle  $\phi$  est l'angle azimutal (par rapport à l'axe  $Ox$ ). Le vecteur  $\hat{n}$  indique donc la position apparente de l'étoile. La direction apparente de propagation d'un photon issu de cette étoile est donc telle que  $\hat{e} = -\hat{n}$  (voir figure 9.3). Dans les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , on a alors

$$\begin{aligned}\hat{e} &= (-\sin \theta \cos \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \theta), \\ \hat{e}' &= (-\sin \theta' \cos \phi', -\sin \theta' \sin \phi', -\cos \theta').\end{aligned}\tag{9.53}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\cos \theta' &= \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}, \\ \sin \theta' \cos \phi' &= \frac{\sin \theta \cos \phi}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)}, \\ \sin \theta' \sin \phi' &= \frac{\sin \theta \sin \phi}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)}.\end{aligned}\tag{9.54}$$

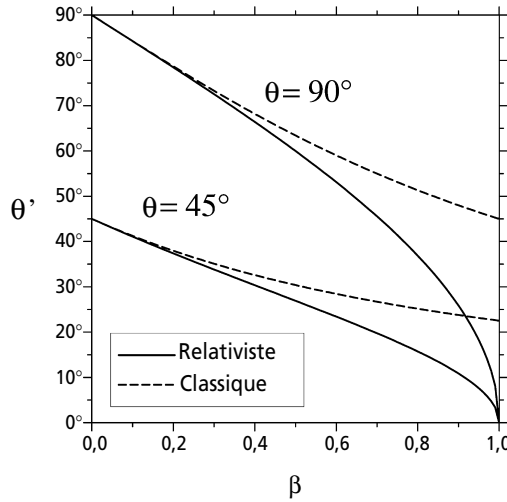
Des deux dernières relations (9.54) on peut déduire l'invariance de l'angle azimutal

$$\phi' = \phi.\tag{9.55}$$

On peut, en utilisant ce résultat, présenter l'aberration sous la forme

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta + \beta)} \quad \text{ou} \quad \tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\theta}{2}.\tag{9.56}$$

Si nous supposons que les photons sont émis dans le référentiel  $\mathcal{R}$  avec un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $Oz$ , alors un observateur du référentiel  $\mathcal{R}'$  observera un angle  $\theta'$ , par rapport à son axe  $Oz'$ , plus petit que  $\theta$ . À la limite où  $V$  tend vers  $c$ ,  $\theta'$  tend vers 0, c'est-à-dire que l'angle de vision se referme complètement. Il est à noter que même en mécanique classique, un phénomène d'aberration se produit pour les photons. Dans ce cas  $\tan \theta'$  est donné par la formule (9.56) dans laquelle on fait  $\gamma = 1$ . Cette situation est illustrée sur la figure 9.4.



**Figure 9.4** Aberration de la lumière : comparaison de la formule classique et de la formule relativiste. La variation de l'angle d'observation  $\theta'$  en fonction de la vitesse est donnée pour deux angles d'émission  $\theta = 45^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ .

Notons que si un observateur à bord de cet astronef voit les constellations se rapprocher du point situé juste devant le vaisseau sur la voûte céleste, la disposition relative des étoiles qui les compose reste pratiquement inchangée. Les éléments d'angle solide vus par les observateurs des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\theta \times \sin \theta d\phi, \\ d\Omega' &= d\theta' \times \sin \theta' d\phi'. \end{aligned} \quad (9.57)$$

En vertu de la relation (9.55), on a  $d\phi = d\phi'$ . De plus, en différenciant la première relation (9.54), il vient

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{\sin \theta d\theta}{\gamma^2 (1 + \beta \cos \theta)^2} = \frac{\sin^2 \theta' d\theta}{\sin \theta}. \quad (9.58)$$

Finalement, on obtient

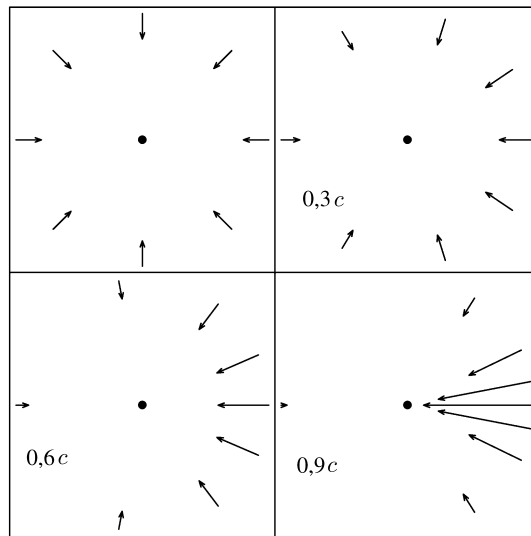
$$\frac{d\theta}{d\theta'} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}. \quad (9.59)$$

Les éléments d'arc de courbe  $d\theta'$  et  $\sin \theta' d\phi'$  varient donc dans les mêmes proportions. Ainsi, pour notre astronaute, les constellations peu étendues gardent leur forme mais à l'intérieur d'un angle solide différent<sup>15</sup>.

15. Dans le cas d'objets étendus et proches, la situation est en général beaucoup plus complexe (voir section 5.3.2).



Il peut sembler surprenant qu'une étoile située derrière le vaisseau spatial devienne visible à l'avant quand la vitesse est suffisamment élevée. Supposons que la baie vitrée à l'avant de l'astronef permette l'observation d'objets dont la ligne de visée fait un angle de  $90^\circ$  au plus avec la direction de déplacement du vaisseau. Une étoile dans une direction d'angle  $\theta$  supérieur à  $90^\circ$  deviendra tout juste visible si  $\theta'$  est égal à  $90^\circ$ . La formule (9.56) indique que cela se passe si  $-\cos \theta = \beta$ , c'est-à-dire  $-c \cos \theta = V$ , où  $V$  est la vitesse du vaisseau. Or,  $-c \cos \theta$  est la composante, parallèle à la trajectoire de l'astronef, de la vitesse des photons dans le référentiel des étoiles fixes (voir formules (9.53)). L'étoile devient donc visible quand les photons qu'elle émet ont une composante de vitesse parallèle à la trajectoire de l'astronef égale à la vitesse du vaisseau.



**Figure 9.5** Illustration du phénomène d'aberration et de l'effet Doppler pour un observateur en mouvement relativiste.

Des fronts d'onde plans de lumière monochromatique convergent de huit directions différentes vers un observateur. Chaque flèche indique la direction apparente d'un front d'onde ; sa longueur est proportionnelle à la fréquence reçue, et donc à la racine carrée de l'intensité perçue. Image en haut en gauche : l'observateur est immobile.

Autres images : l'observateur se déplace de gauche à droite avec différentes vitesses.

La direction de propagation d'un photon peut donc être fortement modifiée. De plus, par effet Doppler, sa fréquence va changer. Avec les conventions angulaires définies ci-dessus on peut écrire la relation (9.46) sous la forme

$$v' = \gamma(1 + \beta \cos \theta)v. \quad (9.60)$$

En utilisant la première des relations (9.54) on peut exprimer la fréquence mesurée en fonction de l'angle d'observation  $\theta'$  à bord de l'astronef

$$v' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta'} v. \quad (9.61)$$

L'intensité du rayonnement perçu va également être modifiée suivant la loi

$$I' = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta')^2} I. \quad (9.62)$$

en vertu du résultat de la section 9.5.3. Ces phénomènes sont illustrés sur la figure 9.5.

Pour l'équipage du vaisseau spatial, la position apparente des étoiles va donc être modifiée, et ce d'autant plus fortement que la vitesse de l'astronef sera importante. Ces étoiles ne sont pas des sources de lumière monochromatique ; les caractéristiques de la lumière captée vont donc changer suivant une loi compliquée qui va tenir compte de l'effet Doppler, de la modification d'intensité et du spectre d'émission des étoiles <sup>16</sup>. Si on s'intéresse à l'impression visuelle perçue par un être



**Illustration 9.2** Dessins de Raoul Giordan, extraits de *Sidéral* n° 34 (Arédit, 1973).

En se déplaçant à une vitesse proche de celle de la lumière, un astronef pourrait difficilement repérer, voire éviter, un obstacle éventuel. Heureusement, une collision dangereuse pour le vaisseau spatial et son équipage serait très peu probable en raison de la faible densité moyenne de matière dans l'espace interstellaire. Toutefois, la navigation devrait se faire en tenant compte des effets de distorsion visuelle (aberration, effet Doppler, transformation d'intensité) dus à la grande vitesse de l'astronef. Les membres d'équipage n'observeraient cependant pas ce qui est décrit sur la dernière image.

16. Le spectre d'émission d'une étoile peut, en bonne approximation, être considéré comme celui d'un corps noir. Dans ce cas le spectre sera uniquement déterminé par la température de surface de l'étoile.

humain, il faut en plus tenir compte de la fonction de réponse de l'œil. Une description complète de ces phénomènes sort du cadre de ce cours <sup>17</sup>.

## 9.6 QUADRIVECTEUR FRÉQUENCE

Une onde plane monochromatique est caractérisée par sa fréquence angulaire ou pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  étant la fréquence, et son vecteur d'onde  $\vec{k}$ , orienté dans la direction de propagation. Le module de ce vecteur,  $k = 2\pi/\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde, est le nombre d'onde angulaire <sup>18</sup>.

Considérons une particule matérielle libre ; son énergie  $E$ , son impulsion  $\vec{p}$  et sa masse  $m$  sont reliées par la relation d'Einstein

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (9.63)$$

Le module de sa vitesse  $v$  est donné par la formule (voir section 9.3)

$$\frac{v}{c} = \frac{|\vec{p}|c}{E}. \quad (9.64)$$

En mécanique quantique, on associe à cette particule une onde de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  au moyen des *relations de Planck-Einstein*,

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}, \quad (9.65)$$

où  $\hbar = h/(2\pi)$  est défini à partir de la constante de Planck  $h$ . Ces expressions relient les paramètres « corpusculaires » (énergie  $E$  et impulsion  $\vec{p}$ ) aux paramètres « ondulatoires » (pulsation  $\omega$  et vecteur d'onde  $\vec{k}$ ). La constante de Planck ayant le statut de constante universelle, et donc de grandeur invariante, on peut associer au quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule  $p$ , de composantes contravariantes  $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ , un *quadrivecteur fréquence* ou *quadrivecteur fréquence-vecteur d'onde*

17. On peut se faire une idée de ce que percevrait l'équipage d'un tel vaisseau en consultant, par exemple, l'article de John M. McKinley et Paul Doherty, « In search of the "starbow" : The appearance of the starfield from a relativistic spaceship », *American Journal of Physics*, vol. 47, n° 4, April 1979, p. 309-316. Des astronautes passant à vitesse relativiste à proximité d'une étoile en auraient une vision fort différente de celle d'observateurs au repos. Le phénomène est étudié dans l'article de U. Kraus, « Brightness and color of rapidly moving objects: the visual appearance of a large sphere revisited », *American Journal of Physics*, vol. 68, n° 1, January 2000, p. 56-60. Quelques-uns des problèmes liés à la navigation à vitesse relativiste sont étudiés dans l'article de C. Lagoute et E. Davoust, « The interstellar traveler », *American Journal of Physics*, vol. 63, n° 3, March 1995, p. 221-227.

18. Dans la terminologie officielle, le nombre d'onde désigne l'inverse de la longueur d'onde et la pulsation spatiale est le rapport de la pulsation à la vitesse de phase.

$$\mathbf{k} = \frac{c}{\hbar} \mathbf{p}, \quad (9.66)$$

de composantes contravariantes  $k^\mu = (\omega, c \vec{k})$ . En vertu de l'équation (9.63), on peut donc écrire

$$\hbar^2 \omega^2 - \hbar^2 c^2 \vec{k}^2 = m^2 c^4. \quad (9.67)$$

Remarquons que, si  $m = 0$ , on retrouve la relation  $\lambda = c/v$ . Partant de cette dernière formule et utilisant les relations de Planck-Einstein, on retrouve immédiatement la formule (9.38).

La vitesse de phase  $v_p$  et la vitesse de groupe  $v_g$  associées à une onde sont données par <sup>19</sup>

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (9.68)$$

En utilisant les relations (9.64) et (9.65), on constate que la vitesse  $v$  de cette particule est reliée à la vitesse de phase  $v_p$  de l'onde associée à cette particule par l'équation

$$\frac{v}{c} = \frac{c}{v_p}, \quad (9.69)$$

ce qui implique que  $v_p > c$  si  $v < c$ . Ainsi à une particule matérielle de vitesse inférieure à celle de la lumière, on fait correspondre une onde plane monochromatique dont la vitesse de phase est supérieure à  $c$ . Une particule matérielle ne saurait donc être assimilée à une telle onde.

Par contre, le calcul de la vitesse de groupe <sup>20</sup> de cette particule, obtenu en différentiant la relation (9.67), donne

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2}{v_p} = v < c. \quad (9.70)$$

La vitesse de groupe correspond donc bien à la vitesse de propagation de la particule matérielle.

19. Voir, par exemple, *Mécanique quantique* de Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloe, Hermann, t. I, 1973, p. 29.

20. En toute rigueur, cette vitesse ne peut être définie que pour un paquet d'ondes associé à une particule.

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 268.

### 9.1 Stabilité du photon

Donner un argument montrant qu'une particule de masse nulle ne peut qu'être stable.

### 9.2 Pression de radiation

Montrer que, sous l'effet de la pression de radiation  $p$ , un objet peut léviter dans l'espace à une distance quelconque du Soleil, pour autant que sa densité soit suffisamment faible. Calculer cette densité pour un objet plan, parfaitement réfléchissant, orienté de manière à être perpendiculaire aux rayons solaires. Quelle serait l'épaisseur de cet objet s'il était construit en aluminium ? Calculer, au niveau de l'orbite terrestre, la pression de radiation pour un corps parfaitement absorbant ou parfaitement réfléchissant. L'émission de particules depuis le Soleil est isotrope et constante dans le temps.

Données : masse du Soleil  $M \approx 2 \times 10^{30}$  kg ; luminosité du Soleil  $\mathcal{P} \approx 3,8 \times 10^{26}$  W ; unité astronomique (distance moyenne Terre-Soleil)  $d \approx 150 \times 10^6$  km ; densité de l'aluminium  $\approx 2,7$  g/cm<sup>3</sup> ; constante de gravitation  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>.

### 9.3 Aberration

- (a) Montrer que le vecteur  $\hat{e}'$  défini par les relations (9.45) est donné en fonction de  $\hat{e}$  par la recette traditionnelle de permutation des quantités primées et non primées et de changement de signe de la vitesse relative  $\beta$ .
- (b) Montrer que le vecteur  $\hat{e}'$  est unitaire si le vecteur  $\hat{e}$  est unitaire.

### 9.4 La fusée et l'anneau

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , une fusée se déplace avec une vitesse uniforme  $V = c\beta$  le long d'une droite qui est l'axe de symétrie d'un anneau circulaire, de rayon  $r$ , fixe dans ce référentiel.

- (a) À quelle distance réelle  $D$  est la fusée par rapport au centre de l'anneau, lorsque le pilote voit sa fusée se trouver précisément au centre de celui-ci ? À cet instant, le pilote initialise son horloge à 0. Au bout de combien de temps la fusée passe-t-elle réellement au centre de l'anneau dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ?

- (b) Lorsque la fusée passe réellement au centre de l'anneau, quelle est l'heure indiquée par l'horloge du pilote ? Sous quel angle le pilote voit-il à présent l'anneau ?
- (c) Même question que la précédente lorsque la fusée se trouve à une distance  $D$  en avant du centre de l'anneau.

## 9.5 Effet Doppler provenant d'une nova

Une source lumineuse  $S$ , qui émet dans son référentiel propre  $\mathcal{R}'$  un rayonnement monochromatique de fréquence  $\nu'$  et de longueur d'onde  $\lambda' = c/\nu'$ , se déplace à vitesse constante  $\vec{V} = c\beta$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  où se trouve un observateur  $A$ .

- (a) La source émet un rayonnement dans une direction faisant un angle  $\theta'$  par rapport à son sens de déplacement. Quel est l'angle  $\theta$  sous lequel l'observateur voit la lumière par rapport à la direction donnée par le vecteur  $\beta$  ? Lorsque  $\theta'$  varie entre  $-\pi$  et  $+\pi$ , entre quelles valeurs varie cet angle  $\theta$  ?
- (b) Quelle est la fréquence  $\nu$ , et la longueur d'onde  $\lambda$ , du rayonnement en fonction de la ligne de visée  $\theta$  de l'observateur  $A$  ? Tracer le graphe de la fonction  $\lambda(\theta)$ . Entre quelles valeurs extrêmes  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  varie-t-elle ? Pour quelles valeurs de  $\theta$ ,  $\theta_m$  et  $\theta_M$ , ces valeurs extrêmes sont-elles obtenues ?
- (c) Une étoile explose en éjectant des particules de façon isotrope : c'est le phénomène de nova. On considère que le rayon de l'étoile croît linéairement dans le temps à la vitesse constante  $V$ . L'observateur  $A$ , situé sur Terre, s'intéresse à une raie lumineuse particulière de son spectre, de longueur d'onde  $\lambda'$  (dans le référentiel au repos de l'atome émetteur). À cause de l'effet Doppler dû à la vitesse des particules s'éloignant du centre de la nova, l'observateur observe un élargissement  $\Delta\lambda$  de cette raie. Calculer la vitesse d'éjection  $V$  en fonction du taux d'élargissement  $r = \Delta\lambda/\lambda'$ . Que vaut cette expression si  $V \ll c$  ?
- (d) Sachant que le rayon angulaire de la nova augmente d'un angle  $\Delta\alpha$  en un an, calculer la distance  $D$  entre la nova et la Terre.
- (e) On fera l'application numérique sur la raie  $\lambda' = 393,3$  nm du calcium. On constate une largeur de raie due à l'effet Doppler de  $\Delta\lambda = 1,1$  nm. Calculer la vitesse d'éjection  $V$  des gaz de la nova. La formule non relativiste est-elle justifiée dans ce cas ? On constate une augmentation angulaire du rayon de  $\Delta\alpha = 0,20''$  en un an. Quelle est la distance entre la nova et la Terre ?

## 9.6 L'effet Doppler revisité

- (a) Montrer qu'une différence de phase pour une onde plane est un invariant relativiste. En déduire l'existence du quadrivecteur fréquence.
- (b) En utilisant l'invariance de la différence de phase, retrouver l'effet Doppler.

## 9.7 Tachyons et relativité

Dans les années soixante, des physiciens se sont passionnés pour des particules bizarres, les tachyons, dont la propriété caractéristique est de se déplacer à une vitesse supraluminique ( $v > c$ ). Si l'enthousiasme est bien retombé depuis, il n'empêche que la question mérite d'être posée.

- (a) On considère deux événements voisins de la ligne d'univers d'un tachyon. Dans un référentiel inertiel, un tachyon a une vitesse supérieure à celle de la lumière. Que peut-on dire sur l'invariant  $ds^2$  ? Qu'est-ce que cela implique pour la vitesse du tachyon dans d'autres référentiels ?
- (b) On définit la quantité invariante  $d\eta = \sqrt{-ds^2}/c$  et le quadrivecteur  $u$ , de composantes  $u^\mu = dx^\mu/d\eta$  dans un référentiel où les composantes du quadrivecteur position du tachyon sont  $(ct, \vec{r})$ . On appelle  $u$  la quadrivitesse du tachyon. Calculer sa pseudo-norme et ses composantes  $u^\mu$  en fonction de la vitesse du tachyon.
- (c) Quelles sont les valeurs minimale et maximale de la vitesse d'un tachyon ?
- (d) Comme dans le cas d'une particule ordinaire, on définit le quadrivecteur énergie-impulsion  $p$  d'un tachyon par l'équation  $p = m_t u$ , où l'inertie du tachyon est caractérisée par le paramètre  $m_t$ . Calculer la pseudo-norme de  $p^2$ . Dans ce cas encore, on définit l'énergie comme la composante temporelle  $p^0 = E/c$  et les composantes spatiales comme les composantes de l'impulsion du tachyon.
- (e) Représenter sur un même graphe, en fonction de  $v$ , l'énergie  $E(v)$  et le module de l'impulsion  $p(v)$  pour une particule ordinaire de masse  $m$  et pour un tachyon caractérisé par  $m_t = m$ . Quels commentaires cela vous inspire-t-il ?
- (f) Pour que les relations habituelles concernant le quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule s'appliquent sans changement à un tachyon, il est nécessaire d'introduire une quantité imaginaire pure  $m = im_t$ , que l'on appelle la masse du tachyon. On s'attachera en particulier à exprimer en fonction de  $m$  et de la vitesse  $\vec{v}$  du tachyon, la valeur de  $p^2$ , les expressions de  $E$  et  $\vec{p}$ , la relation entre  $E$  et  $\vec{p}$ .
- (g) Déterminer la vitesse  $\vec{v}$  en fonction de  $E$  et de  $\vec{p}$ .

## 9.8 Rayonnement d'une source en mouvement

Soient deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , d'axes parallèles, le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $V = c\beta$  le long de l'axe  $Ox$ . Une source lumineuse  $S$  est au repos à l'origine du référentiel  $\mathcal{R}'$  et émet un rayonnement, isotrope dans son référentiel propre, vers un observateur immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

- (a) Donner le lien entre l'angle  $\theta'$  d'émission d'un rayon dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  et l'axe  $O'x'$  et l'angle  $\theta$  correspondant dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

- (b) Tracer  $\cos \theta$  en fonction de  $\theta'$  pour la valeur  $\beta = 0.5$ . Représenter sur le même graphe les situations classique  $\beta \approx 0$  et ultrarelativiste  $\beta \approx 1$ .
- (c) Montrer que le nombre de photons  $dN$  émis dans l'angle solide  $d\Omega$  est lié au nombre total de photons émis,  $N$ , par la relation

$$dN = \frac{N}{4\pi} \frac{(1 - \beta^2)d\Omega}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

- (d) Tracer la distribution angulaire de rayonnement  $f(\theta) = (4\pi/N)(dN/d\Omega)$  pour  $\beta = 0.5$ . On examinera encore les situations classique et ultrarelativiste.
- (e) Déterminer l'angle  $\theta_m(\beta)$  tel que  $f(\theta_m) = (f(0) - f(\pi))/4$  ; la plus grande partie du rayonnement est concentrée vers l'avant dans un cône de demi-angle au sommet  $\theta_m(\beta)$ . Montrer que  $\theta_m(\beta)$  tend vers 0, lorsque  $\beta$  tend vers 1.

## 9.9 Effet Doppler sur un miroir mobile

Un miroir, parfaitement réfléchissant, parallèle au plan  $Oyz$  d'un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , se déplace à la vitesse constante  $V = c\beta$  le long de l'axe  $Ox$  de ce même référentiel. Une onde lumineuse monochromatique de fréquence  $\nu_i$  tombe sur le miroir avec un angle d'incidence  $\alpha_i$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , lié au miroir, l'angle d'incidence est  $\alpha'_i$  et la loi de Snell-Descartes pour la réflexion d'un rayon lumineux s'applique.

- (a) En utilisant les relations (9.45), exprimer les angles d'incidence  $\alpha_i$  et de réflexion  $\alpha_r$  de l'onde lumineuse dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en fonction de  $\alpha'_i$  et  $\beta$ .
- (b) Montrer que ces angles vérifient la relation

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_r} = \frac{\cos \alpha_i - \beta}{\cos \alpha_r + \beta}.$$

- (c) En déduire qu'on peut déterminer la vitesse du miroir de la mesure de  $\alpha_i$  et  $\alpha_r$ .
- (d) Calculer la fréquence  $\nu_r$  de l'onde réfléchie, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Que vaut le rapport  $\nu_r/\nu_i$  à l'incidence normale ?

## 9.10 Angle de visée d'une particule

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , un expérimentateur  $A$ , situé à l'origine, lance des particules, de masse  $m$ , d'énergie  $E$ , avec un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $Ox$ . Dans un autre référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme de vitesse  $V = c\beta$  le long de l'axe  $Ox$ , un observateur  $A'$ , situé à l'origine, examine la direction des particules.

- (a) Quel angle  $\theta'$  par rapport à l'axe  $O'x'$ , l'observateur  $A'$  mesure-t-il pour les particules ? On appelle cette relation « formule d'aberration particulaire ». Lorsque les particules sont des photons, retrouver la formule d'aberration traditionnelle.



- (b) Comment l'expérimentateur  $A$  doit-il ajuster l'énergie des particules, en fonction de l'angle d'émission, pour que l'observateur  $A'$  détecte les particules toujours dans une direction perpendiculaire à la vitesse relative des deux référentiels. Est-ce toujours possible ?
- (c) Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , considérons l'équation  $x \cos \theta + y \sin \theta = ut$ . Pour un angle  $\theta$  fixé, montrer que cette équation est celle d'un plan se propageant dans la direction de sa normale avec la vitesse  $u$ , la direction de propagation étant parallèle au plan  $Oxy$  et faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ . On peut évidemment considérer ce plan comme un front d'onde se propageant à la vitesse  $u$ . En passant au référentiel  $\mathcal{R}'$ , écrire l'équation de propagation du front d'onde dans ce dernier référentiel. En déduire la direction de propagation  $\theta'$  de l'onde par rapport à la direction  $O'x'$ . On appelle la relation entre  $\theta'$  et  $\theta$ , la « formule d'aberration ondulatoire ».
- (d) En comparant ce résultat à celui de la première question, montrer que les formules d'aberration particulaire et ondulatoire sont différentes pour des ondes et des particules possédant les mêmes vitesses de propagation, sauf lorsqu'il s'agit de particules de masse nulle. Montrer que des ondes possédant la vitesse  $c^2/v$  subissent des aberrations identiques à celles de particules de vitesse  $v$  (voir section 9.6).

## 9.11 Oscillateur harmonique relativiste

Une particule, de masse  $m$ , est astreinte à se déplacer sur l'axe  $Ox$  d'un référentiel galiléen. Elle est soumise à l'action d'une force de rappel proportionnelle à la distance :  $F = -Kx$ . Ce système est un oscillateur harmonique. On introduit la pulsation propre  $\omega = \sqrt{K/m}$ .

- (a) Nous nous plaçons d'abord dans le cas classique. Écrire l'équation différentielle du mouvement. La résoudre pour une particule possédant une vitesse nulle à son élongation maximum  $A$ , au temps  $t = 0$ .
- (b) Montrer que l'équation différentielle est équivalente à la constance de l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Exprimer l'énergie totale en fonction de  $K$  et  $A$ .
- (c) Nous considérons à présent le cas relativiste. Nous notons, comme d'habitude, le facteur cinématique  $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Déduire de l'expression  $d\gamma/dt$  l'accélération  $\phi$ , puis l'équation différentielle du second ordre pour le mouvement. Vérifier qu'à l'approximation des vitesses faibles elle s'identifie à l'équation classique (on suppose les mêmes conditions initiales).
- (d) Montrer que, dans ce cas aussi, cette équation est équivalente à la constance de l'énergie totale, somme de l'énergie mécanique relativiste et de l'énergie potentielle. En déduire l'expression de  $\gamma$  en termes de  $\omega$ ,  $A$ ,  $x$ .
- (e) En exprimant le lien entre  $v$  et  $\gamma$ , écrire l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par le système.

- (f) Montrer que le mouvement est périodique. En faisant le changement de variable  $x = A \cos \theta$ , montrer que la période du mouvement a pour expression

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + 2\alpha \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \alpha \sin^2 \theta}} d\theta,$$

où  $\alpha$  est une quantité sans dimension qu'on exprimera en fonction de  $A, \omega, c$ . Le calcul de l'intégrale est compliqué et le résultat fait apparaître des intégrales elliptiques. On se bornera à montrer que, dans le cas d'une faible vitesse, on retrouve l'expression classique  $T_0$  de la période.

- (g) En allant à l'ordre supérieur, calculer la correction relativiste de la période  $T - T_0$ . On l'exprimera à l'aide de  $T_0$  et  $v_M$ , la vitesse maximale classique de la particule.

## 9.12 Échos laser sur une fusée

Une fusée, de longueur propre  $l = 100$  m, s'éloigne de la Terre avec un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $V = c\beta$ . Elle est équipée de deux réflecteurs laser, l'un situé à la queue de l'appareil, l'autre à la tête. Le but de ce problème est de montrer qu'il est possible de mesurer, par l'envoi d'un seul flash laser, d'une part la vitesse de la fusée par deux méthodes différentes, d'autre part la distance de la fusée à la Terre.

Lorsque la fusée se trouve à une distance  $D$  de la Terre, les opérateurs au sol envoient un flash laser, monochromatique de fréquence  $\nu = 5,9 \times 10^5$  GHz, en direction de la fusée. Une partie de ce faisceau est réfléchi par le miroir de queue et renvoyée en sens inverse vers la Terre, où elle parvient un temps  $T = 20$  s après l'émission. Une autre partie du faisceau est renvoyée vers la Terre par le réflecteur de tête ; elle parvient au sol une durée  $\Delta t = 0,74 \mu\text{s}$  après le premier écho.

- (a) Une première méthode, lourde mais très systématique, consiste à bien préciser les événements et à jouer avec la transformation de Lorentz spéciale pour relier les coordonnées de ces événements dans les deux référentiels galiléens, celui de la Terre  $\mathcal{R}$ , et celui de la fusée  $\mathcal{R}'$ . On suppose que les horloges sur Terre et à bord de la fusée marquent toutes 0 quand le réflecteur de queue passe au niveau de la base au sol. On note par  $t_1$  le temps correspondant à l'émission du flash, mesuré par les horloges au sol. Les événements suivants s'imposent d'eux-mêmes :  $E_1$ , émission du flash ;  $E_2$ , réflexion sur le miroir de queue ;  $E_3$ , réflexion sur le miroir de tête ;  $E_4$ , réception sur Terre du premier écho ;  $E_5$ , réception sur Terre du deuxième écho.

Écrire les coordonnées de ces événements dans les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . On les exprimera comme fonctions de  $t_1$ ,  $l$  et  $\beta$ . Calculer la vitesse  $V$  à l'aide de  $\Delta t$ , mesuré, et  $l$ , connu. En déduire la distance  $D$  de la fusée au moment de l'émission en fonction de  $T$ ,  $\Delta t$  et  $l$ . Faire un diagramme de Lorentz résumant la situation.

- (b) Retrouver l'expression de  $V$  par deux méthodes beaucoup plus simples : l'une basée sur la mesure des différences de temps entre les deux échos dans la fusée, l'autre basée sur les différences de chemins entre ces deux échos. Vérifier la cohérence avec le résultat ci-dessus.
- (c) L'onde réfléchie possède une fréquence  $\nu'$  plus faible que la fréquence originale. On note  $\Delta\nu = \nu - \nu' > 0$ . Montrer que la vitesse  $V$  s'exprime de façon très simple à l'aide de  $\Delta\nu/\nu$ . On dispose donc de deux procédures de mesure de la vitesse, l'une basée sur la mesure de  $\Delta t$  (qui nécessite toutefois la connaissance préalable de  $l$ ), l'autre sur la mesure de  $\Delta\nu$  (indépendante de la longueur de la fusée). On en déduira le lien entre  $\nu'$  et  $\Delta t$ . Quelle est la fréquence  $\nu'$  de l'écho reçu sur Terre ?

## Chapitre 10

# Systèmes de particules

*La Terre est le berceau de l'humanité,  
mais on ne passe pas toute sa vie dans un berceau.*

Konstantin TSIOLKOVSKI (1911)

### 10.1 CONSERVATION DU QUADRIVECTEUR ÉNERGIE-IMPULSION

En mécanique classique, un important théorème de conservation est lié à la notion d'impulsion. Par exemple, au cours d'une collision entre particules, l'impulsion totale après l'interaction est identique à l'impulsion totale avant l'interaction. D'autres lois de conservation existent, parmi lesquelles celle, fondamentale, de l'énergie. Il faut évidemment tenir compte du fait que l'énergie peut se présenter sous plusieurs formes. Ainsi, après une collision, de l'énergie cinétique peut être convertie en chaleur et/ou en rayonnement, par exemple. D'une manière générale, l'impulsion totale et l'énergie totale d'un système isolé sont des grandeurs qui se conservent en mécanique newtonienne. Qu'en est-il en relativité restreinte ?

Montrons d'abord que les notions d'impulsion totale et d'énergie totale ont bien un sens dans la théorie de la relativité restreinte. Soit un ensemble de particules **libres** numérotées  $i = 1, 2, \dots, N$ . À chacune de ces particules est associé, dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , un quadrivecteur énergie-impulsion  $p_i$  de composantes  $(E_i/c, \vec{p}_i)$ , quadrivecteur de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur. Soit  $p$ , le quadrivecteur de composantes  $(E/c, \vec{p})$ , résultant de la somme des quadrivecteurs énergie-impulsion individuels  $p_i$  :  $p = \sum_{i=1}^N p_i$ . On a alors

$$\frac{E}{c} = \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{c} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (10.1)$$

D'après les résultats de la section 8.1, nous savons que ce quadrivecteur est également un quadrivecteur de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur. Il a donc bien les caractéristiques d'un quadrivecteur énergie-impulsion. Le quadrivecteur énergie-impulsion total d'un système de particules en interaction peut ne pas être une grandeur aisée à déterminer. Nous supposons toutefois qu'il peut toujours être parfaitement défini.

Dans la section 9.1, nous avons signalé que la forme relativiste de l'impulsion d'une particule avait été déterminée de manière à ce que la conservation de l'impulsion dans un référentiel d'inertie entraîne sa conservation dans n'importe quel autre référentiel d'inertie. Considérons un système isolé subissant une évolution dans un référentiel d'inertie particulier  $\mathcal{R}$ . Si on suppose qu'il y a conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total, on doit avoir dans ce référentiel

$$\Delta E = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{p} = \vec{0}, \quad (10.2)$$

où  $\Delta E$  ( $\Delta \vec{p}$ ) représente la variation d'énergie totale (d'impulsion totale) au cours de l'évolution du système. Les grandeurs  $\Delta \vec{p}$  et  $\Delta E/c$  sont, par construction, les composantes spatiales et la composante temporelle d'un quadrivecteur. Ce quadrivecteur se transformant suivant les lois de transformation (9.30), on doit avoir

$$\Delta E' = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{p}' = \vec{0}, \quad (10.3)$$

dans un autre référentiel d'inertie quelconque  $\mathcal{R}'$ . Cela signifie que les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion total se conservent dans tous les référentiels d'inertie.

À la limite classique, les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion se réduisent à l'énergie classique et à l'impulsion classique, c'est-à-dire à des grandeurs qui se conservent. Cela signifie que dans un système complexe de particules en interaction, l'énergie et l'impulsion se conservent au moins si les vitesses mises en jeu sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière.

Compte tenu de tout cela, il est donc raisonnable de supposer que l'énergie et l'impulsion définies dans le cadre de la relativité restreinte possèdent la même propriété fondamentale que leurs homologues classiques, à savoir :

Dans un système isolé, le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé.

Ce principe n'ayant jamais été pris en défaut expérimentalement, il a été érigé au rang de postulat de base.

Illustrons avec un exemple particulier le fait que ce nouveau postulat est compatible avec la théorie de la relativité restreinte. Considérons deux particules de mas-

ses  $m_1$  et  $m_2$  se déplaçant sur un même axe avec des vitesses initiales respectives  $v_1$  et  $v_2$ . Elles subissent une collision de telle manière que l'énergie cinétique totale se conserve et que leurs masses ne soient pas modifiées. Après l'interaction, on suppose que ces particules se déplacent toujours sur le même axe mais avec des vitesses valant respectivement  $w_1$  et  $w_2$ . La conservation de l'énergie totale et de l'impulsion totale imposent que

$$\begin{aligned} m_1\gamma(v_1)c^2 + m_2\gamma(v_2)c^2 &= m_1\gamma(w_1)c^2 + m_2\gamma(w_2)c^2, \\ m_1\gamma(v_1)v_1 + m_2\gamma(v_2)v_2 &= m_1\gamma(w_1)w_1 + m_2\gamma(w_2)w_2. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Observons cette collision dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  animé dans le référentiel  $\mathcal{R}$  d'une vitesse  $\vec{V}$  parallèle aux vitesses des particules. Exprimons chacune des vitesses des particules dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en fonction des vitesses dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ ,

c'est-à-dire  $v_1 = \frac{v'_1 + V}{1 + (v'_1 V)/c^2}$ , etc. Pour simplifier les expressions ainsi obtenues,

on peut utiliser les formules (6.38) et (6.39). La première équation (10.4) devient alors

$$\begin{aligned} m_1\gamma(v'_1)c^2 + m_2\gamma(v'_2)c^2 + V[m_1\gamma(v'_1)v'_1 + m_2\gamma(v'_2)v'_2] = \\ m_1\gamma(w'_1)c^2 + m_2\gamma(w'_2)c^2 + V[m_1\gamma(w'_1)w'_1 + m_2\gamma(w'_2)w'_2], \end{aligned} \quad (10.5)$$

où un facteur commun  $\gamma(V)$  a été éliminé. L'autre équation (10.4) conduit au même résultat. L'égalité (10.5) est une égalité de deux polynômes du premier degré en  $V$  ; cette égalité étant satisfaite quel que soit le module de la vitesse, les coefficients correspondants de ce polynôme sont égaux. L'égalité des termes constants conduit à la conservation de l'énergie dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , tandis que l'égalité des coefficients de  $V$  implique la conservation de l'impulsion dans le même référentiel.

Notons qu'en mécanique classique, la masse totale d'un système isolé se conserve. Cela ne signifie pas que le nombre de particules de ce système reste constant ; il peut en effet se produire des fusions ou des scissions de particules. En relativité restreinte ce principe de conservation doit être abandonné en raison de l'équivalence masse-énergie. Au cours d'une réaction, de la masse peut se transformer en énergie et réciproquement.

## 10.2 ASTRONEFS RELATIVISTES

### 10.2.1 La fusée relativiste

On peut illustrer le principe de la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total d'un système isolé en étudiant le mouvement d'une fusée, c'est-à-dire d'un véhicule qui assure sa propulsion par éjection de particules. Supposons qu'une fusée, dans le vide et loin de toute source gravitationnelle, accélère le long de l'axe  $Ox$  d'un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$  en éjectant un flux de particules dans la direction

opposée. Ce flux de particules a une vitesse  $u$  par rapport à la fusée. Pour établir l'équation du mouvement de la fusée, considérons, à un instant donné, l'éjection par la fusée d'une quantité de matière de masse  $dm$  dont la vitesse est  $w$  dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . Supposons qu'immédiatement avant cet instant, la fusée possédait une masse  $M$  et une vitesse  $v$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Immédiatement après cet instant, la fusée a une masse  $M + dM$  ( $dM < 0$ ) et une vitesse  $v + dv$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . La loi de conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total  $P^i = (P^0, P^1, P^2, P^3)$  implique

$$P^0 = M \gamma(v) c = (M + dM) \gamma(v + dv) c + dm \gamma(w) c, \quad (10.6)$$

$$P^1 = M \gamma(v) v = (M + dM) \gamma(v + dv) (v + dv) + dm \gamma(w) w, \quad (10.7)$$

et  $P^2 = P^3 = 0$ . Remarquons que la masse éjectée  $dm$  et la perte de masse de la fusée  $|dM|$  ne sont pas a priori posés comme étant identiques. La nécessité de cette hypothèse sera justifiée plus loin. Il est intéressant d'exprimer  $w$  en fonction de  $u$ , la vitesse d'éjection des particules par rapport à la fusée, car cette vitesse est une donnée technique facilement mesurable qui dépend du type de propulseur. La vitesse  $w$  de la matière  $dm$  dans  $\mathcal{R}$  est donnée par la loi d'addition des vitesses

$$w = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \quad (10.8)$$

où l'on suppose que  $u$  et  $v$  sont des grandeurs de même signe. En vertu des relations (6.38) et (6.39), on trouve

$$\gamma(w) c = \gamma(u) \gamma(v) \left( c - \frac{uv}{c} \right), \quad (10.9)$$

$$\gamma(w) w = \gamma(u) \gamma(v) (v - u). \quad (10.10)$$

Grâce à ces expressions, les équations (10.6) et (10.7) peuvent s'écrire, après un long calcul et en se limitant à l'ordre le plus bas, sous la forme

$$dM + \gamma(u) dm = 0, \quad (10.11)$$

$$M \gamma(v)^2 dv - u \gamma(u) dm = 0. \quad (10.12)$$

Pour obtenir ces relations, on utilise le fait que  $\gamma(v + dv) = \gamma(v) + \gamma(v)^3 \frac{v dv}{c^2}$  au premier ordre en  $dv$  (voir équation (8.58)). En éliminant  $dm$ , on trouve l'équation du mouvement de la fusée <sup>1</sup>

1. L'équation générale de la fusée relativiste est établie dans l'article de Kalman B. Pomeranz, « The Equation of Motion for Relativistic Particles and Systems with a Variable Rest Mass », *American Journal of Physics*, vol. 32, n° 12, December 1964, p. 955-958. Le rendement d'une fusée relativiste est étudié dans l'article de G. Marx, « The Mechanical Efficiency of Interstellar Vehicles », *Astronautica Acta*, vol. 9, fasc. 3, 1963, p. 131-139.

$$M \frac{dv}{dM} + u \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0. \quad (10.13)$$

L'équation du mouvement de la fusée non relativiste s'obtient en faisant tendre  $c$  vers l'infini dans le second terme de l'équation (10.13) <sup>2</sup>.

La relation (10.11) nous montre que  $dM = -\gamma(u) dm$ , c'est-à-dire que  $|dM| > dm$  si  $u \neq 0$ . En effet, un observateur immobile par rapport à la fusée voit une quantité de matière de masse  $dm$  s'éloigner à la vitesse  $u$ . L'énergie totale  $dE$  de cette matière est donc, pour cet observateur, égale à  $dE = \gamma(u) dm c^2$ . Cette énergie ne peut provenir que de la fusée elle-même. La fusée accuse donc une perte de masse égale en valeur absolue à  $dE/c^2 = \gamma(u) dm = |dM|$ , en vertu de la relation d'équivalence masse-énergie.

**TABLEAU 10.1** VITESSE D'ÉJECTION MAXIMALE THÉORIQUE  $u_{\text{théo}}$ , ET VITESSE D'ÉJECTION MAXIMALE TECHNIQUEMENT RÉALISABLE  $u_{\text{réal}}$ , POUR DIFFÉRENTS TYPES DE PROPULSION <sup>3</sup>.

Source d'énergie	$u_{\text{théo}}$ (km/s)	$u_{\text{réal}}$ (km/s)
hydrogène/oxygène	5,2	4,5
fission nucléaire <sup>a</sup>	10 200	200 ?
fusion nucléaire <sup>b</sup>	26 700	15 000 ?
matière/antimatière <sup>b</sup>	300 000	100 000 ?

<sup>a</sup> Existe à l'état de prototype.

<sup>b</sup> N'existe qu'à l'état de projet.

La vitesse d'éjection des particules est caractéristique du mode de propulsion de la fusée (voir tableau 10.1). Si nous supposons que  $u$  est constante, alors l'équation (10.13) peut être résolue. Soit une fusée accélérant depuis la vitesse nulle jusqu'à la vitesse  $V$ . Sa masse passe de la valeur  $M_i$  à la valeur  $M_f \leq M_i$ . L'intégration de l'équation (10.13) donne

$$c \int_0^V \frac{dv/c}{1 - (v^2/c^2)} = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}. \quad (10.14)$$

Si nous convenons d'appeler  $R$  le rapport  $M_i/M_f$ , on obtient ( $R \geq 1$ ) <sup>4</sup>

2. Voir, par exemple, David Halliday et Robert Resnick, *Mécanique*, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 3<sup>e</sup> éd., 1979, p. 176.

3. Voir, par exemple, l'ouvrage de E. Mallove et G. Matloff (biblio).

4.  $\int dx/(1 - x^2) = \arg \tanh x$ .



$$c \arg \tanh \left( \frac{V}{c} \right) = u \ln R. \quad (10.15)$$

Après réarrangement, l'équation (10.15) donne

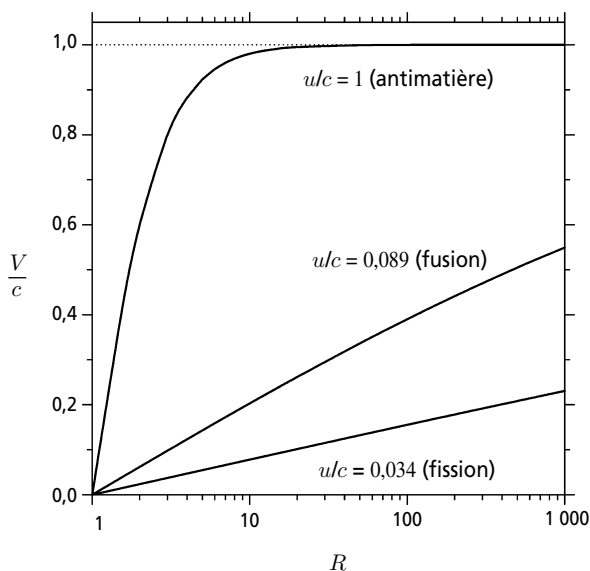
$$\frac{V}{c} = \tanh \left( \frac{u}{c} \ln R \right) = \frac{R^{2u/c} - 1}{R^{2u/c} + 1}. \quad (10.16)$$

Cette formule est appelée *équation de la fusée relativiste*. Elle n'est valable que pour une fusée ne possédant qu'un seul étage et caractérisée par une vitesse constante  $u$  des gaz d'échappement. Rappelons également que cette équation a été établie pour une fusée dans le vide et éloignée de toute source de gravitation.

À la limite non relativiste, c'est-à-dire  $u \ln R \ll c$ , on trouve

$$V \approx u \ln R, \quad (10.17)$$

en utilisant le fait que  $\lim_{x \ll 1} \tanh x \approx x$ . L'équation (10.17) est bien l'équation d'une fusée non relativiste à un étage caractérisée par une vitesse constante  $u$  des gaz d'échappement<sup>5</sup>. Comme on peut s'y attendre en mécanique non relativiste, toute trace du paramètre  $c$  a disparu et la vitesse de la fusée peut devenir arbitrairement grande.



**Figure 10.1** Vitesse maximale  $V$  d'une fusée en fonction de son rapport de masse  $R$  pour différentes vitesses d'éjection maximales théoriques  $u$  (voir tableau 10.1).

5. Il est à noter que l'équation (10.17) a été publiée en 1903 par le pionnier de l'aéronautique Konstantin Tsiolkovski (1857-1935).

Si  $R = 1$  c'est-à-dire si la fusée n'éjecte pas de matière, ou si la vitesse d'éjection est nulle, on trouve évidemment  $V = 0$ , car la fusée ne peut alors modifier sa vitesse initiale. La relation (10.16) nous indique que  $V$  est toujours inférieure à  $c$  et que cette limite n'est atteinte que pour  $R = \infty$ , c'est-à-dire pour une fusée infiniment massive. Si  $u$  change de signe, alors la vitesse finale de la fusée  $V$  change également de signe, puisque la fusée est supposée être initialement au repos. Remarquons que rien n'interdit  $u = c$  ; dans ce cas, on parle de fusée photonique car les particules éjectées sont des photons. La figure 10.1 montre comment varie la vitesse maximale  $V$  de la fusée en fonction du rapport de masse  $R$  pour différentes vitesses d'éjection  $u$ . Le tableau 10.2 indique la masse initiale que devrait posséder une fusée à moteurs photoniques parfaits réalisant différentes missions allers retours, avec une accélération propre constante. Pour des missions lointaines, les masses de carburant à emporter sont prodigieusement élevées. On ne peut donc pas espérer fabriquer de tels engins, même dans un futur lointain.

**TABEAU 10.2** MASSE DE DÉPART D'UNE FUSÉE PHOTONIQUE, POUR UNE MISSION ALLER RETOUR, DONT L'ACCÉLÉRATION PROPRE CONSTANTE EST DE  $10 \text{ m/s}^2$  ET DONT LA MASSE FINALE EST DE 1 000 t. ON SUPPOSE QUE LE MOTEUR EST CAPABLE DE CONVERTIR TOTALEMENT LE MÉLANGE MATIÈRE-ANTIMATIÈRE EN PHOTONS UTILISABLES POUR LA PROPULSION. LES DURÉES DES VOYAGES SUR TERRE ET À BORD SONT INDICUÉES DANS LE TABLEAU 8.2 (LE SYMBOLE « A-L » SIGNIFIE ANNÉE-LUMIÈRE).

Objectif	Distance de l'objectif	Masse de départ	Masse de comparaison
Lune	384 000 km	1 000,8 t	navette spatiale (2 040 t) <sup>a</sup>
Pluton	$6 \times 10^9$ km	1 108 t	fusée Saturn V (2 800 t) <sup>b</sup>
Proxima du Centaure	4,3 a-l	$1,6 \times 10^6$ t	porte-avions (80 000 t)
Nébuleuse du Crabe	1 000 a-l	$1,2 \times 10^{15}$ t	eau des océans ( $1,4 \times 10^{18}$ t)
Centre de la Galaxie	30 000 a-l	$10^{21}$ t	Terre ( $6,0 \times 10^{21}$ t)
Galaxie d'Andromède	$3 \times 10^6$ a-l	$10^{29}$ t	Soleil ( $2,0 \times 10^{27}$ t)
Limites de l'univers	$1,5 \times 10^{10}$ a-l	$6,2 \times 10^{43}$ t	Galaxie ( $4,0 \times 10^{38}$ t)

<sup>a</sup> Masse au décollage, dont 75 t pour le véhicule orbital vide.

<sup>b</sup> Masse au décollage, dont 5,6 t pour le module de commande, seul élément à revenir sur Terre.

### 10.2.2 Vol spatial relativiste

Le statoréacteur Bussard, dont le fonctionnement repose sur des principes physiques bien établis, est le seul modèle théorique de vaisseau spatial qui puisse atteindre des vitesses relativistes, pour lesquelles le temps propre du vaisseau devient plusieurs fois plus lent que le temps terrestre. Le concept a été inventé en 1960 par Robert W. Bussard, un physicien travaillant dans le domaine de la fusion contrôlée. Le vaisseau comprend une charge utile, un réacteur à fusion thermonucléaire et un

grand collecteur de protons interstellaires. Les protons servent de carburant dans le réacteur où l'énergie de fusion est libérée. Les produits de réaction (en principe, un plasma très chaud d'hélium) sont expulsés et fournissent la poussée au véhicule. Une partie de l'énergie de réaction alimente les systèmes du vaisseau et, en particulier, le collecteur qui recueille les protons interstellaires grâce à un puissant champ magnétique <sup>6</sup>.

Bussard avait initialement calculé qu'un astronef de 1 000 t, équipé d'un réacteur d'une efficacité de 100 %, requerrait une surface collectrice d'environ 100 km de diamètre pour obtenir une accélération égale à la gravité terrestre, à travers un espace interstellaire dont la densité serait de 1 000 protons par cm<sup>3</sup>. Un collecteur supraconducteur conique, aussi long que large, de quelques centaines de mètres de rayon, devrait suffire à produire le champ électromagnétique de 100 km de diamètre. Une vitesse proche de celle de la lumière pourrait ainsi être atteinte en moins d'un an. La puissance du statoréacteur décrit ci-dessus pourrait atteindre ou dépasser 10 000 TW, c'est-à-dire environ 1 000 fois la puissance totale produite sur Terre actuellement.

Si de tels vaisseaux sont un jour fabriqués, il sera possible de traverser la Galaxie, voire même d'atteindre d'autres galaxies dans la durée d'une vie humaine. La réalisation d'un statoréacteur Bussard se heurtera malheureusement à de nombreuses difficultés techniques. Beaucoup de physiciens pensent que ce type d'astronef ne pourra jamais être construit, tout au moins pas avec les performances espérées dans l'article initial de Bussard.

Signalons qu'il a été suggéré qu'un système de propulsion puisse fonctionner en extrayant de l'énergie du vide <sup>7</sup>. Il est vrai que le vide quantique est une entité fort complexe soumise à d'incessantes fluctuations énergétiques <sup>8</sup>. Cependant, personne ne peut prétendre avec certitude qu'il sera un jour possible d'utiliser ces fluctuations pour produire une quelconque force motrice. Si un vaisseau spatial pouvait continuellement extraire de l'énergie du vide pour alimenter ses propulseurs, il serait probablement capable d'atteindre rapidement des vitesses proches de celle de la lumière. Mais cela ne restera sans doute qu'une intéressante spéculation. Notons cependant que ce n'est pas forcément l'énergie disponible qui pourrait limiter la vitesse d'un astronef relativiste, mais plutôt l'existence d'interactions entre l'appareil et le milieu interstellaire.

---

6. Pour plus de détails voir, par exemple, l'ouvrage de E. Mallove et G. Matloff, chap. 7 et 8 (biblio), et les articles suivants : R. W. Bussard, « Galactic Matter and Interstellar Flight », *Astronautica Acta*, vol. 6, 1960, p. 179-194 ; John F. Fishback, « Relativistic Interstellar Spaceflight », *Astronautica Acta*, vol. 15, 1969, p. 25-35 ; C. Semay et B. Silvestre-Brac, « Equation of motion of an interstellar Bussard ramjet », *European Journal of Physics*, vol. 26, 2005, p. 75-83.

7. H. E. Puthoff, S. R. Little et M. Ibison, « Engineering the Zero-Point Field and Polarizable Vacuum for Interstellar Flight », *Journal of the British Interplanetary Society*, vol. 55, 2002, p. 137-144.

8. Voir, par exemple, le livre de Peter W. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Academic Press, Inc., 1994.

Bien que la densité du milieu interstellaire soit très faible (de l'ordre de  $10^{-24}$  g/cm<sup>3</sup>, sous forme d'atomes libres ou de microscopiques grains de poussière), il est nécessaire de prendre en compte son influence sur le mouvement d'un astronef animé d'une vitesse proche de celle de la lumière. La décélération subie par le vaisseau serait négligeable, mais le bombardement de particules très énergétiques serait cependant suffisamment intense pour que son revêtement subisse une érosion importante. Une fusée relativiste devrait donc être munie, à l'avant, d'un large et épais bouclier de protection (voir exercice 10.12). Pour des vitesses de déplacement ultrarelativistes<sup>9</sup>, le bouclier pourrait posséder une forme « aérodynamique » de manière à minimiser son échauffement<sup>10</sup>.



**Illustration 10.1** Dessin de Raoul Giordan, extrait de *Météor* n° 158 (Arédit, 1967).

Un astronef ultrarelativiste interstellaire pourrait présenter un aspect assez « aérodynamique » de manière à minimiser l'échauffement du bouclier de protection.

De plus, le mouvement de l'astronef transformerait les noyaux atomiques du gaz interstellaire en rayons cosmiques très dangereux pour l'équipage. Ceux-ci pénétrant par l'avant de la fusée, le bouclier servirait également d'écran antiradiation.

## 10.3 RÉFÉRENTIEL DU CENTRE DE MASSE

Soit un ensemble de  $N$  particules, libres ou en interaction. Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , le quadrivecteur énergie-impulsion total  $\vec{p}$  de composantes  $(E/c, \vec{p})$  est un quadrivecteur de genre temps ou de genre lumière pointant vers le futur. Ces propriétés du

9. Les expressions qualitatives « relativiste » et « ultrarelativiste » sont habituellement utilisées pour donner une idée de l'ordre de grandeur des vitesses des objets. Une vitesse  $v$  relativiste signifie que  $v/c$  ne peut plus être négligé devant 1, une vitesse  $v$  ultrarelativiste que  $v/c$  est proche de 1 (disons supérieur à 0,9 ou 0,99).

10. Conley Powell, « Heating and drag at relativistic speeds », *Journal of the British Interplanetary Society*, vol. 28, 1975, p. 546-552 ; N. H. Langton et W. R. Oliver, « Materials in interstellar flight », *Journal of the British Interplanetary Society*, vol. 30, 1977, p. 109-111.

quadrivecteur énergie-impulsion total ne sont pas modifiées par une transformation de Lorentz (voir section 8.3). Montrons que, si le quadrivecteur  $\mathbf{p}$  est de **genre temps**, il est possible de trouver un référentiel où l'impulsion totale du système est nulle. Ce référentiel est par définition le *référentiel du centre de masse*<sup>11</sup>. Nous désignerons ce référentiel par  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$  et sa vitesse par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  par  $\vec{V}_{\text{cm}}$  (dans la suite, nous désignerons parfois les quantités cinématiques exprimées dans le référentiel du centre de masse autrement qu'avec l'indice « cm »).

Le lien entre les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion total dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$  s'obtient au moyen des relations (9.30), en tenant compte que  $\vec{p}_{\text{cm}} = \vec{0}$ . On a alors

$$E = E_{\text{cm}} \gamma_{\text{cm}} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \frac{E_{\text{cm}}}{c^2} \gamma_{\text{cm}} \vec{V}_{\text{cm}} \quad \text{avec} \quad \gamma_{\text{cm}} = 1/\sqrt{1 - \vec{V}_{\text{cm}}^2/c^2}, \quad (10.18)$$

où  $E_{\text{cm}}$  est l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse. C'est l'énergie totale minimale qui peut être mesurée par un observateur quelconque pour ce système de particules puisque  $\mathbf{p}^2 c^2 = E_{\text{cm}}^2 = E^2 - \vec{p}^2 c^2 \leq E^2$ . En divisant les relations (10.18) membre à membre, on trouve

$$\frac{\vec{V}_{\text{cm}}}{c} = \frac{c \vec{p}}{E}. \quad (10.19)$$

Si le quadrivecteur énergie-impulsion total est de genre temps ( $c|\vec{p}| < E$ ) et pointe vers le futur ( $E > 0$ ), on a d'une part  $|\vec{V}_{\text{cm}}| < c$  et d'autre part  $\vec{V}_{\text{cm}}$  et  $\vec{p}$  orientés dans le même sens. De plus, si le système est isolé, alors les grandeurs  $E$  et  $\vec{p}$  sont des constantes. On en conclut que le vecteur  $\vec{V}_{\text{cm}}$  est également constant et que le référentiel du centre de masse est bien inertiel. Il est donc toujours possible de définir le référentiel du centre de masse (si le quadrivecteur énergie-impulsion total est de genre lumière, il n'existe pas de référentiel du centre de masse pour ce système). La comparaison des relations (9.24) et (10.19) montre que le système de particules considéré est animé d'un mouvement d'ensemble semblable à celui d'une particule fictive, au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$  et possédant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  une impulsion  $\vec{p}$  et une énergie  $E$ . En comparant les relations (10.18) et (9.23), on voit que la masse de cette particule est donnée par

$$M = \frac{E_{\text{cm}}}{c^2}. \quad (10.20)$$

Pour des particules **libres**, l'énergie  $E_{\text{cm}}$  totale dans le référentiel du centre de masse est égale à la somme des énergies totales individuelles de chaque particule dans le référentiel du centre de masse, l'énergie totale individuelle d'une particule étant la somme de son énergie cinétique dans ce système et de son énergie de repos.

11. On parle aussi de *référentiel barycentrique*.

On a donc

$$E_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N (T_{i,\text{cm}} + m_i c^2) = T_{\text{cm}} + M_0 c^2, \quad (10.21)$$

où  $T_{i,\text{cm}}$  est l'énergie cinétique de la particule  $i$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$ ,  $M_0$  la somme des masses  $m_i$  des particules et  $T_{\text{cm}}$  l'énergie cinétique totale dans le centre de masse. La formule (10.20) devient

$$M = M_0 + \frac{T_{\text{cm}}}{c^2}. \quad (10.22)$$

En d'autres termes, la masse de la particule fictive équivalente à un système de particules libres résulte non seulement de la somme des masses des particules qui le composent mais également de la somme de leurs énergies cinétiques divisée par  $c^2$ . Ce résultat corrobore l'interprétation énergétique de la masse d'un objet physique. Notons qu'en vertu de la relation (10.22)  $M$  est supérieur à  $M_0$ .

En réalité, dans les systèmes liés, les interactions entre les particules ont pour effet de réduire  $M$  à des valeurs inférieures à  $M_0$  ; la différence entre ces deux masses mesure l'énergie de liaison du système, c'est-à-dire l'énergie qu'il faut dépenser pour le séparer en ses constituants. Par exemple, l'énergie de liaison  $E_l$  d'un noyau atomique de masse  $M$  comprenant  $Z$  protons et  $N$  neutrons est donnée par

$$E_l = (Zm_p + Nm_n - M) c^2, \quad (10.23)$$

où  $m_p$  et  $m_n$  sont les masses respectives du proton et du neutron.

Ces considérations vont nous permettre de définir la masse d'un système de particules en interaction. Si les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion total d'un système sont  $(E/c, \vec{p})$  dans un référentiel d'inertie donné, alors ce système est caractérisé par une énergie totale  $E$  dans ce référentiel. La pseudo-norme au carré de ce quadrivecteur est l'invariant  $E_{\text{cm}}^2/c^2 = E^2/c^2 - \vec{p}^2$ , où  $E_{\text{cm}}$  est l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse. Par définition, l'invariant  $M = E_{\text{cm}}/c^2$  est la masse de ce système<sup>12</sup>.

En mécanique classique, la position du centre de masse d'un système de  $N$  particules, de masses  $m_i$  et de positions  $\vec{r}_i$  à un instant donné, est définie par la relation

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (10.24)$$

En relativité restreinte la définition (10.24) pose un problème car définir  $\vec{R}$  en utilisant les masses des particules reviendrait à exclure les particules de masse nulle

12. Voir à ce sujet une intéressante discussion sur le concept de masse dans l'ouvrage de E. F. Taylor et J. A. Wheeler, p. 246-252 (biblio).

comme les photons ; or les photons transportent de l'énergie et de l'impulsion, et la formule (10.19) montre que la vitesse du centre de masse dépend de l'impulsion totale. Le calcul de la position du centre de masse d'un système lié étant un problème complexe qui nécessite la connaissance de ce que l'on appelle le *tenseur énergie-impulsion* de ce système <sup>13</sup>, nous n'aborderons ici que le cas d'un système de particules libres. Il faut alors prendre en compte non plus la masse des particules mais leur énergie, celle-ci étant parfaitement définie, y compris pour des particules de masse nulle. Bien que le terme « centre de masse » devienne inapproprié, il continue à être utilisé (il conviendrait plutôt de parler de « centre d'énergie » ou de « centre d'inertie »).

On définit la position du *centroïde* d'un système de particules **libres** dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , en relativité restreinte, par la relation

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N E_i}, \quad (10.25)$$

où la grandeur  $E_i$  est l'énergie totale – constante – de la particule  $i$  et où les vecteurs position  $\vec{r}_i$  sont tous considérés au même instant  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . La vitesse de ce point est

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N E_i}. \quad (10.26)$$

En vertu du fait que  $\vec{v}_i = c^2 \vec{p}_i / E_i$ , on trouve

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{c^2 \sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^N E_i} = \frac{c^2 \vec{p}}{E}, \quad (10.27)$$

où  $E$  est l'énergie totale du système et  $\vec{p}$  son impulsion totale. Cette vitesse est bien celle du référentiel du centre de masse, donnée par la relation (10.19). Le centroïde associé au référentiel du centre de masse du système est appelé le centre de masse ; dans ce référentiel l'énergie totale  $E$  du système est minimale et est égale à  $c^2$  fois la masse du système. Dans le cas de particules massives se déplaçant toutes à des vitesses petites par rapport à la vitesse de la lumière, la relation (10.25) se réduit bien à la formule (10.24).

Notons une propriété somme toute très naturelle : dans le cas où le système se réduit à une particule matérielle unique, le référentiel du centre de masse coïncide avec le référentiel propre de la particule et le centroïde est situé sur la particule elle-même.

---

13. Voir, par exemple, l'ouvrage de C. W. Misner, K. S. Thorne et J. A. Wheeler, chap. 5 (biblio).

## 10.4 DÉSINTÉGRATIONS ET COLLISIONS

Les effets de la relativité restreinte se manifestent également de façon spectaculaire lors de la désintégration d'une particule instable ou lors de la collision de particules relativistes, matérielles ou non. Nous verrons que les résultats expérimentaux sont en parfait accord avec les prédictions de la relativité restreinte, prédictions qui peuvent être très différentes de celles de la mécanique newtonienne <sup>14</sup>.

Lors d'une désintégration, une particule instable  $A$  disparaît pour laisser place dans la voie finale à  $N$  particules  $D_i$ , selon le schéma

$$A \rightarrow D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_N. \quad (10.28)$$

Notons que les particules  $D_i$  du canal de sortie peuvent être stables ou elles-mêmes instables, donnant lieu dans ce cas à d'autres désintégrations du type (10.28). Même si la particule  $A$  se désintègre au repos, les particules émises  $D_i$  sont animées de vitesses plus ou moins grandes. Bien évidemment, on peut étudier une désintégration dans le référentiel de son choix, par exemple celui du laboratoire où la particule possède en général une vitesse importante, ou celui du centre de masse dans lequel elle est au repos. Le point crucial est qu'un processus de désintégration est un événement intrinsèque, qui doit être constaté par tous les observateurs, quel que soit leur référentiel.

Dans un processus de collision, on fait collisionner l'une sur l'autre deux particules  $A$  et  $B$  et ce choc produit, après la réaction, une série de particules  $D_i$  selon le schéma

$$A + B \rightarrow D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_N. \quad (10.29)$$

Là encore, on peut étudier la collision dans le référentiel le plus approprié. Souvent le référentiel du laboratoire est celui dans lequel la particule  $B$ , appelée *cible*, est maintenue au repos, tandis que la particule  $A$ , appelée *projectile*, possède une vitesse importante. Nous verrons que le référentiel du centre de masse est également très utile. Dans les collisionneurs, on fait entrer en collision deux particules de même masse (par exemple  $e^+$  et  $e^-$ , ou  $p$  et  $\bar{p}$ , où le symbole  $\bar{p}$  désigne un anti-proton) avec des vitesses opposées. Dans ce cas, le référentiel du centre de masse s'identifie, en pratique, au référentiel du laboratoire.

La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total permet d'obtenir de nombreux renseignements sur les caractéristiques d'un processus de collision, sans qu'il soit nécessaire de connaître les détails de l'interaction se manifestant entre les particules. Dans tous les cas considérés ici, nous supposons qu'aucune interaction

---

14. Il est à noter que des problèmes simples de dynamique relativiste peuvent être étudiés au moyen des diagrammes de Lorentz (voir l'article de John S. Rigden, « Geometric Approach to Relativistic Dynamics », *American Journal of Physics*, vol. 40, n° 12, December 1972, p. 1831-1840).



n'existe entre les particules avant et après la collision ; autrement dit, la collision est supposée se produire dans une région très limitée de l'espace. En dehors de cette région, les particules peuvent être considérées comme libres. C'est pratiquement toujours le cas dans les expériences usuelles : les sources de particules et les détecteurs sont situés à des distances macroscopiques du lieu de l'interaction, tandis que les particules n'interagissent que dans une région microscopique autour de l'endroit de la collision.

Comme, dans la voie finale, les particules sont libres, la relation d'Einstein (9.27) s'applique et fournit un lien entre l'impulsion  $\vec{p}_i$  et l'énergie  $E_i$  de la particule  $D_i$ . Si les masses des  $N$  particules produites sont connues, le processus de désintégration ou de collision est entièrement déterminé par les  $N$  vecteurs  $\vec{p}_i$ , ce qui représente  $3N$  variables. La détermination complète de celles-ci passe, d'une part, par la connaissance précise des conditions initiales et, d'autre part, par la connaissance détaillée des forces microscopiques à l'origine de ce processus. Mais même avec ces connaissances parfaites, la mécanique quantique, seule théorie capable d'une telle description, laisse une part d'indétermination et, tout au plus, peut-on en avoir une analyse statistique.

Quoi qu'il en soit, la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion lors du processus impose 4 relations (1 pour l'énergie, 3 pour l'impulsion) sur les variables de la voie finale. Ainsi, il reste finalement  $3N - 4$  degrés de liberté pour la description complète du processus. Ces contraintes induites par les lois de conservation sont appelées *la cinématique de la réaction*. Nous allons en examiner quelques conséquences ci-dessous.

### 10.4.1 Énergie de seuil

Lors d'une collision, une partie de l'énergie cinétique des particules peut être convertie en matière. Lorsque qu'une particule est créée par conversion d'énergie pure en matière, son antiparticule est également produite. Signalons que la théorie des champs requiert l'égalité stricte de la masse d'une particule et de celle de son antiparticule. C'est ainsi qu'après la collision d'un proton incident et d'un noyau atomique au repos, on peut détecter la présence, en plus de ces deux particules, d'un proton et d'un antiproton supplémentaires par exemple.

Étudions ce type de réactions depuis deux référentiels différents. Supposons que, dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, une particule incidente  $A$  de masse  $m_a$ , d'impulsion  $\vec{p}_a$  et d'énergie  $E_a$  entre en collision avec une cible  $B$  au repos, de masse  $m_b$ . Dans ce référentiel, l'énergie totale  $E$  et l'impulsion totale  $\vec{p}$  sont donc données par

$$E = E_a + m_b c^2 \quad \text{et} \quad \vec{p} = \vec{p}_a. \quad (10.30)$$

D'autre part, dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$ , ces relations deviennent

$$E_{\text{cm}} = E'_a + E'_b \quad \text{et} \quad \vec{p}_{\text{cm}} = \vec{p}'_a + \vec{p}'_b = \vec{0}, \quad (10.31)$$

où  $E'_i$  et  $\vec{p}'_i$  sont respectivement l'énergie et l'impulsion de la particule  $i$  ( $a$  ou  $b$ ) dans le référentiel  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$ . La vitesse de ce référentiel dans  $\mathcal{R}$  est donnée, en vertu des relations (10.19) et (10.30), par

$$\vec{V}_{\text{cm}} = \frac{c^2 \vec{p}_a}{E_a + m_b c^2}. \quad (10.32)$$

On peut au moyen d'une transformation de Lorentz de vitesse  $\vec{V}_{\text{cm}}$  établir le lien qui unit les grandeurs rapportées dans les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$ . Il est également possible d'utiliser les invariants relativistes. Par exemple, on peut écrire

$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = E_{\text{cm}}^2 - c^2 \vec{p}_{\text{cm}}^2. \quad (10.33)$$

En utilisant les relations (10.30) et (10.31) dans l'expression (10.33), on obtient

$$(E_a + m_b c^2)^2 - c^2 \vec{p}_a^2 = E_{\text{cm}}^2. \quad (10.34)$$

Comme

$$E_a^2 - c^2 \vec{p}_a^2 = m_a^2 c^4 \quad \text{et} \quad E_a = E - m_b c^2, \quad (10.35)$$

la relation (10.34) devient

$$E_{\text{cm}}^2 = m_a^2 c^4 - m_b^2 c^4 + 2 m_b c^2 E. \quad (10.36)$$

Cette expression permet de calculer l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse en fonction de l'énergie disponible dans le référentiel du laboratoire et des masses des particules qui entrent en collision.

Supposons que la réaction donne dans la voie finale  $N$  particules de masses  $m_1, m_2, \dots, m_N$  et notons

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (10.37)$$

Si  $m_a + m_b < M$ , il est clair que l'énergie de masse seule n'est pas capable de produire ces particules : la conservation de l'énergie l'interdit. Par contre, si on injecte dans l'état initial de l'énergie sous forme d'énergie cinétique  $T$ , on va pouvoir surmonter ce handicap et provoquer la création désirée. Par conséquent, il existe une énergie cinétique minimum, appelée *énergie de seuil de la réaction* et notée  $T(\text{seuil})$ , à communiquer à la particule  $A$  dans le laboratoire afin de rendre possible la réaction.

Dans le laboratoire, et plus généralement dans n'importe quel référentiel, la conservation de l'énergie impose que

$$E = m_a c^2 + m_b c^2 + T = \sum_{i=1}^N E_i = M c^2 + \sum_{i=1}^N T_i, \quad (10.38)$$

où  $T_i$  est l'énergie cinétique d'une particule  $i$  produite. Comme  $T_i \geq 0$ , la conservation de l'énergie impose

$$T \geq M c^2 - m_a c^2 - m_b c^2. \quad (10.39)$$

On a naïvement l'impression qu'on pourrait choisir  $T = (M - m_a - m_b)c^2$ . En fait, il n'en est rien. L'énergie n'est pas la seule quantité qui doit être conservée. Il doit y avoir également conservation de l'impulsion. Or, le choix précédent ne s'accommode pas de cette contrainte. En effet, il implique  $T_i = 0 \forall i$  et donc  $\vec{p}_i = \vec{0} \forall i$ , soit finalement  $\vec{p} = \vec{0}$  dans le référentiel du laboratoire. C'est incompatible avec l'hypothèse de départ. Dans ce référentiel, l'égalité est impossible dans l'inéquation (10.39), qui ne nous est dès lors d'aucune utilité pour la recherche de l'énergie seuil.

Pour déterminer l'énergie de seuil, il faut se placer dans un référentiel où l'égalité devient possible, c'est-à-dire faire le choix d'un référentiel pour lequel les conditions  $T_i = 0 \forall i$  sont compatibles avec la conservation de l'impulsion. Nous avons vu que cela impose  $\vec{p} = \vec{0}$ , et donc il faut se placer dans le référentiel du centre de masse. L'énergie de seuil dans ce référentiel est par conséquent donnée par

$$E_{\text{cm}}(\text{seuil}) = M c^2. \quad (10.40)$$

En vertu de la formule (10.36), le seuil de la même réaction dans le laboratoire est donné par

$$E(\text{seuil}) = \frac{c^2}{2m_b} (M^2 + m_b^2 - m_a^2). \quad (10.41)$$

L'énergie cinétique minimale  $T(\text{seuil})$  qu'il faut donner à la particule incidente est donc donnée par  $T(\text{seuil}) = E(\text{seuil}) - m_a c^2 - m_b c^2$ , c'est-à-dire

$$T(\text{seuil}) = \frac{c^2}{2m_b} [M^2 - (m_a + m_b)^2]. \quad (10.42)$$

Il est souvent utile d'exprimer l'énergie de seuil sous une forme alternative

$$T(\text{seuil}) = -Q \frac{M + m_a + m_b}{2m_b}, \quad (10.43)$$

où la quantité

$$Q = (m_a + m_b - M)c^2 \quad (10.44)$$

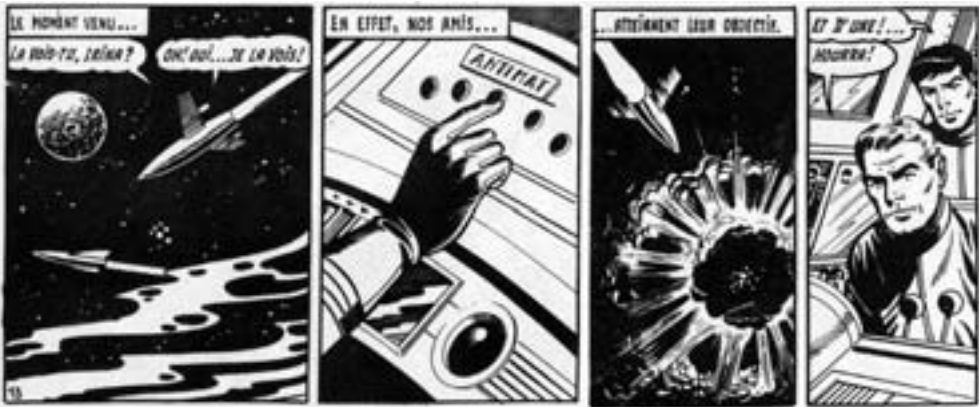
s'appelle le *bilan d'énergie de la réaction*.

Calculons l'impulsion minimale<sup>15</sup> que doit posséder un faisceau de protons  $p$  pour que la réaction de production d'antimatière

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (10.45)$$

soit possible, sur des protons cibles supposés immobiles. Sachant que  $m_p = m_{\bar{p}} \simeq 938 \text{ MeV}/c^2$ , l'application de la formule (10.41) donne  $E(\text{seuil}) = 8 m_p c^2$  car  $E_{\text{cm}}(\text{seuil}) = 4 m_p c^2$ . L'énergie cinétique minimale  $T(\text{seuil})$  d'un proton incident est donc égale à  $6 m_p c^2$  et son impulsion minimale  $p(\text{seuil})$  est donnée par

$$p(\text{seuil}) = \frac{1}{c} \sqrt{(T(\text{seuil}) + m_p c^2)^2 - m_p^2 c^4} = \sqrt{48} m_p c \approx 6,5 \text{ GeV}/c. \quad (10.46)$$



**Illustration 10.2** Dessins de Raoul Giordan, extraits de *Météor* n° 148 (Arédit, 1966).

Il est vrai que l'antimatière pourrait servir à la fabrication de bombes ou d'arme à faisceaux. Il serait cependant plus intéressant de l'utiliser comme carburant pour des systèmes de propulsion d'astronefs rapides.

Cette réaction permet de produire de l'antimatière sous forme d'antiprotons. Ceux-ci pourront être stockés afin d'être combinés avec des positrons pour former des atomes d'antihydrogène. Sous cette forme, l'antimatière pourrait être conservée durant de longues périodes avec une très faible dépense énergétique. Les applications possibles de l'antimatière sont multiples<sup>16</sup>, mais si on pouvait massivement la

15. En physique des particules, il est commode de mesurer les énergies en multiples d'électron-volts (eV).  $1 \text{ eV} = 1,602\,176\,53\, (14) \times 10^{-19} \text{ J}$  (valeur de 2004). Par exemple, les énergies peuvent être exprimées en MeV, les masses en  $\text{MeV}/c^2$  et les impulsions en  $\text{MeV}/c$ .

16. Concernant l'antimatière en général, on peut consulter, par exemple, l'ouvrage de vulgarisation de Robert Forward et Joel Davis, *Les mystères de l'antimatière*, Éditions du Rocher, 1991, coll. « L'Esprit et la Matière ».

produire, elle constituerait le carburant idéal des fusées interplanétaires et interstellaires, voire intergalactiques <sup>17</sup> (voir figure 10.1).

Signalons que le raisonnement précédent pour justifier l'utilisation du référentiel du centre de masse s'applique tel quel pour la désintégration d'une particule  $A$ , avec la condition spéciale que dans ce cas  $E_{\text{cm}} = m_a c^2$ . Ainsi, la désintégration (10.28) est énergétiquement possible si la condition suivante est remplie

$$m_a \geq M. \quad (10.47)$$

La masse de la particule instable  $A$  doit être supérieure à la somme des masses de toutes les particules filles. S'il est impossible de trouver un canal de désintégration tel que cette condition s'applique (éventuellement, d'autres contraintes peuvent être invoquées), la particule  $A$  ne peut qu'être stable.

#### 10.4.2 \* Énergie maximale emportée par une particule

Considérons une désintégration de type (10.28) ou une collision de type (10.29). Plaçons-nous tout de suite dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}$  (dans un souci de simplification typographique, nous omettons tout indice spécial) dans lequel l'énergie du système est  $E$  : pour une désintégration  $E = m_a c^2$  et pour une collision  $E = m_a c^2 + m_b c^2 + T$ . Si nous avons besoin d'utiliser un autre référentiel, les lois de transformation de Lorentz fournissent facilement les réponses.

La conservation de l'énergie montre immédiatement que l'énergie  $E_i$  d'une particule quelconque  $D_i$  de la voie finale ne peut excéder  $E$ . Il est assez facile de voir qu'elle ne peut même jamais atteindre cette valeur. On en conclut qu'il existe une valeur maximale  $E_i(\text{max})$  à l'énergie de cette particule. Nous allons voir que les lois de conservation seules permettent de déterminer cette quantité.

Puisque la numérotation des particules est arbitraire, raisonnons pour l'instant sur la particule  $D_1$ . Des lois de conservation, on tire

$$\vec{p}_1 = -(\vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N), \quad (10.48)$$

$$E_1 = E - (E_2 + E_3 + \dots + E_N). \quad (10.49)$$

La relation  $p_1^2 c^2 = E_1^2 - m_1^2 c^4$  (on note  $p$  la grandeur  $|\vec{p}|$ ) impose clairement que  $p_1$  est maximum lorsque  $E_1$  l'est et, par conséquent, d'après la relation (10.49), lorsque  $E_r = E_2 + E_3 + \dots + E_N$  est minimum.

Soit  $\mathcal{R}'$  le référentiel du centre masse des  $N - 1$  particules  $D_2, \dots, D_N$ . Puisque toutes les particules sont libres, elles ont une vitesse constante et donc ce référentiel  $\mathcal{R}'$  est aussi un référentiel d'inertie. Par transformation de Lorentz, on a

---

17. Robert Page Burruss et James Colwell, « Intergalactic travel. The long voyage from home », *The Futurist*, vol. 21, n° 5, 1987, p. 29-33.

$E_r = \gamma E'_r$ , où  $\gamma$  est le facteur de Lorentz entre les deux référentiels, et où  $E'_r$  est l'énergie des  $N - 1$  particules dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Ainsi  $E_r$  est minimum lorsque  $E'_r$  l'est. Or, cette condition est réalisée si toutes les particules sont au repos dans  $\mathcal{R}'$ , ce qui est possible sans violer la conservation de l'impulsion. Cela veut dire que toutes les vitesses, donc toutes les impulsions, de ces particules sont parallèles dans le référentiel du centre de masse original  $\mathcal{R}$  (toutes ont la direction de la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}'$ ). Pour résumer cette étude, la condition  $p_1$  maximum est équivalente à la condition  $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \dots = \vec{v}_N$ . Compte tenu que  $\vec{v}_i/c^2 = \vec{p}_i/E_i = \vec{p}_i/(\gamma(v_i) m_i c^2)$ , nous arrivons finalement à la condition  $\vec{p}_i/m_i = \vec{p}_2/m_2, \forall i$ .

Nous avons donc à présent

$$p_1(\max) = \sum_{i=2}^N p_i = p_2 \left( 1 + \sum_{i=3}^N \frac{m_i}{m_2} \right) = p_2 \frac{M}{m_2}, \quad (10.50)$$

en notant  $M = m_2 + \dots + m_N$ . On a donc  $p_i/m_i = p_2/m_2 = p_1(\max)/M$ . De plus  $E = E_1 + \dots + E_N = \sqrt{p_1(\max)^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sum_{i=2}^N \sqrt{p_i^2 c^2 + m_i^2 c^4}$ . En faisant le remplacement  $p_i = (m_i/M) p_1(\max)$  et après simplification, on parvient à  $E = \sqrt{p_1(\max)^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p_1(\max)^2 c^2 + M^2 c^4}$ . Une double élévation au carré pour se débarrasser des racines carrées permet d'avoir accès à  $p_1(\max)$  en fonction de  $E$  et des  $m_i$ .

En se refocalisant sur la particule  $D_i$ , au lieu de  $D_1$ , afin d'être plus général, et avec un changement évident d'indices, nous parvenons à la conclusion

$$cp_i(\max) = \frac{\sqrt{(E + m_i c^2 + M_i c^2)(E - m_i c^2 - M_i c^2)(E + m_i c^2 - M_i c^2)(E - m_i c^2 + M_i c^2)}}{2E} \quad (10.51)$$

avec  $M_i = m_1 + m_2 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_N$ .

On déduit l'énergie maximale possible pour cette particule grâce à la relation d'Einstein. Un calcul simple conduit à

$$E_i(\max) = \frac{E^2 + m_i^2 c^4 - M_i^2 c^4}{2E}. \quad (10.52)$$

Rappelons que les grandeurs intervenant dans cette formule sont définies dans le référentiel du centre de masse.

## 10.5 SYSTÈMES À DEUX PARTICULES DANS LA VOIE FINALE

### 10.5.1 Détermination des degrés de liberté

Bornons-nous dans cette section à l'étude des processus impliquant seulement  $N = 2$  particules dans la voie finale. C'est un cas simple et finalement assez courant. Si les masses des deux particules finales sont connues, nous savons que la réaction est gérée par  $3 \times 2 - 4 = 2$  degrés de liberté. Les deux impulsions  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  définissent un plan. La direction du projectile (ou la direction commune des deux particules incidentes dans le référentiel du centre de masse) et un axe arbitraire forment également un plan. Un premier degré de liberté est l'angle entre les deux plans ainsi définis. Il est d'usage de choisir l'axe arbitraire de façon à rendre cet angle égal à 0. L'avantage de ce choix est de pouvoir représenter toutes les impulsions, avant et après le choc, dans un même plan. Nous utiliserons ce choix dans tout le reste de la section. L'autre degré de liberté est par exemple l'angle  $\theta$  que fait l'impulsion  $\vec{p}_1$  avec la direction incidente.

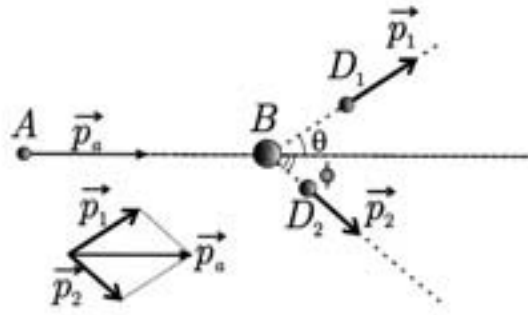
La réaction est cinématiquement entièrement déterminée par la connaissance de l'état initial, des masses<sup>18</sup> des particules mises en jeu et de l'angle  $\theta$ . En particulier l'angle  $\phi$  que fait l'impulsion  $\vec{p}_2$  avec la direction incidente et les modules  $p_1$  et  $p_2$  sont entièrement déterminés. Cette situation est illustrée dans la figure 10.2 dans le cas où le référentiel d'étude est le laboratoire. La même collision, vue dans le référentiel du centre de masse, est représentée sur la figure 10.3. Les impulsions des deux particules produites sont évidemment opposées ; l'angle  $\theta^*$  est *a priori* totalement arbitraire et, dans ce cas,  $\phi^* = \pi - \theta^*$ .

Dans le cas d'une *collision élastique*, les deux particules dans la voie finale sont identiques aux particules initiales : elles ont simplement changé de direction. Une collision dans laquelle les participants changent de nature est dite *inélastique*<sup>19</sup>.

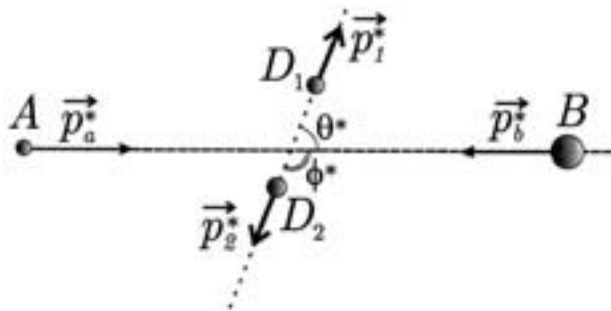
Dans le cas d'une collision binaire, on peut par exemple relier l'angle d'émission d'une particule à son énergie. La connaissance de l'interaction entre les participants et la résolution des équations (quantiques) du mouvement permettent de déterminer, par exemple, la probabilité d'observer un angle de diffusion donné en fonction de l'énergie incidente. Dans le reste de cette section, nous allons illustrer ces idées sur quelques exemples.

18. Les masses des particules produites dans une collision ne sont évidemment pas quelconques ; elles sont fixées par la nature des particules produites.

19. Une particule qui passe dans un état excité suite à la collision voit sa masse augmenter. S'il s'agit d'un atome dont certains électrons atteignent des niveaux d'énergie plus élevés, l'augmentation de masse de l'atome est imperceptible. On peut pratiquement considérer que la particule ne change pas de nature. Dans le cas de particules subnucléaires, comme les mésons ou les baryons, le passage vers un état excité peut conduire à une augmentation de masse comparable, voire supérieure, à la masse initiale de la particule. On ne peut plus alors considérer la collision comme élastique.



**Figure 10.2** Collision binaire  $A + B \rightarrow D_1 + D_2$ , vue dans le référentiel propre de la particule  $B$ . Les flèches représentent les impulsions relativistes.



**Figure 10.3** Collision binaire  $A + B \rightarrow D_1 + D_2$ , vue dans le référentiel du centre de masse. Les flèches représentent les impulsions relativistes.

### 10.5.2 Effet Compton

Dans certaines conditions, la diffusion des rayons X par un atome peut être étudiée en assimilant ce processus à un choc élastique entre deux particules : un photon du rayonnement X d'une part et un des électrons de l'atome d'autre part. Cet effet, appelé *effet Compton*, illustre à la fois la nature ondulatoire et corpusculaire des ondes électromagnétiques.

Soit, dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , un photon d'énergie  $h\nu$  entrant en collision avec un électron **au repos**. Ce photon est diffusé avec une énergie  $h\nu'$  dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec la trajectoire incidente. Rapportons ce référentiel à un repère orthonormé de sorte que l'axe  $Ox$  coïncide avec la trajectoire initiale et que l'axe  $Oy$  soit dans le plan de diffusion, comme illustré sur la figure 10.4.

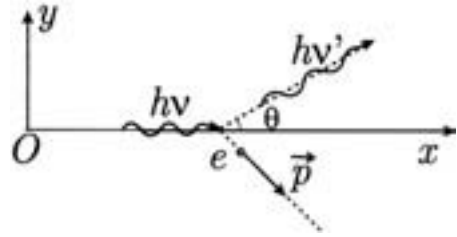
La conservation de l'impulsion totale donne

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p_x \quad \text{et} \quad 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta + p_y, \quad (10.53)$$



où  $p_x$  et  $p_y$  sont les projections de l'impulsion  $\vec{p}$  de l'électron dans la voie finale sur les axes du repère. D'autre part la conservation de l'énergie totale donne

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}, \quad (10.54)$$



**Figure 10.4** Illustration de l'effet Compton dans le référentiel où l'électron était au repos avant la collision.

où  $m_e$  est la masse de l'électron. En tenant compte que  $p_x^2 + p_y^2 = \vec{p}^2$ , on obtient, après quelques manipulations algébriques,

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{2}{m_e c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (10.55)$$

En passant des fréquences  $\nu$  et  $\nu'$  aux longueurs d'ondes correspondantes  $\lambda$  et  $\lambda'$ , on trouve

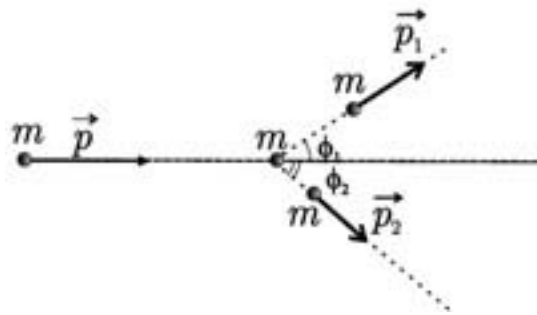
$$\lambda' - \lambda = 4\pi \lambda_e \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{avec} \quad \lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c}. \quad (10.56)$$

La quantité  $\lambda_e$  est appelée *longueur d'onde de Compton de l'électron* ( $\hbar = h/(2\pi)$ ). Actuellement, sa valeur est estimée à  $3,861\,592\,678\,(26) \times 10^{-13}$  m (valeur de 2004). Les expériences de diffusion de rayons X par les électrons des atomes de divers corps simples, entamées par Compton en 1923, ont permis de vérifier la relation (10.56) avec une remarquable précision. Notons que dans ce type d'expérience, l'électron n'est pas libre mais attaché à un atome ; son énergie de liaison dans l'atome peut cependant être négligée par rapport à l'énergie du photon incident. De même, à cause de l'inévitable agitation thermique et de son mouvement autour du noyau, l'électron n'est pas au repos ; sa vitesse avant la collision est cependant très faible par rapport à celle qu'il acquiert après éjection de l'atome.

### 10.5.3 Choc relativiste de deux particules de masses identiques

Considérons le cas d'une particule matérielle, en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , entrant en collision avec une particule de masse identique, au repos dans ce référentiel. En mécanique classique, la conservation de l'énergie et de l'impulsion imposent respectivement

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (10.57)$$



**Figure 10.5** Collision de deux particules de masses identiques.

où  $\vec{v}$  est la vitesse de la particule incidente et  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  les vitesses des particules après le choc. De ces relations, on déduit que  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ , c'est-à-dire que les trajectoires des particules après collision forment toujours entre elles un angle droit.

Examinons ce que devient ce résultat dans le cadre de la relativité restreinte. Soit, dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , une particule de masse  $m$  et d'énergie cinétique  $T$  entrant en collision avec une particule identique au repos. Les deux particules sont diffusées avec des impulsions respectives  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  dans des directions faisant des angles  $\phi_1$  et  $\phi_2$  avec la trajectoire de la particule incidente, comme illustré sur la figure 10.5.

Étudions ici uniquement le cas  $\phi_1 = -\phi_2 = \phi$  (le cas général est traité dans l'exercice 10.17). Dans cette configuration parfaitement symétrique, les énergies (et donc les modules des impulsions) des deux particules diffusées sont identiques, en vertu de la conservation de l'impulsion totale. Soit  $E$  l'énergie totale du système et  $p$  le module de son impulsion totale. On peut écrire

$$\begin{aligned} E &= 2m c^2 + T, \\ p &= \frac{1}{c} \sqrt{(m c^2 + T)^2 - m^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{T^2 + 2m c^2 T}. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Si  $p'$  est le module de l'impulsion d'une des particules diffusées, alors on a

$$p = 2 p' \cos \phi, \quad (10.59)$$

avec

$$p' = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - m^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{T^2}{4} + m c^2 T}. \quad (10.60)$$

L'angle  $\theta$  entre les trajectoires des deux particules est égal à  $2\phi$ , et est donné par

$$\cos \theta = \frac{1}{1 + \frac{4m c^2}{T}}, \quad (10.61)$$

car  $\cos \theta = 2 \cos^2 \phi - 1$ . On voit que cet angle est toujours plus petit que  $90^\circ$ , et ne s'approche de ce cas limite que pour des valeurs de l'énergie cinétique restant faibles par rapport à l'énergie de repos de la particule, c'est-à-dire à la limite classique. Ce résultat a été confirmé expérimentalement par des observations directes de collisions dans des détecteurs associés à des accélérateurs. On constate que  $\theta \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ . Les deux particules sont alors préférentiellement émises vers l'avant. Ce phénomène est appelé *effet de tête*.

#### 10.5.4 \* Ellipsoïde de Blaton

Dans cette section, nous nous intéressons au lien entre les quantités cinématiques et la direction d'émission d'une particule. Raisonnons tout d'abord dans le référentiel du centre de masse, désigné ici par  $\mathcal{R}'$ . Rappelons que l'énergie  $E'$  totale dans ce référentiel est imposée par les conditions initiales. Comme  $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{0}$ , on a  $p'_1 = p'_2 = p'$ . De plus, la conservation de l'énergie donne  $E' = E'_1 + E'_2 = \sqrt{p'^2_1 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p'^2_2 c^2 + m_2^2 c^4} = \sqrt{p'^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p'^2 c^2 + m_2^2 c^4}$ . Cette égalité permet de tirer  $p'$  en fonction de  $E'$

$$p' = \frac{\sqrt{(E' + m_1 c^2 + m_2 c^2)(E' - m_1 c^2 - m_2 c^2)(E' + m_1 c^2 - m_2 c^2)(E' - m_1 c^2 + m_2 c^2)}}{2E'c} \quad (10.62)$$

Le remplacement de cette valeur dans les expressions de l'énergie de chaque particule  $E'_i = \sqrt{p'^2 c^2 + m_i^2 c^4}$  donne finalement

$$E'_1 = \frac{E'^2 + m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2E'} \quad \text{et} \quad E'_2 = \frac{E'^2 + m_2^2 c^4 - m_1^2 c^4}{2E'}. \quad (10.63)$$

Il est remarquable que ces quantités cinématiques soient indépendantes de l'angle d'émission  $\theta'$ . Si, à partir de l'origine  $O'$  du référentiel du centre de masse, on reporte les vecteurs  $\vec{p}'_1$  et  $\vec{p}'_2$ , alors les lois de conservation imposent que ceux-ci soient opposés et que les extrémités se trouvent sur une sphère (sur un cercle si on raisonne dans le plan de diffusion) dont le rayon est donné par la formule (10.62). On peut noter l'analogie complète entre les relations (10.62)-(10.63) valables pour  $N = 2$  et les relations (10.51)-(10.52) valables pour  $N$  quelconque.

On peut donc faire la remarque importante suivante : dans une réaction comportant un nombre quelconque de particules dans la voie finale, la recherche de l'énergie maximale d'une particule revient à considérer un système à deux particules dans la voie finale – la particule en question et une particule unique qui concentre la masse de toutes les autres particules au centre de masse de celles-ci.

$$\begin{aligned} p_{iy} &= p'_{iy}, \quad p_{iz} = p'_{iz}, \quad p_{ix} = \gamma(p'_{ix} + VE'_i/c^2) \\ &\Rightarrow p'_{ix} = (p_{ix} - \gamma VE'_i/c^2)/\gamma. \end{aligned} \quad (10.64)$$
$$\frac{(p_{ix} - \gamma V E'_i/c^2)^2}{(\gamma p')^2} + \frac{p_{iy}^2 + p_{iz}^2}{p'^2} = 1. \quad (10.65)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

que  $p_{iz} = p'_{iz} = 0$ . Nous avons affaire à une ellipse qui coupe l'axe  $Ox$  en  $A$  (au plus près de  $O$ ) et en  $B$  (au plus loin de  $O$ ). L'analyse de l'équation (10.65) montre que la valeur minimale de  $p_{ix}$  est donnée par

$$p_{ix}(\min) = \gamma p' \left( \frac{V}{v'_i} - 1 \right), \quad (10.66)$$

où  $v'_i$  est la vitesse de la particule  $i$  dans le référentiel du centre de masse.

À ce stade, trois situations sont géométriquement possibles :

- $O$  est à l'intérieur de  $AO'$  ce qui se traduit par  $V < v'_i$ . Dans ce cas, l'angle  $\theta_i$  que fait la particule avec l'axe  $Ox$  peut varier de  $0$  à  $\pi$ . On peut détecter la particule à la fois vers l'avant ou vers l'arrière.
- $O$  est confondu avec  $A$ , c'est-à-dire  $V = v'_i$ . Dans ce cas l'angle  $\theta_i$  ne peut varier que dans l'intervalle  $[0, \pi/2]$ . La particule est seulement émise vers l'avant.
- $O$  est à l'extérieur de  $AO'$ , c'est à dire  $V > v'_i$ . Dans ce cas il existe un angle limite  $\theta_M$  maximal pour  $\theta_i$ , défini par les tangentes à l'ellipse depuis  $O$ . La particule est émise vers l'avant dans un cône de demi-angle au sommet  $\theta_M$ . Plus le rapport  $V/v'_i$  est grand, plus l'ellipse est aplatie et plus le cône d'émission est pointu vers l'avant. On retrouve le phénomène d'effet de tête. On remarque également que pour une valeur donnée de  $\theta$  correspondent deux valeurs possibles pour l'impulsion.

Dans les trois situations, la valeur de l'impulsion est d'autant plus grande que  $\theta_i$  est plus petit.

## 10.6 \* SYSTÈMES À TROIS PARTICULES DANS LA VOIE FINALE

Pour une réaction incluant 3 particules dans l'état final, nous avons  $3 \times 3 - 4 = 5$  degrés de liberté, ce qui est beaucoup. Néanmoins les lois de conservation imposent quelques contraintes que nous allons étudier grâce à une méthode due à Dalitz.

Pour simplifier l'étude, nous allons supposer que les trois particules possèdent la même masse  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ . Les calculs sont beaucoup plus simples et la philosophie générale reste la même. Il ne faut pas croire que cette hypothèse est un cas d'école ; de nombreux processus (désintégrations ou collisions) entrent dans cette catégorie, comme la désintégration des particules étranges en 3 pions :  $K^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^-$ . Nous nous plaçons directement dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}$  (dans un souci de simplification typographique, nous omettons tout indice spécial).

La conservation de l'énergie impose la contrainte suivante

$$T_1 + T_2 + T_3 = E - 3mc^2 = Q > 0. \quad (10.67)$$

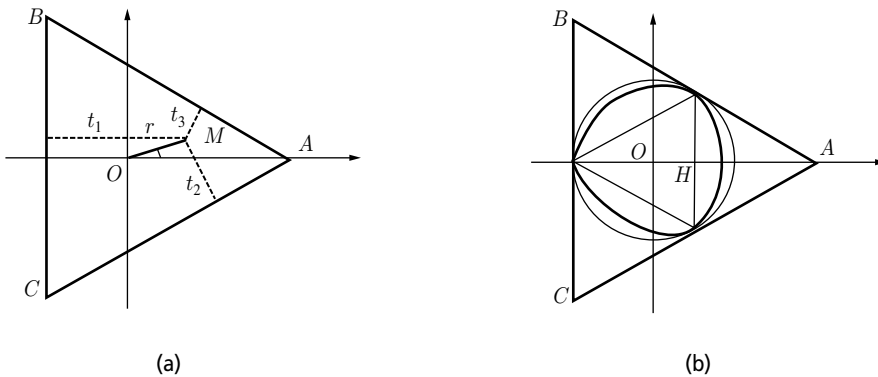
L'énergie totale dans le centre de masse  $E$  est une quantité fixée par les conditions initiales. La grandeur  $Q$  est donc constante pour une réaction donnée. Dans le cas d'une désintégration,  $Q = (m_a - 3m)c^2$  est le bilan d'énergie ; dans le cas d'une collision,  $Q$  représente la somme du bilan d'énergie et de l'énergie cinétique de la voie d'entrée.

Les énergies cinétiques  $T_i$  des particules sont des quantités positives, *a priori* arbitraires, mais dont la somme est fixée. Cette propriété peut être interprétée de façon géométrique très simple. En effet, si on considère un triangle équilatéral et un point  $M$  intérieur quelconque, on sait que la somme des distances de  $M$  aux trois côtés du triangle est une constante égale à la hauteur du triangle. Ainsi, choisissons un triangle équilatéral  $ABC$ , de centre  $O$  et de côté  $2Q/\sqrt{3}$  ; la hauteur a pour mesure  $Q$ . Choisissons un point quelconque  $M$  à l'intérieur du triangle ; on peut toujours décider que  $T_1$  représente la distance de  $M$  au côté  $BC$ ,  $T_2$  la distance de  $M$  au côté  $AC$  et  $T_3$  la distance de  $M$  au côté  $AB$ . La contrainte (10.67) est toujours satisfaite et on peut donc concevoir une réaction donnée comme représentée par un point  $M$  à l'intérieur du triangle défini ci-dessus.

Si l'on se restreint à la conservation de l'énergie seule, tout point  $M$  intérieur est valable. Mais, il faut également satisfaire à la contrainte de la conservation de l'impulsion qui s'écrit

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}. \quad (10.68)$$

En pratique cela exclut certains points : par exemple le sommet  $A$  est tel que  $T_1 = Q$ ,  $T_2 = T_3 = 0$ . Cela implique  $\vec{p}_2 = \vec{p}_3 = \vec{0}$  et  $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$  ; ces conditions sont incompatibles avec l'équation (10.68). Ainsi le point  $A$  (de même que  $B$  et  $C$ ) n'est



**Figure 10.7** Diagramme de Dalitz pour une réaction avec 3 particules de même masse dans la voie finale : (a) le point  $M$  relatif à une réaction donnée est décrit par ses coordonnées polaires ; (b) la courbe de Dalitz entourant la zone des points permis est marquée en traits gras et se trouve entre le cercle limite non relativiste et le triangle limite ultrarelativiste.

pas licite. D'un autre côté, le point  $O$  est permis. En effet, dans ce cas on a  $T_1 = T_2 = T_3 = Q/3$  et par suite, puisque  $p_i^2 c^2 = T_i(T_i + 2m)$ ,  $p_1 = p_2 = p_3$ . Les trois impulsions étant égales en module, la contrainte (10.68) est satisfaite si elles font entre elles un angle de  $2\pi/3$ . Cela est manifestement le cas. Par continuité, en suivant un chemin partant de  $O$  et finissant en  $A$  (ou  $B$ , ou  $C$ ), on passe d'un point permis à un point défendu. On se doute bien qu'il existe une courbe limite, à l'intérieur de laquelle tous les points sont permis et à l'extérieur de laquelle ils sont exclus. C'est à Dalitz que revient le mérite d'avoir formalisé mathématiquement cette étude.

Choisissons un repère d'origine  $O$ , d'axe  $Ox$  le long de  $OA$ , et repérons le point  $M$  par ses coordonnées polaires. Il est utile d'exprimer les énergies en unités  $Q/3$ . On définit ainsi  $t_i = T_i/(Q/3)$ . Dans ces conditions, les énergies cinétiques s'expriment comme

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + r \cos \phi, \\ t_2 &= 1 + r \cos \phi' \quad \text{avec} \quad \phi' = 2\pi/3 - \phi, \\ t_3 &= 1 + r \cos \phi'' \quad \text{avec} \quad \phi'' = 4\pi/3 - \phi, \end{aligned} \quad (10.69)$$

où  $r = OM/(Q/3)$  est une quantité sans dimension. Ces différents éléments sont représentés sur la figure 10.7. À partir de relations trigonométriques bien connues, il est facile d'établir les équations suivantes

$$\cos \phi + \cos \phi' + \cos \phi'' = 0, \quad (10.70)$$

$$\cos^2 \phi + \cos^2 \phi' + \cos^2 \phi'' = \frac{3}{2}. \quad (10.71)$$

Remarquons au passage qu'en faisant la somme des 3 énergies cinétiques données par les équations (10.69) et en se servant de la condition (10.70), on démontre très facilement la propriété mentionnée de constance de la somme des distances de  $M$  aux trois côtés. Cherchons maintenant l'équation  $r(\phi)$  de la frontière de la région permise.

Nous partons de l'égalité (10.68), que nous écrivons plutôt comme  $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 = -\vec{p}_1$ , d'où l'on déduit  $p_2^2 + p_3^2 + 2p_2p_3\cos\theta = p_1^2$ , où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{p}_2$  et  $\vec{p}_3$ . De la dernière égalité, on tire la condition  $2p_2p_3 \geq 2p_2p_3\cos\theta = p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ . Cette inégalité doit toujours être vérifiée ; la frontière cherchée correspond donc à l'égalité. Poursuivons plus avant avec cette égalité que nous écrivons  $4p_2^2p_3^2 = (p_2^2 + p_3^2 - p_1^2)^2$ . Multiplions-la par  $c^4$  et utilisons la relation connue  $p_i^2 c^2 = T_i^2 + 2mT_i$  pour réduire l'équation cherchée à

$$2T_2T_3 [2T_2T_3 + 4m(T_2 + T_3) + 8m^2] = [T_2^2 + T_3^2 - T_1^2 + 2m(T_2 + T_3 - T_1)]^2. \quad (10.72)$$

Pour simplifier les calculs, on se sert des égalités suivantes (on utilise les relations (10.70) et (10.71))

$$\begin{aligned}
 t_2 + t_3 &= 3 - t_1 = 2 - r \cos \phi \Rightarrow t_2 + t_3 - t_1 = 1 - 2r \cos \phi, \\
 t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 &= 3(1 + r^2/2) \Rightarrow t_2^2 + t_3^2 = 2 - 2r \cos \phi + r^2(3/2 - \cos^2 \phi), \\
 t_2^2 + t_3^2 - t_1^2 &= 1 - 4r \cos \phi + r^2(3/2 - 2 \cos^2 \phi), \\
 2t_2 t_3 &= (t_2 + t_3)^2 - (t_2^2 + t_3^2) = 2 - 2r \cos \phi + r^2(-3/2 + 2 \cos^2 \phi).
 \end{aligned}
 \tag{10.73}$$

En développant l'équation (10.72) et en utilisant les quatre dernières égalités, on aboutit, après un calcul assez long mais sans intérêt, à l'équation cherchée. Puisque  $r$  est une variable sans dimension, il est astucieux d'introduire une autre variable sans dimension liée aux énergies,  $\sigma = Q/E$ . Nous parvenons finalement à l'équation de la frontière de la région permise

$$r^2 = \frac{1}{1 + \frac{2\sigma}{(2 - \sigma)^2}(1 + r \cos(3\phi))}. \tag{10.74}$$

Dans cette équation polaire du contour, la présence de  $\cos(3\phi)$  reflète la symétrie d'ordre 3 du problème. Cette courbe est assez difficile à visualiser analytiquement, mais il existe deux cas limites assez simples à étudier :

- *Le cas non relativiste* : Les énergies cinétiques sont très faibles par rapport aux masses des particules  $Q \ll m < E \Rightarrow \sigma \rightarrow 0$ . Dans ce cas, l'équation se réduit à  $r = 1$ , donc  $OM = Q/3$ . C'est l'équation du cercle de centre  $O$  inscrit dans le triangle  $ABC$ . Les seuls points cinématiquement permis sont ceux à l'intérieur du cercle inscrit.
- *Le cas ultrarelativiste* : Les énergies cinétiques sont largement supérieures aux masses :  $Q \gg m$  et donc  $\sigma = 1$ . L'utilisation de la relation  $\cos(3\phi) = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi$  et un petit calcul simple montre qu'une solution est  $r \cos \phi = 1/2$ . Si on désigne par  $H$  le point de  $OA$  tel que  $OH = Q/6$ , alors l'équation devient  $OM \cos \phi = OH$ . C'est l'équation de la perpendiculaire à  $OA$  passant par  $H$ . La symétrie d'ordre 3 permet de finir la figure. La courbe frontière est dans ce cas le triangle équilatéral inscrit dans le cercle du cas non relativiste.

La courbe générale, obtenue pour une valeur de  $\sigma$  arbitraire, se trouve entre ces deux courbes limites. Elle présente néanmoins la symétrie d'ordre 3. Cette courbe frontière s'appelle le *diagramme de Dalitz* du processus considéré. Nous en avons donné un exemple sur la partie droite de la figure 10.7.

Dans le cas de masses inégales, le diagramme de Dalitz se trouve toujours à l'intérieur d'un triangle équilatéral, car la contrainte due à la conservation de l'énergie



reste évidemment valable. À nouveau, les contraintes sur les impulsions restreignent ce domaine, et il existe encore un diagramme de Dalitz correspondant, dont l'équation polaire est bien plus compliquée que celle du cas simple étudié ici. En particulier, la courbe frontière perd sa symétrie d'ordre 3.

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 270.

### 10.1 Fusée photonique

Retrouver les chiffres des tableaux 8.2 et 10.2.

### 10.2 Effet Compton

Établir l'équation (10.56).

### 10.3 Photoproduction d'une particule

Un photon, de fréquence  $\nu$ , entre en collision avec une particule de masse  $M$  et produit dans l'état final une particule de masse  $M'$ , voisine de  $M$ , et une particule de masse  $m$ , que l'on dit *photoproduite* par la réaction.

- (a) Quelle est la fréquence minimum nécessaire pour provoquer ce type de réaction ?  
Application à la photoproduction de pions chargés par réaction sur des protons

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+.$$

On donne  $M c^2 = 938,272 \text{ MeV}$ ,  $M' c^2 = 939,565 \text{ MeV}$ ,  $m c^2 = 139,57 \text{ MeV}$ ,  
 $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

- (b) Comment se simplifie la formule lorsque  $M' = M$  ? Appliquer la formule à la photoproduction de pions neutres par réaction sur des protons

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0.$$

Dans ce cas  $m c^2 = 134,976 \text{ MeV}$ .

Les fréquences minimum sont-elles très différentes dans ces deux cas ?

## 10.4 Variables de Mandelstam

On considère la collision de deux particules  $A$  et  $B$  de masses respectives  $m_a$  et  $m_b$  ; dans la voie finale on observe deux particules 1 et 2 de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ . Les quadrivecteurs énergie-impulsion correspondants sont notés  $\mathbf{p}_a$ ,  $\mathbf{p}_b$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ . Pour obtenir une description quantique covariante de la diffusion, Mandelstam a introduit les 3 invariants relativistes suivants

$$\begin{aligned}s &= (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2 c^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2, \\t &= (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1)^2 c^2 = (\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_2)^2 c^2, \\u &= (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_2)^2 c^2 = (\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_1)^2 c^2.\end{aligned}$$

- (a) Calculer  $s, t, u$  en fonction de l'énergie, de l'impulsion et de la masse de chaque particule concernée.
- (b) Montrer la relation  $s + t + u = m_a^2 c^4 + m_b^2 c^4 + m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4$ .

## 10.5 Désintégration en vol d'une particule

Une particule de masse  $M$ , d'énergie totale  $E$ , se désintègre en vol en deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ .

- (a) Calculer, dans le référentiel du centre de masse, l'énergie totale de chaque particule de désintégration, en fonction des 3 masses.
- (b) Exprimer, dans le référentiel où a lieu la désintégration, l'angle d'émission d'une particule, en fonction des masses, de  $E$  et de l'énergie de cette particule.

## 10.6 Masse invariante de 2 particules

On isole, dans un système composé de  $N$  particules libres, deux particules notées  $i$  et  $j$ , de quadrivecteur énergie impulsion  $\mathbf{p}_i$  et  $\mathbf{p}_j$ .

- (a) On sait que  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$  est un invariant relativiste. Chercher la limite classique de cet invariant.
- (b) Soit l'invariant  $s_{ij} = (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)^2 c^2$ . On définit la masse invariante des deux particules comme la valeur  $M_{ij} = \sqrt{s_{ij}}/c^2$ . On peut définir une énergie cinétique interne par  $T_{ij} = (M_{ij} - m_i - m_j) c^2$ . Que vaut la limite classique de  $T_{ij}$  ?

## 10.7 Désintégration du méson $\pi^0$

On considère la désintégration en vol d'un pion  $\pi^0$ , d'énergie  $E$  et de masse  $m$ , en deux photons

$$\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2.$$

- (a) Calculer l'énergie d'un photon émis avec l'angle  $\phi$  par rapport à la direction du pion incident.
- (b) Calculer l'énergie minimum  $E_m$  et maximum  $E_M$  de ce photon, en fonction de l'énergie  $E$ . Pour quelles valeurs de  $\phi$  sont-elles obtenues ? Vers quelles valeurs tendent ces quantités lorsque l'énergie du pion devient très grande ? Quelle doit être l'énergie  $E$  pour que  $E_M = 2E_m$  ?
- (c) Montrer qu'on peut mesurer la masse  $m$  du pion à l'aide de la détermination de ces énergies extrémales.
- (d) En admettant que la désintégration du  $\pi^0$  au repos se fait de façon isotrope, calculer la distribution en photons dans le référentiel du laboratoire, en fonction de l'énergie  $E$  et de l'angle d'émission  $\phi$ . Donner une allure de cette courbe pour quelques valeurs de l'énergie.
- (e) Calculer la masse au repos  $m$  du  $\pi^0$ , ainsi que sa vitesse et son énergie cinétique dans le laboratoire, lorsqu'on a mesuré les énergies minimum et maximum des photons respectivement à 22,49 MeV et 202,47 MeV.

## 10.8 Fusée relativiste

Considérons une fusée relativiste telle que décrite dans la section 10.2.1 :

- (a) Établir les équations (10.11) et (10.12).
- (b) Donner le lien entre la vitesse  $v$ , l'accélération  $\phi$  et la quantité de matière éjectée par unité de temps propre. En supposant une accélération propre constante de module  $A$  et une vitesse d'éjection constante  $u$ , donner la masse de la fusée en fonction du temps propre.
- (c) Si une fraction  $\varepsilon$  de la masse de la matière éjectée est transformée, sans perte, en énergie utile pour la propulsion, calculer la vitesse d'éjection de la matière  $u$  par rapport à la fusée. Considérer les deux cas limites  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\varepsilon \rightarrow 1$ .

## 10.9 Voile laser

Une voile plane de masse  $M$ , parfaitement réfléchissante, reçoit perpendiculairement à toute sa surface un rayonnement laser de puissance instantanée  $P$ .

- (a) Quelle est la puissance reçue par la voile à un instant donné ?
- (b) Déterminer l'équation du mouvement de cette voile dans un référentiel d'inertie.
- (c) En supposant que la vitesse initiale de la voile est nulle, calculer la vitesse atteinte en fonction du paramètre  $e = 2E/(Mc^2)$ , où  $E$  est l'énergie totale transmise.

- (d) Dans le cas où la puissance du laser est constante, donner la vitesse de la voile en fonction du temps propre.

### 10.10 Production des bosons vecteurs

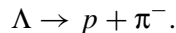
L'expérience de mise en évidence des bosons  $W^\pm, Z^0$ , vecteurs de l'interaction faible, effectuée au CERN en 1984, consiste à envoyer un faisceau de protons de 270 GeV d'énergie cinétique sur un faisceau d'antiprotons de même énergie, mais d'impulsion opposée.

Dans une expérience fictive, on envoie un faisceau d'antiprotons sur une cible fixe de protons. On aimerait disposer dans le centre de masse associé de la même énergie que dans le cas de l'expérience réelle.

Quelle devrait être, dans cette expérience sur cible fixe, l'énergie cinétique à communiquer aux antiprotons incidents ? Commentaires.

### 10.11 Désintégration de la particule $\Lambda$

La particule  $\Lambda$  se désintègre en un proton et un méson  $\pi$  selon la réaction



Cette particule est neutre électriquement et ne laisse pas de trace dans une chambre à bulles où règne un champ magnétique parallèle à l'axe  $Oz$ . Par contre ses produits de désintégration sont chargés et laissent une trace bien nette qu'on peut analyser.

En étudiant l'événement sur des photographies prises sous des angles différents, on arrive à reconstituer les trajectoires et on peut parvenir à déterminer le rayon de courbure des cercles, projections des trajectoires sur le plan  $Oxy$ . On en déduit les impulsions juste après la désintégration :  $p_p = 0,660 \text{ GeV}/c$  et  $p_\pi = 0,225 \text{ GeV}/c$ . De plus, on mesure l'angle azimutal  $\theta$  de chaque particule ; c'est l'angle entre la projection  $\vec{p}_h$  de l'impulsion  $\vec{p}$  sur le plan  $Oxy$  avec l'axe  $Ox$ . On trouve  $\theta_p = -35,2^\circ$  et  $\theta_\pi = -62,4^\circ$  juste après la désintégration. Enfin, pour définir complètement la direction, on mesure l'angle de profondeur  $\phi$ , qui est l'angle entre  $\vec{p}_h$  et  $\vec{p}$ . On choisit  $\phi > 0$  si la projection de  $\vec{p}$  suivant l'axe  $Oz$  est positive. On trouve  $\phi_p = 20,6^\circ$  et  $\phi_\pi = 19,5^\circ$ .

Sachant que  $m_p = 938,3 \text{ MeV}/c^2$  et  $m_\pi = 139,6 \text{ MeV}/c^2$ , calculer la masse de la particule  $\Lambda$ .

### 10.12 Bouclier de protection

Un astronef cylindrique de section  $S$  se déplace en ligne droite à la vitesse  $\beta c$  dans un milieu interstellaire, de densité moyenne  $\rho$ , contenant des particules au repos. Ce milieu interstellaire peut être considéré comme un référentiel d'inertie. L'engin est

muni, à l'avant, d'un bouclier de protection de forme conique, avec un demi-angle d'ouverture égal à  $\theta$ . On suppose que les particules heurtées sont piégées dans le bouclier où elles dissipent totalement leur énergie cinétique en chaleur. On suppose également que le bouclier rayonne comme un corps noir, c'est-à-dire que la quantité de chaleur émise par unité de temps et par unité de surface est donnée par  $\sigma \varepsilon T^4$ , où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann,  $\varepsilon$  est l'émissivité de la surface du bouclier et  $T$  est sa température absolue. On rappelle que la surface latérale d'un cône de rayon  $R$  et de génératrice  $L$  est égale à  $\pi RL$ .

- (a) Donner la quantité de chaleur dissipée par unité de temps propre dans le bouclier,  $W$ .
- (b) Calculer la température du bouclier. Quelle doit être la valeur de  $\theta$  pour que cette température n'excède pas 1000 K quand l'astronef traverse un milieu de densité  $\rho = 10^{-21} \text{ kg/m}^3$  à la vitesse  $0.99 c$  (on prendra  $\varepsilon = 1$  et  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ).

### 10.13 Particules $\psi$ et $\psi'$

Les anneaux de collision ( $e^+, e^-$ ) ont permis de mettre en évidence deux particules contenant des quarks charmés : le  $\psi$ , de masse  $m_1 = 3097 \text{ MeV}/c^2$ , et le  $\psi'$ , de masse  $m_2 = 3686 \text{ MeV}/c^2$ , par l'intermédiaire des réactions

$$e^+ + e^- \rightarrow \psi, \quad (1)$$

$$e^+ + e^- \rightarrow \psi'. \quad (2)$$

On rappelle que la réaction a lieu entre deux faisceaux de particules possédant des impulsions opposées.

- (a) Quelles doivent être les énergies cinétiques des  $e^+$  et des  $e^-$  pour qu'aient lieu les réactions (1) et (2) ? Montrer que, dans les deux cas, la vitesse des électrons approche celle de la lumière avec une précision relative meilleure que  $10^{-6}$  ( $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ ).
- (b) La particule  $\psi'$  peut se désintégrer au repos suivant la réaction

$$\psi' \rightarrow \psi + n \pi^+ + n \pi^-. \quad (3)$$

Les mésons chargés ont une masse  $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$ . Quelle est la valeur maximale pour  $n$ , nombre de paires de pions chargés ? Dans la suite, on prendra  $n = 1$ .

- (c) Quelles sont les énergies  $T_+$  et  $T_-$  des mésons  $\pi^+$  et  $\pi^-$  lorsque la particule  $\psi$ , produite par la réaction (3), est au repos ?
- (d) Lorsque la particule  $\psi$  n'est pas au repos, écrire une relation entre  $T_+$ ,  $T_-$  et l'angle  $\theta$  de leur direction de vol.

### 10.14 Statoréacteur Bussard

Un statoréacteur interstellaire Bussard (voir section 10.2.2), de masse constante  $M$ , se déplace en ligne droite à la vitesse  $\beta c$  dans un milieu interstellaire, contenant des protons au repos avec une densité moyenne  $\rho$ . Ce milieu interstellaire peut être considéré comme un référentiel d'inertie. L'engin est muni, à l'avant, d'un collecteur de protons de section  $A$ . Une fraction  $\epsilon$  de la masse collectée est transformée avec une efficacité de 100 % en énergie cinétique pour les gaz d'échappement. On suppose qu'aucune matière collectée n'est perdue et que le moteur ne subit aucune perte par rayonnement.

- Déterminer l'équation du mouvement de ce statoréacteur.
- Résoudre cette équation à l'approximation des faibles vitesses.
- Montrer que, à vitesse relativiste, cette équation correspond à celle d'un mobile avec une accélération propre constante. Retrouver les performances citées dans la section 10.2.2.
- Montrer qu'il est possible d'obtenir par quadrature la position  $x$  du statoréacteur par rapport au milieu interstellaire, le temps  $t$  auquel il occupe cette position, ainsi que le temps propre à bord de l'engin en fonction de sa vitesse  $\beta c$ .

### 10.15 Référentiel de Breit

On considère la collision élastique de deux particules  $A$  et  $B$ , de masses  $m_a$  et  $m_b$ . Dans un référentiel galiléen quelconque, les impulsions de  $A$  et  $B$  sont  $\vec{p}_a$  et  $\vec{p}_b$  avant la collision,  $\vec{p}'_a$  et  $\vec{p}'_b$  après la collision.

- Montrer qu'il existe un référentiel inertiel  $\mathcal{B}$ , appelé référentiel de Breit, pour lequel  $\vec{p}_a + \vec{p}'_a = \vec{0}$ . Quelle est sa vitesse par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque ? On se placera désormais dans le référentiel de Breit.
- Montrer que le module des impulsions de chacune des particules et leurs énergies se conservent au cours du choc élastique. Calculer ces valeurs en fonction des énergies, du module de l'impulsion et de l'angle de déviation dans le référentiel du centre de masse.
- Étudier la position relative des impulsions  $\vec{p}_b$  et  $\vec{p}'_b$ , par rapport à la position des impulsions  $\vec{p}_a$  et  $\vec{p}'_a$  et justifier la dénomination de « référentiel de mur » donnée au référentiel  $\mathcal{B}$ .
- Calculer l'angle de déviation de chacune des particules en fonction du module des impulsions.

### 10.16 Désintégration d'une particule en mouvement

Une particule  $A$  de masse  $m_a$ , d'énergie  $E_a$  dans le laboratoire, se désintègre en deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ .

- (a) Rappeler l'expression de la vitesse  $V_{\text{cm}}$  du centre de masse dans le laboratoire. En déduire la valeur du facteur cinématique correspondant  $\gamma$ .
- (b) Calculer l'énergie  $E'_a$  de la particule  $A$  dans le référentiel du centre de masse. Pour chacune des particules de la voie finale, calculer, dans ce référentiel, l'impulsion  $p'_i$  et l'énergie  $E'_i$ .
- (c) En se basant par exemple sur l'ellipse de Blaton, calculer dans le laboratoire, pour chacune des particules, l'impulsion et l'énergie minimales et maximales. Vérifier, dans ces cas particuliers, la conservation de l'énergie et de l'impulsion.
- (d) Quelle est l'énergie minimum  $E_a(\text{min})$  de la particule  $A$  dans le laboratoire pour que les particules de la voie finale soient toutes émises vers l'avant ?
- (e) On suppose que  $E_a > E_a(\text{min})$ . Calculer l'angle limite maximal  $\theta_M$  pour l'émission. Vers quelle valeur tend cet angle limite lorsque la vitesse de la particule instable s'approche de  $c$  ?
- (f) On suppose  $E_a \gg m_a c^2$  et  $m_1 = m_2 = m$ . Comment se comporte l'angle limite  $\theta_M(E_a)$  en fonction de  $E_a$  ?

### 10.17 Choc relativiste de deux particules de masses identiques

Une particule 1, de masse  $m$  et d'énergie cinétique  $T_1$ , entre en collision avec une particule 2 de même masse, au repos dans le référentiel du laboratoire. Après le choc élastique, les deux particules poursuivent leur trajectoire en faisant des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  avec la ligne de vol de la particule incidente, avec des énergies cinétiques  $T'_1$  et  $T'_2$ . On notera  $\alpha = T_1/(mc^2)$ .

- (a) Démontrer la relation suivante

$$\cos^2 \theta_1 = \frac{T'_1(T_1 + 2mc^2)}{T_1(T'_1 + 2mc^2)}.$$

- (b) En déduire l'expression de  $T'_1$  en fonction de  $T_1$ ,  $\theta_1$  et  $\alpha$ .
- (c) Entre quelles valeurs minimum et maximum varie l'énergie cinétique  $T'_1$  ? Pour quelles valeurs de  $\theta_1$  sont-elles obtenues ?
- (d) Calculer, en fonction de  $\alpha$ , le facteur cinématique  $\gamma$  du centre de masse par rapport au laboratoire.
- (e) Montrer, pour l'une quelconque des particules  $i$ , le lien suivant entre son angle de diffusion  $\theta_i$  dans le référentiel du laboratoire et son angle de diffusion  $\theta_i^*$  dans le référentiel du centre de masse

$$\tan \theta_i = \frac{1}{\gamma} \tan \left( \frac{\theta_i^*}{2} \right).$$

(f) Montrer que la relation suivante est vérifiée

$$|\tan \theta_1 \tan \theta_2| = \frac{1}{\gamma^2}.$$

(g) Calculer l'angle d'émission  $\theta$  entre les deux particules sortantes en fonction de l'angle  $\theta_1^*$  et  $\alpha$ . Vérifier qu'à l'approximation non relativiste, cet angle vaut toujours  $\pi/2$ .

(h) Montrer que l'angle  $\theta$  passe par un minimum dans le cas d'une émission symétrique. Que vaut cet angle ? Retrouver la relation (10.61) dans cette situation.

### 10.18 Énergie acquise par l'électron dans l'effet Compton

Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{L}$ , un faisceau de photons d'énergie  $E_\gamma$  est envoyé sur des électrons, de masse  $m$ , au repos. On désignera par  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$  le référentiel du centre de masse et on notera  $\alpha = E_\gamma/mc^2$ . On fera les applications numériques pour des rayons X d'énergie  $E_\gamma = 10 \text{ keV}$  ( $mc^2 = 511 \text{ keV}$ ).

(a) Exprimer, en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$  du photon, de  $E_\gamma$  et de  $\alpha$ , l'énergie cinétique  $T'$  acquise par l'électron au cours du choc.

(b) Quelles sont les valeurs extrémales de cette énergie ? Pour quelles valeurs de  $\theta$  sont-elles obtenues ?

(c) Exprimer, en fonction de  $\alpha$ , la vitesse  $V = c\beta$  du centre de masse. Comparer cette valeur à la valeur classique de la mécanique newtonienne.

(d) À l'aide de la transformation de Lorentz, donner l'expression de l'énergie du photon avant la collision dans le référentiel  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$ . Retrouver l'effet Doppler longitudinal.

(e) Quelle est l'énergie de l'électron avant la collision dans le référentiel  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$  ?

(f) En déduire, dans le référentiel  $\mathcal{R}_{\text{cm}}$ , les énergies du photon et de l'électron après la collision.

(g) Soit  $\phi$  l'angle que fait la direction de l'électron après la collision avec la direction du photon incident. Montrer le lien suivant entre les deux angles de diffusion

$$\tan(\theta/2)\tan(|\phi|) = \frac{1}{1+K}$$

où  $K$  est un facteur constant qu'on déterminera en fonction de  $\alpha$ . Calculer  $|\phi|$ , si  $\theta = 60^\circ$ .



### 10.19 Effet Compton sur un électron cible en mouvement

Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{L}$ , un laser envoie des photons de fréquence  $\nu$  (de longueur d'onde  $\lambda$ ) sur des électrons, de masse  $m$ , d'énergie  $E$ , qui arrivent en sens opposé. On notera  $\alpha = mc^2/E$  (c'est l'inverse du facteur cinématique de l'électron).

On fera toutes les applications numériques pour un laser à rubis de longueur d'onde  $\lambda = 694,2$  nm dont le faisceau de photons est envoyé sur des électrons de grande énergie  $E = 5$  GeV. On pourra utiliser l'approximation  $hc = 2 \times 10^{-25}$  J·m et  $mc^2 = 511$  keV.

- (a) Quelle est l'expression de la fréquence  $\nu'$  des photons diffusés, en fonction de  $\nu$ ,  $E$ ,  $\alpha$  et de l'angle de diffusion  $\theta$  des photons ?
- (b) Retrouver le résultat de l'effet Compton habituel sur électron au repos.
- (c) Montrer qu'il est possible d'ajuster à une valeur critique  $\nu_c$  la fréquence  $\nu$  du faisceau incident de telle sorte que la fréquence diffusée  $\nu'$  soit indépendante de l'angle de diffusion. Entre quelles valeurs extrémales se trouve la fréquence diffusée  $\nu'$  ? Pour quelles valeurs de  $\theta$  sont-elles obtenues ? On commentera les résultats par comparaison à  $\nu_c$ .
- (d) Déterminer la longueur d'onde  $\lambda'$ , dans le laboratoire, des photons diffusés à angle droit dans le laboratoire.
- (e) Déterminer la longueur d'onde  $\lambda'_0$  des photons diffusés dans le référentiel  $\mathcal{R}$  pour lequel l'électron est au repos avant la réaction.
- (f) Calculer l'angle de diffusion  $\theta_0$  des photons dans ce référentiel  $\mathcal{R}$ .

## Chapitre 11

# Le champ électromagnétique

*Les rotors de chaque générateur et de chaque moteur, en cet âge de l'électricité, proclament fermement la vérité de la théorie de la relativité à tous ceux qui ont des oreilles pour entendre.*

Leigh PAGE (1941)

La théorie électromagnétique, à elle seule, constitue un très vaste sujet d'étude. Nous ne ferons ici qu'en présenter certains aspects en rapport étroit avec la relativité restreinte. Cette dernière a d'ailleurs été élaborée, au départ, pour décrypter quelques-unes des énigmes posées par les propriétés du champ électromagnétique. Pour une présentation très complète de la théorie électromagnétique classique, le lecteur pourra consulter, par exemple, l'ouvrage de J. D. Jackson cité dans la bibliographie.

### 11.1 CHAMPS TENSORIELS ET DÉRIVÉES COVARIANTES

Le tenseur métrique deux fois covariant de composantes  $g_{\mu\nu}$  a été introduit dans le chapitre 8. Nous allons maintenant construire un nouveau tenseur pour représenter le champ électromagnétique. Mais avant cela, il est nécessaire de définir les notions de champs tensoriels et de dérivée covariante.

On peut, en toute généralité, construire des tenseurs  $p$  fois contravariants et  $q$  fois covariants c'est-à-dire de variance  $(p, q)$  et d'ordre  $p + q$ , dont les compo-

santes <sup>1</sup> sont notées  $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ . Si  $\Lambda$  est une matrice représentant une transformation de Lorentz, la loi de transformation d'un tel tenseur sous un changement de référentiel s'écrit (voir section 8.2)

$$T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \Lambda_{\sigma_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\sigma_p}^{\mu_p} (\Lambda^{-1})_{v_1}^{\rho_1} \dots (\Lambda^{-1})_{v_q}^{\rho_q} T_{\rho_1 \dots \rho_q}^{\sigma_1 \dots \sigma_p}. \quad (11.1)$$

Un champ scalaire, c'est-à-dire une fonction sur l'espace-temps, est un champ tensoriel de variance (0,0), autrement dit un invariant. Sa valeur en un point donné de l'espace-temps est la même quel que soit le référentiel considéré.

Si on réalise la transformation de Lorentz  $x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu$ , alors on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}. \quad (11.2)$$

On en conclut que l'opérateur  $\nabla_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  se transforme comme un tenseur de variance (0,1), c'est-à-dire un tenseur une fois covariant. L'opérateur  $\nabla^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\nu$  se transforme donc comme un tenseur de variance (1,0), c'est-à-dire un tenseur une fois contravariant.

Un champ tensoriel de variance  $(p,q)$  est défini sur l'espace-temps si à chaque événement est associé un tenseur  $T$  de variance  $(p,q)$ . Considérons un champ tensoriel de composantes  $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ . Si chacune de ces composantes est une fonction dérivable des coordonnées spatiotemporelles, alors la *dérivée covariante*  $\nabla T$  de ce champ tensoriel est un champ tensoriel de variance  $(p,q+1)$  dont les composantes sont  $\nabla_\rho T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ . Puisque  $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ , la dérivation covariante commute avec l'opération de montée ou de descente d'indices (voir annexe D).

Définissons trois opérations particulières au moyen de la dérivée covariante :

- Si  $f$  est un champ scalaire, alors  $\nabla f$  est le quadrivecteur gradient de  $f$ , de composantes covariantes  $\nabla_\mu f$  et de composantes contravariantes  $\nabla^\mu f = g^{\mu\nu} \nabla_\nu f$ .
- La divergence d'un champ de quadrivecteur  $w$  est le champ scalaire

$$\nabla \cdot w = \nabla_\mu w^\mu = \nabla^\mu w_\mu. \quad (11.3)$$

1. Un tenseur n'est pas complètement défini par ses composantes ; il est également nécessaire de connaître la base  $\{e_\mu\}$  associée à l'espace-temps de Minkowski. Par exemple, un tenseur  $T$  de variance  $(p,0)$  s'écrit  $T = T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p}$ . Le produit tensoriel, indiqué par le symbole  $\otimes$ , est une opération linéaire et associative, mais non commutative. Pour écrire de la même manière un tenseur de variance quelconque  $(p,q)$ , il est nécessaire d'introduire les vecteurs de base de l'espace dual (ou réciproque) de l'espace-temps de Minkowski. Ce sujet ne sera pas abordé ici. De plus, l'ordre dans lequel apparaissent les indices haut et bas est important. Le tenseur  $T^\mu_\nu$  n'est pas équivalent au tenseur  $T_\mu^\nu$ . Nous ne nous encomberrons pas ici de ce genre de subtilités, importantes mais inutiles pour notre propos.

– L'opérateur dalembertien  $\square$  est, par définition, l'opérateur invariant

$$\begin{aligned}\square &= \nabla \cdot \nabla = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu = \nabla^\mu \nabla_\mu = \nabla_\mu \nabla^\mu \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2},\end{aligned}\quad (11.4)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur *laplacien*. Appliqué aux composantes d'un champ tensoriel, l'opérateur  $\square$  donne les composantes d'un tenseur de même variance.

## 11.2 ÉQUATIONS DE MAXWELL ET ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Toutes les propriétés du champ électromagnétique sont contenues dans les équations de Maxwell, au nombre de quatre. Deux d'entre elles, de nature structurelle, relient les vecteurs champ électrique  $\vec{E}$  et champ magnétique  $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{Absence de pôles magnétiques libres}) \quad (11.5)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (11.6)$$

Les deux autres sont conjoncturelles, c'est-à-dire qu'elles dépendent des charges et courants électriques. **Dans le vide**, elles ont pour expressions respectives

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{Loi de Coulomb}) \quad (11.7)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{Théorème d'Ampère}) \quad (11.8)$$

où  $\rho$  est la densité de charge électrique et  $\vec{j}$  est la densité de courant électrique. La perméabilité  $\mu_0$  et la permittivité  $\epsilon_0$  sont deux coefficients affectés au vide (c'est la signification de l'indice 0). Ces équations sont linéaires. Cela signifie que le champ résultant de la combinaison linéaire de champs électromagnétiques solutions de ces équations est également une solution de ces équations, c'est-à-dire un champ électromagnétique.

2. En toute rigueur, le vecteur  $\vec{B}$  défini par les équations (11.5)-(11.8) est le vecteur induction magnétique.

**En l'absence de sources** ( $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ ), éliminons la grandeur  $\vec{B}$  entre ces équations en prenant le rotationnel de l'équation (11.6)

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (11.9)$$

ou

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (11.10)$$

On obtient, en vertu de la troisième équation de Maxwell (11.7),

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0}. \quad (11.11)$$

La forme de cette équation est celle de l'équation générale de propagation des ondes avec une vitesse de propagation de module égal à  $v_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Si on élimine  $\vec{E}$  entre les équations de Maxwell en l'absence de sources, on obtient de façon analogue

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta \vec{B} = \vec{0}. \quad (11.12)$$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont associés à un phénomène ondulatoire se propageant dans le vide avec la **même** vitesse constante  $v_0$  ; c'est l'onde électromagnétique.

Cette vitesse  $v_0$  coïncide avec  $c$ , la vitesse de propagation de la lumière dans le vide<sup>3</sup>. Cette coïncidence est d'ailleurs une des principales preuves de la nature électromagnétique de la lumière. Remarquée dès l'origine par Maxwell, elle permet de relier les deux constantes du vide  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  avec la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ , grâce à la relation

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (11.13)$$

Dans la suite, cette identité sera toujours utilisée. Dans le vide, chaque composante  $\psi$  du vecteur champ électrique ou magnétique satisfait donc à l'équation d'onde

$$\square \psi = 0. \quad (11.14)$$

---

3. Pour des informations concernant la propagation des ondes électromagnétiques dans la matière, voir, par exemple, le livre de J. D. Jackson (biblio). Voir également la note de bas de page n° 3, p. 89.

## 11.3 QUADRIVECTEUR DENSITÉ DE COURANT ÉLECTRIQUE

L'expérience nous apprend qu'il existe une charge élémentaire égale en grandeur à la charge d'un électron <sup>4</sup> et qu'un courant électrique est dû à un mouvement de charges. Considérons un nuage de particules, toutes de charge  $q$ . Un observateur  $A$  particulier observe un élément infinitésimal de ce nuage, au repos par rapport à lui. Il y compte  $dN$  particules occupant un volume propre  $dV_0$  (dans cette section, l'indice 0 affecté à une grandeur scalaire indique qu'elle est mesurée dans le référentiel propre). Il mesure donc, pour cet élément de volume, une densité de particules  $n_0 = dN/dV_0$  et une densité de charge  $\rho_0 = n_0 q$ . La grandeur  $n_0$ , le nombre de particules de l'élément de volume divisé par son volume propre, est manifestement un invariant. Si la charge électrique  $q$  est un invariant, alors la grandeur  $\rho_0$  l'est également. Les nombreuses expériences qui ont été menées à ce jour ont toujours confirmé la justesse de ce postulat d'invariance de la charge électrique <sup>5</sup>.

Un autre observateur  $B$ , en mouvement inertiel par rapport au premier, constate que ces mêmes  $dN$  particules se déplacent à la vitesse  $\vec{v}$  et occupent cette fois un volume  $dV = dV_0/\gamma(v)$  (voir section 4.4). Il mesure donc une densité de particules  $n = dN/dV = \gamma(v) n_0$  et une densité de charge  $\rho = n q = \gamma(v) \rho_0$ . De plus, l'observateur  $B$  mesure un courant électrique  $\vec{j} = n q \vec{v} = \rho \vec{v} = \gamma(v) \rho_0 \vec{v}$ . Il semble donc assez naturel d'introduire un *quadrivecteur densité de courant*  $\vec{j}$  défini par le produit du quadrivecteur vitesse  $\vec{u}$  de l'élément de volume et de l'invariant  $\rho_0$ , la densité de charge dans le référentiel où cet élément de volume est au repos. Pour l'observateur  $B$ , les composantes spatiotemporelles du quadrivecteur  $\vec{j}$  sont (voir section 8.5)

$$j^\mu = (j^0, \vec{j}) = \rho_0 u^\mu = \rho_0 (\gamma(v) c, \gamma(v) \vec{v}) = (\rho c, \rho \vec{v}). \quad (11.15)$$

Pour l'observateur  $A$ , ces composantes se réduisent à  $(\rho_0 c, \vec{0})$ . La pseudo-norme de ce quadrivecteur est

$$j^2 = \rho_0^2 c^2. \quad (11.16)$$

C'est donc un quadrivecteur de genre temps pointant vers le futur ou le passé suivant le signe de  $\rho_0$ .

Prenons la divergence de l'équation (11.8) et soustrayons-en la dérivée par rapport au temps de l'équation (11.7). On obtient la relation suivante

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (11.17)$$

4. Les quarks, constituants des hadrons, portent des charges qui sont des multiples du tiers de la charge élémentaire, mais ces particules n'existent pas à l'état libre. Elles se combinent toujours pour produire un hadron dont la charge est un multiple entier de la charge élémentaire.

5. Voir, par exemple, le livre de J. D. Jackson, sect. 11.9 (biblio).

Cette équation est l'équation de conservation de la charge électrique ou *équation de continuité*. Il est facile de voir que celle-ci peut être écrite sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (11.18)$$

Cette grandeur est manifestement invariante et garde donc la même valeur dans tout référentiel d'inertie.

## 11.4 QUADRIVECTEUR POTENTIEL

L'absence de pôles magnétiques libres  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  implique que le vecteur champ magnétique est nécessairement le rotationnel d'un champ vectoriel

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad (11.19)$$

où  $\vec{A}$  est ce que l'on appelle le potentiel vecteur. L'équation (11.6) devient alors  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) / \partial t = \vec{\nabla} \wedge \left( -\partial \vec{A} / \partial t \right)$ . Puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul, l'égalité précédente implique qu'on peut définir un potentiel scalaire  $\phi$  tel que (le signe  $(-)$  est dû à des raisons historiques)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (11.20)$$

En utilisant ces définitions dans les équations avec sources, on obtient les relations suivantes

$$\begin{aligned} -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \wedge \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) &= \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Après réarrangement, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta\phi &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) + \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \vec{\nabla} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right), \end{aligned} \quad (11.22)$$

On montre en électrodynamique classique que les champs électrique et magnétique ne sont pas modifiés si on impose la condition suivante

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (11.23)$$

appelée *jauge de Lorentz*. Les deux équations (11.22) sont alors découplées et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi &= \square \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} &= \square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Puisque l'opérateur  $\square$  est un invariant, on peut définir un nouveau quadrivecteur  $A$ , le *quadrivecteur potentiel* ou *quadripotential*, de divergence nulle et de composantes spatio-temporelles

$$A^\mu = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right). \quad (11.25)$$

En effet, les équations (11.24) s'écrivent alors comme l'égalité de deux quadrivecteurs

$$\square A = \mu_0 \vec{j}, \quad (11.26)$$

tandis que la condition (11.23) devient

$$\vec{\nabla} \cdot A = 0. \quad (11.27)$$

En l'absence de sources, l'équation (11.26) se réduit à  $\square A = 0$ , forme analogue à l'équation de propagation (11.14).

## 11.5 TENSEUR ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Les équations de Maxwell écrites sous leur forme (11.5)-(11.8) possèdent une structure complexe, qui semble peu naturelle de prime abord. Nous allons montrer que le formalisme de la relativité restreinte permet de les récrire sous une forme très simple. Construisons les grandeurs suivantes

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (11.28)$$

Les quantités  $F_{\mu\nu}$  sont manifestement les composantes covariantes d'un tenseur antisymétrique  $F$ . Les composantes contravariantes sont obtenues par la procédure standard

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (11.29)$$



Explicitons les composantes  $F_{01}$  et  $F_{12}$

$$\begin{aligned}
 F_{01} &= \nabla_0 A_1 - \nabla_1 A_0 = \frac{\partial}{c \partial t}(-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi}{c} \right) \\
 &= -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = \frac{E_x}{c}, \\
 F_{12} &= \nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1 = \frac{\partial}{\partial x}(-A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(-A_x) \\
 &= - \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = -B_z.
 \end{aligned} \tag{11.30}$$

En calculant de la même manière les autres composantes, on trouve finalement

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.31}$$

Ce tenseur  $F$  est le *tenseur électromagnétique* ou *tenseur de Faraday*.

La loi de transformation de ce tenseur est donnée par

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F_{\rho\sigma}. \tag{11.32}$$

Sous forme matricielle, cette relation devient  $F' = \tilde{\Lambda} F \Lambda$ . On en déduit que le déterminant du tenseur électromagnétique

$$\det F = \frac{1}{c^2} (E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z)^2 \tag{11.33}$$

est un invariant puisque  $\det F' = (\det \Lambda)^2 \det F = \det F$ . Un autre invariant est donné par l'opération tensorielle

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left( -E_x^2/c^2 - E_y^2/c^2 - E_z^2/c^2 + B_z^2 + B_y^2 + B_x^2 \right). \tag{11.34}$$

On obtient donc deux invariants du champ électromagnétique

$$c^2 \det F = \left( \vec{E} \cdot \vec{B} \right)^2, \tag{11.35}$$

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}. \tag{11.36}$$

L'équation (11.35) implique que la quantité  $|\vec{E} \cdot \vec{B}|$  est également un invariant. Comme nous le verrons dans la section suivante,  $\vec{E}$  est un vecteur polaire et  $\vec{B}$  est un vecteur axial. En conséquence, le produit scalaire  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  lui-même n'est invariant que pour les transformations propres de Lorentz (voir annexe C). Dans le cas d'une opération de parité ou de renversement du temps, ce produit scalaire change de signe.

Rappelons que la valeur de ces invariants peut dépendre du point de l'espace-temps considéré ; l'invariance concerne en fait des observateurs en mouvement relatif mais qui s'intéressent au même point de l'espace-temps.

Les équations de Maxwell structurelles (11.5)-(11.6) s'obtiennent en utilisant l'identité suivante

$$\nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} = 0, \quad (11.37)$$

qui découle de la propriété d'antisymétrie du tenseur  $F$ . En effet, cette condition donne

$$0 = \nabla_1 F_{23} + \nabla_2 F_{31} + \nabla_3 F_{12} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (11.38)$$

On retrouve donc bien l'absence de pôles magnétiques libres  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . On obtient également

$$0 = \nabla_0 F_{12} + \nabla_1 F_{20} + \nabla_2 F_{01} = -\frac{\partial B_z}{c\partial t} - \frac{\partial E_y}{c\partial x} + \frac{\partial E_x}{c\partial y}, \quad (11.39)$$

ce qui donne la composante  $z$  de la loi vectorielle de Faraday. Il en est de même pour les autres composantes.

Pour retrouver les autres équations de Maxwell, il faut faire intervenir le quadri-potentiel lié aux sources. Partons de

$$\begin{aligned} \square A_\mu &= g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma A_\mu = g^{\rho\sigma} \nabla_\rho (\nabla_\sigma A_\mu + \nabla_\mu A_\sigma - \nabla_\mu A_\sigma) \\ &= g^{\rho\sigma} \nabla_\rho F_{\sigma\mu} + \nabla_\mu \nabla^\sigma A_\sigma. \end{aligned} \quad (11.40)$$

En utilisant la condition (11.27) et l'équation (11.26), on trouve finalement

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu F_{\nu\rho} = \mu_0 j_\rho. \quad (11.41)$$

Explicitons cette formule pour des indices particuliers. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} \mu_0 j_0 &= \frac{\rho}{\epsilon_0 c} = g^{\mu\nu} \nabla_\mu F_{\nu 0} = g^{\mu 1} \nabla_\mu F_{10} + g^{\mu 2} \nabla_\mu F_{20} + g^{\mu 3} \nabla_\mu F_{30} \\ &= -\nabla_1 F_{10} - \nabla_2 F_{20} - \nabla_3 F_{30} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{E_x}{c} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{E_y}{c} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{E_z}{c} \right) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (11.42)$$

On retrouve bien la loi de Coulomb (11.7). Avec un autre indice, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mu_0 j_1 &= -\mu_0 j_x = g^{\mu\nu} \nabla_\mu F_{\nu 1} = g^{\mu 0} \nabla_\mu F_{01} + g^{\mu 2} \nabla_\mu F_{21} + g^{\mu 3} \nabla_\mu F_{31} \\
 &= \nabla_0 F_{01} - \nabla_2 F_{21} - \nabla_3 F_{31} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E_x}{c} \right) - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{11.43}$$

Cela donne la composante  $x$  de la relation vectorielle du théorème d'Ampère (11.8). Il en est de même pour les autres composantes.

Le champ électromagnétique  $F$  n'est pas modifié si on remplace le quadripotential  $A$  par  $A + \nabla \Psi$ , où  $\Psi$  est un champ scalaire. C'est cette liberté de choix qui nous permet d'adopter la jauge de Lorentz <sup>6</sup>.

Écrites sous les formes (11.37) et (11.41), les équations de Maxwell sont manifestement invariantes pour les transformations de Lorentz. La non-invariance de ces équations pour les transformations de Galilée est en fait à l'origine du développement de la théorie de la relativité restreinte (voir chapitre 2) <sup>7</sup>.

## 11.6 TRANSFORMATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Avec les conventions précédentes, la matrice des composantes contravariantes  $F^{\mu\nu}$  du tenseur électromagnétique peut s'écrire

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & & & \\ E_y/c & & B & \\ E_z/c & & & \end{pmatrix}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.44}$$

6. L'invariance de jauge est une notion fondamentale de la théorie quantique des champs.

7. Pour une démonstration rigoureuse de la non-invariance des équations de Maxwell sous l'action des transformations de Galilée, on peut consulter l'article de M. Le Bellac et J.-M. Lévy-Leblond, « Galilean Electromagnetism », *Il Nuovo Cimento*, vol. 14, n° 2, 1973, p. 217-234.

Dans l'espace-temps de Minkowski, une matrice  $S$  de changement de référentiel, par rotation ou par parité (voir formule (2.11)), s'écrit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (11.45)$$

où  $R$  est une matrice  $3 \times 3$  n'agissant que sur les composantes spatiales des quadri-vecteurs. Sous l'action de ce changement de référentiel, les composantes contravariantes du tenseur  $F$  se transforment suivant la loi

$$F^{\mu\nu} = S_p^\mu S_\sigma^\nu F'^{\rho\sigma}, \quad (11.46)$$

ce qui se traduit sous forme matricielle par  $F = S F' \tilde{S}$ . Le calcul explicite donne

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & & & \\ E_y/c & & B & \\ E_z/c & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(E'_x/c, E'_y/c, E'_z/c) \tilde{R} \\ R \begin{pmatrix} E'_x/c \\ E'_y/c \\ E'_z/c \end{pmatrix} & R B' \tilde{R} \end{pmatrix}. \quad (11.47)$$

On constate donc que le triplet de nombres  $\vec{E}/c, (E_x/c, E_y/c, E_z/c)$ , se transforme bien comme un vecteur ordinaire de l'espace (ou vecteur polaire) sous l'action d'un changement de référentiel par une transformation spatiale  $R$ ,  $\vec{E} = R \vec{E}'$ . La matrice  $B$  se transforme suivant la relation  $B = R B' \tilde{R}$ . En utilisant des rotations particulières – autour d'un seul axe par exemple – on trouve facilement que cette relation est équivalente à la transformation  $\vec{B} = R \vec{B}'$  où  $\vec{B}$  est le triplet de nombre  $(B_x, B_y, B_z)$ . Toutefois, les composantes de la matrice  $B$  ne sont pas modifiées par une opération de parité. La grandeur  $\vec{B}$  forme donc un pseudo-vecteur de l'espace (ou vecteur axial).

Les composantes du tenseur  $F$  dans deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en mouvement relatif sont unies par les relations (11.32). Pour les **transformations de Lorentz sans rotation** (7.15), ces relations peuvent s'écrire, après un long calcul, sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\vec{E}}{c} &= \gamma \left( \frac{\vec{E}'}{c} - \vec{\beta} \times \vec{B}' \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \left( \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{E}'}{c} \right), \\ \vec{B} &= \gamma \left( \vec{B}' + \vec{\beta} \times \frac{\vec{E}'}{c} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \left( \vec{\beta} \cdot \vec{B}' \right).\end{aligned}\quad (11.48)$$

Pour inverser ces équations, il suffit de changer le signe du vecteur  $\vec{\beta}$  et de permuter les coordonnées primées et non primées, en vertu des relations (7.16). Les grandeurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne se transforment visiblement pas comme les composantes spatiales de quadrivecteurs ; cela provient du fait qu'il s'agit en fait de quantités extraites d'un tenseur du second ordre. Il est possible de simplifier l'écriture des équations (11.48) en décomposant les vecteurs champs électrique et magnétique en leurs composantes parallèle et perpendiculaire à la vitesse relative des deux référentiels

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \quad (11.49)$$

$$\frac{\vec{E}_{\perp}}{c} = \gamma \left( \frac{\vec{E}'_{\perp}}{c} - \vec{\beta} \wedge \vec{B}' \right) \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\perp} = \gamma \left( \vec{B}'_{\perp} + \vec{\beta} \wedge \frac{\vec{E}'}{c} \right). \quad (11.50)$$

## 11.7 FORCE DE LORENTZ

La force agissant sur une particule de charge  $q$ , plongée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$ , est appelée *force de Lorentz* ; elle dépend de la vitesse  $\vec{v}$  de la particule. Son expression bien connue est donnée par

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right). \quad (11.51)$$

On souhaite obtenir une expression covariante de cette force de Lorentz. On s'attend évidemment à ce qu'elle dépende du quadrivecteur force  $\mathbf{K}$ , du quadrivecteur vitesse  $\mathbf{u}$  et du tenseur électromagnétique  $\mathbf{F}$ . Essayons la forme suivante

$$K_{\mu} = q F_{\mu\nu} u^{\nu}, \quad (11.52)$$

et explicitons-la pour différents indices. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}K_1 &= -K^1 = -\gamma(v) F_x = q F_{1\nu} u^{\nu} = q (F_{10} u^0 + F_{12} u^2 + F_{13} u^3) \\ &= q \left( -(E_x/c) \gamma(v) c - B_z \gamma(v) v_y + B_y \gamma(v) v_z \right).\end{aligned}\quad (11.53)$$

En éliminant le facteur  $\gamma(v)$ , on retrouve bien la composante  $x$  de la force de Lorentz. Les autres composantes s'obtiennent de la même manière.

On montre aisément que la composante  $K_0 = K^0$  du quadrivecteur force donne, grâce à la relation (11.52),

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad (11.54)$$

ce qui s'obtient directement à partir de la force de Lorentz. Sachant que la variation dans le temps  $dT/dt$  du travail  $T$  de la force électromagnétique sur une particule est égal à  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  (voir section 9.2), on constate que le travail de la force magnétique est nul ; le champ magnétique ne peut que défléchir la trajectoire de la particule sans modifier le module de sa vitesse.

Considérons un nuage de particules de charge électrique  $q$ , interagissant entre elles par l'intermédiaire du champ électromagnétique qu'elles génèrent. Elles gagnent ou perdent de l'énergie sous l'action des forces de Lorentz qu'elles subissent. Il y a donc échanges d'énergie entre ces particules et le champ. Regardons comment attribuer une énergie au champ électromagnétique de manière à ce que l'énergie totale du système particules-champ soit conservée. Supposons que les particules constituent une distribution quasi-continue de charges de densité  $\rho$  et qu'elles sont contenues dans un volume  $V$  délimité par une surface  $\Sigma_V$ . En vertu de la formule (11.54), la variation dans le temps du travail des forces électromagnétiques pour un élément de volume  $dV$  de cette distribution vaut  $\rho dV \vec{E} \cdot \vec{v}$ , où  $\vec{E}$  est le champ électrique généré par la totalité des charges. Pour l'ensemble des particules, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \int_V \rho \vec{E} \cdot \vec{v} dV = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV \\ &= \int_V \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV. \end{aligned} \quad (11.55)$$

Un calcul auxiliaire donne

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (11.56)$$

Ces relations permettent d'écrire

$$\frac{dT}{dt} = \int_V \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \right] dV. \quad (11.57)$$

En utilisant le théorème de Gauss, on peut écrire le travail des forces électromagnétiques comme la somme de deux contributions

$$\frac{dT}{dt} = - \int_{\Sigma_V} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S} - \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) dV. \quad (11.58)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (11.58) décrit les échanges d'énergie à travers la frontière de la distribution de charge. Le deuxième terme décrit les variations d'énergie à l'intérieur du volume.

On définit le *vecteur de Poynting*  $\vec{P}$  par

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}. \quad (11.59)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (11.58) représente le flux du vecteur de Poynting à travers la surface enveloppant les charges et les courants ; c'est le flux d'énergie dû au champ électromagnétique. Le produit scalaire  $\vec{P} \cdot d\vec{S}$  est négatif pour un flux entrant puisque le vecteur  $d\vec{S}$  est orienté vers l'extérieur de la surface. Cela explique la présence du signe  $(-)$  devant l'intégrale de surface de l'équation (11.58) pour que la contribution de ce flux entrant soit positive. La quantité

$$u_{\text{ém}} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad (11.60)$$

s'interprète comme la *densité d'énergie du champ électromagnétique*. Le signe  $(-)$  devant l'intégrale de volume dans l'équation (11.58) fait en sorte que l'énergie des particules diminue quand l'énergie du champ électromagnétique augmente.

Avec ces définitions, l'équation de conservation (11.58) prend la forme simplifiée suivante

$$\frac{d}{dt}(T + U) = - \int_{\Sigma_V} \vec{P} \cdot d\vec{S}, \quad (11.61)$$

où  $U$  est l'énergie totale du champ électromagnétique  $\int_V u_{\text{ém}} dV$ . Pour un champ électromagnétique seul ( $T = 0$ ), l'équation de conservation (11.61) peut se mettre sous la forme locale

$$\frac{\partial u_{\text{ém}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0. \quad (11.62)$$

## 11.8 ONDES PLANES

Dans le vide et en l'absence de charges et de courants, chaque composante  $\psi$  du champ électrique ou magnétique obéit à l'équation de propagation  $\square\psi = 0$  (voir section 11.2). Considérons une onde plane monochromatique sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \end{aligned} \quad (11.63)$$

où  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$  sont des vecteurs constants. On a  $\omega = 2\pi\nu$  où  $\nu$  est la fréquence de l'onde et  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde. La condition  $\square\psi = 0$  entraîne  $\omega^2/c^2 = \vec{k}^2$ , ce qui est équivalent à la relation connue  $\lambda = c/\nu$ . Les équations de Maxwell (11.5) et (11.7) donnent immédiatement  $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$  et  $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ . De plus, les équations de Maxwell (11.6) et (11.8) impliquent les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\vec{k} \wedge \vec{E}_0 - \omega \vec{B}_0 &= \vec{0}, \\ \vec{k} \wedge \vec{B}_0 + \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 &= \vec{0}.\end{aligned}\tag{11.64}$$

On vérifie que la solution de ces équations est donnée par

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c} (\hat{k} \wedge \vec{E}_0),\tag{11.65}$$

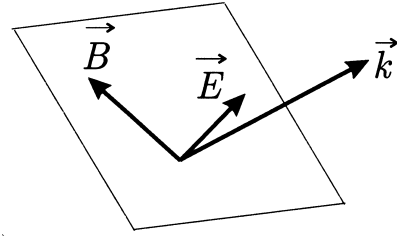
où  $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$  est le vecteur unitaire donnant la direction de propagation de l'onde. Il existe donc une relation simple entre le champ électrique et le champ magnétique d'une onde plane. De plus, les trois vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{k}$  forment un trièdre trirectangle (voir figure 11.1).

Comme le vecteur de Poynting (11.59) de l'onde plane dépend du temps, seule sa valeur moyenne  $\langle \vec{P} \rangle$  sur une période est une quantité intéressante. Un calcul simple donne  $\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = 1/2$ . En utilisant ce résultat avec les valeurs des champs donnés par les relations (11.63), il vient

$$\begin{aligned}\langle \vec{P} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0 c} \vec{E}_0 \wedge (\hat{k} \wedge \vec{E}_0) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c} \vec{E}_0^2 \hat{k} - \frac{1}{2} (\vec{E}_0 \cdot \hat{k}) \vec{E}_0 = \frac{\vec{E}_0^2}{2\mu_0 c} \hat{k}.\end{aligned}\tag{11.66}$$

Le flux d'énergie est donc proportionnel au carré du module du champ électrique. Le lien entre le module du champ électrique d'une onde plane mesuré dans deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  unis par une transformation de Lorentz sans rotation de vitesse  $\beta c$  est donné par (voir exercice 11.4)

$$\vec{E}^2 = \gamma^2 (1 + \beta \cdot \hat{k}')^2 \vec{E}'^2.\tag{11.67}$$



**Figure 11.1** Vecteur champ électrique  $\vec{E}$ , vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  et vecteur d'onde  $\vec{k}$  d'une onde électromagnétique plane.



En utilisant les relations (11.66) et (11.67), on retrouve bien la loi de transformation de l'intensité (9.51) énoncée dans la section 9.5.3.

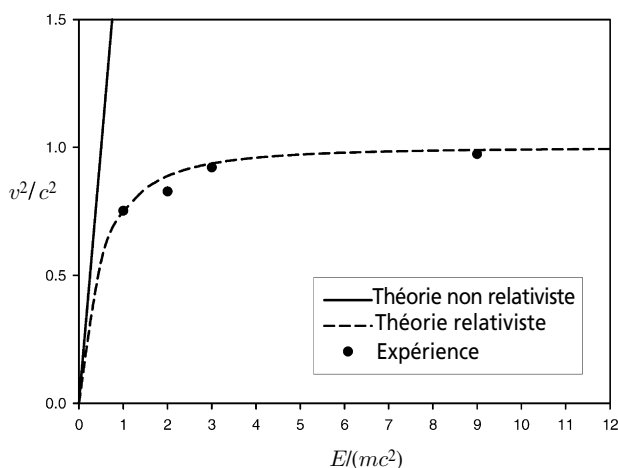
## 11.9 MOUVEMENT D'UNE CHARGE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME

Soit une particule de masse  $m$  et de charge  $q$ , au repos à l'instant  $t = 0$  dans un référentiel d'inertie donné, plongée dans un champ électrique uniforme. La force de Lorentz s'exerçant sur cette particule implique que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}. \quad (11.68)$$

Fixons le système d'axes de telle sorte que ce champ électrique soit orienté suivant l'axe  $Ox$  du référentiel, avec  $\mathcal{E} = E_x$ . En vertu de la formule (11.68), l'impulsion suivant les axes  $Oy$  et  $Oz$  est constante, et donc nulle puisque la vitesse initiale dans ces directions est également nulle. Le long de l'axe  $Ox$ , l'équation (11.68) s'intègre immédiatement pour donner  $p = q\mathcal{E}t$  ( $p = p_x$  puisque  $p_y = p_z = 0$ ). La particule se déplace donc le long de l'axe  $Ox$  avec une vitesse  $v$  telle que

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = At \quad \text{avec} \quad A = \frac{q\mathcal{E}}{m}, \quad (11.69)$$



**Figure 11.2** Vitesse  $v$  d'électrons relativistes en fonction du rapport  $E/(mc^2)$  où  $E$  est leur énergie totale et  $m$  leur masse. Les cercles pleins sont des données expérimentales<sup>8</sup>; le trait pointillé représente la prédiction de la théorie de la relativité; le trait plein représente la prédiction de la mécanique classique.

8. William Bertozzi, « Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons », *American Journal of Physics*, vol. 32, n° 7, July 1964, p. 551-555.

où  $A$  est une grandeur ayant la dimension d'une accélération. La vitesse de la particule en fonction du temps est donnée par

$$v = \frac{At}{\sqrt{1 + A^2 t^2 / c^2}}. \quad (11.70)$$

Il s'agit d'un mouvement à accélération propre constante de module  $A$  (voir équations (8.76)).

La force de Lorentz a ainsi été vérifiée expérimentalement avec une très grande précision (voir figure 11.2). Les principes de fonctionnement des accélérateurs de particules sont basés sur cette formule (voir exercices 11.11 et 11.13). Les propulseurs ioniques de certaines sondes spatiales fonctionnent grâce à des champs électriques intenses. L'utilisation de tels champs de force est également envisagée pour envoyer dans l'espace des charges utiles depuis le sol d'une planète au moyen d'une rampe électromagnétique <sup>9</sup>.



**Illustration 11.1** Dessins de Raoul Giordan, extraits de *Anticipation* n° 17 (Artima, 1980). Une rampe électromagnétique pourrait être installée sur la Lune pour envoyer dans l'espace des matériaux extraits du sol lunaire. Ceux-ci pourraient servir à la fabrication d'astronefs ou de colonies spatiales.

## 11.10 \* POTENTIEL ET CHAMP D'UNE CHARGE EN MOUVEMENT

Considérons deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  unis par une transformation de Lorentz sans rotation de vitesse  $\beta c$ . Une charge  $q$  occupe l'origine du repère spatial du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Dans ce référentiel, le courant dû à cette charge est nul et, donc, il est loisible de choisir le potentiel vecteur  $\vec{A}'$  également nul. Par contre, le potentiel scalaire est donné par

9. Voir par exemple : Richard D. Johnson et Charles Holbrow, édit., *Space Settlements – A Design Study*, NASA SP-413, 1977 ; Gerard K. O'Neill, *The high frontier. Human colonies in space*, Apogee Books, 3<sup>e</sup> éd., 2000 ; les ouvrages de Mallove et Matloff (biblio).

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \quad (11.71)$$

On en déduit que le champ magnétique  $\vec{B}'$  est nul et que le champ électrique vaut

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}. \quad (11.72)$$

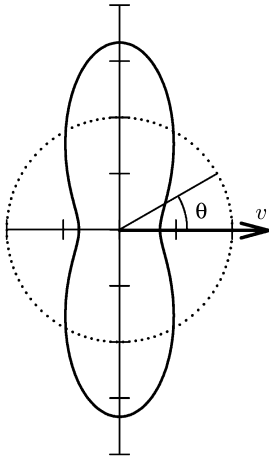
Pour connaître les champs électrique et magnétique dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on utilise les lois de transformation (11.49) et (11.50). On trouve alors

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel} = \frac{q\vec{r}'_{\parallel}}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \\ \vec{E}_{\perp} &= \gamma \vec{E}'_{\perp} = \frac{\gamma q \vec{r}'_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \\ \vec{B}_{\parallel} &= \vec{0}, \\ \vec{B}_{\perp} &= \gamma \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}' = \frac{\gamma q \vec{V} \wedge \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'^3}. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Remarquons que, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , le champ magnétique  $\vec{B}$  n'est pas nul, ce qui semble assez naturel puisque la charge est en mouvement dans ce référentiel. On peut obtenir les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en fonction des coordonnées  $\vec{r}$  et  $t$  en utilisant la loi de transformation (7.12). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \frac{\gamma q (\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2 (\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)^2 + \vec{r}_{\perp}^2]^{3/2}}, \\ \vec{E}_{\perp} &= \frac{\gamma q \vec{r}_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2 (\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)^2 + \vec{r}_{\perp}^2]^{3/2}}, \\ \vec{B}_{\parallel} &= \vec{0}, \\ \vec{B}_{\perp} &= \frac{\gamma q \vec{V} \wedge \vec{r}_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 c^2 [\gamma^2 (\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)^2 + \vec{r}_{\perp}^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (11.74)$$

Pour analyser ces relations, plaçons-nous au temps  $t = 0$ , pour lequel la charge est à l'origine, et choisissons la vitesse relative dirigée suivant les axes  $Oz$  et  $Oz'$ . Les expressions pour le champ électrique  $\vec{E}(0)$  à l'instant initial se simplifient un peu et deviennent



**Figure 11.3** Dépendance angulaire (11.79) du module du champ électrique d'une charge en mouvement uniforme de vitesse  $V$ , pour  $V = 0$  (trait pointillé) et  $V = 0,8c$  (trait plein).

$$\vec{E}_{\parallel}(0) = \frac{\gamma q \vec{r}_{\parallel}}{4\pi\epsilon_0 D^{3/2}} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\perp}(0) = \frac{\gamma q \vec{r}_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 D^{3/2}}, \quad (11.75)$$

avec

$$D = \gamma^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = \gamma^2 r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta), \quad (11.76)$$

où  $\theta$  est l'angle polaire (par rapport à l'axe  $Oz$ ).  
Finalement, on trouve

$$\vec{E}(0) = \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} f(\beta, \theta), \quad (11.77)$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}, \quad (11.78)$$

avec

$$f(\beta, \theta) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (11.79)$$

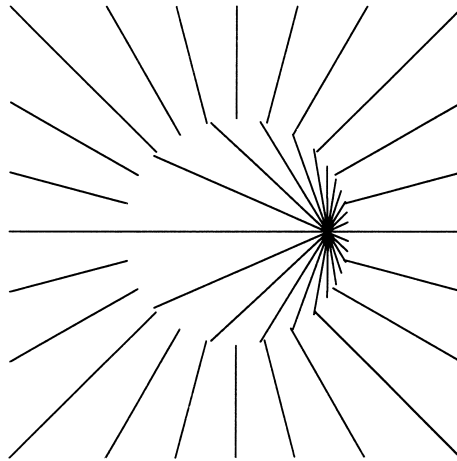
On a évidemment  $f(0, \theta) = 1$ , et on constate que  $f(\beta, 0) = 1/\gamma^2$  et  $f(\beta, \pi/2) = \gamma$ . Quand la vitesse de la charge augmente, le champ se concentre dans les directions perpendiculaires à la vitesse (voir figure 11.3).

Remarquons que le champ électrique (11.77) est radial, ce qui signifie que le vecteur  $\vec{E}(0)$  pointe dans la direction d'une ligne passant par la position instantanée de la charge. Donc, un observateur du référentiel  $\mathcal{R}$ , situé en un point quelconque de l'espace, mesure dans son voisinage en  $t = 0$  un champ électrique pointant exactement depuis la position de la charge en  $t = 0$ . Cela ressemble de manière inquiétante à une transmission instantanée de l'information. En fait, il n'en est rien car, dans la situation considérée, la charge possède depuis toujours un mouvement uniforme qui lui impose de passer par l'origine spatiale du référentiel à l'instant initial. Cette information est disponible pour tout observateur et c'est l'histoire passée de la charge qui détermine le champ observé.

Que se passe-t-il dans le cas d'une charge possédant une vitesse variable ? On peut montrer que les solutions générales des équations de Maxwell sont telles que lorsque qu'une source subit une modification, les champs électrique et magnétique en un point de l'espace ne s'adaptent à cette modification qu'après un temps égal à  $\ell/c$ , où  $\ell$  est la distance entre la source et le point considéré. Ces solutions sont appelées *solutions retardées*<sup>10</sup>. L'« influence électromagnétique » se propage donc, comme une onde électromagnétique, à la vitesse  $c$ .

10. Voir, par exemple, le livre de J. D. Jackson, chap. 6 (biblio).

En utilisant les expressions ci-dessus d'un champ électromagnétique généré par une charge ponctuelle, on peut montrer que la force qui s'exerce sur une charge  $q_1$  due à une charge  $q_2$  n'est en général pas la même que la force qui s'exerce sur la charge  $q_2$  due à la charge  $q_1$ . Il s'agit là d'une violation flagrante du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Ce principe est en fait incompatible avec la relativité restreinte qui implique que toute interaction se propage avec une vitesse finie. Appliqué à des objets éloignés, en mouvement et interagissant, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction nécessiterait une transmission instantanée des forces. Il doit donc être abandonné dans la théorie de la relativité restreinte.



**Figure 11.4** Une charge initialement au repos est instantanément accélérée et poursuit son mouvement à vitesse constante  $V = 0.8c$ . Les lignes de champ sont rectilignes et s'interrompent au niveau d'une sphère dont le rayon croît à la vitesse  $c$ .

Il est également possible de visualiser la structure du champ électrique d'une charge en mouvement au moyen des lignes de champ. Calculons le flux

$$W = \int_S \vec{E}(0) \cdot d\vec{S} \quad (11.80)$$

du champ électrique  $\vec{E}(0)$  à travers une calotte sphérique  $S$ , de rayon  $R$ , centrée sur la charge et dont la frontière circulaire est donnée par une valeur constante  $\theta_c$  de l'angle polaire. En utilisant l'équation (11.77) et la symétrie cylindrique du problème autour de l'axe  $Oz$ , on trouve

$$W(\beta) = 2\pi \int_0^{\theta_c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} f(\beta, \theta) R^2 \sin\theta d\theta, \quad (11.81)$$

puisque le vecteur  $\vec{E}(0)$  est partout orthogonal à la calotte  $S$ . Calculons le flux  $W(0)$  traversant une calotte limitée par un angle  $\theta_0$  pour une charge immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ( $\beta = 0$ ). Calculons également le flux  $W(\beta)$  traversant une calotte limitée par un angle  $\theta_\beta$  pour une charge mobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ( $\beta \neq 0$ ). Regardons le rapport qui doit exister entre les deux angles  $\theta_0$  et  $\theta_\beta$  pour que les flux  $W(0)$  et  $W(\beta)$  soient égaux. L'intégration de la formule (11.81) donne la condition <sup>11</sup>

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta_\beta}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\theta_\beta}}, \quad (11.82)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme plus simple

$$\tan\theta_\beta = \gamma \tan\theta_0. \quad (11.83)$$

Curieusement, cette relation entre deux angles, basée sur une égale inclusion de flux de champ électrique, est identique à la relation existant entre les angles qu'une tige rigide fait avec les directions de la vitesse relative dans son référentiel propre et dans celui où elle est en mouvement (voir section 4.3). On peut donc considérer que si une ligne de champ fait un angle  $\theta'$  avec l'axe  $Oz'$  dans le référentiel où la charge est immobile, la ligne de champ équivalente fait un angle  $\theta$  dans le référentiel où elle est en mouvement, avec la relation  $\tan\theta = \gamma \tan\theta'$ . Les lignes de champ électrique d'une charge en mouvement « se redressent » par rapport à leur configuration dans le référentiel propre de la charge <sup>12</sup>.

Supposons qu'une charge initialement au repos soit instantanément accélérée au temps  $t = 0$  jusqu'à une vitesse élevée  $V$  et qu'ensuite elle garde un mouvement uniforme à cette vitesse. Après un temps  $\Delta t$ , la charge a parcouru une distance  $V\Delta t$ . À l'extérieur d'une sphère de rayon  $c\Delta t$  centrée sur la position de la charge en  $t = 0$ , le champ est celui de la charge immobile avant son accélération. L'influence électrique n'a pas encore eu le temps de se propager au-delà d'une distance  $c\Delta t$ . À l'intérieur de cette sphère, le champ correspond au champ d'une charge en mouvement uniforme. Les angles que font les lignes de champ dans et hors de cette sphère sont liés par la relation (11.82). La carte du champ électrique dans cette situation est dessinée sur la figure 11.4

11. Primitive utile :  $\int dx / (1 + x^2)^{3/2} = x / (1 + x^2)^{1/2}$ .

12. La structure des lignes de champ électrique pour une charge animée de différents mouvements est étudiée dans l'article de Roger Y. Tsien, « Pictures of Dynamic Electric Fields », *American Journal of Physics*, vol. 40, n° 1, January 1972, p. 46-56.

## EXERCICES

Les réponses à ces exercices sont données à la page 274.

### 11.1 Manipulations de formules

- (a) Calculer les invariants (11.33) et (11.34).
- (b) Démontrer les lois de transformation (11.48)-(11.50).
- (c) Montrer que le champ électrique (11.72) dérive bien du potentiel scalaire (11.71). En déduire le champ électromagnétique (11.73).
- (d) Établir les relations (11.82) et (11.83).

### 11.2 Invariants de deux champs électromagnétiques

Soient deux champs électromagnétiques différents  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$  et  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ . Montrer que les deux quantités  $\vec{E}_1 \cdot \vec{B}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{E}_2$  et  $c^2 \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$  sont des invariants lors d'un changement de référentiel inertiel.

### 11.3 Accélération d'une particule

Une particule, de masse  $m$  et de charge électrique  $q$ , est soumise à un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Dans ce champ, elle acquiert une vitesse  $\vec{v}$  et une accélération  $\vec{\phi} = d\vec{v}/dt$ . Montrer qu'on a la relation

$$\vec{\phi} = \frac{q}{m} \left[ (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \vec{v}(\vec{E} \cdot \vec{v})/c^2 \right] \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

### 11.4 Champ électromagnétique d'une onde plane

On considère une onde plane caractérisée par un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans un référentiel  $\mathcal{R}'$ , lié au premier par une transformation de Lorentz sans rotation de vitesse  $\vec{V}$ , les champs électrique et magnétique de la même onde sont respectivement  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$ .

- (a) Exprimer  $\vec{E}'^2$  et  $\vec{B}'^2$  en fonction de  $\vec{E}^2$  et  $\vec{B}^2$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et retrouver la formule (11.67).
- (b) Que valent les invariants de champ dans le cas d'une onde plane ? En conclure que les caractéristiques d'une onde plane résistent à un changement de référentiel.

### 11.5 Une nouvelle façon d'obtenir les invariants de champ

Soit un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . On construit le vecteur complexe  $\vec{D} = \vec{E} + ic\vec{B}$ . Montrer que, lors d'une transformation de Lorentz spéciale le long de l'axe  $Ox$ , ce vecteur se transforme comme pour une rotation autour de  $Ox$  avec un angle imaginaire. En déduire que  $c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2$  et  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  sont les seuls invariants du champ électromagnétique.

### 11.6 Force de Lorentz

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , la force de Lorentz  $\vec{F}$  est donnée par la relation (11.51). On considère la même situation dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$ , lié au précédent par une transformation de Lorentz sans rotation de vitesse  $\vec{V}$ .

- (a) En utilisant les propriétés de transformation de la charge électrique, de la vitesse et du champ électromagnétique sous ce changement de référentiel, calculer la force  $\vec{F}'$  obtenue en **imposant la même forme de loi de force**.
- (b) Montrer que  $\vec{F}'$  et  $\vec{F}$  sont liés par la formule traditionnelle de transformation des forces. Conclusion.

### 11.7 Champ électromagnétique spécial

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , on dispose d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  quelconque.

- (a) Est-il possible que ce champ électromagnétique apparaisse comme purement électrique  $\vec{E}'$  dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  et, en même temps, comme purement magnétique  $\vec{B}''$  dans un troisième référentiel  $\mathcal{R}''$  ?
- (b) Quelles sont les caractéristiques que doit vérifier le champ électromagnétique pour qu'il existe un référentiel dans lequel le champ soit purement magnétique? Montrer que cette condition peut être satisfaite pour un champ électrique toujours contenu dans le plan  $Oyz$  et un champ magnétique tels que les rapports  $E_z/(cB_y)$  et  $-E_y/(cB_z)$  sont égaux à une constante inférieure à 1.
- (c) Soit une onde plane  $(\vec{E}, \vec{B})$  superposée à un champ magnétique  $\vec{B}_s$  statique, uniforme et dirigé le long de la propagation de l'onde. Montrer que la condition de la question (11.7b) peut être satisfaite.
- (d) Quelles sont les caractéristiques que doit vérifier le champ électromagnétique pour qu'il existe un référentiel dans lequel le champ soit purement électrique? Montrer que cette condition peut être satisfaite pour un champ magnétique toujours contenu dans le plan  $Oyz$  et un champ électrique tels que les rapports  $E_z/(cB_y)$  et  $-E_y/(cB_z)$  sont égaux à une constante supérieure à 1.



- (e) Soit une onde plane  $(\vec{E}, \vec{B})$  superposée à un champ électrique  $\vec{E}_s$  statique, uniforme et dirigé le long de la propagation de l'onde. Montrer que la condition de la question (11.7d) peut être satisfaite.

## 11.8 Champ d'un courant rectiligne infini

On considère un fil linéaire infini possédant, dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , une densité linéique de charge électrique  $\lambda$  statique.

- (a) Montrer, en utilisant par exemple le théorème de Gauss, que le champ électrique créé par cette densité de charge est radial et vaut  $E(r) = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$ , où  $r$  est la distance entre le fil et le point d'observation du champ.
- (b) Cette densité de charge est mise en mouvement avec la vitesse  $V$  le long du fil. Elle crée un courant  $i$  et un champ magnétique  $\vec{B}$ . En se servant de la loi de transformation du champ électromagnétique, trouver l'expression de  $\vec{B}$  en fonction de  $\vec{i}$  et de  $\vec{r}$ , vecteur position du point d'observation par rapport à une origine quelconque choisie sur le fil. Conclusion.

## 11.9 Particule dans un champ électrique constant

Une particule, de masse  $m$  et de charge  $q$ , est soumise à l'action d'un champ électrique uniforme et constant  $\vec{E}$  dirigé le long de l'axe  $Oz$ . À l'instant  $t = 0$ , la particule se trouve à l'origine et possède une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\theta$  avec la direction du champ.

- (a) Écrire les équations relativistes du mouvement de la particule.
- (b) Montrer que la particule reste constamment dans le plan formé par  $\vec{E}$  et  $\vec{v}_0$ . On fera désormais un choix des axes tel que ce plan est le plan  $Oyz$ .
- (c) Intégrer les équations différentielles du mouvement pour trouver les équations horaires  $y(t)$  et  $z(t)$ .
- (d) Que deviennent ces équations horaires à la limite non relativiste ?

## 11.10 Particule dans un champ magnétique constant

On considère un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B}$  dirigé le long de l'axe  $Oz$ . Une particule, de masse  $m$  et de charge  $q$ , est introduite (par exemple à l'origine) au temps  $t = 0$  dans ce champ, avec une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\theta$  par rapport à la direction du champ. On aura intérêt à décomposer cette vitesse en une composante de module  $a$  le long de  $\vec{B}$  et une composante de module  $b$  dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}$ .

- (a) Montrer que le module  $v$  de la vitesse  $\vec{v}(t)$  de la particule reste constant au cours du temps.

- (b) Écrire les équations du mouvement de la particule. Montrer que la composante de  $\vec{v}(t)$  le long de  $\vec{B}$  reste constante. En déduire que le module de la composante de  $\vec{v}(t)$  dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}$  reste également constant.
- (c) En intégrant les équations du mouvement, montrer que la particule décrit une hélice. On donnera les caractéristiques de celle-ci : position de l'axe, rayon et pas.
- (d) Calculer le temps  $T$  mis pour faire un tour complet sur la trajectoire. Pour une même valeur du module de la vitesse, montrer que le rayon de l'hélice est d'autant plus faible que  $\theta$  est petit, mais que, par contre, la période pour un cycle complet est indépendante de  $\theta$ .

### 11.11 Champ électromagnétique croisé

Dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , on considère un champ électromagnétique constitué d'un champ électrique uniforme constant  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique uniforme constant  $\vec{B}$  qui lui est orthogonal. Pour simplifier le traitement, on pourra faire un choix d'axes tel que  $\vec{E} = E\hat{e}_y$  et  $\vec{B} = B\hat{e}_z$ , où  $\hat{e}_y$  et  $\hat{e}_z$  sont respectivement les vecteurs unitaires le long des axes  $Oy$  et  $Oz$ . Une particule, de masse  $m$  et de charge  $q$ , est lâchée dans ce champ électromagnétique sans vitesse initiale depuis l'origine.

- (a) On suppose la condition  $0 < E < cB$ . Au bout de combien de temps la particule se retrouvera-t-elle à nouveau avec une vitesse nulle ?
- (b) On suppose à présent la condition  $0 < cB < E$ . Montrer que la particule possède un mouvement asymptotique avec une accélération propre constante de module  $(q/m)\sqrt{E^2 - c^2B^2}$  dans une direction faisant un angle  $\arccos(cB/E)$  avec l'axe  $Ox$ .

### 11.12 Champ électromagnétique créé par un plan infini

Dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , on considère un plan infini de charges électriques, de densité superficielle constante  $\sigma$ . On choisit une origine et un système d'axes tel que ce plan coïncide avec le plan  $Oxy$ . Ces charges se déplacent à la vitesse constante  $\vec{v}$  dans la direction de l'axe  $Ox$ . On note  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$ ,  $\hat{e}_z$  les vecteurs unitaires sur chacun des axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . On montre que le champ électromagnétique, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , est donné par

$$\vec{E} = \sigma\hat{e}_z/(2\epsilon_0) \quad \text{et} \quad \vec{B} = -\mu_0\sigma v\hat{e}_y/2$$

On introduit un autre référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$ , qui se déplace avec la vitesse constante  $\vec{V}$  dans le sens des  $x$  positifs par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

- (a) Donner la vitesse  $\vec{v}'$  des charges dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ; on l'exprimera en fonction de  $\delta = V/c$  et  $\beta = v/c$ . Calculer aussi  $\sqrt{1 - v'^2/c^2}$ .

- (b) Que vaut la densité superficielle de charge  $\sigma'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ?
- (c) Par analogie avec l'expression donnée précédemment pour le champ électromagnétique dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , donner l'expression du champ électromagnétique  $(\vec{E}', \vec{B}')$ . Vérifier qu'elle est cohérente avec la transformation de Lorentz sur les champs. Que se passe-t-il si  $\vec{V} = \vec{v}$  ?
- (d) Une particule, de charge  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , est soumise à l'action de ce champ électromagnétique. Quelle force subit-elle dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ? Et dans son référentiel propre ? Comparer ces deux forces. Le résultat est-il en accord avec celui obtenu en utilisant le quadrivecteur force ?

### 11.13 Accélérateur linéaire

Un accélérateur linéaire est formé de plusieurs cylindres métalliques coaxiaux successifs. On injecte une particule de masse  $m$  et de charge  $q$ , avec une vitesse  $\vec{v}_0$  le long de l'axe commun des cylindres. À l'intérieur des cylindres le champ électrique est nul. Entre chaque cylindre existe une différence de potentiel sinusoïdale qui produit un champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t)$  le long de l'axe, dans l'espace entre les cylindres.

La longueur des cylindres et des espaces entre les cylindres est choisie de telle sorte que la durée du transit des particules dans les cylindres et dans les espaces inter-cylindres soit toujours égale à une demi-période  $T/2$  du champ électrique.

On se place dans un cadre non relativiste (formules de la dynamique de Newton).

- (a) Trouver, en fonction de  $E_0$  et  $\omega$ , la variation de vitesse  $\Delta v = v_n - v_{n-1}$  entre les passages entre deux zones accélératrices consécutives  $n - 1$  et  $n$ .
- (b) Exprimer, en fonction de  $l_0 = \pi v_0 / \omega$  et  $\Delta l = \pi \Delta v / \omega$ , les longueurs  $L_n$  et  $l_n$  de la  $n^{\text{e}}$  zone accélératrice et du  $n^{\text{e}}$  cylindre respectivement.
- (c) Les particules ont une énergie cinétique initiale  $T_0$  et une énergie cinétique finale  $T_1$ . Calculer le nombre total  $N$  de cylindres et la longueur totale  $L$  de l'accélérateur.
- (d) Comment faudrait-il modifier  $E_0$  et  $\omega$  pour que l'accélérateur puisse fonctionner avec des particules d'énergies cinétiques différentes ?

### 11.14 Des référentiels particuliers

Soit, dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  uniforme et constant. On suppose  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ .

- (a) Montrer que le rapport  $R = (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) / |\vec{E} \wedge c \vec{B}|$  est toujours supérieur à 2.
- (b) Montrer que s'il existe un référentiel inertiel pour lequel le champ électrique est parallèle au champ magnétique, alors il en existe une infinité qui ont tous une direction commune de vitesse relative.

- (c) Montrer qu'il existe de tels référentiels et, en particulier, que l'un de ceux-ci se déplace par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  selon une direction parallèle au vecteur  $\vec{E} \wedge \vec{B}$ , avec une vitesse de module  $\beta$  donné par la plus petite racine de l'équation  $\beta^2 - R\beta + 1 = 0$ . Montrer en particulier que cette valeur de  $\beta$  est un nombre réel inférieur à 1.

### 11.15 Électrodynamique non linéaire

Il existe une infinité de systèmes d'équations invariantes sous les transformations de Lorentz et qui, contrairement aux équations de Maxwell, ne sont pas linéaires. Nous proposons ci-dessous un modèle non linéaire traitant d'équations semblables à celles de l'électrodynamique. Les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  y sont reliés par les équations suivantes

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{B}), \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \lambda \left( \vec{B} \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{B})}{\partial t} - \vec{E} \wedge \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{B}) \right),\end{aligned}$$

avec les deux premières équations structurelles de Maxwell inchangées. L'effet de la non-linéarité qui apparaît dans les deux autres, est de créer des charges et des courants à partir du champ lui-même. La constante  $\lambda$  est nécessaire pour rendre les équations dimensionnellement homogènes. Le but de cet exercice est de montrer que ces équations préservent deux grands principes de conservation.

- (a) Montrer que ces deux dernières équations sont dimensionnellement correctes. Quelle est la dimension  $[\lambda]$  de la constante  $\lambda$  ?
- (b) Par analogie avec les équations de Maxwell, il est naturel de définir une densité de charge  $\rho = -\lambda \vec{B} \cdot \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{B})$  et une densité de courant  $\vec{j} = \lambda \left[ \vec{B} \partial(\vec{E} \cdot \vec{B})/\partial t - \vec{E} \wedge \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{B}) \right]$ . Montrer que ces définitions sont compatibles avec le principe de conservation de la charge, exprimé par l'équation de continuité  $\partial \rho / \partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ .
- (c) On définit encore le vecteur de Poynting par  $\vec{P} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0$ . Montrer que la relation qui exprime la conservation de l'énergie d'un champ électromagnétique seul  $\partial u_{\text{ém}}/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$  entraîne une modification de la densité d'énergie électromagnétique de la forme suivante

$$u_{\text{ém}} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\lambda}{2} (\vec{E} \cdot \vec{B})^2.$$

# Solutions des exercices

*S'il n'y a pas de solution, c'est qu'il n'y a pas de problème.*

Devise SHADOK

Seuls les exercices dont la solution ne figure pas dans l'énoncé sont repris ci-dessous.

## CHAPITRE 1

### 1.1 L'horloge à photons galiléenne

$c'$  = vitesse de la lumière dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ;  $c = \sqrt{c'^2 + V^2}$  = vitesse de la lumière dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . On a  $\Delta t = D/c$  et  $\Delta t' = 2d/c'$ , d'où  $\Delta t = \Delta t'$ .

### 1.2 Utilisation d'horloges atomiques dans les avions

(a)  $p < V^2/(2c^2)$ , soit  $p < 2,7 \times 10^{-13}$ .

(b)  $\Delta T = 8,65 \text{ } \mu\text{s}$ .

### 1.3 Voyage vers Andromède

(a)  $\beta = 0,995\,671$ ,  $\tau = 213\,780 \text{ ans}$ .

(b)  $\beta = 0,999\,565$ ,  $\tau = 67\,801 \text{ ans}$ .

(c)  $\beta = 1 - 3,781 \times 10^{-11}$ ,  $T = T_0 + 0,76 \text{ h}$ .

### 1.4 La course infernale

$\Delta t_{\text{Terre}} = 126,23 \text{ s}$  ;  $\Delta t'_{\text{proton}} = 1 \text{ j } 47 \text{ min } 38 \text{ s}$  ; le temps n'a pas de sens pour le photon.

### 1.5 Vitesse relative de deux fusées

$V_{R/R'} = f(V_{R'/R})$  et  $V_{R'/R} = f'(V_{R/R'})$ . Le principe de relativité impose que les deux fonctions  $f$  et  $f'$  sont égales. À la limite des faibles vitesses,  $f = f' = \text{identité}$ .

### 1.6 Roemer et les éclipses de Io

- (a)  $N = T_i/(2T_i)$ , soit  $N = 103$ .  
 (b)  $\Delta T \approx nT_i$  d'où  $T_a \approx T_i$ .  
 (c)  $\Delta T - nT_i \approx (2R/c)\sin(n\pi/2N)$  au voisinage de la 1<sup>re</sup> quadrature ;  
 $\Delta T - nT_i \approx -(2R/c)\sin(n\pi/2N)$  au voisinage de la 2<sup>e</sup> quadrature.  
 (d)  $c \approx 220\,000$  km/s.  
 (e)  $c \approx 300\,000$  km/s.

## CHAPITRE 2

### 2.1 Synchronisation des horloges

- (1) On peut mettre un miroir sur l'horloge à synchroniser, faire un aller retour à un rayon de lumière à partir de l'horloge de référence, calculer la distance entre les deux horloges et transmettre à l'horloge le décalage en temps correspondant à un aller simple.  
 (2) On peut transporter l'horloge de référence auprès des horloges à synchroniser à une vitesse si lente que les effets relativistes soient inférieurs à la précision des horloges.  
 (3) On synchronise des horloges toutes disposées au même endroit. On place ensuite ces horloges en différents points du référentiel en s'assurant qu'elles subissent toutes le même facteur de dilatation du temps (qui dépend du module de la vitesse et non de sa direction) lors de leur déplacement. Elles restent ainsi toutes synchronisées après leur arrêt.

### 2.2 Changement d'origine

$$\begin{aligned} c(t - t_0) &= \gamma[c(t' - t'_0) + \beta(x' - x'_0)], \\ x - x_0 &= \gamma[(x' - x'_0) + \beta c(t' - t'_0)], \\ y - y_0 &= y' - y'_0, \\ z - z_0 &= z' - z'_0. \end{aligned}$$

### 2.3 Une rotation particulière

$$ct' = ct \cos \alpha - x' \sin \alpha \quad \text{et} \quad x = ct \sin \alpha + x' \cos \alpha \quad \text{avec} \quad \sin \alpha = \beta.$$

### 2.4 Une vitesse particulière

$$v/c = \sqrt{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)} \quad (\text{voir exercice 3.7}).$$

### 2.5 Une particularité graphique

Sur la figure 2.4, il est indiqué  $X = \ln(1/(1 - \beta)) = -\ln(1 - \beta)$  en abscisse et  $Y = \ln(Q(\beta))$  en ordonnée, avec  $\beta \rightarrow 1$ . On a :  $Y = X/2$  pour  $Q = \gamma$  ;  $Y = X/2$  pour  $Q = \beta\gamma$  ;  $Y = \ln 2 + X/2$  pour  $Q = K$ . Ce sont toutes des droites de pente 1/2.

### 2.6 Événements ponctuels

- (a)  $t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) \geq (t_2 - t_1)$  ; égalité si  $\gamma = 1$  donc  $V = 0$ .  
 (b)  $L'^2 = L^2 + (\gamma^2 - 1)(x_2 - x_1)^2 \geq L^2$  ; égalité si  $\gamma = 1$  donc  $V = 0$ .

### 2.7 Détermination du facteur $\gamma$

(a)  $\alpha(V) = V/v^2$ , où  $v$  est une vitesse arbitraire assurant les bonnes dimensions.

(b)  $\alpha(V) = V/c^2$ .

(c)  $\gamma(V) = \gamma(-V)$  ; puis  $\gamma(V) = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ .

## CHAPITRE 3

### 3.1 Événements causalement indépendants

(a)  $s^2 = c^2\tau^2/4 - a^2$ ;  $V = -c^2\tau/(2a)$  ; événements causalement reliés si  $|a/\tau| \leq c/2$ .

(b)  $t'_1 = t'_2 = 3|a|\tau/\sqrt{4a^2 - c^2\tau^2}$ .

### 3.2 Communications relativistes

Calculer les intersections des lignes d'univers des photons, de la Terre et de la fusée. Prendre soin du signe de la vitesse.

### 3.3 Plus vite que la lumière

(a) Dans un diagramme de Lorentz, dessiner les lignes d'univers de messages instantanés échangés entre deux observateurs en mouvement relatif. La réponse à un message peut arriver avant l'envoi du message. Imaginer ce qui se passe si un message n'est émis que si la réponse à ce message n'arrive pas.

(b) Une particule infraluminique (supraluminique) l'est dans tous les référentiels d'inertie. Une particule ultraluminique dans un référentiel peut ne pas l'être dans un autre référentiel.

### 3.4 Oscillateur harmonique

(a)  $t_1 - t_0 = T/2$ ;  $t'_1 - t'_0 = \gamma(T/2 + 2\beta d/c)$ . On ne trouve pas simplement  $\gamma T/2$ , car les temps mesurés ne sont des temps propres dans aucun des deux référentiels.

(b)  $t_2 - t_0 = T$ ;  $t'_2 - t'_0 = \gamma T$ . Dilatation habituelle des temps car  $T$  est un temps propre.

(c)  $y' = d \cos(2\pi t'/(\gamma T))$ . Mouvement d'amplitude  $d$  (direction transversale), mais de période  $\gamma T$ .

### 3.5 Fusée et miroir

(a) Pour  $E$  :  $(t = T, x = 0)$  ;  $(t' = \gamma T, x' = -\gamma\beta cT)$  ;

Pour  $E_1$  :  $(t_1 = T/(1 + \beta), x_1 = \beta cT/(1 + \beta))$  ;  $(t'_1 = T\sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)}, x'_1 = 0)$  ;

Pour  $E_2$  :  $(t_2 = T/(1 - \beta), x_2 = \beta cT/(1 - \beta))$  ;  $(t'_2 = T\sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}, x'_2 = 0)$ .

(b)  $\Delta t_i = \beta T/(1 + \beta)$  ;  $\Delta t'_i = \gamma\beta T$  ;  $\Delta t_r = \beta T/(1 - \beta)$  ;  $\Delta t'_r = \gamma\beta T$ .

(c)  $\Delta t_i + \Delta t_r = 2\beta\gamma^2 T$  ;  $\Delta t'_i + \Delta t'_r = 2\beta\gamma T$ . Donc  $\Delta t_i + \Delta t_r = \gamma(\Delta t'_i + \Delta t'_r)$ . C'est la dilatation classique des temps, car  $E_1$  et  $E_2$  se produisent au même point du référentiel  $\mathcal{R}'$ .

### 3.6 Une horloge au télescope

(a)  $T\sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)}$ .

(b)  $T/\gamma$ .

### 3.7 Le plan d'égale heure

(a)  $x_P = ct_P \sqrt{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)}$  ;  $x'_P = -x_P$ .

(b) non ; non ; oui.

(c)  $T = \tau \sqrt{(\gamma + 1)/2}$ .

(d) oui.

### 3.8 Sources de lumière équidistantes

(a)  $t_3 = a/(v + c)$  ;  $x_3 = av/(v + c)$ .

(b)  $t'_3 = (a\sqrt{1 - v^2/c^2})/(v + c)$ .

(c)  $t_4 = a/(c - v)$  ;  $x_4 = av/(c - v)$ .

(d)  $t'_4 = (a\sqrt{1 - v^2/c^2})/(c - v)$  ;  $t'_4 - t'_3 = 2av/(c^2\sqrt{1 - v^2/c^2})$ .

(e)  $x'_1 = a/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  ;  $t'_1 = -av/(c^2\sqrt{1 - v^2/c^2})$  ;  
 $x'_2 = -a/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  ;  $t'_2 = av/(c^2\sqrt{1 - v^2/c^2})$ .

(f)  $t'_2 - t'_1 = t'_4 - t'_3$ .

### 3.9 Gardes dans un train

(a) Pour  $E_1$  :  $ct_1 = -\gamma(1 - \beta)L/2$  et  $x_1 = \gamma(1 - \beta)L/2$  ;

Pour  $E_2$  :  $ct_2 = -\gamma(1 + \beta)L/2$  et  $x_2 = -\gamma(1 + \beta)L/2$ .

(b)  $t'_2 - t'_1 = 0$  ;  $t_2 - t_1 = -\beta\gamma L/c$  ;  $s'^2 = s^2$ .

### 3.10 Écrasement d'une fusée

(a)  $T^{(1)} = H/V_0 = 15$  s ;  $V_e^{(1)} = V_0 = 4$  km/s ;  $T^{(1)} - \tau^{(1)} = T^{(1)}\beta_0^2/2 = 1,33$  ns.

(b)  $V_e^{(2)} = V_0\sqrt{1 + \alpha} = 4,147$  km/s ;  $T^{(2)} = V_0(\sqrt{1 + \alpha} - 1)/g = 14,73$  s ;

$T^{(2)} - \tau^{(2)} = T^{(2)}(\beta_0^2 + \beta_0\epsilon + \epsilon^2/3)/2 = 1,36$  ns.

(c)  $T^{(3)} = 151,112$  s ;  $V_e^{(3)} \approx V_l$  ;  $T^{(3)} - \tau^{(3)} = \eta^2 T/2 + V_l \eta (\eta_0 - \eta_1)/g + V_l (\eta_0^2 - \eta_1^2)/(4g)$   
 $= 0,53$  ns.

## CHAPITRE 4

### 4.1 Mouvement d'une règle

(a)  $\tan \alpha = -v'\beta\gamma/c$ .

(b)  $\alpha = \pi/2$ .

### 4.2 Contraction des longueurs

On peut introduire les 3 événements suivants :

- $E_1$  : départ du photon sur le miroir de gauche ;
- $E_2$  : arrivée du photon sur le miroir de droite et réflexion vers le miroir de gauche ;



–  $E_3$  : arrivée du photon réfléchi sur le miroir de gauche.

Il suffit de gérer correctement ces événements dans les deux référentiels.

### 4.3 Le cylindre « tordu »

On peut partir de la transformation de Lorentz en coordonnées cartésiennes et voir comment se modifie l'angle de rotation.

### 4.4 Distance de deux impulsions lumineuses

(a)  $L' = L\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$ .

(b) On peut considérer cette distance comme la distance entre deux crêtes d'une impulsion lumineuse. La relation donne alors le lien entre les longueurs d'onde dans les deux référentiels. C'est l'effet Doppler.

### 4.5 Liaison radio entre une fusée et une station terrestre

(a)  $t'_r = l/c = 300$  ns.

(b)  $t_r = t'_r\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)} = 900$  ns. Aucun des deux temps  $t_r$  ou  $t'_r$  n'est un temps propre.

(c)  $D = \beta l\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)} = 216$  m.

### 4.6 Loi de Descartes

$$\sin r/(\cos r + \beta) = \sin i/(\cos i - \beta) \quad (\text{voir exercice 9.9}).$$

### 4.7 Forme d'une ellipse

(a)  $a = a'\sqrt{1-\beta^2}$  ;  $b = b'$  ; cercle si  $\beta = \sqrt{a'^2 - b'^2}/a'$ .

(b) Si  $s = 1/a^2 + 1/b^2$ ,  $d = 1/a^2 - 1/b^2$ ,  $s' = 1/a'^2 + 1/b'^2$ ,  $d' = 1/a'^2 - 1/b'^2$ , alors

$$\tan(2\alpha) = [2\gamma d' \sin(2\alpha')] / [\gamma^2(s' + d' \cos(2\alpha')) - (s' - d' \cos(2\alpha'))],$$

$$2s = \gamma^2(s' + d' \cos(2\alpha')) + s' - d' \cos(2\alpha'),$$

$$2d = \sqrt{[\gamma^2(s' + d' \cos(2\alpha')) - (s' - d' \cos(2\alpha'))]^2 + [2\gamma d' \sin(2\alpha')]^2},$$

$$a = \sqrt{2/(s+d)}, \quad b = \sqrt{2/(s-d)}.$$

### 4.8 Passage de règles

(a) i)  $x_2 = Vt_2$  ;  $x'_2 = 0$  ;

ii)  $c^2 t'^2_2 = c^2 t^2_2 - x^2_2$  ;

iii)  $t_2 = \gamma t'_2$ .

(b) i)  $x'_2 - x'_1 = l'$  ;

ii)  $t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1)$  ;

iii)  $l' = \gamma V(t_2 - t_1)$ .

iv)  $l = V(t_2 - t_1) = l'/\gamma$  est la longueur de la règle dans  $\mathcal{R}$ .

(c) i)  $t_1 = l/V$  ;  $t'_1 = t_1/\gamma$  ;

ii)  $t'_2 = l/V$  ;  $t_2 = t'_2/\gamma$  ;

iii)  $x_{B'} = -\gamma l$  ;  $x_B = \gamma l$ .

iv)  $t_1 > t_2$ , mais  $t'_1 < t'_2$ . Ce n'est pas choquant, car il n'existe aucun lien causal entre les deux événements.

## CHAPITRE 5

### 5.1 Changement de direction d'un photon

$$\tan \theta = \beta \gamma.$$

### 5.4 Limitation de la vitesse

(b) Utilisation simple du résultat (a), avec la condition  $u' < 1$ .

(c) Utilisation simple du résultat (a), avec la condition  $u' = 1$ .

### 5.5 Un tour de carré

$$(a) \Delta t'_{O'A'} = \Delta t'_{A'B'} = \Delta t'_{B'C'} = \Delta t'_{C'O'} = l'/v';$$

$$\Delta t_{O'A'} = \gamma l' (1/v' + \beta/c); \Delta t_{A'B'} = \Delta t_{C'O'} = \gamma l' / v'; \Delta t_{B'C'} = \gamma l' (1/v' - \beta/c).$$

$$(b) \Delta t' = 4l'/v'; \Delta t = 4\gamma l'/v'. \Delta t' \text{ est un intervalle de temps propre.}$$

### 5.6 Loi de transformation des accélérations

$$\varphi = \varphi' / [\gamma^3 (1 + v'V/c^2)^3].$$

### 5.7 La tige déformée

En appelant  $d$  la distance du milieu de la tige à l'objectif de l'appareil photo, l'équation de la trace sur la photo a pour équation

$$\left( \frac{x}{\gamma^2 \beta d} + 1 \right)^2 - \left( \frac{z}{\gamma d} \right)^2 = 1.$$

La valeur  $h$  permet de déterminer les extrémités de cette portion d'hyperbole.

### 5.8 Apparence d'un cube en mouvement

$$\sin \alpha = (\beta - \cos \theta) / (1 - \beta \cos \theta); \cos \theta_0 = \beta.$$

Tant que l'angle  $\theta$  est inférieur à l'angle critique  $\theta_0$ , on voit la face avant et la face du côté proche ; pour l'angle critique on voit seulement la face du côté proche ; pour un angle  $\theta$  supérieur à  $\theta_0$ , on voit la face du côté proche et la face arrière.

### 5.9 Photographie d'une règle en mouvement

(b) Si  $\theta' = 0$ , alors  $L = l/\gamma$  ; c'est la contraction habituelle des longueurs.

Si  $\theta' = \pi/2$ , alors  $L = l\beta$ . La longueur sur le film n'est pas nulle à cause du temps de transit des photons le long de la règle.

(c)  $L = 0$  pour  $\theta' = \theta'_0 = \arctan(1/(\beta\gamma))$ . Cette direction correspond à celle de la vitesse des photons dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  et, dans ce référentiel, le mouvement des photons est parallèle à la règle.

### 5.10 Un « paradoxe » symétrique

(a) C'est le contrôleur qui a raison.

(b) On n'arrive à aucune contradiction si on applique proprement les transformations de Lorentz, avec une vitesse relative  $2\beta/(1 + \beta^2)$  entre les deux fusées. Attention, deux événements simultanés dans un référentiel ne le sont plus dans un autre.

## CHAPITRE 6

### 6.2 Loi de composition des vitesses longitudinales

Il suffit d'utiliser  $\arg \tanh \beta = \arg \tanh \beta_1 + \arg \tanh \beta_2$  avec  $e^{2 \arg \tanh x} = (1+x)/(1-x)$ .

### 6.3 Une nouvelle forme de la transformation de Lorentz

Simple manipulation des fonctions hyperboliques.

### 6.4 Addition des rapidités

La composition des vitesses sur un axe se traduit par l'addition des rapidités. Dans ce cas, la rapidité finale est  $n\theta$ .

### 6.5 Propriété du facteur $\gamma$

Il suffit d'appliquer la formule (6.27) d'abord avec  $V_1$  et  $V_2$  pour trouver  $V_{12}$ , puis avec  $V_3$  et  $V_{12}$  pour trouver  $V$ . On vérifie ensuite que l'on obtient le même résultat en partant de  $V_2$  et  $V_3$  pour trouver  $V_{23}$ , puis en combinant  $V_{23}$  avec  $V_1$ . Dans les deux cas, la vitesse finale  $V$  est donnée par la formule (6.28).

### 6.7 Homogénéité et isotropie

Si un point de l'espace est isotrope, alors tout champ défini dans cet espace ne peut dépendre que de la distance à ce point particulier, puisqu'il ne peut y avoir aucune direction privilégiée. Si l'espace est isotrope en tout point, alors le même raisonnement peut être tenu pour tous les points de l'espace. La seule manière de rendre cohérentes ces propriétés pour le champ est qu'il soit homogène. Par contre, un champ de vecteur uniforme et constant est manifestement homogène mais non isotrope puisqu'une direction est privilégiée.

## CHAPITRE 7

### 7.6 Composition de deux transformations de Lorentz générales sans rotation

$$(b) \vec{\beta}'' = (\vec{\beta} + \vec{\beta}') / (1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}').$$

### 7.7 Inclinaison de deux référentiels

$$(a) \tan \theta = V' / (V \gamma(V)).$$

$$(b) \tan \theta'' = V' \gamma(V') / V.$$

$$(c) \tan(\theta'' - \theta) = \frac{V V' [\gamma(V) \gamma(V') - 1]}{V^2 \gamma(V) + V'^2 \gamma(V')} ;$$

$$i) \tan(\theta'' - \theta) \approx \beta \gamma [2\beta + (\gamma^2 + 1)(\beta' - \beta)] / 4 ;$$

$$ii) \theta'' - \theta \approx \beta \beta' / 2.$$

## CHAPITRE 8

### 8.1 Calcul tensoriel

(e)  $\text{Tr } g = 4$ .

### 8.2 Calcul matriciel avec $\Lambda$

$\text{Tr } \Lambda = 2(\gamma + 1)$ . La matrice  $\Lambda$  n'est pas la représentation d'un tenseur.

### 8.5 Groupe de Lorentz

(a) Vérification à partir de la définition  $\Lambda^{-1} = g\tilde{\Lambda}g$  et des propriétés des matrices transposées et inverses.

(b) Les matrices  $M$  sont telles que  $\tilde{M}g + gM = 0$ .

(c) Les transformations telles que  $\det \Lambda = -1$  ou  $\Lambda_0^0 \leq -1$  ne contiennent pas l'élément neutre.

### 8.7 Quadrivitesse, simultanéité et accélération

(a) Dans le référentiel de l'observateur on a  $u_O^\mu = (c, \vec{0})$  et  $x^\mu = (0, \vec{x})$  pour des événements simultanés. Il en résulte que  $u_O \cdot x = 0$  ;  $d = \sqrt{-x^2}$ .

(b)  $u_O \cdot a_P = 0$  implique que le module de la vitesse de la particule est constant dans le référentiel de l'observateur.

### 8.8 Colinéarité de trois particules

On peut toujours supposer  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$  ;  $\vec{w} = \mu \vec{u}$ . Avec  $\alpha = \gamma(u)(1 - \mu)/[\gamma(v)(\lambda - \mu)]$  et  $\beta = \gamma(u)(\lambda - 1)/[\gamma(w)(\lambda - \mu)]$ , on a  $u = \alpha v + \beta w$ .

### 8.9 Accélération sur une hélice

(a)  $\vec{\phi} \cdot \vec{v} = 0$ .

(b)  $|\vec{\phi}(0)| = R\omega^2 / [1 - (R^2\omega^2 + h^2)/c^2]$ .

(c)  $R^2\omega^2 + h^2 < c^2$ .

### 8.12 Le photon peut-il rattraper le mobile ?

(a)  $D(t) = (c^2/A) [\sqrt{1 + A^2 t^2/c^2} - At/c]$  ;  $D(t) > 0$  ;  $D(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ .

### 8.13 Forme d'une transformation de Lorentz générale

$$(b) R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} ; R_y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} ;$$

$$L_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \Lambda X' = R(\theta, \phi) L_x(\alpha) X' = \begin{pmatrix} \cosh \alpha x'^0 \\ \sinh \alpha \cos \theta x'^0 \\ \sinh \alpha \sin \theta \sin \phi x'^0 \\ -\sinh \alpha \sin \theta \cos \phi x'^0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad X' = \begin{pmatrix} x'^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 8.14 Mouvement d'un gyroscope

(a)  $d\vec{L}'/dt' = \vec{0}$ . La mécanique classique ne dit rien sur  $dL'^0/dt'$ .

(b)  $(u'^0 = c, \vec{u}' = \vec{0})$ .

(c)  $dL/d\tau = \sigma u$ .

(d)  $u \cdot L = 0$ , donc  $\frac{dL}{d\tau} = -\frac{a \cdot L}{c^2} u$ .

### 8.15 Symétries dans l'espace-temps

(a)  $v_{\parallel} = \frac{a \cdot v}{a^2} a$  ;  $v_{\perp} = v - v_{\parallel}$ .

(b)  $\Sigma_a v = v - 2 \frac{a \cdot v}{a^2} a$ .

(c) Utiliser le résultat (b) pour montrer que  $v^2 = (\Sigma_a v)^2$ . Choisir une bonne base pour montrer les propriétés du déterminant et de la trace.

(d) et (e) Utiliser encore le résultat (b).

(f) Propriété des sommes directes d'espaces.

(g)  $\Lambda_{a \rightarrow b} v = v - \frac{(a+b) \cdot v}{(a+b) \cdot a} (a+b) + 2 \frac{a \cdot v}{a^2} b$  ;  $\Lambda_{a \rightarrow b} = \Lambda_{b \rightarrow a}$  si  $a = b$ .

## CHAPITRE 9

### 9.1 Stabilité du photon

Une particule de masse nulle ne peut se déplacer qu'à la vitesse de la lumière dans n'importe quel référentiel. À cette vitesse, la notion de temps perd son sens, de même donc que la notion de désintégration qui nécessite une échelle de temps.

### 9.2 Pression de radiation

$p = kP/(4\pi d^2 c)$  où  $k = 1$  pour un corps parfaitement absorbant et  $k = 2$  pour un corps parfaitement réfléchissant.

$\sigma = kP/(4\pi c GM)$  ; on a  $\sigma = k \times 0,76 \text{ g/m}^2$  ( $k \times 0,28 \text{ } \mu\text{m}$  d'Al).  $p_{\text{orb.terr.}} = k \times 4,48 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$ .

### 9.4 La fusée et l'anneau

(a)  $D = r\beta\gamma$  ;  $T = r\gamma/c$ .

(b)  $T' = r/c$  ;  $\alpha'_0 = \arccos(-\beta)$ .

(c)  $T'' = 2r/c$  ;  $\alpha'_1 = \arccos(-2\beta/(1 + \beta^2))$ .

### 9.5 Effet Doppler provenant d'une nova

- (a)  $\cos \theta = (\cos \theta' + \beta) / (1 + \beta \cos \theta')$ .  
 (b)  $v = v' / (\gamma(1 - \beta \cos \theta))$  ;  $\lambda = \lambda \gamma (1 - \beta \cos \theta)$  ;  
 $\lambda_m = \lambda' \sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)}$  pour  $\theta = 0$  ;  $\lambda_M = \lambda' \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$  pour  $\theta = \pi$ .  
 (c)  $V = cr / \sqrt{4 + r^2}$  ;  $V \approx cr/2$  pour  $r \ll 1$ .  
 (d)  $D = cr \Delta t / (\Delta \alpha \sqrt{4 + r^2})$  ;  $D \approx cr \Delta t / (2 \Delta \alpha)$  pour  $V \ll c$ .  
 (e)  $V \approx 420 \text{ km/s}$  ;  $D \approx 1443 \text{ a-l}$ .

### 9.6 L'effet Doppler revisité

- (a) La différence de phase vaut  $2\pi$  fois le nombre de périodes qui ont défilé devant un observateur. Ce nombre ne dépend pas du référentiel ; c'est donc un invariant. Puisque la différence de phase peut s'écrire sous la forme  $k^\mu \Delta r_\mu$  et que  $\Delta r$  est un quadrivecteur, on en déduit que  $k$  est également un quadrivecteur.  
 (b) Écrire  $k^\mu \Delta r_\mu = k'^\mu \Delta r'_\mu$  et utiliser les lois de transformation des composantes  $\Delta r'^\mu$ .

### 9.7 Tachyons et relativité

- (a)  $ds^2 < 0$  ;  $v > c$  dans tous les référentiels.  
 (b)  $u^\mu = (c / \sqrt{v^2/c^2 - 1}, \vec{v} / \sqrt{v^2/c^2 - 1})$  ;  $u^2 = -c^2$ .  
 (c)  $v \in ]c, \infty[$ .  
 (d)  $p^2 = -m_t^2 c^2$ .  
 (e)  $E = m_t c^2 / \sqrt{v^2/c^2 - 1}$  ;  $\vec{p} = m_t \vec{v} / \sqrt{v^2/c^2 - 1}$ .  
 (f)  $p^2 = m^2 c^2$  ;  $E = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$  et  $E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  ;  $\vec{p} = m \vec{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .  
 (g)  $\vec{v} = \vec{p} c^2 / E$ .

### 9.8 Rayonnement d'une source en mouvement

- (a)  $\cos \theta = (\cos \theta' + \beta) / (1 + \beta \cos \theta')$  ;  $\sin \theta = \sin \theta' / [\gamma(1 + \beta \cos \theta')]$ .  
 (b)  $\cos \theta \approx \cos \theta'$  pour  $\beta \approx 0$  ;  $\cos \theta \approx 1$  pour  $\beta \approx 1$  mais  $\cos \theta = -1$  pour  $\theta' = \pi$ .  
 (d)  $f(\theta) = (1 - \beta^2) / (1 - \beta \cos \theta)^2$ .  
 (e)  $\cos \theta_m = 1/\beta - (1 - \beta^2)/\beta^{3/2}$ .

### 9.9 Effet Doppler sur un miroir mobile

- (a)  $\cos \alpha_i = (\cos \alpha'_i + \beta) / (1 + \beta \cos \alpha'_i)$  ;  $\sin \alpha_i = \sin \alpha'_i / [\gamma(1 + \beta \cos \alpha'_i)]$  ;  
 $\cos \alpha_r = (\cos \alpha'_i - \beta) / (1 - \beta \cos \alpha'_i)$  ;  $\sin \alpha_r = \sin \alpha'_i / [\gamma(1 - \beta \cos \alpha'_i)]$ .  
 (c)  $V/c = (\sin(\alpha_r - \alpha_i) / (\sin \alpha_i + \sin \alpha_r))$ .  
 (d)  $v_r = v_i \sin \alpha_i / \sin \alpha_r$  ; pour une incidence rasante  $v_r = v_i (1 - \beta) / (1 + \beta)$ .

### 9.10 Angle de visée d'une particule

- (a)  $\tan \theta' = \sin \theta \sqrt{1 - \beta^2} / (\cos \theta - \beta y)$  avec  $y = E / \sqrt{E^2 - m^2 c^4}$ .  
 (b)  $E(\theta) = mc^2 \cos \theta / \sqrt{\cos^2 \theta - \beta^2}$ , à condition que  $\theta \leq \arccos \beta$  et  $E \geq mc^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$ .

$$(c) \tan \theta' = \sin \theta \sqrt{1 - V^2/c^2} / (\cos \theta - Vu/c^2).$$

$$(d) u = c^2/V.$$

### 9.11 Oscillateur harmonique relativiste

$$(a) x(t) = A \cos(\omega t).$$

$$(b) E = m\dot{x}^2/2 + Kx^2/2 = KA^2/2 \text{ constant.}$$

$$(c) d\gamma/dt = \gamma^3 \dot{x} \ddot{x}/c^2; \ddot{x} = -\omega^2 x (1 - \dot{x}^2/c^2)^{3/2}.$$

$$(d) E = \gamma mc^2 + Kx^2/2 \text{ constant}; \gamma = 1 + [\omega^2(A^2 - x^2)]/(2c^2).$$

$$(e) \dot{x} = \pm \frac{c}{1 + [\omega^2(A^2 - x^2)]/(2c^2)} \sqrt{\frac{\omega^2(A^2 - x^2)}{2c^2} \left(2 + \frac{\omega^2(A^2 - x^2)}{2c^2}\right)}.$$

$$(f) \alpha = (\omega^2 A^2)/(4c^2).$$

$$(g) T - T_0 = T_0(3v_M^2)/(8c^2).$$

### 9.12 Échos laser sur une fusée

$$(a) E_1 : (ct_1, x_1 = 0); (ct'_1 = \gamma ct_1, x'_1 = -\beta ct_1);$$

$$E_2 : (ct_2 = ct_1/(1 - \beta), x_2 = \beta ct_1/(1 - \beta)); (ct'_2 = ct_1 \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}, x'_2 = 0);$$

$$E_3 : (ct_3 = l \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)} + ct_1/(1 - \beta), x_3 = l \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)} + \beta ct_1/(1 - \beta));$$

$$(ct'_3 = l + ct_1 \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}, x'_3 = l);$$

$$E_4 : (ct_4 = ct_1(1 + \beta)/(1 - \beta), x_4 = 0);$$

$$(ct'_4 = ct_1 \sqrt{1 + \beta}/(1 - \beta)^{3/2}, x'_4 = -\beta ct_1 \sqrt{1 + \beta}/(1 - \beta)^{3/2});$$

$$E_5 : (ct_5 = 2l \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)} + ct_1(1 + \beta)/(1 - \beta), x_5 = 0);$$

$$(ct'_5 = 2l/(1 - \beta) + ct_1 \sqrt{1 + \beta}/(1 - \beta)^{3/2}, x'_5 = -2\beta l/(1 - \beta) - \beta ct_1 \sqrt{1 + \beta}/(1 - \beta)^{3/2});$$

$$V/c = [c^2(\Delta t)^2 - 4l^2] / [c^2(\Delta t)^2 + 4l^2]; D = cT / [1 + (c\Delta t/(2l))^2].$$

$$(b) \Delta t = 2\gamma l/c + 2\beta \gamma l/c \text{ ou } c\Delta t = \beta c\Delta t + 2l/\gamma.$$

$$(c) V/c = (\Delta v/v)/(2 - \Delta v/v) \text{ ou } v'/v = 4l^2/(c^2\Delta t^2).$$

## CHAPITRE 10

### 10.3 Photoproduction d'une particule

$$(a) v = [(M' + m)^2 - M^2] c^2 / (2hM) \text{ soit } v = 3,67 \times 10^{22} \text{ Hz.}$$

$$(b) v = mc^2 [1 + m/(2M)] / h \text{ soit } v = 3,49 \times 10^{22} \text{ Hz.}$$

**10.4 Variables de Mandelstam**

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad s &= m_a^2 c^4 + m_b^2 c^4 + 2(E_a E_b - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b c^2) ; \\ t &= m_a^2 c^4 + m_1^2 c^4 - 2(E_a E_1 - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_1 c^2) ; \\ u &= m_a^2 c^4 + m_2^2 c^4 - 2(E_a E_2 - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_2 c^2) . \end{aligned}$$

(b) Utiliser la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion.

**10.5 Désintégration en vol d'une particule**

$$\text{(a)} \quad E_1^* = (M^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2/(2M) ; E_2^* = (M^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2/(2M) .$$

$$\text{(b)} \quad \cos \theta_1 = [2EE_1 + m_2^2 c^4 - M^2 c^4 - m_1^2 c^4] / \left[ 2EE_1 \sqrt{1 - M^2 c^4/E^2} \sqrt{1 - m_1^2 c^4/E_1^2} \right] .$$

**10.6 Masse invariante de 2 particules**

$$\text{(a)} \quad \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \rightarrow m_i m_j c^2 + m_i m_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2/2 .$$

$$\text{(b)} \quad T_{ij} \rightarrow \mu_{ij} (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2/2 \text{ où } \mu_{ij} \text{ est la masse réduite des deux particules.}$$

**10.7 Désintégration du méson  $\pi^0$** 

$$\text{(a)} \quad E = mc^2 / [2\gamma(1 - \beta \cos \phi)] .$$

$$\text{(b)} \quad E_m = m^2 c^4 / [2(E + pc)] \text{ pour } \phi = \pi ; E_M = m^2 c^4 / [2(E - pc)] \text{ pour } \phi = 0 ;$$

si  $E \rightarrow \infty$ , alors  $E_m \rightarrow 0$  et  $E_M \rightarrow E$  ;  $E = 3\sqrt{2}mc^2/4$ .

$$\text{(c)} \quad mc^2 = 2\sqrt{E_m E_M} .$$

$$\text{(d)} \quad I(\phi) = K(1 - \beta^2)/(1 - \beta \cos \phi)^2 .$$

$$\text{(e)} \quad mc^2 = 134,96 \text{ MeV} ; v/c = 0,8 ; T = 2mc^2/3 = 89,97 \text{ MeV}$$

**10.8 Fusée relativiste**

$$\text{(b)} \quad \phi / [1 - (v^2/c^2)]^{3/2} = -(u/m) (dm/d\tau) ; m = m_i e^{-A\tau/u} .$$

$$\text{(c)} \quad u/c = \sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)} ; \varepsilon c^2 \rightarrow u^2/2 \text{ si } \varepsilon \ll 1 ; u \rightarrow c \text{ si } \varepsilon \rightarrow 1 .$$

**10.9 Voile laser**

$$\text{(a)} \quad P(w) \text{ avec } w = t - x/c .$$

$$\text{(b)} \quad d\beta/dt = 2P(w)(1 - \beta)^{3/2}(1 + \beta)^{1/2}/(Mc^2) .$$

$$\text{(c)} \quad \beta = [(1 + e)^2 - 1] / [(1 + e)^2 + 1] .$$

$$\text{(d)} \quad \beta = 1 - e^{-2P\tau/(Mc^2)} .$$

**10.10 Production des bosons vecteurs**

$$T = 4T' + 2T'^2/(mc^2) = 156467 \text{ GeV} !$$

**10.11 Désintégration de la particule  $\Lambda$** 

$$cp_\Lambda = 0,868 \text{ GeV et } E_\Lambda = 1,412 \text{ GeV, donc } m_\Lambda c^2 = 1,114 \text{ GeV.}$$

**10.12 Bouclier de protection**

$$\text{(a)} \quad W = c^3 \rho \beta \gamma (\gamma - 1) S .$$

$$\text{(b)} \quad T = [c^3 \rho \beta \gamma (\gamma - 1) \sin \theta / (\sigma \varepsilon)]^{1/4} ; \text{ il faut } \theta < 2,8^\circ \text{ pour avoir } T < 1000 \text{ K} !$$



**10.13 Particules  $\psi$  et  $\psi'$** 

- (a)  $T_e(\text{seuil}) = mc^2/2 - m_e c^2$  ;  $1 - \beta \approx (m_e c^2 / T_e)^2 / 2$  ;  
 Pour la réaction (1)  $T_e = 1\,547,989$  MeV,  $1 - \beta = 5,45 \times 10^{-8}$  ;  
 Pour la réaction (2)  $T_e = 1\,842,489$  MeV,  $1 - \beta = 3,85 \times 10^{-8}$ .
- (b)  $n < (m_2 - m_1)/(2m_\pi)$  donc  $n = 1$  ou  $2$ .
- (c)  $T_+ = T_- = (m_2 - m_1 - 2m_\pi)c^2/2 = 154,5$  MeV.
- (d)  $T(T + 2m_1 c^2) = T_+(T_+ + 2m_\pi c^2) + T_-(T_- + 2m_\pi c^2)$   
 $+ 2 \cos \theta [T_+ T_- (T_+ + 2m_\pi c^2)(T_- + 2m_\pi c^2)]^{1/2}$  où  $T$  est l'énergie cinétique de la particule  $\psi$ .

**10.14 Statoréacteur Bussard**

- (a)  $\gamma dv/dt = \varphi_0 \beta^2 \left( \sqrt{1 + \varepsilon(2 - \varepsilon)/(\beta^2 \gamma^2)} - 1 \right)$  avec  $\varphi_0 = A \rho c^2 / M$ .
- (b)  $v = v_0 e^{\varphi_0 \sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)} t / c}$ .
- (c) Accélération propre constante de module  $\varphi_0(\varepsilon - \varepsilon^2/2)$ .
- (d)  $\frac{x}{c^2/\varphi_0} = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2} \left( \sqrt{(1 - \varepsilon')y^2 + \varepsilon'} - y \right)}$  avec  $\varepsilon' = \varepsilon(2 - \varepsilon)$  ;  
 $\frac{t}{c/\varphi_0} = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{dy}{y \sqrt{1 - y^2} \left( \sqrt{(1 - \varepsilon')y^2 + \varepsilon'} - y \right)}$  ;  $\frac{\tau}{c/\varphi_0} = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{dy}{y \left( \sqrt{(1 - \varepsilon')y^2 + \varepsilon'} - y \right)}$ .

**10.15 Référentiel de Breit**

- (a) Par rapport à un référentiel quelconque, la vitesse du référentiel de Breit est donnée par  
 $\vec{V} = (\vec{p}_a + \vec{p}'_a)c^2/(E_a + E'_a)$ .
- (b)  $p_a = p'_a = p_a^* \sin(\theta^*/2)$  ;  $E_a = E'_a = \sqrt{E_a^{*2} - (p_a^* c \cos(\theta^*/2))^2}$  ;  
 $p_b = p'_b = p_b^* \sqrt{\sin^2(\theta^*/2) + 4\gamma^2 \cos^2(\theta^*/2)}$  ;  
 $E_b = E'_b = \sqrt{E_b^{*2} + (4\gamma^2 - 1)(p_b^* c \cos(\theta^*/2))^2}$ .
- (c)  $2\vec{p}_a = \vec{p}'_b - \vec{p}_b$ .
- (d)  $(\vec{p}_a, \vec{p}'_a) = \pi$  ;  $(\vec{p}_b, \vec{p}'_b) = \phi$  avec  $\cos \phi = 1 - 2p_a^2/p_b^2$ .

**10.16 Désintégration d'une particule en mouvement**

- (a)  $V_{\text{cm}} = p_a c^2 / E_a$  ;  $\gamma_{\text{cm}} = E_a / (m_a c^2)$ .
- (b)  $E'_a = m_a c^2$  ;  
 $p'_1 c = p'_2 c = \sqrt{[m_a^2 - (m_1 + m_2)^2][m_a^2 - (m_1 - m_2)^2]} c^2 / (2m_a)$  ;  
 $E'_1 = [m_a^2 + m_1^2 - m_2^2] c^2 / (2m_a)$  ;  $E'_2 = [m_a^2 + m_2^2 - m_1^2] c^2 / (2m_a)$ .
- (c)  $p_M(i) = E_a [(p_a E'_i / E_a) + p'] / (m_a c^2)$  ;  $p_m(i) = E_a |(p_a E'_i / E_a) - p'| / (m_a c^2)$ .
- (d) En supposant  $m_1 > m_2$ ,  $E_a(\text{min}) = (m_a^2 + m_2^2 - m_1^2) c^2 / (2m_2)$ .

$$(e) \tan \theta_M = \beta_{\min} / \left[ \gamma \sqrt{\beta^2 - \beta_{\min}^2} \right] ; \theta_M \rightarrow 0 \text{ si } \beta \rightarrow 1.$$

$$(f) \theta_M \approx m_a \sqrt{m_a^2 - 4m^2 c^2} / (2m E_a).$$

### 10.17 Choc relativiste de deux particules de masses identiques

$$(b) T'_1 = T_1 \cos^2 \theta_1 / [1 + (\alpha/2) \sin^2 \theta_1].$$

$$(c) T'_1 = 0 \text{ pour } \theta_1 = \pi/2 ; T'_1 = T_1 \text{ pour } \theta_1 = 0 \text{ ou } \pi.$$

$$(d) \gamma = \sqrt{1 + \alpha/2}.$$

$$(g) \tan \theta = 4\sqrt{1 + \alpha/2} / (\alpha \sin \theta^*).$$

$$(h) \tan \theta_{\min} = 4\sqrt{1 + \alpha/2} / \alpha.$$

### 10.18 Énergie acquise par l'électron dans l'effet Compton

$$(a) T' = E_\gamma \alpha (1 - \cos \theta) / [1 + \alpha(1 - \cos \theta)].$$

$$(b) T'_m = 0 \text{ pour } \theta = 0 ; T'_M = 2E_\gamma \alpha / (1 + 2\alpha) = 376 \text{ eV pour } \theta = \pi.$$

$$(c) \beta = \alpha / (1 + \alpha) = 0,019 \text{ (0 en mécanique classique).}$$

$$(d) v^* = v \sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)} ; E_\gamma^* = 9,81 \text{ keV.}$$

$$(e) E^* = \gamma m c^2 \approx 511 \text{ keV.}$$

$$(f) E_\gamma'^* = E_\gamma^* = E_\gamma \sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)} ; E'^* = E^* = \gamma m c^2.$$

$$(g) K = \alpha, \text{ donc } |\phi| = 59,52^\circ.$$

### 10.19 Effet Compton sur un électron cible en mouvement

$$(a) v' = v E \left( 1 + \sqrt{1 - \alpha^2} \right) / \left[ h v (1 - \cos \theta) + E \left( 1 + \sqrt{1 - \alpha^2} \cos \theta \right) \right].$$

$$(b) \lambda' - \lambda = 4\pi \lambda_e \sin^2 (\theta/2).$$

$$(c) \text{ Si } h v = E \sqrt{1 - \alpha^2}, v' = v \forall \theta ;$$

$$\text{si } h v > E \sqrt{1 - \alpha^2}, v'_M = v \text{ pour } \theta = 0 \text{ et } v'_m = v \frac{E \left( 1 + \sqrt{1 - \alpha^2} \right)}{2 h v + E \left( 1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \right)} \text{ pour}$$

$$\theta = \pi ;$$

$$\text{si } h v < E \sqrt{1 - \alpha^2}, v'_m = v \text{ pour } \theta = 0 \text{ et } v'_M = v \frac{E \left( 1 + \sqrt{1 - \alpha^2} \right)}{2 h v + E \left( 1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \right)} \text{ pour}$$

$$\theta = \pi.$$

$$(d) \lambda' = \lambda [h v + E] / [E(1 + \sqrt{1 - \alpha^2})].$$

$$(e) \lambda'_0 = \lambda \frac{h v + E}{E} \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

$$(f) \cos \theta_0 = -\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

## CHAPITRE 11

### 11.2 Invariants de deux champs électromagnétiques

Il suffit de remarquer que le champ électromagnétique ( $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ ) satisfait aux équations de Maxwell, qui sont linéaires. Les égalités demandées résultent des invariants de ce champ, en tenant compte des invariants des deux champs originaux.

### 11.4 Champ électromagnétique d'une onde plane

(a)  $\vec{E}'^2 = \gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}) \vec{E}^2 ; \vec{B}'^2 = \gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}) \vec{B}^2.$

(b) Les deux invariants sont nuls.

### 11.5 Une nouvelle façon d'obtenir les invariants de champ

L'angle de rotation est  $i\theta$ , avec  $\cosh \theta = \gamma$ . Les invariants résultent de la conservation de la norme  $\vec{D}^2$  pour une rotation.

### 11.7 Champ électromagnétique spécial

(a) On se sert des invariants électromagnétiques ;  $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$ .

(b)  $\vec{E} \perp \vec{B}$  et  $cB > E$ .

(d)  $\vec{E} \perp \vec{B}$  et  $cB < E$ .

### 11.8 Champ d'un courant rectiligne infini

(b)  $\vec{B} = (\mu_0/(2\pi)) [\vec{i} \wedge \vec{r}] / r^2.$

### 11.9 Particule dans un champ électrique constant

(a)  $\dot{p}_x = 0 ; \dot{p}_y = 0 ; \dot{p}_z = qE.$

(c)  $y(t) = \frac{p_{0y}c}{qE} \left[ \arg \sinh \left( \frac{(qEt + p_{0z})c}{\sqrt{m^2c^4 + p_{0y}^2c^2}} \right) - \arg \sinh \left( \frac{p_{0z}c}{\sqrt{m^2c^4 + p_{0y}^2c^2}} \right) \right];$

$$z(t) = \left[ \sqrt{m^2c^4 + p_{0y}^2c^2} + (qEt + p_{0z})c^2 - \sqrt{m^2c^4 + p_{0z}^2c^2} \right] / (qE).$$

(d)  $y(t) \approx p_{0y}t/m ; z(t) = qEt^2/(2m) + p_{0z}t/m.$

### 11.10 Particule dans un champ magnétique constant

(c) centre  $(0, -b/\omega)$ , rayon  $R = b/\omega$ , pas  $h = 2\pi a/\omega$ , avec  $\omega = qB\sqrt{1 - \vec{v}_0^2/c^2}/m.$

(d)  $T = 2\pi m / \left( qB\sqrt{1 - \vec{v}_0^2/c^2} \right)$  indépendant de  $\theta$  ;  $R = mv_0 \sin \theta / \left( qB\sqrt{1 - \vec{v}_0^2/c^2} \right).$

### 11.11 Champ électromagnétique croisé

Il est intéressant de résoudre préalablement les exercices 5.1, 11.7, 11.9 et 11.10.

(a)  $T = 2\pi(m/q)c^3 B^2 (c^2 B^2 - E^2)^{-3/2}.$

**11.12 Champ électromagnétique créé par un plan infini**

$$(a) \beta' = (\beta - \delta)/(1 - \beta\delta) ; \sqrt{1 - \beta'^2} = \sqrt{1 - \beta^2}\sqrt{1 - \delta^2}/(1 - \beta\delta).$$

$$(b) \sigma' = \sigma(1 - \beta\delta)/\sqrt{1 - \delta^2}.$$

$$(d) \vec{F} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \beta^2)\hat{e}_z ; F = F(0)\sqrt{1 - \beta^2}.$$

**11.13 Accélérateur linéaire**

$$(a) \Delta v = 2qE_0/(m\omega).$$

$$(b) L_n = l_0 + (n - 1/2)\Delta l ; l_n = l_0 + n\Delta l.$$

$$(c) N = \sqrt{2/m} [\sqrt{T_1} - \sqrt{T_0}] / \Delta v ; L = 2Nl_0 + N(N + 1/2)\Delta l.$$

$$(d) \text{ si } T_0 \text{ est changé en } \alpha T_0, \text{ il faut changer } \omega \text{ en } \sqrt{\alpha}\omega \text{ et } E_0 \text{ en } \alpha E_0.$$

**11.15 Électrodynamique non linéaire**

$$(a) [\lambda] = Q^4 M^{-3} L^{-3} T^4 \text{ où } Q, M, L \text{ et } T \text{ sont respectivement les dimensions d'une charge électrique, d'une masse, d'une longueur et d'un temps.}$$



## Postface

*Nous piétinerons éternellement aux frontières de l'Inconnu,  
cherchant à comprendre ce qui restera toujours incompréhensible.  
Et c'est précisément cela qui fait de nous des hommes.*

Isaac ASIMOV (1920-1992)

Tous les aspects de la relativité restreinte n'ont certes pas été abordés dans cet ouvrage. Nous ne pouvons qu'inviter le lecteur – qui a eu le courage et la patience de nous suivre jusqu'ici – à aller plus loin dans la découverte de cette fascinante théorie. Les nombreuses références qui émaillent le texte ainsi que les ouvrages cités dans la bibliographie peuvent constituer une bonne base de départ.

De nos jours, la relativité restreinte est généralement considérée comme une théorie achevée. S'il est vrai que peu de révélations fracassantes sont à attendre dans ce domaine, il ne faudrait pas oublier que cette théorie a permis le développement de la théorie des champs, qui est à la base de la physique des particules, et de la relativité générale, qui fournit le cadre théorique de la cosmologie moderne. Les physiciens sont, depuis de nombreuses années, à la recherche de la théorie ultime qui unifierait ces deux « prolongements » de la relativité restreinte. Le chemin n'est pas facile et il ne semble pas que l'on puisse formuler correctement cette nouvelle théorie avant longtemps. Mais après tout, la recherche de la vérité peut être au moins aussi passionnante que la vérité elle-même.

## Annexe A

# Unités naturelles

La vitesse de la lumière  $c$  joue un rôle central dans la théorie de la relativité restreinte. Il n'est donc pas étonnant de la retrouver dans presque toutes les équations de la théorie. Cette présence, non gênante dans les équations fondamentales, peut devenir assez rapidement pénible dans certains calculs longs. L'utilisation des notations  $\beta$  et  $\gamma$  facilite déjà quelque peu les choses, mais il est possible d'aller plus loin dans l'allégement de l'écriture.

On peut définir le système d'unités naturelles de la relativité restreinte en utilisant la procédure suivante :

- On pose  $c = 1$ , ce qui élimine  $c$  de toutes les formules. Ce faisant, une longueur et une durée se voient donc attribuer le même contenu dimensionnel, tandis que les vitesses sont exprimées par des nombres purs.
- Les calculs sont développés sans faire apparaître le paramètre  $c$ . Par exemple, avec les unités naturelles, la relation d'Einstein d'une particule libre de masse  $m$ , d'énergie  $E$  et d'impulsion  $\vec{p}$  s'écrit

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (\text{A.1})$$

- On exprime les énergies, masses et impulsions par la même unité. Par exemple, dans le domaine des particules élémentaires, on dira qu'un électron libre de masse 511 keV, caractérisé par une impulsion de 800 keV, possède une énergie totale d'environ 950 keV.
- Pour réaliser les calculs numériques, on peut rendre de nouveau les formules homogènes, si nécessaire, en multipliant dans les résultats finals les masses par  $c^2$  et les impulsions par  $c$ . La relation (A.1) ci-dessus, par exemple, prend sa forme homogène

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (\text{A.2})$$

Dans d'autres domaines de la physique où interviennent d'autres constantes fondamentales, il est également possible de définir des unités naturelles bien adaptées. Les dimensions de toutes les grandeurs physiques peuvent s'exprimer au moyen de dimensions considérées comme plus fondamentales, par exemple : une longueur  $L$ , une durée  $T$ , une masse  $M$ , etc. Si on convient de noter par  $[A]$  le contenu dimensionnel de la grandeur  $A$ , on a pour trois constantes fondamentales de la nature  $c$  (la vitesse de la lumière),  $h$  (la constante de Planck) et  $G$  (la constante de gravitation) :

$$\begin{aligned} [c] &= L T^{-1}; \\ [h] &= M L^2 T^{-1}; \\ [G] &= M^{-1} L^3 T^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En théorie quantique des champs, il est habituel de poser  $\hbar = c = 1$  ( $\hbar = h/(2\pi)$ ). Dans ce cas, par exemple, une longueur acquiert la dimension de l'inverse d'une masse. Dans le cadre de la théorie de la relativité générale, il est commode d'égaliser à l'unité  $c$  et  $G$  (ou un multiple de  $G$ ). Masses et longueurs possèdent alors le même contenu dimensionnel. Enfin, en théorie quantique de la gravitation, on pose parfois  $\hbar = c = G = 1$ . Dans ce cas, toutes les quantités physiques se voient dépourvues de dimension. L'écriture des équations s'en trouve considérablement allégée, mais plus aucune vérification de type dimensionnel ne peut alors être faite <sup>1</sup>.

---

1. Pour plus d'informations sur l'analyse dimensionnelle, on peut consulter, par exemple, l'ouvrage de G. Monod-Herzen, *L'analyse dimensionnelle et l'épistémologie*, Maloine-Doin Éditeurs, 1976. Le Système international d'unités (SI) est présenté, par exemple, dans l'ouvrage de Michel Dubesset, *Le manuel du Système international d'unités*, Éditions Technip, 2000.



## Annexe B

# **Quantités invariantes, conservées et constantes**

La vitesse de la lumière est-elle une constante ou un invariant ? La masse est-elle conservée dans un processus de collision ? Est-ce un invariant ou une constante ? Les trois qualificatifs « invariant », « conservé » et « constant » ont des significations très précises dans la cadre de la théorie de la relativité restreinte.

## **QUANTITÉ INVARIANTE**

En relativité restreinte, une quantité est invariante si elle est caractérisée par la même valeur dans tous les référentiels d'inertie, en mouvements relatifs les uns par rapport aux autres. Parmi tous les invariants relativistes, le module de la vitesse de la lumière (dans le vide) joue un rôle central dans la théorie. Sa mesure dans n'importe quel référentiel d'inertie donnera toujours le même résultat. Un second invariant important est la distance, au sens de Minkowski, entre deux événements. Tous les observateurs en mouvement inertiel s'accorderont sur la mesure d'un intervalle de temps propre. Un troisième invariant relativiste est la masse d'une particule. Un autre invariant, couramment utilisé, est le nombre de particules participant à un processus donné. D'autres invariants existent, chacun ayant son utilité propre.

Certaines quantités importantes ne sont pas des invariants. Par exemple, ni le temps, ni la distance spatiale qui séparent deux événements ne sont des invariants. Il en est de même pour l'énergie ou l'impulsion d'une particule.

## QUANTITÉ CONSERVÉE

Une quantité est conservée si elle a la même valeur avant et après qu'un processus se soit déroulé dans un même référentiel d'inertie. L'énergie totale d'un système isolé de particules est conservée dans une interaction entre ces particules. Il en est de même pour les trois composantes de l'impulsion totale. Il en résulte que le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé. Au contraire, la somme des masses individuelles des particules d'un système n'est généralement pas conservée dans une interaction relativiste.

## QUANTITÉ CONSTANTE

Une quantité constante ne varie pas au cours du temps. La vitesse d'un immeuble par rapport à la Terre est constante – en fait égale à zéro. Cette vitesse est constante, mais ce n'est pas un invariant. Ce même immeuble vu d'avion semblera se déplacer à grande vitesse. On ne peut pas dire pour autant que la vitesse de l'immeuble n'est pas conservée, car il n'y a pas « d'avant » ou « d'après » à quoi se référer.

S'il est vrai que le module de la vitesse de la lumière dans le vide est constant – il ne change pas au cours du temps, il est également vrai, mais c'est une affirmation entièrement différente, que ce même module est un invariant – il a la même valeur mesurée par différents observateurs en mouvements uniformes les uns par rapport aux autres. De même, s'il est vrai que le quadrivecteur énergie-impulsion total d'un système isolé est constant – il ne varie pas au cours du temps, il est également vrai, mais c'est une affirmation entièrement différente, que le quadrivecteur énergie-impulsion total d'un système isolé est conservé au cours d'une interaction entre les particules de ce système.

## Annexe C

# Groupe de Poincaré

Les transformations linéaires qui laissent invariante la métrique de Minkowski forment le groupe de Lorentz homogène  $\mathcal{L}$ . Les matrices  $\Lambda$  d'ordre 4 (dont les éléments  $\Lambda_{\mu}^{\nu}$  sont sans dimension) représentant ces transformations sont telles que  $\det \Lambda = \pm 1$  et  $|\Lambda_0^0| \geq 1$  (voir section 8.3). Le groupe  $\mathcal{L}$  est ainsi formé de quatre classes disjointes (nappes) qui permettent de définir trois sous-groupes importants : les *transformations propres*  $\mathcal{L}_+$  caractérisées par le fait que  $\det \Lambda = 1$ , les *transformations orthochrones*  $\mathcal{L}^\uparrow$  telles que  $\Lambda_0^0 \geq 1$ , et le *groupe de Lorentz restreint*  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  formé des transformations propres et orthochrones (voir tableau C.1). C'est à ce dernier sous-groupe que l'on s'intéresse principalement dans cet ouvrage. Les éléments du groupe de Lorentz restreint peuvent être liés à l'identité par variation continue des paramètres de la transformation :  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  est dit connexe à l'identité.

**TABLEAU C.1** NAPPES DU GROUPE DE LORENTZ.  $I$  DÉSIGNE L'OPÉRATEUR IDENTITÉ,  $P$  L'OPÉRATEUR DE PARITÉ (INVERSION SPATIALE) ET  $T$  LE RENVERSEMENT DU TEMPS. LES TROIS DERNIÈRES COLONNES INDIQUENT QUELLE(S) NAPPE(S) IL FAUT CONSIDÉRER POUR FORMER UN SOUS-GROUPE PARTICULIER.

Nappe	$\det \Lambda$	$\Lambda_0^0$	Contient	Sous-groupe		
				restreint	orthochrone	propre
$\mathcal{L}_+^\uparrow$	+1	$\geq 1$	$I$	•	•	•
$\mathcal{L}_-^\uparrow$	-1	$\geq 1$	$P$		•	
$\mathcal{L}_-^\downarrow$	-1	$\leq -1$	$T$			
$\mathcal{L}_+^\downarrow$	+1	$\leq -1$	$PT$			•

Les transformations de Lorentz homogènes auxquelles on adjoint les translations d'espace-temps forment le groupe de Poincaré ou groupe de Lorentz non homogène. Une transformation de ce groupe peut s'écrire sous la forme suivante

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu + X^\mu \quad \text{avec} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{C.1})$$

où  $X^\mu$  est un quadrivecteur représentant une translation spatio-temporelle, dont les composantes ont la même dimension que celles des composantes des quadrivecteurs  $x^\mu$  et  $x'^\mu$ . Cette relation admet une représentation matricielle si on associe une matrice colonne de 5 lignes à chaque quadrivecteur

$$x^\mu \rightarrow \begin{pmatrix} x^\mu \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

et si on associe une matrice d'ordre 5 à chaque transformation de Lorentz

$$(\Lambda^\mu_\nu, X^\mu) \rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda^\mu_\nu & X^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

On voit en effet que

$$\begin{pmatrix} x^\mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^\mu_\nu & X^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^\nu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^\mu_\nu x'^\nu + X^\mu \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Dans la transformation (C.1), il faut comprendre que les composantes des quadrivecteurs  $x^\mu$  et  $X^\mu$  sont données dans le même repère.

Si on convient de noter de manière abrégée une transformation de Lorentz non homogène  $U(i)$ , c'est-à-dire un élément du groupe de Poincaré, par

$$U(i) = (\Lambda^\mu_\nu(i), X^\mu(i)), \quad (\text{C.5})$$

alors la loi de groupe est donnée par

$$U(1) U(2) = (\Lambda^\mu_\nu(1) \Lambda^\nu_\sigma(2), \Lambda^\mu_\nu(1) X^\nu(2) + X^\mu(1)). \quad (\text{C.6})$$

Chaque matrice  $\Lambda^\mu_\nu$  possède son inverse puisque ces matrices forment un groupe. L'inverse de la transformation  $U = (\Lambda^\mu_\nu, X^\mu)$  s'écrit donc

$$U^{-1} = ((\Lambda^{-1})^\mu_\nu, -(\Lambda^{-1})^\mu_\eta X^\eta) \quad (\text{C.7})$$

où  $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu$  est l'inverse de la matrice  $\Lambda^\mu_\nu$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} UU^{-1} &= (\Lambda^\mu_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\sigma, -\Lambda^\mu_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\eta X^\eta + X^\mu) \\ &= (\delta^\mu_\sigma, 0) \equiv \text{identité}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

## Annexe D

# **Les métriques de la relativité restreinte**

La métrique de Minkowski (voir formule (8.22)) est la métrique la plus simple et la plus naturelle qui permette de décrire la structure de l'espace-temps dans le cadre de la relativité restreinte : *i*) la partie purement spatiale de cette métrique  $g_{ij}$  est une métrique euclidienne changée de signe ; *ii*) il n'y a pas de mélange entre la coordonnée temporelle et les coordonnées spatiales ; *iii*) le coefficient  $g_{00}$  est pris égal à l'unité. L'intervalle de longueur élémentaire au carré  $ds^2$ , qui est un invariant, est donc de la forme

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (\text{D.1})$$

où les conventions d'écriture (8.5) sont utilisées.

Il est cependant possible de travailler avec d'autres systèmes de coordonnées pour lesquelles la métrique ne prend plus la forme simple (D.1). Supposons que les coordonnées  $x^\mu$  d'un événement soient des fonctions (plusieurs fois continûment différentiables) des variables  $X^\mu$ , avec  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ,

$$x^\mu = F^\mu(X^\nu). \quad (\text{D.2})$$

Par la suite, nous travaillerons dans un domaine d'espace-temps pour lequel le système (D.2) peut s'inverser. Les variables  $X^0, X^1, X^2, X^3$  constituent donc un système de coordonnées de ce domaine. On parlera de *coordonnées curvi-*

lignes si les fonctions  $F^\mu$  sont des fonctions non linéaires des variables  $X^\nu$ . Dans les deux systèmes de coordonnées, l'invariant  $ds^2$  s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad (\text{D.3})$$

où  $G_{\mu\nu}$  est la métrique associée au système de coordonnées  $X^\mu$ . Cette expression implique que le lien entre les deux métriques est donné par

$$G_{\mu\nu} = g_{\eta\sigma} \frac{\partial F^\eta}{\partial X^\mu} \frac{\partial F^\sigma}{\partial X^\nu}. \quad (\text{D.4})$$

Rangés sous forme matricielle, les éléments  $\partial F^\eta / \partial X^\mu$  forment la matrice de changement de base. Il ne faut pas confondre ce changement de coordonnées avec une transformation de Lorentz : la particularité d'une transformation de Lorentz est de ne pas modifier la métrique de Minkowski, ce qui n'est pas le cas du changement de coordonnées discuté dans cette section. Il est possible d'écrire la forme des transformations de Lorentz en termes de ces nouvelles coordonnées  $X^\mu$ . Dans le cas où ces coordonnées sont curvilignes, ces transformations peuvent prendre une forme extrêmement complexe qui ne sera pas développée ici.

L'étude des systèmes possédant une symétrie donnée peut être grandement facilitée par un choix adéquat du système de coordonnées. En particulier, dans le cas de problèmes à symétrie sphérique, on peut remplacer les coordonnées spatiotemporelles habituelles  $(ct, x, y, z)$  par les coordonnées  $(ct, r, \theta, \phi)$ , qui sont définies par les relations suivantes

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, & r &> 0; \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, & 0 &< \theta < \pi; \\ z &= r \cos \theta, & 0 &\leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

On remarquera que, contrairement aux coordonnées spatiales, la coordonnée temporelle n'est pas modifiée. Dans ce système de coordonnées, curvilignes uniquement pour la partie spatiale, la métrique de la relativité restreinte s'écrit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{D.6})$$

Il est à noter que les grandeurs  $ct$  et  $r$  ont bien la dimension d'une longueur. Les coordonnées  $\theta$  et  $\phi$ , qui sont des variables angulaires, sont dépourvues de dimension. Le domaine de cette métrique est la totalité de l'espace-temps sauf l'axe  $Oz$  à tout instant car la transformation (D.5) n'est pas inversible en  $r = 0$ , ou en  $\theta = 0$  et  $\pi$ .

Dans un système de coordonnées curvilignes, les vecteurs de base du repère changent de point en point et les composantes de la métrique ne sont plus des constantes mais dépendent des coordonnées. La dérivée covariante (voir section 11.1) ne s'exprime alors plus simplement par un opérateur de dérivation partielle ; il est nécessaire de prendre en compte ce que l'on appelle les *symboles de Christoffel* (ou

*coefficients de connexion*) qui expriment comment varient les vecteurs de base en fonction du point. Signalons cependant que la propriété  $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$  est toujours vérifiée. La définition des intégrales dans ces systèmes de coordonnées doit alors se faire avec le plus grand soin <sup>1</sup>.

Une transformation de Lorentz est caractérisée par la vitesse relative existant entre les deux référentiels d'inertie. Les équations de transformation ne prennent une forme simple que lorsque la vitesse relative est orientée suivant un des axes de chacun des référentiels. C'est le cas, par exemple, pour les relations (2.28). Mais on peut imaginer d'autres situations aussi favorables. Considérons un observateur d'inertie utilisant un système de coordonnées cylindriques  $(ct, r, \theta, z)$ , définies par les relations suivantes

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & r &> 0; \\ y &= r \sin \theta, & 0 &\leq \theta < 2\pi, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

où  $(ct, x, y, z)$  sont les coordonnées spatiotemporelles habituelles. La métrique de la relativité restreinte s'écrit alors

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2. \quad (\text{D.8})$$

Un autre observateur d'inertie définit les mêmes coordonnées mais primées. Si les deux observateurs relient leurs mesures par une transformation spéciale de Lorentz telle que la vitesse relative est orientée suivant les axes  $Oz$  et  $O'z'$ , les équations de transformation s'écrivent simplement

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta z'), \\ z &= \gamma(z' + \beta ct'), \\ r &= r', \\ \theta &= \theta'. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Lorsque la vitesse relative n'est pas orientée suivant un des axes de chacun des référentiels, l'écriture des équations de transformation est beaucoup plus compliquée, même en utilisant dans chaque référentiel un système d'axes cartésien orthonormé (voir section 7.2).

---

1. Voir les ouvrages consacrés au calcul tensoriel (biblio). Voir également l'ouvrage de C. W. Misner, K. S. Thorne et J. A. Wheeler (biblio), ainsi que le livre de M. Ludvigsen (biblio).

## Annexe E

# Le paradoxe EPR

En 1935, Einstein, Podolsky et Rosen décrivent une expérience de pensée qui est censée démontrer que la mécanique quantique est une théorie incomplète <sup>1</sup>. Le résultat apparemment paradoxal de leur raisonnement est aujourd'hui connu sous le nom de *paradoxe EPR*.

Considérons une version simplifiée du paradoxe EPR, due à David Bohm. Un pion neutre au repos se désintègre en une paire électron-positron :  $\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$  ; l'électron et le positron s'éloignent dans des directions opposées. Chacune de ces particules est captée par un détecteur qui mesure son spin. Le pion ayant un spin nul, la conservation du moment angulaire requiert que, si l'électron est caractérisé par un spin *up* (+1/2), le positron doit avoir un spin *down* (−1/2), et vice-versa. La mécanique quantique ne peut pas vous dire quelle configuration de spin vous allez rencontrer pour une désintégration particulière, mais elle vous dit que les mesures de spin vont être corrélées. Supposons que l'électron et le positron parcourent 10 mètres (ou 10 années-lumière) avant que vous mesuriez le spin de l'électron. Si vous obtenez un spin *up*, vous savez immédiatement que 20 mètres (ou 20 années-lumière) plus loin vous obtiendrez le spin *down* si vous examinez le positron. À un des deux détecteurs, vous obtiendrez en moyenne chaque valeur de spin la moitié du temps.

---

1. A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, « Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? », *Physical Review*, vol. 47, 15 May 1935, p. 777-780. Voir également la réponse de Niels Bohr dans un article portant le même titre, *Physical Review*, vol. 48, 15 October 1935, p. 696-702.



Dans le cadre de l'interprétation dite « réaliste » de la mécanique quantique, il n'y a rien de surprenant à cela ; l'électron a toujours eu un spin up et le positron un spin down depuis le moment où ils ont été créés, la mécanique quantique ne permettant tout simplement pas de le préciser. Dans le cadre de l'interprétation dite « orthodoxe » de la mécanique quantique, aucune des particules n'a un spin up ou down tant qu'une opération de mesure n'est pas réalisée ; la mesure du spin de l'électron *réduit la fonction d'onde du système* et « produit » instantanément le spin du positron 20 mètres (ou 20 années-lumière) plus loin. Bien que la relativité restreinte impose la vitesse de la lumière dans le vide comme vitesse limite, il semble pourtant à première vue qu'une « influence » se transmette alors à **vitesse infinie** d'une particule à l'autre.

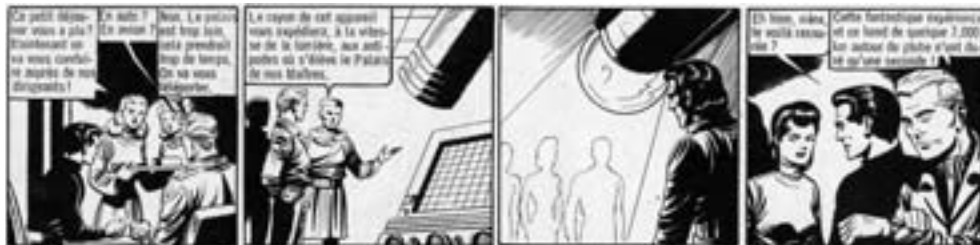
Einstein considérerait ce type d'action à distance « effrayante » <sup>2</sup> tout à fait absurde. Suite à des considérations théoriques dues à John S. Bell, de très belles expériences, réalisées notamment par Alain Aspect et son équipe, ont cependant réfuté le point de vue d'Einstein <sup>3</sup>.

Pourquoi les physiciens s'inquiètent-ils de l'existence possible d'influences supraluminiques ? Beaucoup de choses peuvent voyager plus vite que la lumière dans le vide (voir sections 5.3.3 et 5.3.4). Si un insecte vole à travers le faisceau lumineux d'un projecteur, son ombre peut se déplacer sur un écran à une vitesse supraluminique, si cet écran se trouve suffisamment loin de l'insecte et du projecteur. L'ombre ne transporte aucune énergie ni information d'un point à l'autre de l'écran. Un observateur en un point de l'écran ne peut donc influencer ce qui se passe en un autre point en « manipulant » l'ombre qui passe. Cependant, le respect de la causalité ne peut être garanti que si les phénomènes physiques, transportant de l'information et/ou de l'énergie, voyagent à des vitesses inférieures à celle de la lumière dans le vide (voir sections 3.3 et 3.4). Les processus quantiques impliquant des particules corrélées (on dit aussi intriquées) violent-ils la causalité, ou sont-ils suffisamment « éthérés » pour éviter ce crime de lèse-physicien ?

Pour répondre à cette question, considérons à nouveau l'expérience décrite ci-dessus. Il est clair que la mesure du spin de l'électron influence le résultat de la mesure du spin du positron. Dans le cas contraire, il n'y aurait aucune raison d'observer une corrélation dans les données et la conservation du moment angulaire ne serait pas garantie. Mais on ne peut pas se servir de ce processus pour transmettre une quelconque information. L'observateur qui manipule le détecteur recevant l'électron ne peut pas contrôler la valeur du spin qu'il va obtenir. Il peut évidemment décider de faire ou non la mesure ; mais l'observateur qui manipule le détecteur recevant le positron ne peut pas savoir si la mesure a été effectuée ou pas.

2. Einstein employait l'adjectif « spooky », qui signifie littéralement « qui fait froid dans le dos ».

3. Pour plus d'informations, voir, par exemple : David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, 1995, sect. afterword ; L. E. Ballentine, « Resource letter IQM-2: Foundations of quantum mechanics since the Bell inequalities », *American Journal of Physics*, vol. 55, n° 9, September 1987, p. 785-792 ; N. David Mermin, « Is the moon there when nobody looks ? Reality and the quantum theory », *Physics Today*, April 1985, p. 38-47.



**Illustration E.1** Dessins de Raoul Giordan, extraits de *Météor* n° 105 (Artima, 1962). Les extraordinaires propriétés des systèmes intriqués autorisent la « téléportation » – à des vitesses inférieures ou égales à la vitesse de la lumière – de particules élémentaires à grandes distances <sup>4</sup>. On peut cependant très fortement douter que cela soit un jour applicable à un être humain.

L'ensemble des données obtenues sur un des détecteurs est une liste complètement aléatoire de valeurs  $+1/2$  et  $-1/2$ . C'est uniquement quand on compare les deux listes qu'on peut constater la corrélation parfaite des mesures (le spin total est toujours nul).

Dans un référentiel d'inertie qui n'est pas au repos par rapport aux détecteurs, la mesure du spin du positron peut se produire avant la mesure du spin de l'électron (voir section 3.1). Cela ne conduit cependant à aucun paradoxe car la corrélation observée est parfaitement symétrique pour les deux observateurs. Il est indifférent de dire que la mesure du spin de l'électron influence la mesure du spin du positron, ou le contraire <sup>5</sup>. Il s'agit donc d'une influence très particulière dont la seule manifestation est une subtile corrélation entre deux listes de nombres aléatoires.

On est donc ainsi amené à distinguer deux types d'influence : une variété « causale », qui produit un changement dans les propriétés physiques du système récepteur, et une variété « éthérée », qui ne transmet aucune énergie ni information, dont la seule évidence est une corrélation entre deux listes de mesures prises sur des systèmes quantiques intriqués. L'influence causale **ne peut pas** se propager plus rapidement que la lumière dans le vide, mais il n'y a aucune raison pour l'influence éthérée ne le puisse pas.

4. Anton Zeilinger, « La téléportation quantique », *Pour la Science*, n° 272, juin 2000, p. 36-44.

5. La vérification expérimentale a été réalisée récemment : André Stefanov, Hugo Zbinden, Nicolas Gisin et Antoine Suarez, « Quantum Correlations with Spacelike Separated Beam Splitters in Motion : Experimental Test of Multisimultaneity », *Physical Review Letters*, vol. 88, n° 12, 25 March 2002, p. 120404/1-4.

## Lexique français-anglais

cône de lumière	light cone
décalage vers le bleu	blueshift
décalage vers le rouge	redshift
espace-temps	spacetime, four-space, 4-space
espace-temps plat	flat spacetime
événement, point d'univers	event, world point
genre espace	spacelike
genre lumière	null, lightlike
genre temps	timelike
hypothèse de l'horloge	clock hypothesis
ligne d'univers	world line
paradoxe des jumeaux de Langevin	twin paradox
pointant vers le futur	future-pointing, future-directed
pointant vers le passé	past-pointing, past-directed
pseudo-norme	magnitude, squared length
quadrivecteur	four-vector, 4-vector
quadrivecteur énergie-impulsion	4-momentum, world momentum
quadrivecteur fréquence	4-frequency
quadrivecteur vitesse, quadrivitesse	4-velocity, world velocity
rapidité, pseudo-vitesse	rapidity, pseudo-velocity
référentiel d'inertie	inertial frame
relativité restreinte	special relativity
temps propre	proper time, world time
transformation spéciale de Lorentz	standard Lorentz transformation (boost)
vitesse ( $\vec{v}$ )	velocity, 3-velocity
vitesse de la lumière	velocity of light, speed of light

# Bibliographie

Les livres consacrés à la relativité restreinte se comptent par centaines. Cette bibliographie ne se prétend donc nullement exhaustive.

## Ouvrages consacrés au calcul tensoriel

- HLADIK Jean et HLADIK Pierre-Emmanuel, *Le calcul tensoriel en physique*, Dunod, 3<sup>e</sup> éd., 1999.
- LICHNEROWICZ André, *Éléments de calcul tensoriel*, Éditions Jacques Gabay, 1987.

## Ouvrages consacrés à la relativité restreinte ou la relativité générale

- ADAMS Steve, *Relativity: An Introduction to Space-Time Physics*, CRC Press, 1997.
- BOBIN Jean-Louis, *Introduction à la relativité*, Diderot Éditeur, 1997.
- BORATAV Murat et KERNER Ryszard, *Relativité*, Ellipses, 1991.
- EINSTEIN Albert, *La relativité*, Éditions Payot & Rivages, 2001.
- GOLDSTEIN Herbert, POOLE Charles et SAFKO John, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 3<sup>e</sup> éd., 2002.
- HLADIK Jean et CHRYSOS Michel, *Introduction à la relativité restreinte. Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2001.
- JACKSON David, *Électrodynamique classique. Cours et exercices d'électromagnétisme*, Dunod, 2001.
- KITTEL Charles, KNIGHT Walter D. et RUDERMAN Malvin A., *Mechanics. Berkeley Physics Course – volume 1*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
- LAVERRIÈRE Roger, *Électrodynamique classique*, vol. 1, *Relativité restreinte*, Bréal, 2003.
- LUDVIGSEN Malcolm, *La relativité générale. Une approche géométrique*, Dunod, 2000.
- LUMBROSO Hubert, *Relativité. Problèmes résolus*, Édisscience, 2<sup>e</sup> éd., 1996.
- MISNER Charles W., THORNE Kip S. et WHEELER John Archibald, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- MØLLER C., *The theory of relativity*, Oxford University Press, 1962.
- PÉREZ José-Philippe, *Relativité. Fondements et applications*, Dunod, 1999.
- RINDLER Wolfgang, *Introduction to Special Relativity*, Oxford University Press, 1991.

- ROUGÉ André, *Introduction à la relativité*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2002.
- SEARS Francis W. et BREHME Robert W., *Introduction to the Theory of Relativity*, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- TAYLOR Edwin F. et WHEELER John Archibald, *Spacetime Physics. Introduction to special relativity*, W. H. Freeman and Company, 2<sup>e</sup> éd., 1992.
- WOODHOUSE Nicholas M. J., *Special Relativity*, Springer-Verlag, 1992, coll. « Lecture Notes in Physics (vol. m 6) ».
- WOODHOUSE Nicholas M. J., *Special Relativity*, Springer-Verlag, 2003, coll. « Springer undergraduate mathematics series ».

### Ouvrages de vulgarisation

- DURAND Stéphane, *La relativité animée. Comprendre Einstein en animant soi-même l'espace-temps*, Éditions Belin, 2003.
- GAMOW George et STANNARD Russell, *Le Nouveau monde de M. Tompkins*, Éditions Le Pommier, 2002.
- NAHIN Paul J., *Time Machines*, AIP Press/Springer, 2<sup>e</sup> éd., 1999.
- NOVIKOV Igor D., *The River of Time*, Cambridge University Press, 1998.
- STANNARD Russell, *Le temps et l'espace de l'oncle Albert*, Éditions l'École des loisirs, 1992.
- THORNE Kip S., *Trous noirs et distorsions du temps*, Flammarion, 1997, coll. « Nouvelle Bibliothèque Scientifique ».
- UZAN Jean-Philippe et LEHOUCQ Roland, *Les constantes fondamentales*, Édition Belin, 2005.

### Revue et ouvrages consacrés à la problématique du voyage interstellaire

- *Journal of the British Interplanetary Society*, The British Interplanetary Society, 27/29 South Lambeth Road, London, SW8 1SZ, England.
- FINNEY Ben R. et JONES Eric M., édit., *Interstellar Migration and the Human Experience*, Berkeley : University of California Press, 1985.
- MALLOVE Eugene et MATLOFF Gregory, *The Starflight Handbook: A Pioneer's Guide to Interstellar Travel*, John Wiley & Sons, 1989.
- MATLOFF Gregory, *Deep-Space Probes*, Praxis Publishing Ltd, 2000.
- PRANTZOS Nicolas, *Voyages dans le futur. L'aventure cosmique de l'humanité*, Éditions du Seuil, 1998, coll. « Science Ouverte ».

Le lecteur trouvera d'autres références sur certains sujets spécifiques dans l'article de Gerald Holton, « Resource Letter SRT 1 on Special Relativity Theory », *American Journal of Physics*, vol. 30, n° 6, June 1962, p. 462-469.

## Références des citations

- P. V : George GAMOW et Russell STANNARD, *Le Nouveau monde de M. Tompkins*, Éditions Le Pommier, 2002.
- P. 1 : Gaston BACHELARD, *Essai sur la connaissance approchée*, J. Vrin Éditeur, 1987.
- P. 26 : Herbert George WELLS, *La machine à explorer le temps*, Folio, 1959.
- P. 50 : Paul J. NAHIN, *Time Machines*, AIP Press/Springer, 2<sup>e</sup> éd., 1999.
- P. 73 : Pierre JOLIOT, *La recherche passionnément*, Éditions Odile Jacob, 2001.
- P. 86 : Edwin F. TAYLOR et John Archibald WHEELER, *Exploring Black Holes. Introduction to General Relativity*, Addison Wesley Longman, 2000.
- P. 101 : FEYNMAN, LEIGHTON et SANDS, *Le cours de physique de Feynman, Mécanique*, InterEditions, 1<sup>re</sup> part., 1979.
- P. 116 : Extrait d'un dialogue du film *Retour vers le futur III*, 1990.
- P. 133 : Hermann MINKOWSKI, *Space and Time*, in *The Principle of Relativity*, Dover Publications, 1952.
- P. 166 : Gaston BACHELARD, *Le nouvel esprit scientifique*, Presses Universitaires de France, 6<sup>e</sup> éd., 1958.
- P. 195 : A. KOSMODEMIANSKI, *Constantin Tsiolkovski, sa vie et son œuvre*, Éditions en Langues Étrangères, Moscou, 1957.
- P. 233 : Charles W. MISNER, Kip S. THORNE et John Archibald WHEELER, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- P. 260 : *Les Shadoks*, série animée, 1<sup>er</sup> diffusion par l'ORTF en 1968.
- P. 276 : Isaac ASIMOV, *Les cavernes d'acier*, in *Le grand livre des robots*, Presses de la Cité, t. 1, 1990.

# Index

## A

aberration, 92, 178, 182, 191  
accélération propre, 152, 154, 249  
action-réaction, 6, 252  
ailleurs, 41  
antimatière, 171, 199, 211  
apparence visuelle, 91, 93  
bouclier de protection, 203, 227

## B, C

causalité, 55, 60, 109  
centroïde, 206  
champ électromagnétique, 235, 245, 246  
champ tensoriel, 234  
collision, 207, 214  
cône de lumière, 40, 58, 142  
conservation  
  de l'énergie, 167, 197, 209, 220  
  de l'impulsion, 167, 196, 210, 221  
constante de Planck, 177, 186  
contraction des longueurs, 17, 74, 80, 92  
contravariant(es), 136, 139, 234  
coordonnées  
  cartésiennes, 4  
  curvilignes, 5, 285  
  système de, 5  
covariant(es), 136, 139, 234

## D

densité  
  de charge, 237  
  de particules, 237  
dérivée covariante, 234  
désintégration, 207, 212  
diagramme(s)  
  d'espace-temps, 40, 81  
  de Dalitz, 223

  de Galilée, 45  
  de Loedel, 45  
  de Lorentz, 41, 54, 74  
  de Minkowski, 46, 66  
dimension(s) transversale(s), 17, 75

## E

effet  
  Compton, 215, 231, 232  
  de perspective, 113  
  de tête, 218, 220  
  Doppler, 68, 92, 179, 180  
  photoélectrique, 177  
électronvolts, 211  
ellipsoïde de Blaton, 218  
énergie  
  bilan d', 210, 221  
  cinétique, 170, 172  
  de liaison, 205  
  de repos, 171, 204, 218  
  de seuil, 209  
  densité d', 246, 259  
  maximale, 212  
  totale, 171  
équation(s)  
  de continuité, 238, 259  
  de Maxwell, 235, 239, 259  
équivalence masse-énergie 170, 197, 199  
espace  
  euclidien, 3, 137, 140  
  ponctuel affine, 133  
espace-temps, 27, 37, 104  
  de Minkowski, 41, 133, 134, 140  
  intervalle d', 35, 44, 113, 146  
éther, 10, 14, 89  
événement, 3, 26, 134

**F**

facteur de Bondi, 35  
 fission, 171, 199  
 Fizeau, 15, 89  
 force(s) de Lorentz, 244, 245, 248, 255  
 fusée(s), 198, 200, 201, 212  
 fusion, 171, 199, 201  
 futur, 41

**G**

genre  
   espace, 141  
   lumière, 141, 143, 145  
   temps, 141, 143, 145  
 gravité quantique, 58  
 groupe, 101, 106, 111  
   de Lorentz, 144, 145, 283  
   de Poincaré, 146, 284

**H, I, J**

homogénéité, 103, 110  
 horizon événementiel, 156  
 horloge(s)  
   à photons, 16, 52, 75, 83  
   cristal d', 4, 28  
   hypothèse de l', 147  
   synchronisation des, 27, 48  
 impulsion(s) relativiste(s), 167, 169, 215  
 invariance  
   de la charge électrique, 237  
   de la vitesse de la lumière, 18, 20, 87, 110  
 isotropie, 104, 110  
 jauge de Lorentz, 239, 242

**K, L**

Kennedy-Thorndike, 18, 19  
 ligne(s) d'univers, 38, 66, 113, 156  
 Loi  
   de Coulomb, 235, 242  
   de Faraday, 235, 241

**M**

masse  
   centre de, 205, 206  
   d'inertie, 9, 167  
   relativiste, 173  
 méson  $\pi$ , 78  
 métrique  
   de Minkowski, 133, 140, 143, 285  
 Michelson et Morley, 10, 13, 15, 18  
 mouvement  
   hyperbolique, 155  
   parabolique, 155

**N, O**

nappe(s) 145, 283  
 onde  
   électromagnétique, 10, 236  
   plane, 180, 186, 246, 247  
 origine  
   spatiale, 27  
   spatiotemporelle, 27, 103, 129, 134

**P**

paradoxe(s)  
   des jumeaux, 62  
   EPR, 288  
 parité, 32, 241, 243  
 particule(s)  
   de masse nulle, 176  
   matérielle(s), 36, 174, 177, 178  
 passé, 41  
 photon(s), 36, 111, 176, 178  
 postulats d'Einstein, 13  
 précession de Thomas, 124, 128  
 présent(s)  
   absolu, 58, 59  
   relatif, 58, 59  
 pression de radiation, 177, 188  
 principe  
   de relativité, 14, 22, 102  
   fondamental, 6  
 produit scalaire, 138, 140  
 pseudo-norme, 141, 145



**Q**

quadrivecteur(s), 133  
 accélération 151  
 de base, 135, 149  
 densité de courant, 237  
 déplacement, 134, 137, 146  
 énergie-impulsion, 173, 177, 196  
 force, 168, 175  
 fréquence, 186, 189  
 gradient, 234  
 orthogonaux, 139  
 position, 134, 135  
 potentiel, 239  
 vitesse, 148, 151  
 quantité  
 conservée, 282  
 constante, 282  
 invariante, 281

**R**

rapidité, 34, 111, 113  
 référentiel(s), 2  
 d'inertie, 5, 8, 14  
 de Breit, 229  
 du centre de masse, 204, 210  
 galiléens, 5, 6  
 propre, 3, 151, 154  
 universel, 7  
 relation(s)  
 d'Einstein, 174, 176, 186, 279  
 de Planck-Einstein, 186  
 relativité  
 galiléenne, 8  
 générale, 21, 60, 156, 180  
 restreinte 14, 21  
 repère, 2, 134, 135  
 rotation(s), 31, 104, 119, 243  
 d'espace-temps, 31, 35, 145

**S**

signature, 143, 148  
 simultanéité, 51, 75, 81  
 solutions retardées, 251  
 statoréacteur Bussard, 201, 229  
 supraluminique, 56, 88, 95, 289

symbole(s)

de Kronecker, 136  
 de Christoffel, 286

**T**

tachyons, 56, 190  
 temps  
 absolu, 2, 9, 28, 55  
 dilatation des, 17, 53, 64, 148  
 flèche du, 60  
 impropre, 54  
 propre, 53, 146, 156, 201  
 renversement du, 32, 241  
 tenseur électromagnétique, 240, 242  
 Théorème d'Ampère 235, 242  
 train et le tunnel, 80  
 transformation(s), 32, 118, 121, 123  
 avec rotation, 123, 124, 145  
 d'intensité, 180  
 de Galilée, 8, 26, 32, 36  
 de Lorentz, 26, 31, 111, 144  
 de Poincaré, 284  
 des angles, 76  
 des volumes, 77  
 non homogènes, 128  
 orthochrones, 283  
 propres, 283  
 sans rotation, 117, 121, 123, 145  
 spéciale(s) de Lorentz, 32, 34 42, 118

**U, V**

ultrarelativiste, 203, 223  
 variables de Mandelstam, 225  
 variance, 138, 139, 233  
 vecteur de Poynting, 246, 247  
 vitesse(s)  
 addition des, 9  
 apparente, 95, 96  
 composition des, 87, 129  
 de groupe, 187  
 de la lumière, 95  
 de phase, 187  
 limite, 102, 110, 111  
 relative, 23, 150

Claude Semay  
Bernard Silvestre-Brac



## RELATIVITÉ RESTREINTE

Cet ouvrage s'adresse, en particulier, aux étudiants de Licence n'ayant encore aucune notion de la théorie de la relativité. Il constitue donc un outil de travail très utile pour la préparation d'examens, de concours, d'exposés ou d'articles.

La relativité d'Einstein est par bien des aspects une théorie étrange. Heureusement, cela n'interdit nullement qu'elle puisse être bien comprise. Parmi les sujets traités dans cet ouvrage, citons entre autres la cinématique, la dynamique, les systèmes de particules, la théorie électromagnétique et le formalisme tensoriel. De plus, une attention toute particulière est consacrée à la résolution de soi-disant paradoxes attribués à cette théorie, comme celui des « jumeaux de Langevin ».

Les autres particularités pédagogiques de cet ouvrage sont l'utilisation d'une représentation graphique originale de la relativité restreinte, l'illustration de la théorie par de nombreux exemples basés sur les (futurs ?) voyages interstellaires, et la construction des équations de transformation de Lorentz, à la fois suivant une démarche historique et suivant une approche moderne beaucoup plus générale.

La bonne compréhension d'une théorie se manifeste par la capacité de résoudre des problèmes spécifiques. C'est pourquoi des exercices sont proposés avec leurs réponses à la fin de chaque chapitre.

CLAUDE SEMAY  
est chercheur qualifié  
FNRS, à l'université de  
Mons-Hainaut (Belgique)

BERNARD  
SILVESTRE-BRAC  
est chargé de recherches  
CNRS, au laboratoire de  
Physique Subatomique et  
de Cosmologie de  
Grenoble

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



9 782100 494835

