

# mini Manuel

de

# Électro- cinétique

Tamer Bécherrawy

→ L1/L2

**Cours  
+ EXOS**

DUNOD

# mini Manuel de Électrocinétique

Cours + Exos

Tamer Bécherrawy

Maître de conférences  
à l'université de Nancy  
et formateur à l'IUFM de Lorraine

DUNOD



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

**DANGER**

**LE PHOTOCOPIAGE TUE LE LIVRE**

© Dunod, Paris, 2008  
 ISBN 978-2-10-053939-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions de base</b>	<b>1</b>
1.1	Charges électriques	1
1.2	Champ électrique	5
1.3	Énergie et potentiel électrostatiques	6
1.4	Conducteurs en équilibre et condensateurs	11
1.5	Champ d'induction et flux magnétique	12
1.6	Loi d'induction et inductance	13
	<i>Points-clés</i>	16
	<i>Questions de réflexion</i>	16
	<i>Exercices corrigés</i>	17
	<i>Solutions des exercices</i>	20
<b>2</b>	<b>Conductance et résistance</b>	<b>25</b>
2.1	Intensité et densité de courant	25
2.2	Modèle phénoménologique de conduction, loi d'Ohm	28
2.3	Conduction et temps de collision	32
2.4	Effet Joule	33
2.5	Variation de la résistivité avec la température, la supraconductivité	34
2.6	Conducteurs non ohmiques	37
2.7	Utilisations des résistances	38
	<i>Points-clés</i>	41
	<i>Questions de réflexion</i>	42
	<i>Exercices corrigés</i>	44
	<i>Solutions des exercices</i>	45

<b>3</b>	<b>Courant alternatif</b>	<b>49</b>
3.1	Courant sinusoïdal	49
3.2	Représentation trigonométrique et représentation de Fresnel	51
3.3	Représentation complexe	53
3.4	Effet Joule et valeurs efficaces	59
3.5	Circuit oscillant LC	60
3.6	Circuit oscillant LCR	63
	<i>Points-clés</i>	70
	<i>Questions de réflexion</i>	72
	<i>Exercices corrigés</i>	74
	<i>Solutions des exercices</i>	76
<b>4</b>	<b>Dipôles</b>	<b>87</b>
4.1	Définitions et représentations	87
4.2	Règles de Kirchhoff	90
4.3	Impédance	92
4.4	Association des dipôles	95
4.5	Puissance électrique dans les dipôles	99
4.6	Générateurs comme source de tension	103
4.7	Générateurs comme source de courant	107
4.8	Association des générateurs	108
4.9	Récepteurs	111
4.10	Dipôles non linéaires	114
	<i>Points-clés</i>	117
	<i>Questions de réflexion</i>	117
	<i>Exercices corrigés</i>	118
	<i>Solutions des exercices</i>	121
<b>5</b>	<b>Analyse des circuits</b>	<b>131</b>
5.1	Définitions	131
5.2	Circuit RLC forcé	133
5.3	Résonance dans le circuit RLC	135
5.4	Bilan d'énergie en régime permanent	138
5.5	Application des règles de Kirchhoff	140
5.6	Analyse utilisant la superposition	143

5.7	Théorèmes de Thévenin et de Norton	145
5.8	Courants de mailles et réciprocité	148
5.9	Dualité	150
	<i>Points-clés</i>	152
	<i>Questions de réflexion</i>	153
	<i>Exercices corrigés</i>	154
	<i>Solutions des exercices</i>	156
<b>6</b>	<b>Régimes transitoires</b>	<b>167</b>
6.1	Régimes permanents et régimes transitoires	167
6.2	Circuit RC	170
6.3	Circuit RL	173
6.4	Circuits RLC	175
	<i>Points-clés</i>	177
	<i>Questions de réflexion</i>	178
	<i>Exercices corrigés</i>	179
	<i>Solutions des exercices</i>	181
<b>7</b>	<b>Filtres</b>	<b>187</b>
7.1	Définitions	187
7.2	Fonction de transfert et bande passante	189
7.3	Quadripôles en T	193
7.4	Réponse d'un filtre à un signal	197
7.5	Systèmes non linéaires	199
7.6	Annexe : Intégration complexe	200
	<i>Points-clés</i>	202
	<i>Questions de réflexion</i>	203
	<i>Exercices corrigés</i>	204
	<i>Solutions des exercices</i>	206
	<b>Indications pour les questions de réflexion</b>	<b>217</b>
	<b>Annexes</b>	<b>225</b>
	<b>Index</b>	<b>229</b>

# Comment utiliser le Mini-Manuel ?

## La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

## Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



## Les rubriques



Une erreur à éviter



Un peu de méthode



Un exemple pour comprendre



Les points clés à retenir



## Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

- 1.1 Charges électriques
- 1.2 Champ électrique
- 1.3 Énergie et potentiel électrostatiques
- 1.4 Conducteurs en équilibre et condensateurs
- 1.5 Champ d'induction et flux magnétique
- 1.6 Loi d'induction et self inductance

- Revoir les notions de base de l'électromagnétisme

## 1.1 CHARGES ÉLECTRIQUES

### a) Notion de charge électrique

Comme la masse, la **charge électrique** est une grandeur caractéristique de la matière. À l'échelle macroscopique, les corps ne portent habituellement aucune charge totale ; nous disons qu'ils sont **neutres**. En frottant certains corps, ils deviennent chargés. L'expérience montre l'existence de deux types de charge : la charge **positive** et la charge **négative**. Des corps portant des charges de même signe se repoussent et des corps portant des charges de signes opposés s'attirent.

À l'échelle microscopique, les atomes sont formés par des protons positifs, des neutrons neutres et des électrons négatifs. L'électrification par frottement s'explique par le transfert d'électrons d'un corps à un autre. Les interactions des particules chargées sont responsables de la

liaison des électrons aux atomes et des atomes aux atomes pour former les molécules. Elles sont aussi fondamentalement à l'origine des propriétés de la matière macroscopique telles que la cohésion des solides et des liquides, les frottements, l'élasticité, la viscosité etc.

## b) Force de Coulomb

En 1785, Coulomb a réussi à mesurer la force d'interaction de deux petites boules de charges  $q_1$  et  $q_2$  en utilisant une balance de torsion (Fig. 1.1a).

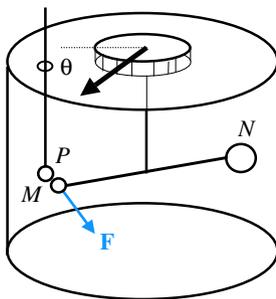
Il a établi que *cette force est dans la direction de la ligne qui les joint, proportionnelle à  $q_1$  et  $q_2$  et inversement proportionnelle au carré de la distance  $r_{12}$  qui les sépare*. Si la charge  $q_1$  est en  $\mathbf{r}_1$  et la charge  $q_2$  est en  $\mathbf{r}_2$  (Fig. 1.1b), la force d'action de  $q_1$  sur  $q_2$  s'écrit sous la forme vectorielle

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = K_0 q_1 q_2 \frac{\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} \equiv \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (1.1)$$

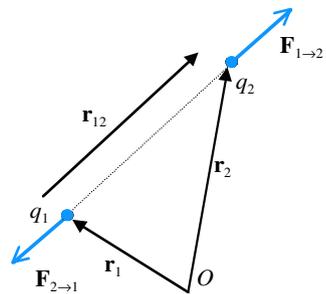
où  $\mathbf{e}_{12}$  est le vecteur unitaire dans la direction  $\mathbf{r}_{12}$ .  $K_0$  est une constante positive. Son remplacement par  $1/4\pi\epsilon_0$  est pour une raison de commodité (système *rationalisé* ou de *Heaviside*). Inversement la charge  $q_2$  agit sur  $q_1$  avec une force

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{12}^3} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$$

où  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_{12}$ . (1.2)



(a)



(b)

**Figure 1-1** Force de Coulomb : **a)** Dans l'expérience de Coulomb, une charge  $q_1$  est portée par une boule  $P$  fixe et une charge  $q_2$  est portée par une boule  $M$  fixée à l'extrémité d'une tige suspendue à un fil de torsion. L'interaction de ces charges est déterminée en mesurant l'angle de torsion du fil. **b)** Forces d'interaction de deux charges  $q_1$  et  $q_2$  (de même signe dans le cas de la figure).

La loi de Coulomb ressemble à la loi d'attraction universelle de Newton  $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1m_2\mathbf{r}_{12}/r_{12}^3$ . Précisons que ces lois sont valables pour des corps ponctuels ; c'est-à-dire de dimensions négligeables comparées à la distance qui les sépare.

### c) Quantification de la charge électrique

Les expériences (de Millikan, par exemple) montrent qu'à l'échelle microscopique, la charge électrique des particules ne prend pas des valeurs continues mais seulement des multiples entiers ( $0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e$  etc.) d'une **charge élémentaire**

$$e = 1,602\,177\,33 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.3)$$

Nous disons que la *charge électrique est quantifiée*.



Certaines particules élémentaires (comme le proton) ont une charge  $+e$ , d'autres (comme l'électron) ont une charge  $-e$  tandis que d'autres (comme le neutron) sont neutres. À l'échelle macroscopique, la charge élémentaire est extrêmement petite et, à une très bonne approximation, les charges étendues peuvent être considérées comme une distribution continue de charge.

D'autre part, quand nous parlons de charges ponctuelles, il s'agit soit d'une particule élémentaire, soit d'un objet macroscopique de taille beaucoup plus petite que les distances du système. Dans les solides, les phénomènes électriques sont essentiellement produits par le déplacement des électrons de charge  $-e$  et de masse

$$m_e = 9,109\,382\,6 \times 10^{-31} \text{ kg.} \quad (1.4)$$

Un corps solide devient chargé en gagnant ou en perdant des électrons. Les atomes deviennent alors des ions immobiles. Dans les liquides, les molécules se divisent en deux ions de charges opposées et qui sont plus ou moins mobiles.

### d) Conservation de la charge électrique

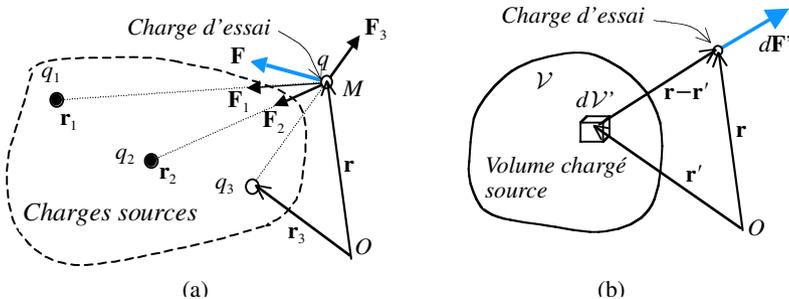
L'expérience montre que l'électron et le proton sont stables. Il n'est pas possible de les détruire et leur charge ne varie pas au cours du temps. La charge électrique des particules ne dépend pas de leur vitesse, même si elle est proche de la vitesse de la lumière  $c$ , ou des conditions physiques telles que la température, la pression etc.



L'expérience montre aussi que, dans toute transformation physique, chimique ou biologique, la charge totale d'un système est conservée, s'il n'y a aucun transfert de charge à travers sa surface extérieure. Des interactions peuvent avoir lieu dans le système, entraînant l'échange interne de particules chargées sans que la charge totale du système change.

### e) Isolants et conducteurs

- Dans les corps solides, seuls les électrons peuvent se déplacer sous l'effet des forces électriques externes. Les matériaux peuvent être classés en *isolants et conducteurs*.
- Dans les isolants les électrons sont fortement liés aux atomes et les électrons ne peuvent se déplacer qu'à l'intérieur de l'atome et la molécule, produisant le phénomène de **polarisation**, qui est à l'origine des propriétés diélectriques des corps.
- Dans les conducteurs, les électrons de la couche externe de l'atome sont faiblement liés à l'atome. Ils peuvent se déplacer à travers le milieu. Un corps conducteur ne peut pas être électrisé par frottement ; car les électrons se repoussent et se répartissent sur la surface extérieure du corps.
- En réalité, la distinction entre conducteurs et isolants n'est pas nette ; certains matériaux sont meilleurs conducteurs que d'autres et des milieux (appelés *semi-conducteurs*) ont des propriétés intermédiaires entre celles des isolants et des conducteurs. Le nombre d'électrons libres (ou de conduction) est de l'ordre d'un électron par atome et leur vitesse de déplacement est de l'ordre d'une fraction de mm par seconde.



**Figure 1-2** a) Champ électrique d'une distribution discrète de charges et b) champ d'une distribution volumique continue de charges.

## 1.2 CHAMP ÉLECTRIQUE

### a) Principe de superposition

Nous admettons le **principe de superposition** des forces électriques, selon lequel l'action de plusieurs charges  $q_i$ , placées aux points  $\mathbf{r}_i$ , sur une charge  $q$ , placée en  $\mathbf{r}$ , est la somme vectorielle des forces qu'exercerait sur  $q$  chacune de ces charges, si elle agissait seule (Fig.1.2a) :

$$\mathbf{F} = q \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (1.5)$$

Dans la suite, la charge  $q$  qui subit les forces est désignée comme une charge d'essai tandis que les charges  $q_i$  qui produisent la force sont désignées comme des *charges sources*.

Si les charges sources sont distribuées dans un volume  $\mathcal{V}$  (Fig.1.2b), chaque élément infinitésimal  $d\mathcal{V}'$ , au voisinage du point  $\mathbf{r}'$ , contient une charge  $dq' = q_v(\mathbf{r}')d\mathcal{V}'$  assimilable à une charge ponctuelle.  $q_v(\mathbf{r}')$  est la densité volumique au voisinage de  $\mathbf{r}'$ . La sommation discrète dans l'expression (1.5) doit alors être remplacée par une intégrale :

$$\mathbf{F} = \iiint_{\mathcal{V}} d\mathbf{F}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}' q_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.6)$$

Des considérations analogues peuvent être faites dans le cas d'une distribution de charge sur une surface ou sur une courbe.

### b) Champ électrique d'une distribution de charges

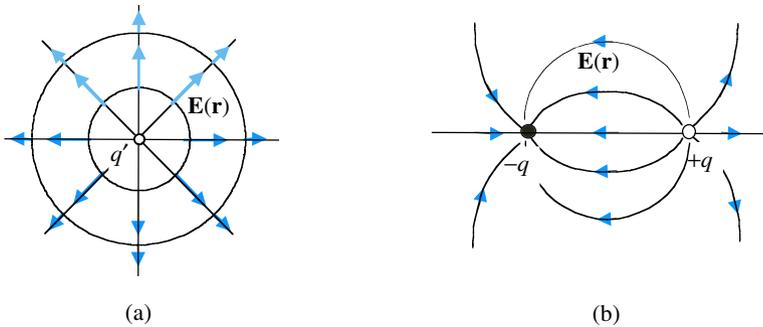
La force électrique qui agit sur une particule d'essai est proportionnelle à sa charge  $q$ . La force qui agit sur l'unité de charge d'essai est appelée *champ électrique*. La force qui agit sur la charge d'essai  $q$  est donc

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E}} \quad (1.7)$$

Le champ d'une distribution de charges sources est

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \text{ ou } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}' q_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.8)$$

En particulier, une charge  $q'$  placée en un point  $\mathbf{r}'$  produit en tout point  $\mathbf{r}$  un champ électrique qui est orienté dans la direction radiale  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  et qui a le même module sur les sphères centrées à la position de  $q'$ . Il est sortant si  $q'$  est positive et entrant si  $q'$  est négative.



**Figure 1-3** Lignes de champ **a)** d'une charge positive et **b)** d'un dipôle.

Ce champ vectoriel est représenté parfois par des *lignes de champ* tangentes au champ en chaque point de l'espace (voir la figure 1.3). On indique sur ces lignes le sens du champ. Elles sont serrées aux endroits où le champ est intense et parallèles si le champ est uniforme. Elles divergent à partir des charges positives ponctuelles et convergent vers les charges négatives ponctuelles. En chaque point passe une seule ligne de champ sauf si une charge ponctuelle est en ce point ou si une ligne chargée y passe. Les lignes du champ commencent ou aboutissent toujours à des charges ou à l'infini.



La notion de champ n'est pas un artifice. Le champ est une entité physique indépendamment de la présence de la charge d'essai, exactement comme le champ gravitationnel de la Terre. Le champ électrique se propage d'un endroit à un autre, transportant de l'énergie, de l'impulsion etc. Pour établir un champ électrique dans une région de l'espace, il faut une certaine énergie.

## 1.3 ÉNERGIE ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES

### a) Potentiel

À la notion de force, on associe les concepts de travail et d'énergie. L'une des lois absolues de la nature est la *conservation de l'énergie totale* d'un système isolé. L'énergie peut prendre plusieurs formes. En mécanique, nous connaissons l'*énergie cinétique*  $E_c$  associée à la *vitesse* de translation et de rotation des corps massifs et l'*énergie potentielle*  $U_p$  associée à la position relative des corps en interaction, l'un par rapport aux autres. Dans le cas de forces de frottement, l'énergie des corps macroscopiques se transforme en *chaleur* (associée à l'agitation thermique des particules qui constituent le corps).

En électromagnétisme, nous avons aussi une énergie cinétique si les corps chargés se déplacent, une énergie potentielle associée à la position de chaque charge dans le champ électrique des autres. Dans le cas du mouvement des électrons de conduction dans un conducteur, la vitesse est très faible et l'énergie cinétique est négligeable. Le travail des forces électriques (c'est-à-dire la variation de l'énergie potentielle électrique) est dissipé comme chaleur par effet Joule ou d'autres formes d'énergie.

Pour déplacer une charge  $q$  dans un champ  $\mathbf{E}$  sans l'accélérer, il faut exercer une force  $\mathbf{F}'$  opposée à la force électrique. Le travail qu'on doit fournir pour déplacer la particule de  $d\mathbf{r}$  se transforme en énergie potentielle électrique proportionnelle à  $q$ . L'énergie potentielle par unité de charge d'essai est appelée *potentiel* et désignée par  $V$  :

$$dV = dW'/q = (\mathbf{F}'/q) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (1.9)$$

Considérant des déplacements dans les directions  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , cette relation est équivalente à trois équations<sup>(1)</sup>

$$E_x = -\partial V/\partial x, \quad E_y = -\partial V/\partial y, \quad E_z = -\partial V/\partial z \quad (1.10)$$

On écrit symboliquement

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (1.11)$$

On peut facilement vérifier que le potentiel d'une distribution de charges est

$$V(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{ou} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' q_v(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.12)$$



Notons que le champ  $\mathbf{E}$  n'est pas modifié si on ajoute à  $V$  une constante. Seule la différence de potentiel (d.d.p.)<sup>(2)</sup> a un sens. D'habitude on choisit cette constante telle que  $V = 0$  à l'infini (Ce n'est pas possible si des charges existent à l'infini). Dans le cas des instruments, on prend le potentiel nul sur l'enceinte métallique souvent reliée à la Terre (qui est un corps conducteur dont le potentiel est pris comme référence, c'est-à-dire nul).

(1)  $\partial V/\partial x$ , par exemple, désigne la dérivée partielle par rapport à  $x$ , c'est-à-dire la dérivée par rapport à  $x$  en maintenant toutes les autres variables constantes. Un symbole pointé, tel que  $\dot{Q}$ , est une abréviation de la dérivée partielle par rapport au temps  $\partial Q/\partial t$ .

(2) Nous utilisons dans ce texte les sigles d.d.p. pour différence de potentiel, f.é.m. pour force électromotrice et f.c.é.m. pour force contre électromotrice.

Inversement, intégrant l'équation (1.9) entre deux points  $A$  et  $B$ , nous trouvons

$$\boxed{V_A - V_B = - \int_A^B d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}} \quad (1.13)$$

En particulier, si le champ est nul sur le chemin  $AB$  (ou s'il est perpendiculaire à ce chemin) cette relation montre que  $V_A = V_B$ .

Par exemple, si  $\mathbf{E}$  est uniforme dans la direction  $Ox$ , nous avons  $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = E dx$  et la d.d.p. s'écrit

$$V_A - V_B = - \int_A^B dx E = E(x_A - x_B) \quad (1.14)$$

### b) Travail de la force électrique

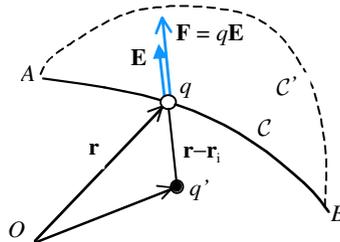
Si une particule de charge  $q$  est placée dans un champ  $\mathbf{E}$ , ce champ agit sur elle avec une force  $q\mathbf{E}$  et lui fournit un travail

$$dW = -dW' = -q dV \quad (1.15)$$

En ce déplaçant de  $A$  à  $B$ , le champ lui fournit un travail

$$\boxed{W_{AB} = qV_{AB}} \quad \text{où} \quad V_{AB} = V_A - V_B \quad (1.16)$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi, exactement comme dans le cas du mouvement d'une masse dans un champ gravitationnel. En particulier, sur un contour fermé, ce travail est nul (voir la figure 1.4).



**Figure 1-4** Champ d'une charge  $q'$  et la force qu'elle exerce sur  $q$ . Le travail de cette force si la charge  $q$  se déplace de  $A$  à  $B$  sur le chemin  $C$  ou sur le chemin  $C'$  est  $W_{AB} = qV_{AB}$ . Le travail sur le contour fermé ( $C + C'$ ) est donc nul.

Une chute de potentiel entre  $A$  et  $B$  (c'est-à-dire  $V_A > V_B$ ) correspond à un travail  $W_{AB}$  positif. Ce travail est évidemment fourni par le système qui produit le champ  $\mathbf{E}$  (c'est-à-dire le générateur qui produit la d.d.p.). Si la charge est libre, cette énergie est transformée en énergie cinétique. Par contre si cette charge se déplace avec une vitesse constante ou négligeable (dans un conducteur, par exemple), cette énergie est transformée en chaleur (par effet Joule), en énergie mécanique (dans un moteur), en énergie chimique (pour charger une batterie, par exemple) etc.

### c) Unités et ordres de grandeur

La charge électrique est une grandeur qui ne peut pas être exprimée en unités mécaniques fondamentales (longueur, masse et temps). Son choix est donc arbitraire et la valeur de  $K_o$  dépend de ce choix. Pour des raisons de commodité et de précision des mesures, la grandeur électrique fondamentale dans le système International d'unités ( $SI$ ) est l'intensité de courant électrique  $I$  et son unité est l'**ampère** (A). L'intensité d'un courant stationnaire est la quantité de charge qu'il transporte par unité de temps :

$$I = Q/t \quad (1.17)$$

L'ampère est défini d'une façon précise en utilisant l'interaction des courants électriques. L'unité de charge, appelée **coulomb** (C), est alors définie comme la quantité de charge transportée par un courant stationnaire d'intensité 1 A. Dans ce système d'unités, la valeur numérique de la constante dans la loi de Coulomb (1.1) est

$$\begin{aligned} K_o &= 1/4\pi\epsilon_o = 8,987\,551\,79 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2 \\ \epsilon_o &= 8,854\,187\,82 \times 10^{-12} \text{ C/N.m}^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

La constante  $\epsilon_o$  est appelée **permittivité du vide**. La force est alors exprimée en *newtons* (N). Si les charges étaient dans un milieu isolant (un diélectrique) linéaire et isotrope, la constante  $\epsilon_o$  doit être remplacée par la permittivité du diélectrique  $\epsilon$  toujours supérieure à  $\epsilon_o$ . L'air, par exemple, a une permittivité  $\epsilon_{\text{air}} = 1,00058 \epsilon_o$  tandis que l'eau a une permittivité  $\epsilon_{\text{eau}} = 80,4 \epsilon_o$  à 20°C.

Dans le Système International d'unités ( $SI$ ), les unités mécaniques fondamentales sont le *mètre* (m) pour la longueur, le *kilogramme* (kg)

pour la masse et la *seconde* (s) pour le temps. L'unité d'énergie est le *joule* (J) et celle du potentiel est le *volt* ( $V = J/C$ ). L'unité de champ électrique est le  $V/m$  ou  $N/C$ .



Pour avoir une idée de l'ordre des grandeurs, notons d'abord que la force électrique est énorme, comparée à la force gravitationnelle. Deux petites boules de masse 1 kg portant chacune une charge de 1 C et séparées par une distance de 1 m se repoussent avec une force électrique de  $9 \times 10^9$  N (poids d'un million de tonnes !) et s'attirent avec une force gravitationnelle de  $6,67 \times 10^{-11}$  N. En fait, le coulomb est une charge énorme à l'échelle humaine : les étincelles transportent beaucoup moins qu'un micro coulomb ( $1 \mu C = 10^{-6}$  C) et les frottements produisent une charge de l'ordre de 10 nano coulombs par  $cm^2$  ( $1 nC = 10^{-9}$  C). Le champ électrique peut atteindre  $10^7$  N/C dans les membranes des cellules de notre corps,  $10^{11}$  N/C dans les atomes et  $10^{20}$  N/C sur la surface des noyaux atomiques.

Nous vivons dans un environnement de champ électrique : quelques N/C dans les domiciles, un champ atmosphérique vertical et dirigé vers le sol d'environ 150 N/C en beau temps et jusqu'à  $10^4$  N/C en temps orageux.

#### d) Énergie électrostatique d'un système de charges

L'énergie électrostatique d'un ensemble de charges est l'énergie nécessaire pour les assembler en les amenant de très loin. Considérons, par exemple, le cas de trois charges. Supposons qu'on amène d'abord  $q_1$  de l'infini à la position  $\mathbf{r}_1$ . Aucun travail n'est nécessaire pour cela. Elle crée en tout point  $\mathbf{r}$  un potentiel  $V_1(\mathbf{r})$ . Pour amener la charge  $q_2$  de l'infini à la position  $\mathbf{r}_2$ , il faut effectuer le travail  $U_{12} = q_2 V_1(\mathbf{r}_2)$ . Le potentiel de ces deux charges est maintenant  $V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{r})$  en tout point  $\mathbf{r}$ . Pour amener ensuite  $q_3$  de l'infini à la position  $\mathbf{r}_3$ , il faut une énergie  $q_3[V_1(\mathbf{r}_3) + V_2(\mathbf{r}_3)]$ . Le travail total nécessaire pour assembler les trois charges est

$$\begin{aligned} U_E &= q_2 V_1(\mathbf{r}_2) + q_3 [V_1(\mathbf{r}_3) + V_2(\mathbf{r}_3)] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right] \end{aligned}$$

Chaque paire de charges contribue donc un terme à l'énergie totale. Généralisant au cas d'un nombre arbitraire  $N$  de charges, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{paires}} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V'(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans la première forme, la sommation est sur toutes les  $\frac{1}{2}N(N-1)$  paires de particules distinctes, dans la deuxième forme, la sommation est sur toutes les particules  $i$  et  $j$  différentes, le facteur  $1/2$  compensant le fait que chaque paire est comptée deux fois. Dans la troisième forme, nous avons utilisé l'expression (1.12) pour le potentiel produit en  $\mathbf{r}_j$  par toutes les charges sauf ( $j$ ). Dans le cas d'une distribution continue de charge, la sommation doit être remplacée par des intégrales en considérant des éléments de volume, de surface ou de lignes chargées. En particulier, dans le cas de conducteurs, on montre qu'on peut remplacer  $V'(\mathbf{r}_j)$  par le potentiel total  $V(\mathbf{r}_j)$ , chaque conducteur étant équipotentiel. Faisant la sommation pour chaque conducteur ( $j$ ) puis pour les conducteurs, on peut écrire

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_j Q_j V_j \quad (1.20)$$

où  $Q_j$  est la charge totale du conducteur ( $j$ ) et  $V_j$  est son potentiel.

## 1.4 CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE ET CONDENSATEURS

Dans un conducteur en équilibre, des charges en excès ne peuvent se répartir que sur la surface extérieure. En effet des électrons, en excès dans le volume du conducteur ou sur la surface d'une cavité, se repoussent et finissent par s'établir sur la surface extérieure. De même, un excès de charges positives attire les électrons de la surface extérieure ; ce qui rend celle-ci chargée positivement. Le champ électrique dans le conducteur doit être nul ; sinon ce champ déplacerait les électrons de conduction et le conducteur ne serait pas en équilibre. Le champ étant nul, la relation (1.13) montre que le conducteur est équipotentiel. Juste à l'extérieur de la surface extérieure, le champ doit être normal à la surface ; car une éventuelle composante tangentielle déplacerait les charges.

Un **condensateur** est formé de deux conducteurs voisins. On montre que ces conducteurs portent des charges opposées  $+Q$  et  $-Q$  proportionnelles à leur d.d.p.  $V$

$$\boxed{Q = CV} \quad (1.21)$$

C'est l'*équation caractéristique* du condensateur.  $C$  est une constante positive appelée *capacité*, qui dépend de la géométrie des conducteurs et de la permittivité électrique du milieu qui les sépare. Dans le système SI d'unités,  $C$  est exprimée en farad (F).



Le farad étant énorme, on utilise souvent le microfarad ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ) et le picofarad ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ). Par exemple, dans le cas d'un condensateur plan d'épaisseur  $d$ , dont les armatures ont une surface  $S$  (Fig. 1.5), la capacité est  $C = \varepsilon S/d$ .

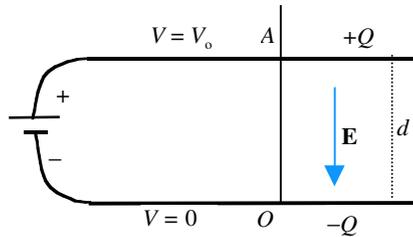


Figure 1-5 Condensateur plan.

Un condensateur chargé emmagasine une *énergie électrique*. Si la d.d.p. des armatures est  $V \equiv V_1 - V_2$ , d'après l'équation (1.20), l'énergie emmagasinée est donnée par l'une des expressions

$$U_E = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} Q^2/C = \frac{1}{2} CV^2 \quad (1.22)$$

## 1.5 CHAMP D'INDUCTION ET FLUX MAGNÉTIQUE

Un aimant permanent, un courant électrique ou une charge en mouvement produisent un *champ d'induction magnétique*  $\mathbf{B}$ , défini par la force qu'il exerce sur une particule chargée en mouvement de vitesse  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{F}_{(M)} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.23)$$

Cette force est donc proportionnelle à  $v$  et à  $B$  et elle est perpendiculaire à la fois à  $\mathbf{B}$  et à  $\mathbf{v}$ . Si la particule se déplace de  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , le travail du champ magnétique est

$$dW_M = \mathbf{F}_{(M)} \cdot d\mathbf{r} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (1.24)$$

Ce travail étant nul, l'énergie cinétique de la particule est constante. Sa vitesse reste constante en module mais sa direction change. Dans le cas d'un champ  $\mathbf{B}$  constant, une particule chargée décrit une hélice dont l'axe est parallèle à  $\mathbf{B}$  (ou un cercle) de rayon  $mv/qB$ .

Le **flux** du champ magnétique  $\mathbf{B}$  à travers une surface  $S$  est défini par

$$\Phi_S = \iint_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \quad (1.25)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface  $dS$ . Le champ magnétique a la propriété importante d'avoir un *flux conservatif*. Cela veut dire que le flux de  $\mathbf{B}$  sur une surface fermée est nul et le flux est le même sur deux surfaces limitées par un même contour.



Dans le système international d'unités, le flux du champ  $\mathbf{B}$  est exprimé en **weber** (Wb) et le champ  $\mathbf{B}$  en **tesla** (T) équivalent à  $\text{Wb}/\text{m}^2$  ou  $\text{N} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Un circuit  $C$ , transportant un courant d'intensité  $I$ , produit un champ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.26)$$

$\mu$  est la **perméabilité magnétique** du milieu. La perméabilité du vide est

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A} \quad (\text{valeur exacte}) \quad (1.27)$$

Un champ magnétique uniforme peut être produit à l'intérieur d'un long solénoïde et il est donné par

$$B = \mu NI, \quad (1.28)$$

où  $N$  est le nombre de spires par unité de longueur.  $\mathbf{B}$  est dans la direction de l'axe du solénoïde.

## 1.6 LOI D'INDUCTION ET INDUCTANCE

L'expérience montre qu'une f.é.m. est induite dans un circuit, si le flux du champ magnétique à l'intérieur de ce circuit varie. Cette variation peut être due à un déplacement du circuit ou des systèmes qui produisent le champ, une déformation du circuit ou la variation du champ dans le temps.

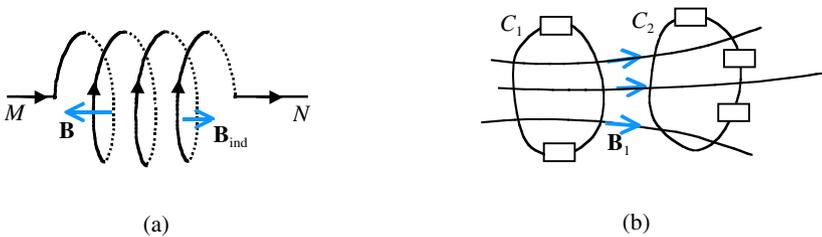
La f.é.m. induite est donnée par la **loi de Faraday**

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_S}{dt} \quad (1.29)$$

Pour appliquer cette loi, on choisit une orientation du circuit ; la direction de la normale  $\mathbf{n}$  à la surface  $S$  limitée par le circuit est alors donnée par la règle de la main droite ( $\mathbf{n}$  est dans la direction du pouce si les doigts sont dans le sens choisi du circuit). Si  $\mathcal{E}$  est positive, le courant induit est effectivement dans le sens choisi. On peut utiliser aussi la **loi de Lenz**, selon laquelle la f.é.m. et le courant induits sont dans un sens tel qu'ils s'opposent à la cause qui les produit.



Dans le cas de phénomènes variables, le champ  $\mathbf{E}$  ne dérive pas d'un potentiel ; la circulation de  $\mathbf{E}$  sur le circuit fermé n'est pas nulle, mais justement égale à la f.é.m. induite  $\mathcal{E}$ .



**Figure 1-6** **a)** Self-inductance dans une bobine : le sens de  $\mathbf{B}$  est donné par la règle de la main droite. Si  $I$  augmente,  $\mathbf{B}$  et  $\Phi$  augmentent, un courant est induit dans le sens  $NM$  pour qu'il produise un champ  $\mathbf{B}_{\text{ind}}$  et un flux  $\Phi_{\text{ind}}$  qui tendent à diminuer  $\Phi$ . **b)** Influence mutuelle de deux circuits. Le champ magnétique du circuit  $C_1$  produit un flux dans le circuit  $C_2$  et réciproquement.

Considérons un circuit (une bobine par exemple) transportant un courant  $I$ . Le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , qu'il produit, est proportionnel à  $I$  et il en est de même pour le flux magnétique  $\Phi$  à travers le circuit lui-même. Nous écrivons

$$\Phi = LI \quad (1.30)$$

$L$  est une constante positive, appelée **self-inductance**, qui dépend de la géométrie du circuit et de la perméabilité du milieu. L'unité de self-inductance est appelée **henry** ( $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$ ). Si l'intensité varie, le flux varie et une f.é.m. est induite, produisant un courant induit et un champ magnétique induit  $\mathbf{B}_{\text{ind}}$  qui s'oppose à la variation du flux  $\Phi$ . Cela produit une d.d.p.

$$V_{MN} = dI/dt \quad (1.31)$$

C'est l'*équation caractéristique* de la self-inductance. Pour vérifier le signe du second membre, considérons la bobine de la Fig. 1.6 et supposons que le courant est dans le sens  $MN$ . La règle de la main droite donne la direction du champ  $\mathbf{B}$  dans le sens  $NM$ . La f.é.m. induite s'oppose à la cause qui la produit.



Par exemple, si  $I$  augmente, la f.é.m. induite tend à réduire cette augmentation en produisant un courant induit opposé, donc dans le sens  $NM$ . Ce qui est équivalent à un générateur dont la borne positive est en  $M$ , donc une d.d.p. induite  $V_M - V_N$  positive ; cela est en accord avec l'équation (1.31).

Une self-inductance  $L$ , transportant un courant d'intensité  $I$ , possède une *énergie magnétique*. Pour calculer cette énergie, supposons que l'intensité est augmentée graduellement de 0 à  $I$ . À un instant donné l'intensité est  $i(t)$ . Le potentiel aux bornes de la self est  $V_{MN} = L(di/dt)$ . Pendant  $dt$ , la charge transportée est  $dq = i dt$  et l'énergie fournie est

$$dU_{(M)} = V_{MN}dq = L \frac{di}{dt} i dt = L i di$$

Pour augmenter  $i$  de 0 à  $I$ , l'énergie fournie est

$$U_{(M)} = \int_{initial}^{final} dU_{(M)} = L \int_0^I di i \quad \text{d'où} \quad \boxed{U_{(M)} = \frac{1}{2}LI^2} \quad (1.32)$$

C'est l'énergie magnétique emmagasinée dans la self-inductance.

Deux circuits électriques  $C_1$  et  $C_2$  sont en *influence mutuelle* si le champ magnétique de l'un produit un flux magnétique dans l'autre (figure 1.6b). Si  $C_1$  est le siège d'un courant  $i_1$ , il produit un champ  $B_1$  et celui-ci a à travers  $C_2$  un flux magnétique proportionnel à  $i_1$  et réciproquement. Nous écrivons

$$\Phi_{12} = M_{12} i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{21} = M_{21} i_2 \quad (1.33)$$

$M_{ij}$  est le *coefficient d'influence magnétique* de  $C_i$  sur  $C_j$ . On choisit des sens pour les circuits ; les intensités et les flux sont alors positifs ou négatif et il en est de mêmes pour les  $M_{ij}$ . On montre que  $M_{ij} = M_{ji}$ . Si les courants varient il y aura des f.é.m. induites d'influence dans les circuits :

$$\mathcal{E}'_1 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} \quad (1.34)$$

Ces f.é.m. se superposent aux f.é.m.  $\mathcal{E}_1 = -L_1(di_1/dt)$  et  $\mathcal{E}_2 = -L_2(di_2/dt)$  auto-induites dans les deux circuits. L'énergie magnétique des deux circuits est alors

$$U_{(M)} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (1.35)$$



### POINTS-CLÉS

- La charge élémentaire étant extrêmement petite, la *quantification* de la charge n'a souvent aucun effet sur les phénomènes macroscopiques. La loi de conservation de la charge veut dire qu'elle ne peut être ni détruite ni créée. Dans tout processus physique, la charge totale d'un système isolé est conservée.
- Il faut retenir la définition du *potentiel* comme l'énergie potentielle d'une charge  $q = 1$  C dans le champ électrique, c'est-à-dire le travail nécessaire pour amener la charge de l'infini à sa position actuelle. La différence de potentiel  $V_A - V_B$  est le travail du champ pour déplacer une charge  $q = 1$  de  $A$  à  $B$ . C'est aussi le travail qu'un agent extérieur doit fournir pour déplacer la charge de  $B$  à  $A$  (faire l'analogie avec le travail qu'on doit effectuer pour déplacer une masse de 1 kg de  $B$  à  $A$  dans le champ de pesanteur). Ce travail ne dépend pas du chemin. Si le corps décrit un contour fermé pour revenir au point de départ, le travail est nul. C'est la définition même d'un champ conservatif. Cela n'est pas vrai dans un champ magnétique variable (à cause de la force électromotrice induite).
- Le champ magnétique ne sera pas utilisé dans ce texte. Nous l'avons introduit ici seulement pour écrire l'expression de la d.d.p. aux bornes d'une self-inductance  $V = L\dot{I}$  et son énergie magnétique emmagasinée  $U_{(M)} = \frac{1}{2} L I^2$ .

## QUESTIONS DE RÉFLEXION

1. On déplace une charge  $q = -1,0 \mu\text{C}$  d'un point  $A$ , où  $V_A = 0$ , à un point  $B$ , où  $V_B = -100$  V. On suppose que la vitesse initiale et la vitesse finale sont nulles. Discutez la variation de l'énergie de la particule et le travail nécessaire pour effectuer ce déplacement. Ce travail dépend-il de la trajectoire et de la vitesse intermédiaire ?

- 2.** Est-il possible qu'une particule chargée soit en mouvement rectiligne
- a)** dans un champ électrique uniforme ?
  - b)** dans un champ magnétique uniforme ?
  - c)** dans une région où il y a un champ électrique et un champ magnétique uniformes ?
- 3.** Utilisant l'expression  $\mathbf{E} = (q_s/2\epsilon)\mathbf{n}$  du champ d'un plan portant une charge de densité  $q_s$  et normal au vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ , vérifiez que le champ entre les armatures d'un condensateur est  $(q_s/\epsilon)$  et nul à l'extérieur. Quelle est la direction de ce champ ? Quelle est la d.d.p. des armatures ? Quelle est la capacité du condensateur ?
- 4.** Si un aimant permanent est déplacé près d'un circuit ne contenant pas de générateurs, un courant est induit et cela exige de l'énergie. Quelle est l'origine de cette énergie ? Comment l'énergie est-elle transférée au circuit isolé ? Peut-on dire que le champ magnétique transporte de l'énergie ?
- 5.** Un courant de 5 A est établi dans une self de 30 H. Peut-on avoir une f.é.m. induite de 100 V dans  $L$  ? Pourquoi une étincelle éclate-t-elle entre les bornes de l'interrupteur lorsqu'on coupe le courant ?
- 6.** Quel est l'effet d'une bobine de self-inductance  $L$  et de résistance  $R$  dans un circuit si l'intensité de courant est constante ? Quelle est la puissance qu'elle consomme dans le cas d'un courant variable ? Quel est l'effet d'un condensateur dans un circuit si l'intensité de courant est constante ? Quelle est la puissance qu'il consomme dans le cas d'un courant variable ?

## EXERCICES CORRIGÉS

**1-1** Une goutte d'eau de rayon 1 mm a un excès de  $10^6$  électrons. Quelle force électrique subit-elle près du sol en beau temps (le champ électrique est alors  $E = 150$  N/C dirigé vers le haut) et en temps d'orage (alors  $E = 10^4$  N/C) ? Comparez cette force au poids de la goutte.

**1-2** Dans un tube de rayons cathodiques, les électrons sont émis par la cathode et attirés par l'anode dont le potentiel est supérieur de  $10^4$  V sur celui de la cathode. Supposant que les électrons sont initialement au repos, déterminez leur vitesse en arrivant à l'anode.

**1-3** Deux plaques métalliques planes et parallèles de surface  $S$  sont séparées par une distance  $d$  et mises sous une tension  $V_0$ . Nous supposons que le champ est uniforme entre ces plaques.

- a) Supposons que ces plaques constituent les armatures d'un condensateur plan. Quelle est la charge de ce condensateur ? Déterminez le champ électrique  $\mathbf{E}$  entre ces armatures.
- b) Supposons qu'un électron est émis sans vitesse par la plaque négative. Quelle est la force exercée sur cet électron ? Écrivez son équation de mouvement et déterminez sa vitesse  $v_f$  lorsqu'il atteint la plaque positive.
- c) Supposant que  $d = 1 \text{ mm}$ ,  $S = 10 \text{ cm}^2$  et  $V_0 = 10 \text{ V}$ , déterminez  $E$  et  $v_f$ .
- d) Sans analyser les détails du mouvement comme dans la question précédente, déterminez directement l'énergie  $U$  reçue par cet électron lorsqu'il atteint la plaque positive. Déduisez-en sa vitesse.
- e) Supposons que l'espace entre ces plaques est rempli d'une substance qui exerce sur l'électron une force de frottement  $-bv$  où  $v$  est la vitesse de l'électron. Écrivez l'équation de mouvement. Sans résoudre cette équation, montrez que l'électron atteint rapidement une vitesse limite constante. Que devient alors le travail de la force électrique ?

**1-4** Supposant que la charge d'un condensateur est augmentée graduellement de 0 à  $Q$ , montrez que son énergie est  $U = \frac{1}{2} Q^2 / C = \frac{1}{2} C V^2$ .

**1-5** Calculez la self-inductance  $L$  d'un solénoïde de longueur  $l$  et formé par  $N$  tours circulaires de rayon  $R$ . Application numérique : Déterminez  $L$  si  $R = 2 \text{ cm}$ ,  $N = 5\,000$  tours et  $l = 20 \text{ cm}$ .

**1-6** Si on coupe le courant dans un circuit à l'instant  $t = 0$ , l'intensité ne s'annule pas instantanément, mais diminue selon la loi  $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ , où  $I_0$  est l'intensité initiale et  $\tau$  est un temps caractéristique donné par  $\tau = L/R$  où  $L$  est la self-inductance du circuit et  $R$  est sa résistance. Écrivez l'expression de la charge  $Q(t)$  qui traverse un point du circuit entre  $t = 0$  et  $t$ . Représentez graphiquement  $Q$  et  $I$  comme des fonctions du temps. Quelle est la d.d.p aux bornes de la self inductance ? Interprétez son signe.

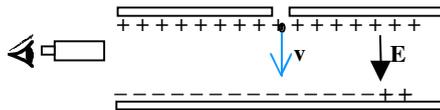


Figure 1-7 Expérience de Millikan.

**1-7** L'expérience de Millikan (1913) a permis d'établir l'existence de la charge élémentaire et de déterminer sa valeur avec une assez bonne précision. Le dispositif est représenté dans la Fig. 1.7. Un champ électrique  $\mathbf{E}$  peut être établi entre les deux armatures d'un condensateur plan. Des gouttes fines d'huile sortent d'un pulvérisateur, passent à travers un trou dans l'armature supérieure et tombent dans l'espace séparant les deux armatures. Une goutte peut acquérir une charge  $q$  soit à cause du frottement en sortant du pulvérisateur, soit lors des collisions avec des molécules d'air ionisées. En absence de champ électrique entre les armatures, elle est soumise à son poids  $m\mathbf{g}$ , à une force de viscosité donnée par la loi de Stokes  $\mathbf{f}_v = -6\pi\eta r\mathbf{v}$  (où  $\eta$  est la viscosité de l'air,  $r$  est le rayon de la goutte et  $\mathbf{v}$  est sa vitesse) et à une poussée d'Archimède dans l'air  $-m'\mathbf{g}$ . Soient  $\mu$  la masse spécifique de l'huile et  $\mu'$  celle de l'air.

**a)** Étudiez le mouvement de la goutte et montrez que sa vitesse tend vers une vitesse limite donnée par  $v_l = (2/9\eta)r^2g(\mu - \mu')$ . Cette vitesse est très faible. L'observation de la goutte à l'aide d'une lunette permet de mesurer cette vitesse limite et d'en déduire le rayon  $r$  de la goutte.

**b)** On applique maintenant une tension  $V$  et on ajuste son sens et sa valeur pour que la goutte reste suspendue dans l'air sous l'effet des forces précédentes et la force électrique. Vérifiez que ce champ doit être  $E = (4/3q)\pi r^3 g(\mu - \mu')$ . En déduire que  $q = 6\pi\eta r v_l/E$ . L'expérience a montré que  $q$  est toujours un multiple entier de  $1,6 \times 10^{-19}$  C, qui est la charge élémentaire de l'électron, du proton ou de toute particule élémentaire chargée. Supposons que, si  $E = 0$ , la goutte tombe de 1 mm en 27,4 s et qu'elle reste en équilibre dans un champ  $E = 2,25 \times 10^4$  V/m. Combien d'électrons contient-elle ? La viscosité de l'air est de  $1,8 \times 10^5$  N.s/m, la densité de l'huile est  $950 \text{ kg/m}^3$  et celle de l'air est  $1,29 \text{ kg/m}^3$ .

**1-8** Un champ électrique uniforme  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$  est établi entre les armatures d'un condensateur (Fig.1.8). Une particule de charge  $q$  est lancée de l'origine avec une vitesse  $v_0$  dans la direction  $Ox$ .

**a)** Écrivez les équations de mouvement de cette particule et déterminez sa trajectoire entre les armatures.

**b)** Après avoir parcouru une distance  $L$  la particule sort du champ ; son mouvement devient rectiligne. Elle est interceptée par un écran placé à une distance  $D$  de l'origine ( $D \gg L$ ). Déterminez sa déviation  $Y$  sur cet écran en fonction de la d.d.p. des armatures.

c) Des électrons sont émis par un filament chauffé et accélérés par une tension  $V_a = 10$  kV. Calculer leur énergie et leur vitesse. Ils passent entre les armatures d'un condensateur de longueur  $L = 1$  cm, d'épaisseur 2 mm et soumis à une différence de potentiel  $V = 100$  V. Calculez leur déflexion observée sur un écran placé à 20 cm du condensateur.

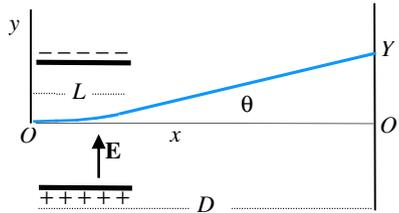


Figure 1-8 Déflexion d'une particule chargée dans un champ électrique.

## SOLUTIONS DES EXERCICES

1-1 La force subie par la goutte en beau temps est :

$$F_E = qE_{bt} = -10^6 \times (1,60 \times 10^{-19} \text{C})(-150 \text{N/C}) = 2,40 \times 10^{-11} \text{N}$$

et en temps d'orage

$$F_E = qE_{or} = -10^6 \times (1,60 \times 10^{-19} \text{C})(-10^4 \text{N/C}) = 1,60 \times 10^{-9} \text{N}$$

Cette force est dirigée vers le haut. Le poids de la goutte est

$$F_G = (4/3)\pi r^3 m_v g$$

$$= (4/3)\pi(1,0 \times 10^{-3} \text{m})^3(1000 \text{kg/m}^3)(9,8 \text{m/s}^2) = 4,1 \times 10^{-5} \text{N}$$

1-2 Le champ électrique est dirigé de l'anode vers la cathode (qui est à un potentiel inférieur). Les électrons sont soumis à une force  $-eE$  dirigée vers l'anode. Ils sont donc accélérés et ils gagnent une énergie potentielle électrique  $eV$ , qui est transformée en énergie cinétique. Nous avons donc  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = eV$ , d'où

$$v = \sqrt{2eV/m} = [2 \times (1,6 \times 10^{-19})(10^4 \text{V}) / (9,1 \times 10^{-31} \text{kg})]^{1/2} \\ = 5,9 \times 10^7 \text{ m/s}$$



C'est environ le cinquième de la vitesse de la lumière. L'analyse correcte doit utiliser la mécanique relativiste.

**1-3 a)** La capacité de ce condensateur est  $C = \varepsilon_0 S/d$ . Sa charge est donc

$$Q = CV_0 = \varepsilon_0 S V_0/d.$$

Nous prenons l'origine des axes sur la plaque négative et l'axe  $Oz$  normal aux plaques et dirigé vers la plaque positive (voir la Fig. 1.5). À cause de la symétrie de translation parallèlement aux plaques (supposées être très grandes), le potentiel  $V$  entre les plaques ne dépend que de  $z$ . Nous pouvons prendre  $V = 0$  sur la plaque négative et  $V = V_0$  sur la plaque positive. Le champ électrique  $\mathbf{E}$  entre ces armatures est alors

$$\mathbf{E} = -(\partial V/\partial x)\mathbf{e}_x - (\partial V/\partial y)\mathbf{e}_y - (\partial V/\partial z)\mathbf{e}_z = -(\partial V/\partial z)\mathbf{e}_z$$

Le champ est donc dans la direction  $Oz$ . En supposant qu'il est constant, nous trouvons l'équation  $\partial V/\partial z = -E$ , dont la solution est  $V = -Ez + a$ . Comme  $V = 0$  sur la plaque négative ( $z = 0$ ) et  $V = V_0$  sur la plaque positive ( $z = d$ ), nous déduisons que  $V = (V_0/d)z$  et  $E = -(V_0/d)$ , donc

$$\mathbf{E} = -(V_0/d)\mathbf{e}_z$$

**b)** La force exercée sur l'électron est

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = (eV_0/d)\mathbf{e}_z$$

La force étant dans la direction  $Oz$ , et la vitesse initiale étant nulle, l'électron se déplace sur l'axe  $Oz$ . Son équation de mouvement  $m\ddot{z} = F_z$  s'écrit donc

$$\ddot{z} = (eV_0/md)$$

Tenant compte des conditions initiales ( $v = 0$  et  $z = 0$  pour  $t = 0$ ), la vitesse et la position s'écrivent  $\dot{z} = (eV_0/md)t$  et  $z = (eV_0/2md)t^2$ . Il atteint la plaque positive ( $z = d$ ) à l'instant  $t_f = d\sqrt{2m/eV_0}$ ; sa vitesse est alors

$$v_f = (eV_0/md)t_f = \sqrt{2eV_0/m}$$

**c)** Si  $d = 1$  mm,  $S = 10$  cm<sup>2</sup> et  $V_0 = 10$  V, nous trouvons

$$E = -V_0/d = -1 \times 10^4 \text{ V.m}^{-1}$$

et  $v_f = \{2 \times 1,60 \times 10^{-19} \times 10/9,109 \times 10^{-31}\}^{1/2} = 1,9 \times 10^6$  m/s

**d)** L'énergie reçue par l'électron lorsqu'il atteint la plaque positive est

$$U = eV = 1,602 \times 10^{-19} \times 10 = 1,602 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Cette énergie est cinétique. Nous avons donc  $\frac{1}{2} m_e v_f^2 = U$ , d'où  $v_f = \sqrt{2eV_0/m}$ .

e) Tenant compte de la force de frottement, l'équation de mouvement s'écrit

$$m\ddot{z} = eE - b\dot{z}$$

Au début du mouvement, la vitesse est faible, la force de frottement est donc faible mais elle augmente avec la vitesse. L'électron continue à être accéléré jusqu'à ce que la force de frottement équilibre la force électrique. Il atteint donc une vitesse limite  $v_l = eE/b$ . Le travail de la force électrique est alors dissipé par la force de frottement comme chaleur.

**1-4** Supposons qu'à un instant donné  $t$  les charges portées par les armatures sont  $+q$  et  $-q$ . Le potentiel est alors  $V \equiv V_A - V_B = q/C$ . Pour faire varier les charges, il faut amener de l'infini une charge  $+dq$  à l'armature positive et  $-dq$  à l'armature négative. Cela nécessite un travail

$$dU_{(E)} = dqV_A - dqV_B = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

C'est aussi le travail nécessaire pour amener une charge  $+dq$  de l'armature négative à l'armature positive. Le travail total nécessaire pour charger le condensateur est donc

$$U_{(E)} = \int_{initial}^{final} dU_{(E)} = \int_0^Q dq \frac{q}{C} \quad \text{d'où} \quad U_{(E)} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2.$$

**1-5** Le nombre de tours par unité de longueur du solénoïde est  $n = N/l$ . S'il est le siège d'un courant d'intensité  $I$ , le champ magnétique à son intérieur est  $B = \mu_0 nI$  et le flux de ce champ à travers une spire est  $SB = \pi R^2 B$ . Le flux à travers les  $N$  spires est  $\Phi = NSB = \pi\mu_0 R^2 N^2 I/l$ . La self-inductance du solénoïde est donc  $L = \Phi/I = \mu_0 \pi R^2 N^2/l$ . Sa valeur numérique est

$$L = (4\pi \times 10^{-7})(\pi \times 4 \times 10^{-4})(5000)^2/0,20 = 0,20 \text{ H}$$

**1-6** La charge qui passe par un point du circuit pendant  $dt$  est  $dq = I(t)dt$ . La charge totale entre les instants  $t = 0$  et  $t$  est obtenue par intégration :

$$Q(t) = \int_0^t dt I(t) = \int_0^t dt I_0 e^{-t/\tau} = -\tau I_0 e^{-t/\tau} \Big|_0^t = \tau I_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

La figure 1.9 montre la variation de  $Q(t)$ . Elle augmente exponentiellement de 0 à une valeur asymptotique  $\tau I_0$ .

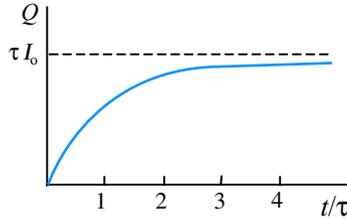


Figure 1-9 Variation de  $Q$  en fonction de  $t$ .

Supposons que la self-inductance  $L$  est localisée entre  $A$  et  $B$  dans une bobine de résistance négligeable. La d.d.p aux bornes de la bobine est

$$V = L\dot{I} = -(L/\tau)I_0e^{-t/\tau}$$

Dans cette relation  $I \equiv I_{AB}$  est l'intensité dans le sens de  $A$  vers  $B$  et  $V \equiv V_{AB} \equiv V_A - V_B$  est la différence de potentiel entre les bornes de la bobine. Dans le cas considéré, l'intensité  $I = I_0e^{-t/\tau}$  diminue, la relation  $V = -(L/\tau)I_0e^{-t/\tau}$  montre que  $V_A < V_B$ .

La bobine est donc équivalente à un générateur de borne positive en  $B$  et de borne négative en  $A$ . Il tend donc à produire dans le circuit extérieur à la bobine un courant (induit) sortant de  $B$ , donc renforçant le courant  $I$ . C'est une forme de la loi de Lenz, selon laquelle le courant induit et la f.é.m. induite sont dans un sens qui s'oppose à la cause qui les a produits.

**1-7** Orientons l'axe vertical vers le bas. En absence de champ électrique, la résultante des forces, qui agissent sur la goutte, est

$$f_z = mg - m'g - 6\pi\eta rv = (4/3)\pi r^3 g(\mu - \mu') - 6\pi\eta rv$$

La vitesse limite est atteinte lorsque  $f_z = 0$ , sa valeur est donc  $v_l = (2/9\eta)r^2g(\mu - \mu')$ . La mesure de  $v_l$  permet donc de déterminer le rayon  $r$  de la goutte. Si on applique la tension  $V$ , le champ électrique est  $E = V/d$ . Ce champ agit sur la goutte avec une force  $f_E = qE$ . On choisit  $V$  pour que cette force soit vers le haut et qu'elle maintienne la goutte immobile, alors  $f_E = f_z$ , c'est-à-dire  $(4/3)\pi r^3 g(\mu - \mu') = qE$ , d'où  $q = 6\pi r v_l / E$ .

Application numérique :  $v_l = 1 \times 10^{-3} \text{ m} / 27,4 \text{ s} = 3,65 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ , d'où  $r^2 = 9\eta v_l / 2g(\mu - \mu')$

$$= 9(1,8 \times 10^{-5})(3,65 \times 10^{-5}) / 2 \times 9,81(950 - 1,29)$$

soit  $r = 5,64 \times 10^{-7}$  m. La charge de la goutte est donc

$$q = 6\pi\eta r v_l / E \\ = 6\pi(1,8 \times 10^{-5})(5,64 \times 10^{-7})(3,65 \times 10^{-5}) / (2,25 \times 10^4)$$

soit  $3,10 \times 10^{-19}$  C ; ce qui correspond à  $2e$ .

**1-8 a)** La particule est soumise à une force  $\mathbf{F} = qE\mathbf{e}_y$ . Elle a donc une accélération  $\mathbf{a} = (qE/m)\mathbf{e}_y$ . Projetant cette équation sur les axes et intégrant deux fois, compte tenu des conditions initiales, nous trouvons la vitesse et la position

$$v_x = v_0, \quad v_y = (qE/m)t, \quad v_z = 0 \\ \implies x = v_0 t, \quad y = (qE/2m)t^2 \quad \text{et} \quad z = 0$$

Ainsi la particule reste dans le plan  $Oxy$ . Son mouvement est uniforme dans la direction  $Ox$  et accéléré dans la direction  $Oy$  du champ. L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant  $t$  entre  $x$  et  $y$ , nous trouvons une parabole de sommet  $O$

$$y = (qE/2mv_0^2)x^2.$$

**b)** La particule sort de la région du champ à l'instant  $t = L/v_0$ . Les composantes de sa vitesse sont alors  $v_x = v_0$  et  $v_y = qEL/mv_0$ . En dehors du condensateur, la particule est libre ; elle conserve cette vitesse, décrivant une trajectoire rectiligne de pente

$$\tan \theta = v_y/v_x = qEL/mv_0^2$$

Si les armatures du condensateur sont soumises à une différence de potentiel  $V$ , le champ est  $E = V/d$  où  $d$  est la distance séparant les armatures. Le déplacement du point d'impact sur l'écran, situé à une distance  $D$ , est

$$Y = D \tan \theta = qELD/mv_0^2 = (qLD/mdv_0^2)V$$

La déflexion est donc proportionnelle à la tension appliquée aux armatures du condensateur.

**c)** L'énergie cinétique des électrons est  $E_c = qV_a = 1,6022 \times 10^{-15}$  J. Leur vitesse est  $v = (2E_c/m)^{1/2} = 0,593 \times 10^8$  m/s. La déviation sur l'écran est donc

$$Y = (qLD/2dE_c)V = (LD/2d)(V/V_a) = 0,5 \text{ cm.}$$

# CHAPITRE 2

## Conductance et résistance

### PLAN

- 2.1 Intensité et densité de courant
- 2.2 Modèle phénoménologique de conduction, loi d'Ohm
- 2.3 Conduction et temps de collision
- 2.4 Effet Joule
- 2.5 Variation de la résistivité avec la température, la supraconductivité
- 2.6 Conducteurs non ohmiques
- 2.7 Utilisations des résistances

### OBJECTIF

- Discuter les lois d'Ohm et de Joule et les modèles de conduction

### 2.1 INTENSITÉ ET DENSITÉ DE COURANT

L'électrocinétique est l'étude des courants électriques. Nous sommes concernés ici surtout par les courants dus au déplacement des électrons de conduction dans un conducteur soumis à la tension d'un générateur.

Dans un métal en équilibre électrostatique, le champ électrique est nul et le corps est équipotentiel. À cause de l'agitation thermique, les électrons sont en mouvement permanent et désordonné, au hasard dans toutes les directions. En moyenne, la charge qui traverse une surface quelconque dans un sens est la même que celle qui la traverse dans le sens opposé.

Si une d.d.p.  $V$  est établie entre deux points d'un conducteur, il devient le siège d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  dans le sens du potentiel décroissant. Ce champ agit sur les électrons de conduction ; ils sont alors poussés dans la direction opposée au champ. Les électrons déplacés et les ions fixes produisent leur propre champ électrique, opposé au champ extérieur. Le mouvement des électrons dure jusqu'à ce que les deux champs se neutralisent.



Si on supprime la d.d.p, le conducteur retourne à l'équilibre électrostatique. On peut montrer que le temps de retour à l'équilibre, appelé *temps de relaxation*, est de l'ordre de  $10^{-18}$  s dans les métaux. Pour que le mouvement des électrons continue, il faut que ce déplacement soit dans un circuit fermé et que la d.d.p. soit maintenue par un générateur (batteries, dynamos etc.). Ce mouvement des électrons produit un courant qui se manifeste par des effets calorifiques, magnétiques, chimiques etc.

Supposons que la densité de charges mobiles dans le conducteur est  $q_v(\mathbf{r}, t)$  avec une vitesse moyenne (de dérive)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Les particules qui traversent un élément de surface  $\delta S$  pendant  $dt$  sont celles qui se trouvent à l'intérieur d'un cylindre de base  $\delta S$  et qui a des génératrices de longueur  $\mathbf{v} dt$  (Fig.2.1a). La hauteur de ce cylindre est  $dh = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dt)$  et son volume est  $\delta S dh = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt \delta S$ . La quantité de charge qui traverse  $\delta S$  est donc  $dQ_S = q_v (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt \delta S$ . L'**intensité de courant** qui traverse  $\delta S$  est la quantité de charge qui la traverse en une seconde, soit

$$\delta I = q_v (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \delta S. \quad (2.1)$$

L'intensité de courant qui traverse une surface finie  $S$  est obtenue par intégration de  $\delta I$  sur  $S$  :

$$I_S = \delta Q_S / \delta t = \iint_S dI = \iint_S dS q_v (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \quad (2.2)$$

C'est le flux de la **densité de courant**

$$\boxed{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q_v(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)} \quad (2.3)$$

à travers  $S$  (Fig. 2.1b). Dans le cas où  $\mathbf{j}$  est uniforme et  $S$  est une surface plane, l'intensité (2.2) s'écrit

$$I = \delta Q_S / \delta t = S(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) = S j \cos \theta \quad (2.4)$$

où  $\theta$  est l'angle de  $\mathbf{j}$  avec  $\mathbf{n}$ . En particulier, si  $\mathbf{j}$  est uniforme et perpendiculaire à  $S$ , cette relation s'écrit

$$I = jS \quad (2.5)$$

Les lignes tangentes à la densité de courant en chaque point ne se rencontrent pas ; elles sont appelées *lignes de courant* (Fig. 2.1b).

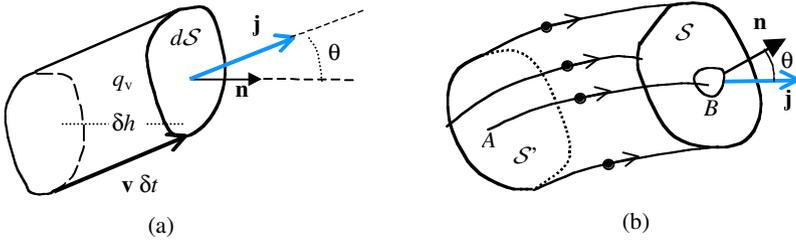


Figure 2-1 a) Densité de courant et b) intensité à travers une surface finie  $S$ .

Si le conducteur contient plusieurs types de charges mobiles, chacune avec une densité et une vitesse moyenne caractéristique, la densité de courant totale est la somme géométrique de leurs densités de courant. C'est notamment le cas des ions positifs et des ions négatifs dans une solution. Dans les métaux, les charges mobiles sont les électrons de conduction en nombre de l'ordre d'un électron par atome. La densité de courant est alors

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -en_e(\mathbf{r}) \mathbf{v}_e(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$



Le sens conventionnel du courant dans une solution est celui des ions positifs. Dans les métaux il est dans la direction opposée à celle du mouvement des électrons.

Dans un circuit électrique, c'est l'intensité de courant (et non la densité de courant) dans les éléments du circuit qui nous intéresse. Dans le cas d'un conducteur cylindrique, on peut souvent supposer que la densité de courant est uniforme. Cependant dans le cas d'un courant alternatif de haute fréquence, le courant circule surtout près de la surface (*effet de peau*).

D'autre part, selon la théorie électromagnétique, lorsqu'on branche un générateur sur un circuit, le courant et la tension s'établissent dans le circuit de proche en proche grâce à la propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu isolant ambiant.

La vitesse de propagation est égale à la vitesse de la lumière  $c$  dans ce milieu. En principe l'intensité dans un conducteur et la tension le long d'un fil de connexion ne sont pas donc les mêmes en tous les points. Le retard dû à ce phénomène de propagation est de l'ordre de  $L/c$ , où  $L$  est la distance parcourue. Ce retard peut être négligé s'il est très court, comparé au temps caractéristique  $T$  du circuit, tel que la constante de temps des régimes transitoires (voir le chapitre 5) ou la période du courant alternatif. Les dimensions du circuit doivent donc être faibles comparées à  $cT$ .

Dans le cas d'un courant alternatif de fréquence  $\nu$ , la période est  $T = 1/\nu$  ; cette condition s'écrit donc  $L \ll \lambda$  où  $\lambda = c/\nu$  est la longueur d'onde. C'est l'**approximation des régimes quasi stationnaires**, généralement respectée pour les fréquences habituelles, qui ne dépassent pas 10 MHz. Ce qui correspond à  $\lambda = 30$  m, largement supérieure à la longueur des circuits des dispositifs électriques. En revanche dans les émissions des ondes radio, par exemple, l'antenne la plus efficace a une longueur  $\lambda/2$  ; l'approximation des régimes stationnaires n'est pas alors valable.



Dans beaucoup de cas, le courant a un sens inconnu ou il est alternatif. L'intensité doit alors être considérée comme une quantité algébrique, en choisissant un sens dans le conducteur. Si on trouve que l'intensité est positive, le courant est dans le sens choisi, sinon le courant est dans le sens opposé.



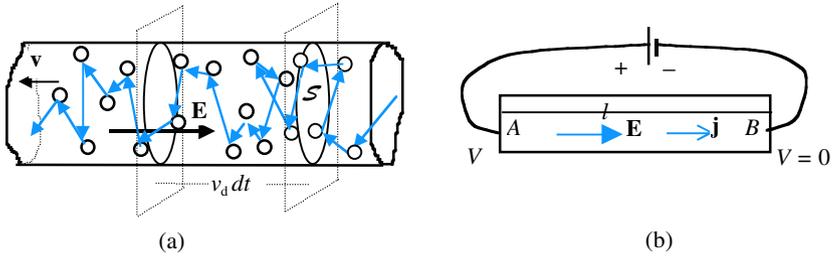
L'unité de l'intensité du Système International est l'*ampère* (A) et celle de la densité de courant est l'ampère par m<sup>2</sup> (A.m<sup>-2</sup>). Les intensités habituelles sont de l'ordre du microampère (1  $\mu\text{A} = 10^{-6}$  A) dans le corps humain (où elles jouent un rôle vital), du milliampère dans les circuits électroniques et de l'ampère pour les courants domestiques et industriels.

## 2.2 MODÈLE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DE CONDUCTION, LOI D'OHM

En 1826, Ohm a vérifié que, si on applique la tension  $V$  d'un générateur à un conducteur métallique, le courant  $I$  est proportionnel à la tension :

$$V = RI \quad \text{ou} \quad I = V/R \quad (2.7)$$

$R$  est la **résistance** du conducteur. Elle dépend de la forme géométrique du conducteur et de son matériau.



**Figure 2-2** a) Mouvement des électrons dans un conducteur. b) Conducteur cylindrique.

Comme la loi de Fourier qui exprime la proportionnalité du transfert de chaleur à la différence de température, la loi d'Ohm est une loi phénoménologique. Il est possible de l'interpréter en faisant appel à un modèle microscopique. Le champ électrique agit sur un électron de conduction avec une force  $\mathbf{f}_E = -e\mathbf{E}$  et lui donne une accélération  $\mathbf{a} = -e\mathbf{E}/m$ . Si l'électron n'était pas soumis à d'autres forces, sa vitesse augmente et le travail de la force électrique serait transformé en énergie cinétique. En fait l'électron mobile entre en collision avec les ions immobiles et suit un parcours en zigzag (Fig. 2.2a). Ce qui réduit son énergie, comme s'il était soumis à une force de frottement  $\mathbf{f}'$  d'autant plus importante que les chocs sont plus nombreux, c'est-à-dire la vitesse de l'électron est plus grande. Si la vitesse est faible, nous supposons que  $\mathbf{f}' = -b\mathbf{v}_e$  (comme une force élastique). La vitesse de l'électron augmente donc jusqu'à ce que  $\mathbf{f}'$  équilibre la force électrique ( $-e\mathbf{E} - b\mathbf{v}_e = 0$ ) ; l'électron atteint alors une vitesse limite moyenne  $\mathbf{v}_e = -(e/b)\mathbf{E}$ . Il en résulte un courant de densité  $\mathbf{j} = -en_e\mathbf{v}_e = (n_e e^2/b)\mathbf{E}$ . Nous écrivons :

$$\boxed{\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}} \quad \text{où} \quad \sigma = n_e e^2/b \quad (2.8)$$

$\sigma$  est la *conductivité* du milieu et son inverse  $\rho = 1/\sigma$  est la *résistivité*, qui ne dépendent que du matériau et de ses conditions physiques (température, les impuretés qu'il contient etc.). Entre deux collisions, l'électron se déplace comme s'il était dans le vide, avec une vitesse qui peut être aussi grande que  $10^6$  m/s<sup>(1)</sup>. Mais, cette vitesse étant orientée au hasard, presque dans toutes les directions, les électrons de conduc-

(1) La vitesse moyenne  $\langle v_{th} \rangle$  de l'agitation thermique est liée à la température par la relation  $\frac{1}{2} m \langle v_{th} \rangle^2 = (3/2)kT$ , où  $k = 1,38\ 05 \times 10^{-23}$  J/K est la constante de Boltzmann. Ainsi, à la température normale,  $\langle v_{th} \rangle \approx 1,2 \times 10^5$  m/s.

tion progressent en moyenne dans la direction du champ, avec une *vitesse de dérive*  $v_d$  d'une fraction de mm/s, dans le cas des courants habituels.



La vitesse de dérive ne doit pas être confondue avec la vitesse d'établissement du courant dans le circuit ou de transmission d'un signal électrique le long d'une ligne. Cette vitesse est celle des ondes électromagnétiques dans l'isolant qui entoure les conducteurs (c'est-à-dire la vitesse de la lumière). Ceux-ci jouent seulement le rôle d'un guide d'onde. Quand vous branchez une lampe sur le secteur, les électrons ne sortent pas d'une borne, circulent avec la vitesse  $v_d$  le long du conducteur et retournent à l'autre borne ; car cela mettrait des heures pour allumer la lampe<sup>(2)</sup>. Ce qui se passe est que l'onde électromagnétique s'établit dans l'air situé entre les fils de connexion avec la vitesse de la lumière. Cette onde met les électrons en mouvement en tout point du circuit, après un retard de temps négligeable. Le même phénomène de propagation a lieu quand vous faites un appel téléphonique à un correspondant à des milliers de kilomètres.

Les relations liant  $V$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{j}$  étant linéaires<sup>(3)</sup>, nous en déduisons que la d.d.p.  $V$  est proportionnelle à  $I$  :

$$V = RI, \quad (2.9)$$

$R$  est la **résistance** du conducteur vu des points  $A$  et  $B$ . La résistivité  $\rho$  est une caractéristique du matériau tandis que la résistance  $R$  est proportionnelle à  $\rho$  (si celle-ci est uniforme) et elle dépend de la forme géométrique du conducteur et des points  $A$  et  $B$  où la d.d.p. est appliquée.



Dans le cas d'un conducteur cylindrique de longueur  $l$  et de section  $S$  (Fig. 2.2b), le champ à l'intérieur du cylindre est uniforme et de module  $E = V/l$ . La relation (2.8) donne alors la densité de courant  $j = E/\rho = V/\rho l$  et l'intensité de courant s'écrit  $I = Sj = VS/\rho l$ . La relation (2.9) est donc vérifiée avec  $R = \rho l/S$ .

(2) Dans le cas d'un courant alternatif, les électrons de conduction se déplacent dans un sens puis dans l'autre. En moyenne sur le temps, il n'y a aucun déplacement de charges.

(3) La relation d'une grandeur  $y$  à une grandeur  $x$  est linéaire si, quels que soient les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , la combinaison linéaire  $\alpha y_1 + \beta y_2$  correspond à  $\alpha x_1 + \beta x_2$ , si  $y_1$  correspond à  $x_1$  et  $y_2$  correspond à  $x_2$ . La relation de proportionnalité  $y = ax$  est une relation linéaire mais la relation affine  $y = ax + b$  ne l'est pas.

L'expression  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$  (ou  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ) est la forme locale de la *loi d'Ohm* et l'expression  $V = RI$  est sa forme intégrée. Un conducteur qui vérifie ces relations est dit *ohmique*. Le rapport  $R = V/I$  est alors constant (c'est-à-dire il ne dépend pas de la tension appliquée).

**Tableau 2-1** Valeurs de  $\rho$  et  $\alpha$  pour certains matériaux usuels au voisinage de 20°C.

Le constantan est formé de ~ 60 % de cuivre et ~ 40 % de nickel. Le manganin est formé de ~ 84% de cuivre, ~12 % de manganèse et ~ 4 % de nickel. Le nichrome est formé de ~ 59 % de nickel, ~ 23 % de cuivre et ~16 % de chrome.

Métal	$\rho$ ( $10^{-8} \Omega \cdot m$ )	$\alpha$ ( $K^{-1}$ )	Métal	$\rho$ ( $10^{-8} \Omega \cdot m$ )	$\alpha$ ( $K^{-1}$ )
Aluminium	2,65	$3,9 \times 10^{-3}$	Constantan	44-50	$\approx 2 \times 10^{-6}$
Cuivre	1,67	$3,93 \times 10^{-3}$	Manganin	43-48	$\approx 10^{-6}$
Fer pur	10,4	$5,0 \times 10^{-3}$	Nichrome	150	$0,4 \times 10^{-3}$
Acier	18	$3,0 \times 10^{-3}$	Tungstène	5,6	$4,5 \times 10^{-3}$
Argent	1,59	$3,8 \times 10^{-3}$	Carbone	3500	$-5 \times 10^{-4}$
Or	2,35	$3,4 \times 10^{-3}$	Plomb	20,7	$4 \times 10^{-4}$
Platine	10,6	$3,927 \times 10^{-3}$	Mercure	94	$9 \times 10^{-4}$

Matériau	$\rho$ ( $\Omega \cdot m$ )	$\alpha$ ( $K^{-1}$ )	Matériau	$\rho$ ( $\Omega \cdot m$ )	$\alpha$ ( $K^{-1}$ )
Germanium	0,46	$-48 \times 10^{-3}$	Caoutchouc	$10^{13}$	
Silicone	100-1000	$-75 \times 10^{-3}$	Quartz fondu	$7,5 \times 10^{-17}$	
Verre	$10^{10}$ - $10^{14}$		Porcelaine	$10^{10}$ - $10^{12}$	
Polyéthylène	$10^8$ - $10^9$		Teflon	$10^{14}$	



L'unité de résistance, définie par  $R = V/I$ , est le *volt par ampère*, couramment appelée *ohm* ( $\Omega$ ). Pour les petites résistances, on utilise aussi le *microhm* ( $\mu\Omega = 10^{-6} \Omega$ ) et pour les grandes résistances on utilise le *méga-ohm* ( $\mu\Omega = 10^{-6} \Omega$ ). L'unité de résistivité  $\rho = E/j$  est l'*ohm-mètre* ( $\Omega \cdot m$ ).



Notons que les isolants parfaits n'existent pas. Ce qu'on désigne comme isolant est, en fait, un très mauvais conducteur, c'est-à-dire un matériau de très grande résistivité ( $\rho > 10^5 \Omega \cdot m$ ). Ces corps n'obéissent pas à la loi d'Ohm. La paraffine, par exemple, a une résistivité de l'ordre de  $10^8 \Omega \cdot m$  et les meilleurs isolants sont les cristaux covalents comme le diamant dont la résistivité dépasse  $10^{12} \Omega \cdot m$ . Pour ces corps, il n'est pas possible de définir la résistivité d'une façon non équivoque. Les matériaux dont la résistivité est inférieure à environ

$10^{-5}\Omega.m$  sont considérés comme *conducteurs* : tandis que les matériaux de résistivité allant de  $10^{-5}$  à  $10^5$  sont considérés comme des *semi-conducteurs*. La résistivité dépend fortement des impuretés, c'est-à-dire les atomes différents introduits dans le matériau, surtout dans le cas des semi-conducteurs.

### 2.3 CONDUCTION ET TEMPS DE COLLISION

La force de frottement, que subit un électron de conduction, est due aux collisions de l'électron avec les atomes fixes et les autres électrons. Pour lier directement la conductivité électrique aux collisions, considérons le mouvement de l'électron entre deux collisions. Il est soumis à une accélération  $\mathbf{a} = -e\mathbf{E}/m$ . Sa vitesse varie donc selon l'expression

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o - (e/m)\mathbf{E}t \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{v}_o$  est sa vitesse après la dernière collision. Si l'électron subit la collision suivante à l'instant  $\tau$ , prenons la valeur de la vitesse à l'instant  $\tau/2$  comme vitesse moyenne de l'électron entre les deux collisions ; nous trouvons alors  $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}_o - (e\tau/2m)\mathbf{E}$ . Faisons maintenant la moyenne pour l'ensemble des électrons de conduction. Comme  $\mathbf{v}_o$  est orientée au hasard dans toutes les directions, sa moyenne est nulle et nous pouvons identifier la valeur moyenne de  $\mathbf{v}$  à la vitesse de dérive des électrons

$$\mathbf{v}_d = -(e\tau/2m)\mathbf{E} \quad (2.11)$$

La densité de courant est donc

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d = (ne^2\tau/2m)\mathbf{E} \quad (2.12)$$

Ce modèle, basé sur la mécanique classique, prédit donc la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ , où  $\sigma$  est donnée par la **formule de Drude**

$$\sigma = ne^2\tau/2m \quad (2.13)$$

Soit  $\langle v_{th} \rangle$  la vitesse moyenne de l'électron dans le conducteur.  $\langle v_{th} \rangle$  est due à l'agitation thermique ; elle est très grande mais orientée au hasard dans toutes les directions. Elle ne doit pas donc être confondue avec la vitesse de dérive  $v_d$ . Le temps de collision est  $\tau = l / \langle v \rangle$ , où  $l$  est le *libre parcours moyen*, c'est-à-dire la distance parcourue par l'électron entre deux collisions successives. La conductivité s'écrit alors

$$\sigma = ne^2l/2m \langle v_{th} \rangle \quad (2.14)$$



L'accord de cette formule avec l'expérience n'est pas bon. De plus, comme  $\langle v_{th} \rangle$  est proportionnelle à  $\sqrt{T}$ , où  $T$  est la température absolue, cette formule prédit que la résistivité augmente avec la température comme  $\sqrt{T}$  au lieu de l'augmentation expérimentale proportionnellement à  $T$ . Ce désaccord est évité en utilisant un modèle quantique.

## 2.4 EFFET JOULE

Une tension  $V$  appliquée aux bornes d'un conducteur de résistance  $R$  produit un courant d'intensité  $I = V/R$ . Pendant un temps  $dt$  la charge transportée est  $dq = I dt$ . Le travail du champ électrique sur cette charge est

$$dW = V dq = VI dt \quad (2.15)$$

Ce qui veut dire que le générateur de la tension  $V$  fournit une puissance

$$P = dW/dt = VI = RI^2 = V^2/R \quad (2.16)$$

Comme les charges ne sont pas accélérées dans le conducteur et qu'il n'y a aucun effet mécanique, chimique ou autre, qui puisse utiliser cette énergie, elle est dissipée sous forme de chaleur. Cela se manifeste par un échauffement du conducteur, appelé *effet Joule*.

Pour comprendre cet effet, reprenons le modèle phénoménologique de la section 2.2. En se déplaçant dans le conducteur, poussé par le champ électrique, l'électron de conduction subit une force de frottement  $\mathbf{f}' = -b\mathbf{v}$ . Le travail de la force électrique  $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$  ne peut pas être transformé en énergie cinétique ; car l'électron se déplace avec la vitesse limite moyenne  $\mathbf{v}_e$  constante (et très faible). Il est dissipé sous forme de chaleur par la force de frottement. La puissance dissipée par un électron est

$$p_e = -\mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}_e = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_e = q(\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{E}) \quad (2.17)$$

La puissance dissipée par unité de volume contenant  $n_e$  électrons est donc

$$P_v = n_e p_e = n_e q(\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) \quad (2.18)$$

Utilisant la loi d'Ohm (2.8), nous pouvons écrire aussi

$$P_v = \rho j^2 = \sigma E^2 \quad (2.19)$$

C'est la *forme locale de la loi de Joule*, donnant la puissance dissipée par unité de volume en fonction de la densité de courant ou en fonction du champ électrique. Si l'on considère un conducteur cylindrique (de la Fig. 2.2b), par exemple, la puissance dissipée par unité de volume est uniforme et la puissance totale dissipée est

$$P = \mathcal{V}P_v = \rho j^2 LS = \rho(I/S)^2 LS = (\rho L/S)I^2 \equiv RI^2 \quad (2.20)$$

Nous retrouvons donc la forme intégrée de la loi de Joule.

## 2.5 VARIATION DE LA RÉSISTIVITÉ AVEC LA TEMPÉRATURE, LA SUPRACONDUCTIVITÉ

La résistivité d'un matériau dépend de sa température. En effet, si la température augmente, l'agitation thermique augmente. Il en est de même pour le nombre de collisions des électrons avec les atomes ; ce qui augmente le frottement et, par conséquent, la résistivité. L'agitation thermique peut aussi modifier le nombre des porteurs de charge. La variation de la résistivité avec la température est donc assez difficile à analyser, d'autant plus que les effets quantiques jouent un rôle important pour l'interprétation des propriétés de conduction. La résistivité de la plupart des matériaux augmente légèrement avec la température. Nous définissons le *coefficient de température* comme étant le taux de variation relative de la résistivité avec la température

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (2.21)$$

Si la variation de  $T$  est faible,  $\alpha$  peut être considéré comme une constante caractéristique du matériau. La résistivité varie donc avec la température  $T$  selon la loi

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (2.22)$$

Où  $T_0$  est une température de référence et  $\rho_0$  est la résistivité à cette température. Le coefficient  $\alpha$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  pour la plupart des métaux. Certains matériaux, comme le carbone, font exception avec un coefficient  $\alpha = -0,5 \times 10^{-3}$ . Le tableau 2.1 donne les valeurs de  $\rho$  et  $\alpha$  pour certains matériaux usuels au voisinage de  $20^\circ\text{C}$ . En faisant un alliage d'éléments de coefficients de température positifs et négatifs, on peut avoir des matériaux dont la résistivité varie très peu avec la température ; c'est le cas du constantan, du manganin et du nichrome.

La résistance d'un conducteur varie avec la température à cause de la variation de la résistivité et aussi à cause de la dilatation linéique  $\beta$ . Si la résistance est  $R_0$  à une certaine température de référence  $T_0$ , cette dilatation multiplie chaque dimension du corps par un facteur  $[1 + \beta(T - T_0)]$ . Les deux effets font que la résistance varie avec la température comme

$$R = R_0 \frac{1 + \alpha T}{1 + \beta(T - T_0)} \quad (2.23)$$

Comme  $\beta$  est de l'ordre de  $10^{-5}/\text{K}$ , l'effet de la dilatation est très faible.



La résistivité de certains matériaux a un comportement très particulier en fonction de la température ; elle diminue rapidement si  $T$  augmente. La résistivité du graphite, par exemple, est réduite de moitié lorsque la température s'élève de  $0^\circ\text{C}$  à  $2\,000^\circ\text{C}$ . D'autres semi-conducteurs ont des variations encore plus rapides. Ainsi la résistivité de certains composés à base de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  est réduite de moitié si la température varie de quelques dizaines de degrés. Ces composés sont utilisés dans les *thermistances*, qui servent à régulariser l'intensité de courant dans les circuits. Cette augmentation brusque de la conductivité s'explique par une augmentation du nombre d'électrons de conduction.

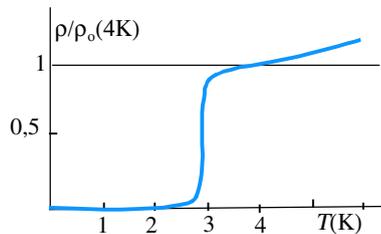
En 1911 H. K. Onnes a utilisé l'hélium liquide pour refroidir le mercure jusqu'à 1 K. Il a observé que la résistance du mercure diminue lentement, mais à une *température critique*  $T_c = 4,154$  K, elle diminue brusquement à une valeur négligeable (Fig. 2.3). Onnes a conclu que le mercure subit une transition de phase à un état de **supraconductivité**. Quelques 27 éléments et des milliers de corps composés deviennent supraconducteurs au-dessous d'une certaine température critique caractéristique. Ils comprennent le zinc ( $T_c = 0,88$  K), l'aluminium ( $T_c = 1,175$  K), le plomb ( $T_c = 7,18$  K), le niobium ( $T_c = 9,46$  K), l'étain ( $T_c = 3,721$  K) et le tungstène ( $T_c = 0,0154$  K). On n'a pas observé un état supraconducteur dans le cas des bons conducteurs comme le platine, l'or, l'argent et le cuivre.



Contrairement aux substances à l'état normal, un supraconducteur n'oppose aucune résistivité au passage du courant ( $\rho < 4 \times 10^{-25} \Omega \cdot \text{m}$ ). Le courant s'établit donc sans perte d'énergie. Une fois établi dans un circuit supraconducteur, un courant électrique peut durer, peut-être indéfiniment, sans d.d.p. et sans champ électrique dans le supraconducteur. À la température critique, la substance subit une transition de phase ; toutes ses propriétés physiques changent brusquement (exactement comme dans la transition de la phase gazeuse à la phase liquide, par exemple).

En 1957, la théorie BCS, proposée par Bardeen, Cooper et Schrieffer, a expliqué la supraconductivité comme un effet quantique d'association des électrons en paires (provoquée par une attraction quantique de longue portée). Contrairement aux électrons d'un état normal (qui se déplacent indépendamment), les électrons d'un supraconducteur sont liés ensemble et agissent en coordination, de façon qu'aucun électron ne subisse de collisions.

En 1986 Berndoz et Müller (Prix Nobel en 1987) ont observé la supraconductivité des oxydes de cuivre, de baryum et de lanthane, à une température proche de 30 °K. Cette découverte importante a suscité une grande activité de recherche chez les physiciens et les chimistes. D'autres composés céramiques ont été découverts avec une température critique plus élevée (92 K pour le  $\text{Yba}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , 105 K pour le  $\text{Bi-Sr-Ca-Cu-O}$ , 134 K pour le  $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$  et même 150 K pour un oxyde contenant du mercure). Il n'est pas donc exclu que certains composés soient supraconducteurs aux températures normales ; ce qui aura certainement beaucoup d'applications technologiques.



**Figure 2-3** Supraconductivité : résistivité de l'étain, comparée à sa résistivité à 4 °K.

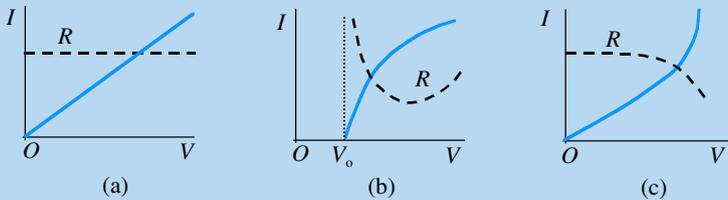
## 2.6 CONDUCTEURS NON OHMIQUES

Le courant est une réponse du milieu conducteur à l'excitation électrique. En général,  $\mathbf{j}$  est une fonction compliquée de  $\mathbf{E}$ . Si le milieu est isotrope,  $\mathbf{j}$  est dans la même direction que  $\mathbf{E}$ . Si le champ n'est pas intense, nous pouvons toujours faire un développement de  $\mathbf{j}$  en termes de  $\mathbf{E}$ , de la forme

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \kappa \mathbf{E}^2 + \dots \quad (2.24)$$

où nous avons utilisé le fait que  $\mathbf{j} = 0$  si  $\mathbf{E} = 0$ . Le premier terme de ce développement correspond à la loi d'Ohm. C'est effectivement le cas des conducteurs ohmiques, tels que les métaux et les solutions conductrices, aux conditions physiques normales et dans le cas d'un champ qui n'est pas très intense. Sous la forme intégrée, nous trouvons la loi linéaire  $I = V/R$ . La courbe représentant  $I$  en fonction de  $V$ , appelée *caractéristique*, est une droite de pente  $1/R$  sur l'axe des  $V$ .

Un conducteur n'est pas ohmique entre deux bornes  $A$  et  $B$ , si le rapport  $V/I$  n'est pas constant. Les diodes, par exemple, ne sont pas ohmiques (voir la section 4.10). La figure 2.4b représente la caractéristique d'une cuve électrolytique : le courant n'apparaît que si la tension est supérieure à un certain seuil  $V_0$ . La résistance est donc infinie au-dessous de  $V_0$ , elle décroît si  $V$  est supérieur à  $V_0$ , passe par un minimum puis augmente de nouveau. Enfin la figure 2.4c représente la caractéristique d'une thermistance ; la résistance est d'abord constante puis elle décroît avec  $V$ .



**Figure 2-4** a) Caractéristique d'un conducteur ohmique, b) d'une solution électrolytique et c) d'une thermistance.

Pour connaître la cause du comportement non ohmique de certains conducteurs, rappelons que la loi d'Ohm  $V = RI$  est établie sous les hypothèses que le champ n'est pas très intense, que le nombre de por-

teurs de charges par unité de volume est uniforme et indépendant de  $V$ , que ces charges se déplacent sous le seul effet des forces électriques et de frottement, que la température du conducteur est uniforme et invariable. La loi d'Ohm n'est pas donc valable si toutes ces hypothèses ne sont pas respectées.

- Par exemple, elle n'est pas valable si le champ électrique est très intense car le nombre de porteurs de charge peut augmenter (effet d'avalanche dans un tube à gaz ou une diode régulatrice de tension, par exemple).
- Elle ne l'est pas si le champ électrique varie rapidement dans le temps, car alors un champ magnétique important est induit et ce champ agit sur les charges en mouvement (c'est le cas d'un champ de très haute fréquence  $\approx 10^{13}$  Hz).
- La loi cesse aussi d'être valable dans le cas de deux conducteurs en contact ; car alors une d.d.p. de *contact* existe de part et d'autre de la surface de contact.
- De même, si on a deux semi-conducteurs ou un conducteur et un semi-conducteur en contact, la loi d'Ohm n'est pas valable dans la région de transition ; car le courant peut passer plus facilement dans un sens que dans l'autre. Ce dernier effet permet de construire des diodes à jonction pour redresser le courant alternatif.



Les anciens tubes à vide sont un autre exemple d'éléments non ohmiques : une partie du circuit est en fait un faisceau d'électrons émis par une cathode chauffée et qui se propagent dans le vide. Le débit d'électrons et, par conséquent, l'intensité du courant  $I$  sont essentiellement déterminés par la vitesse d'émission de la cathode et varient avec la tension appliquée entre la cathode et l'anode suivant une loi non linéaire. En particulier, si le potentiel est renversé, les électrons sont repoussés au lieu d'être attirés et l'intensité de courant s'annule.

## 2.7 UTILISATIONS DES RÉISTANCES



Tous les conducteurs, y compris les fils de connexion, ont une certaine résistance. Ils dissipent donc de l'énergie et limitent les applications techniques. Mais les résistances peuvent aussi être utiles.

**a)** Une résistance permet de transformer l'énergie électrique en chaleur. Si elle est branchée sur une tension  $V$ , la puissance dissipée par effet Joule est  $P = V^2/R$ . Cette puissance est donc inversement proportionnelle à  $R$ . Pour cela, il faut que la chaleur dégagée puisse être évacuée du conducteur et que celui-ci résiste bien à la chaleur, pour qu'il ne fonde pas ou ne s'oxyde pas, s'il est exposé à l'air. Pour éviter l'oxydation, on peut remplacer l'air par un gaz inerte. La chaleur dégagée peut être utilisée pour le chauffage, pour l'éclairage par des lampes à incandescence (émission de la lumière par un filament de tungstène chauffé à environ 3000 °C). Mentionnons aussi l'*effet thermoionique*, qui est étroitement lié à l'effet Joule. C'est l'émission d'électrons par une cathode chauffée à l'aide d'une résistance. Cet effet est utilisé dans plusieurs appareils d'observation et de mesure. L'effet Joule est utilisé aussi dans l'ampèremètre thermique (qui mesure l'intensité d'un courant à partir de l'allongement d'un fil conducteur, dû à la chaleur dégagée).



Les résistances utilisées pour le chauffage sont habituellement faites de nichrome, un alliage de haute résistivité et de faible coefficient de température. Elles peuvent être maintenues à haute température pour une longue durée sans se détériorer mécaniquement ou chimiquement. Elles ont habituellement la forme de bandes ou en hélice plutôt qu'un conducteur cylindrique pour évacuer plus facilement la chaleur.

**b)** La variation de la résistance avec la température peut être utilisée en *thermométrie*. Les divers types du thermomètre à résistance de platine permettent de mesurer des températures allant de  $-260^{\circ}\text{C}$  à  $960^{\circ}\text{C}$  avec une précision proche du centième ou le millième de degré.

**c)** Les résistances sont des éléments essentiels des circuits électroniques pour contrôler les tensions et les courants. Pour cela, il faut que la consommation de puissance soit très faible (de l'ordre du watt), évitant ainsi un surchauffement nuisible des instruments et une grande consommation d'énergie. Pour avoir une résistance de valeur assez précise et variant peu avec la température, on enroule, sur un noyau isolant, un long fil fin fait d'un alliage de haute résistivité et de faible coefficient de température, tel que le nichrome, le manganin ou le constantan.

Des résistances peu coûteuses, mais moins précises, peuvent être réalisées avec une poudre de graphite mélangé à l'argile. Elles se pré-

sentent alors comme des composants en céramique avec un code de couleur pour indiquer leur valeur et la tolérance d'erreur (Fig. 2.5). Les couleurs des bandes *A* et *B* représentent le premier et le second chiffre significatif respectivement. La bande *C* représente la puissance de 10 multiplicative, selon le tableau 2.2, et la bande *D* représente la tolérance. Pour cette dernière, la couleur dorée veut dire une tolérance de 5 %, la couleur argentée veut dire 10 % tandis que l'absence de bande veut dire une tolérance de 20 %.

Tableau 2-2 Code des couleurs pour les résistances

Couleur	Bandes A et B des chiffres significatifs	Bande C du facteur multiplicateur
Noir	0	1
Brun	1	10
Rouge	2	10 <sup>2</sup>
Orange	3	10 <sup>3</sup>
Jaune	4	10 <sup>4</sup>
Vert	5	10 <sup>5</sup>
Bleu	6	10 <sup>6</sup>
Violet	7	10 <sup>7</sup>
Gris	8	10 <sup>8</sup>
Blanc	9	10 <sup>9</sup>

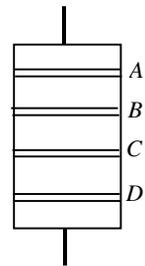


Figure 2-5 Résistances et leurs bandes de couleur.

**d)** Les résistances réglables (ou *rhéostats*) peuvent être réalisées en déplaçant un curseur *B* sur un bobinage *AC* (Fig. 2.6a). On peut aussi utiliser ce dispositif comme diviseur de tension. Si un générateur de tension  $V_0$  est branché entre *A* et *C*, la tension obtenue entre *A* et *B* est

$$V_{AB} = V_0 R_{AB} / R_{AC} = V_0 AB / AC \quad (2.25)$$

En déplaçant le curseur *B*, il est ainsi possible de faire varier  $V_{AB}$  de 0 à  $V_0$ . Au lieu du bobinage, le potentiomètre de la Fig. 2.6b) utilise une bande circulaire *AC* sur laquelle glisse le point *B*. Ces diviseurs de tension, sont utilisés pour contrôler les instruments (le volume sonore et la luminosité d'un téléviseur, par exemple).

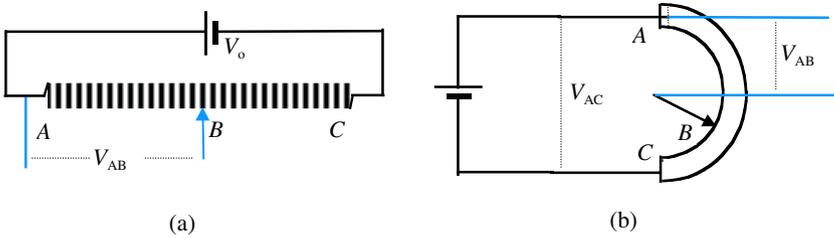


Figure 2-6 Potentiomètres ou diviseur de tension.

e) Pour transporter une puissance électrique  $P$  sur une grande distance, il est nécessaire de réduire les pertes. Si  $R$  est la résistance totale de la ligne et  $V$  est le potentiel à l'entrée, l'intensité du courant est  $I = P/V$  et la puissance perdue par effet Joule est  $P_J = RI^2 = RP^2/V^2$ . Le rendement est  $\mathcal{R} = 1/(1 + RP/V^2)$ .

Par exemple, si une puissance  $P = 10$  MW est transportée sous une tension de 220 V sur une ligne de 100 km et de résistance  $1 \Omega$  par km, l'intensité de courant est  $4,5 \times 10^4$  A et le rendement est seulement  $\rho = 5 \times 10^{-5}$  ! Cela veut dire que presque toute l'énergie est perdue. Pour réduire la perte, on doit réduire  $R$  en choisissant un métal de faible résistivité et en augmentant le diamètre des conducteurs ; mais cela pose de sérieux problèmes techniques et économiques. Une meilleure solution consiste à augmenter la tension  $V$  en utilisant des lignes haute tension (des centaines de milliers de volts). L'augmentation de  $V$  pour le transport de la puissance et la réduction de  $V$  pour la distribution aux usagers sont réalisées à l'aide de transformateurs et cela n'est possible qu'avec des courants alternatifs.



### POINTS-CLÉS

- Un fil de connexion idéal a une résistance négligeable. Le champ électrique y est nul et tous ses points sont équipotentiels. En régime quasi stationnaire l'intensité est la même en tous les points d'une branche.
- Le courant électrique a été initialement introduit en relation avec l'électrolyse et sa direction conventionnelle a été choisie par convention comme celle du mouvement des ions positifs. Dans un métal, le courant est dû au mouvement des électrons libres négatifs, le courant est donc

dans le sens opposé à leur mouvement. Normalement le courant sort de la borne positive du générateur et entre par la borne négative (les électrons sortent de la borne négative et entrent par la borne positive). Dans un circuit avec plusieurs générateurs, un générateur peut être branché en opposition, le courant entre alors dans ce générateur à sa borne positive et sort de sa borne négative ; c'est le cas d'un accumulateur en charge.

- Seule la d.d.p. entre les points d'un circuit a un sens ; elle est liée à la puissance qui apparaît entre ces points par la relation  $P = IV$ . Noter que la notation utilisée couramment est  $V_{AB}$  pour  $V_A - V_B$ , contrairement à la distance algébrique sur un axe  $AB = x_B - x_A$ . C'est donc la chute de potentiel.

## QUESTIONS DE RÉFLEXION

1. Une d.d.p.  $V$  est branchée aux extrémités d'une tige de longueur  $L$ . Analysez le champ et le potentiel électriques à l'intérieur de la tige. Pourquoi ce conducteur ne peut pas être en équilibre ? Est-ce qu'une densité de charge existe à l'intérieur du conducteur ? Si la réponse est non, comment expliquer l'existence du courant ?
2. Si vous branchez une pile aux extrémités d'un fil très fin, il fond. Les enceintes de certains instruments sont munies de trous d'aération. Expliquez pourquoi.
3. Un courant continu ne change pas de sens au cours du temps ; les porteurs de charge se déplacent donc toujours dans le même sens. Que se passe-t-il dans le cas d'un courant alternatif ? Comment les porteurs de charges se déplacent-ils ? Comment l'énergie est-elle transmise ?
4. Dans une solution électrolytique, les ions positifs et les ions négatifs se déplacent. Soient  $q^+$ ,  $v^+$  et  $n^+$  la charge des ions positifs, leur vitesse et leur nombre par unité de volume et de même,  $q^-$ ,  $v^-$  et  $n^-$  pour les ions négatifs. Montrez que  $q^+n^+ = q^-n^-$ . Écrivez l'expression de la densité de courant.
5. La vitesse de dérive dans les métaux est une fraction de mm/s. Si la charge se déplace si lentement, pourquoi une lampe s'allume-t-elle presque immédiatement lorsque vous la branchez ? Quel est le temps que met votre appel téléphonique pour arriver à votre correspondant à une distance de 1000 km ?

6. Peut-on dire que « les charges sont produites par les batteries » et qu'un électron « sort de la borne négative et entre par la borne positive » ?
7. Si vous réduisez la longueur du fil chauffant dans un réchaud électrique, est-ce que la chaleur dégagée par effet Joule augmente ou diminue ?
8. La loi de conduction de l'électricité dans une tige  $I = dq/dt = \Delta V/R = \sigma(S/L)\Delta V$  ressemble à la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur,  $dQ/dt = -k_T(S/L)\Delta T$ , où  $k_T$  est la conductivité thermique. En fait le rapport  $k_T/\sigma$  est environ  $6 \times 10^{-6} \text{W}\Omega/\text{K}$  pour les métaux. Est-ce que cela veut dire une relation entre les deux phénomènes ?
9. Considérons un conducteur cylindrique de longueur  $L$  et de section  $S$ . Vérifiez que la dissipation de puissance par effet Joule  $P_{(J)v} = \rho \mathbf{j}^2$  par unité de volume correspond bien à  $RI^2$  dans le conducteur (où  $R = \rho L/S$ ).
10. Deux ampoules de 100 W et 50 W fonctionnent sous 220 V. Laquelle a la plus grande résistance ? Laquelle transporte la plus grande intensité ? Que se passe-t-il si vous les branchez sous 110 V et sous 440 V ? Si vous les branchez en série sous 220, obtenez-vous plus de lumière ?
11. Pouvez-vous expliquer pourquoi les ampoules ordinaires à filament de tungstène grillent habituellement dès qu'on les branche en émettant brièvement une lumière intense bleuâtre ?
12. Pourquoi le champ électrique doit être nul dans un supraconducteur ? Qu'est ce qui fait alors déplacer les porteurs de charge ? Que pouvez-vous dire de la d.d.p. ? Pourquoi un courant électrique persiste-t-il dans un supraconducteur sans générateur ?
13. Pouvez-vous deviner la forme de la courbe caractéristique d'une ampoule à filament de tungstène ?
14. Une lampe à gaz, destinée à émettre des éclairs, a la caractéristique illustrée dans la Fig. 2.7a. Discutez la variation de la résistance de cette

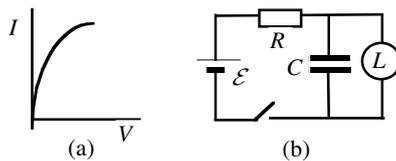


Figure 2-7

lampe comme fonction de la tension appliquée. La Fig. 2.7b représente un circuit utilisant cette lampe  $L$ . Lorsqu'on ferme l'interrupteur, la lampe émet un éclair brillant. Expliquez pourquoi.

**15.** C'est un courant intense, circulant dans le corps humain, qui est dangereux plutôt que la haute tension. Pourquoi alors avertir de la haute tension plutôt que d'un courant intense près des équipements électriques ? Comment pouvez-vous aider une personne électrocutée sans risquer votre propre vie ? Est-il dangereux de toucher un câble haute tension ? Est-il dangereux de toucher l'armature d'un condensateur chargé ? Pourquoi un oiseau peut se poser sur une ligne haute tension sans être électrocuté ?

## EXERCICES CORRIGÉS

Données : Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,0221 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , masse atomique du cuivre : 63,55 et celle de l'argent : 107,868 ; masse volumique du cuivre : 8920  $\text{kg/m}^3$  et celle de l'argent : 10500  $\text{kg/m}^3$ .

**2-1** Un faisceau d'électrons de section  $0,20 \text{ cm}^2$  contient  $N = 1,0 \times 10^6$  électrons par  $\text{cm}^3$ , qui se déplacent avec une vitesse  $v = 1,0 \times 10^5 \text{ m/s}$  dans la direction  $Ox$ . Calculez la densité de courant et l'intensité correspondantes ?

**2-2** On voudrait déposer une couche d'aluminium d'épaisseur  $e = 5 \text{ nm}$  en évaporant le métal sur un morceau de verre carré. On cesse l'évaporation quand la résistance entre deux côtés opposés de la couche atteint une valeur convenable  $R$ . Quelle doit être la valeur de  $R$ , si la résistivité de l'aluminium est de  $2,83 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$  ? Est-ce que  $R$  dépend du côté de la couche ?

**2-3** Supposons que la densité de courant dans un conducteur cylindrique varie avec la distance  $r$  à l'axe comme  $j = j_0 r$ . Calculez l'intensité si le conducteur a un rayon  $a$ .

**2-4** Un nuage porte une charge positive de 10 coulombs et se décharge en 1 ms. Quelle est l'intensité moyenne dans cette décharge ? Quel est le nombre d'électrons correspondant ? Dans quel sens se déplacent-ils ? Supposant que la d.d.p. entre le nuage et le sol est de  $3 \times 10^6 \text{ V}$ , quelle est l'énergie libérée dans cette décharge ? Quel est le temps nécessaire pour qu'une ampoule de 100 W consomme cette énergie ?

**2-5** Un fil de cuivre de diamètre 1 mm et de longueur 2 m transporte un courant de 1 A. Calculez la densité de courant. Supposant que le nombre d'électrons de conduction est un électron par atome, calculez la vitesse de dérive. Quel est le champ électrique dans ce fil ? Quelle est sa résistance ? Quelle est la d.d.p. à ses extrémités ?

**2-6** Un fer à repasser a une puissance de 1500 W et fonctionne sous 220 V et 200°C.

**a)** Déterminez l'intensité de courant et la résistance à chaud.

**b)** Le fil chauffant est en nichrome ( $\rho = 150 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  et  $\alpha = 0,4 \times 10^{-3} \text{K}^{-1}$ ) et il a une longueur de 8 m. Quel doit être le diamètre de ce fil ?

**c)** Calculez la résistance à froid de ce fil.

**2-7** Dans un thermomètre à résistance de platine, on utilise la variation de la résistance pour mesurer les variations de température. Quelle est la résistance d'un fil de platine de longueur 1 m et de diamètre 0,1 mm à 0°C ? Quelle est la variation de sa résistance qui correspond à une variation de 1,00 °C ? À quelle température la résistance est-elle doublée ?

**2-8** On voudrait réaliser un conducteur dont la résistance ne varie pas beaucoup avec la température, en plaçant en série deux cylindres de carbone et de cuivre de même section. Quel doit être le rapport de leurs longueurs ?

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**2-1** La densité de courant est

$$\begin{aligned} j &= -eNv \\ &= (-1,6 \times 10^{-19} \text{C}) \times (1,0 \times 10^{12} \text{ électrons/m}^3) (1,0 \times 10^5 \text{ m/s}) \\ &= -1,6 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

La charge de l'électron étant négative, la densité de courant est dans le sens opposé au mouvement. La densité de courant est donc

$$I = |j|S = (1,6 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}) \times (0,2 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 3,2 \times 10^{-7} \text{ A}$$

**2-2** Soit  $a$  le côté du carré. La résistance de la couche entre deux côtés opposés est

$$R = \rho a / (ea) = \rho / e = 2,83 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm} / 5 \times 10^{-7} \text{ cm} = 5,66 \Omega$$

Elle est indépendante du côté de la plaque.

**2-3** Considérons une couche cylindrique située entre les deux cylindres de rayon  $r$  et  $r + dr$  (Fig. 2.8). La section normale du cylindre de rayon  $r$  est  $\pi r^2$ . Sa variation lorsque  $r$  varie de  $dr$  est  $dS = 2\pi r dr$ ;  $c'$  est la section normale de la couche cylindrique. On l'obtient aussi

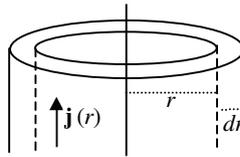


Figure 2-8

en évaluant l'aire d'une bande de longueur  $2\pi r$  (périmètre du cercle intérieur) et de largeur  $dr$ . L'intensité dans cette couche est  $dI = j(r)dS = 2\pi j_o r^2 dr$ . L'intensité totale est obtenue par intégration sur la section du conducteur :

$$I = \int_0^a dI = 2\pi j_o \int_0^a r^2 dr = (2/3)\pi j_o a^3$$

**2-4** L'intensité moyenne dans la décharge est

$$I = Q/t = 10 \text{ C} / 1 \times 10^{-3} \text{ s} = 10^4 \text{ A}.$$

Le nombre d'électrons qui portent cette charge est

$$Q/e = 10 / 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} = 6,2 \times 10^{19} \text{ électrons}.$$

Le sol est négatif ; les électrons se déplacent du sol vers le nuage. L'énergie libérée dans cette décharge est

$$U = QV = 10 \text{ C} \times (3 \times 10^6) = 3 \times 10^7 \text{ J} ;$$

ce qui correspond à la consommation d'une lampe de 100 W pendant un temps  $t = U/P = 3 \times 10^7 \text{ J} / 100 \text{ W} = 3 \times 10^5 \text{ s}$  soit 83 h.

**2-5** Supposant que la densité de courant est uniforme sur la section, sa valeur est

$$j = I/S = 1 \text{ A} / \pi (0,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 1,27 \times 10^6 \text{ A/m}^2.$$

1 m<sup>3</sup> de cuivre pèse 8 900 kg et sa masse atomique est 63,5 g/mole. Le nombre d'Avogadro ( $N_A = 6,0 \times 10^{23}$  atomes/mol) est le nombre d'atomes dans 63,5 g de cuivre. Le nombre d'électrons par unité de volume, approximativement égal au nombre d'atomes dans 1 m<sup>3</sup>, est

$$n_e = (8,90 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mole} \\ / (63,5 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}) = 8,44 \times 10^{28} \text{ électrons/m}^3$$

Comme  $j = en_e v_d$ , c'est-à-dire  $v_d = j/en_e$ , nous trouvons

$$v_d = (1,27 \times 10^6) / (1,60 \times 10^{-19})(8,44 \times 10^{28}) = 9,40 \times 10^{-5} \text{ m/s.}$$

• Le champ électrique dans le fil est donné par la loi d'Ohm

$$E = \rho j = (1,7 \times 10^{-8} \text{ W.m})(1,27 \times 10^6 \text{ A/m}^2) = 0,0216 \text{ V/m}$$

• La résistance du fil est

$$R = \rho L/S = (1,7 \times 10^{-8} \Omega.\text{m})(2,0\text{m}) / \pi(0,5 \times 10^{-3} \text{m})^2 \\ = 4,33 \times 10^{-2} \Omega$$

• La d.d.p. entre ses extrémités est

$$V = EL = (0,0216 \text{ V/m}) \times 2 \text{ m} = 0,0433 \text{ V}$$

Elle est bien égale à  $IR$ .

**2-6 a)** La tension et la puissance sont données par les relations  $V = IR$  et  $P = RI^2$ . Nous en déduisons que

$$I = P/V = 1\,500 \text{ W}/220 \text{ V} = 6,82 \text{ A} \\ \text{et } R = V^2/P = (220 \text{ V})^2/1\,500 \text{ W} = 32,3 \Omega$$

**b)** La résistance du fil est donnée par la relation  $R = \rho L/S = 4\rho L/\pi d^2$ , d'où

$$d = \sqrt{4\rho L/\pi R} = 0,69 \text{ mm}$$

**c)** Négligeant l'effet de la dilatation, la résistance varie avec la température comme la résistivité, selon la relation  $R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$ . La résistance à la température normale (20 °C) est donc

$$R_0 = R/(1 + \alpha\Delta T) = 32,3 \Omega / (1 + 0,4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} \times 180 \text{ K}) \\ = 30,1 \Omega$$

**2-7** La résistance à 0° est

$$R_0 = \rho_0 L/S = (10,6 \times 10^{-8} \Omega.\text{m})(1\text{m}) / \pi(0,05 \times 10^{-3} \text{m})^2 = 13,5 \Omega$$

- La variation de la résistance, due à une variation de 1,00 K, est

$$R - R_0 = R_0 \alpha_0 \Delta T = (13,5 \, \Omega)(0,003 \, 927 \, \text{K}^{-1} \times 1 \, \text{K}) = 0,053 \, \Omega$$

- La résistance est doublée si  $R_0(1 + \alpha_0 \Delta T) = 2R_0$ , donc  $\alpha_0 \Delta T = 1$ , soit

$$\Delta T = 1/\alpha_0 = 254,6 \, \text{K}$$

**2-8** Soient  $l_{\text{cu}}$  et  $l_{\text{ca}}$  les longueurs des cylindres de cuivre et de carbone. Négligeant les effets de la dilatation, la résistance des deux cylindres en série à la température  $T$  est

$$\begin{aligned} R &= \rho_{\text{cu}} l_{\text{cu}}/S + \rho_{\text{ca}} l_{\text{ca}}/S \\ &= (1/S)[l_{\text{cu}} \rho_{\text{o,cu}}(1 + \alpha_{\text{cu}} T) + l_{\text{ca}} \rho_{\text{o,ca}}(1 + \alpha_{\text{ca}} T)] \\ &= (1/S)[l_{\text{cu}} \rho_{\text{o,cu}} + l_{\text{ca}} \rho_{\text{o,ca}} + T(l_{\text{cu}} \rho_{\text{o,cu}} \alpha_{\text{cu}} + l_{\text{ca}} \rho_{\text{o,ca}} \alpha_{\text{ca}})] \end{aligned}$$

$R$  varie peu avec  $T$  si le coefficient de  $T$  est nul, d'où la condition

$$\begin{aligned} l_{\text{cu}}/l_{\text{ca}} &= -\rho_{\text{o,ca}} \alpha_{\text{ca}}/\rho_{\text{o,cu}} \alpha_{\text{cu}} \\ &= -(3 \, 500 \times 10^{-8})(-5 \times 10^{-4})/(1,67 \times 10^{-8})(3,93 \times 10^{-3}) \\ &\approx 267 \end{aligned}$$

## Courant alternatif

## PLAN

- 3.1 Courant sinusoïdal
- 3.2 Représentation trigonométrique et représentation de Fresnel
- 3.3 Représentation complexe
- 3.4 Effet Joule et valeurs efficaces
- 3.5 Circuit oscillant LC
- 3.6 Circuit oscillant LCR

## OBJECTIF

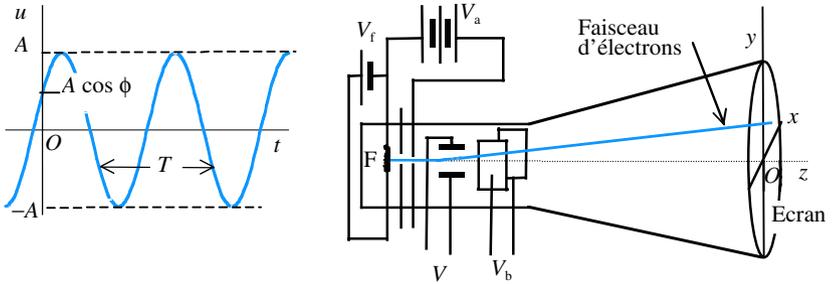
- Études des éléments d'un circuit en courant sinusoïdal et des oscillations propres d'un circuit.

### 3.1 COURANT SINUSOÏDAL

Un système est *périodique* si toutes ses grandeurs reprennent les mêmes valeurs aux instants séparés par un intervalle de temps  $T$ , appelé *période*. La *fréquence*  $\nu$  est le nombre d'oscillations complètes par unité de temps. Elle est liée à la période par la relation

$$\nu = 1/T. \quad (3.1)$$

La période est exprimée ordinairement en *secondes* (s) et la fréquence en  $s^{-1}$ . Cette unité de fréquence est appelée aussi *Hertz* (Hz.) Pour les hautes fréquences, on emploie le *kilohertz* (kHz =  $10^3$  Hz), mégahertz (MHz =  $10^6$  Hz) et le gigahertz (GHz =  $10^9$  Hz).



**Figure 3-1** a) Tension harmonique et b) Oscilloscope cathodique : les électrons, émis par un filament chauffé  $F$ , sont accélérés par un potentiel  $V_a$ . Ils sont déviés dans la direction  $Oy$  par la tension à observer  $V$  et dans la direction  $Ox$  par la tension de balayage  $V_b$ . Ils produisent sur l'écran lumineux une tache déplacée dans la direction  $Oy$  proportionnellement à  $V$  et dans la direction  $Ox$  proportionnellement au temps. On observe donc la courbe de  $V$  en fonction du temps.

Une fonction périodique particulièrement simple et utile est la fonction **harmonique** ou **sinusoïdale** de la forme

$$u = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.2)$$

$(\omega t + \phi)$  est la **phase** à l'instant  $t$  et  $\phi$  est la **phase initiale** (souvent appelée **phase**, pour simplifier). La phase a les dimensions d'un angle ; elle est donc exprimée en **radians** (rad) et la **pulsation**  $\omega$  est exprimée en radians *par seconde* (rad/s). La fonction (3.2) reprend les mêmes valeurs si la phase varie de  $2\pi$ , c'est-à-dire après une période  $T$  telle que  $\omega(t + T) + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$ , d'où les relations de  $\omega$  à la période  $T$  et la fréquence  $\nu$

$$T = 2\pi/\omega \quad \text{et} \quad \boxed{\nu = 1/T = \omega/2\pi} \quad (3.3)$$

$A$  est l'**amplitude** (que nous désignons aussi par  $u_m$ ).  $u$  oscille entre  $-A$  et  $+A$  (Fig. 3.1a).  $A$  et  $u$  s'expriment avec les mêmes unités. Un choix convenable de  $\phi$  permet toujours d'avoir  $A$  positive et nous prenons  $\phi$  compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

Dans la suite,  $u$  peut être une d.d.p. ou une intensité de courant dans un circuit alimenté par un générateur de pulsation  $\omega$ . Il est évident que la tension entre deux points quelconques du circuit et les intensités de courant dans les diverses branches sont sinusoïdales de même pulsation.

$u$  peut être aussi la tension ou l'intensité dans un circuit oscillant librement (c'est-à-dire non alimenté par un générateur) ;  $\omega$  est alors la pulsation propre du circuit et elle est désignée par  $\omega_0$ . On peut montrer que  $u$  vérifie l'équation différentielle

$$\boxed{\ddot{u} + \omega^2 u = 0} \quad (\text{où } \ddot{u} \equiv d^2u/dt^2), \quad (3.4)$$

La pulsation  $\omega$  est indépendante des conditions initiales ; c'est une grandeur caractéristique du circuit tandis que les constantes  $A$  et  $\phi$  dépendent de la façon de l'exciter.



Si  $u$  est une tension électrique, elle peut être facilement observée en la branchant aux bornes d'un oscilloscope (Fig. 3.1b). Si la tension est harmonique, l'instrument permet de mesurer son amplitude et sa fréquence. Il permet aussi de déterminer le déphasage de deux tensions sinusoïdales. Pour observer un courant électrique dans une résistance, on branche l'oscilloscope aux bornes de la résistance.

## 3.2 REPRÉSENTATION TRIGONOMÉTRIQUE ET REPRÉSENTATION DE FRESNEL

La solution générale de l'équation différentielle (3.4) peut être écrite sous l'une des formes trigonométriques :

$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A' \sin(\omega t + \phi') = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \quad (3.5)$$

Ces expressions sont équivalentes et dépendent de deux paramètres qui peuvent être déterminés à partir des conditions initiales. Les relations qui lient ces paramètres sont

$$A' = A \quad \text{et} \quad \phi' = \phi + \pi/2 \quad (3.6)$$

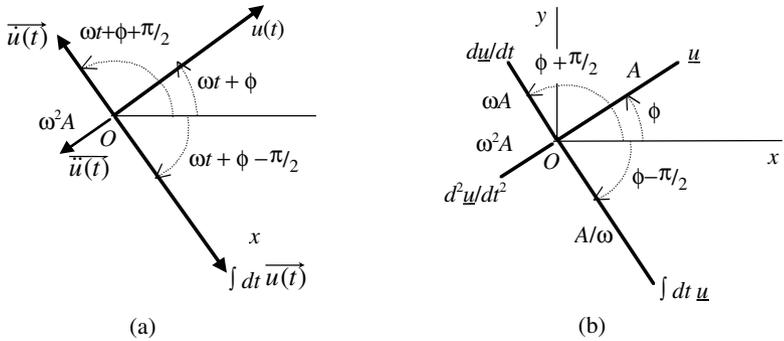
$$A_1 = A \cos \phi = A \sin \phi', \quad (3.7)$$

$$A_2 = -A \sin \phi = A \cos \phi' \quad (3.8)$$

Notons que  $A_1$  et  $A_2$  sont positives, négatives ou nulles. Si nous choisissons les amplitudes  $A$  et  $A'$  positives, nous avons aussi les relations

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \tan \phi = -A_2/A_1, \quad \tan \phi' = A_1/A_2 \quad (3.9)$$

La *représentation de Fresnel* (ou *des vecteurs tournants*) considère la fonction  $u = A \cos(\omega t + \phi)$  comme la projection sur un axe  $Ox$  d'un vecteur  $\vec{u}(t)$  de module  $A$  et qui fait avec  $Ox$  un angle  $(\omega t + \phi)$



**Figure 3-2** Représentation d'une fonction harmonique, ses dérivées et sa primitive : **a)** représentation de Fresnel et **b)** représentation complexe pour  $t = 0$ .

(Fig. 3.2a). Il tourne donc autour de  $O$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre en partant d'un angle  $\phi$  à l'instant  $t = 0$ . De même, la fonction  $A \sin(\omega t + \phi)$  peut être considérée comme la projection du vecteur  $\vec{u}(t)$  sur l'axe  $Oy$  perpendiculaire à  $Ox$ .

La dérivée de  $u(t)$ ,  $\dot{u} = \omega A \cos(\omega t + \phi + \pi/2)$ , est représentée par le vecteur de longueur  $\omega A$  en avance de phase de  $\pi/2$  sur  $u(t)$  et sa dérivée seconde  $\ddot{u} = \omega^2 A \cos(\omega t + \phi + \pi)$  est représentée par le vecteur de longueur  $\omega^2 A$  en avance de phase de  $\pi$  sur  $u(t)$ . La primitive de  $u(t)$  est représentée par le vecteur  $\int dt \vec{u}(t)$  de module  $A/\omega$  et en retard de phase de  $\pi/2$  sur  $u(t)$ . Si toutes les grandeurs à considérer ont la même pulsation  $\omega$ , il suffit de les représenter à l'instant  $t = 0$  ; leur représentation à l'instant  $t$  est obtenue par une rotation de la figure d'un angle  $\omega t$ .

L'équation des oscillations (3.4) est *linéaire et homogène*. Ses solutions ont donc une propriété remarquable : si  $u(t)$  est une solution et  $C$  est une constante arbitraire,  $Cu(t)$  est aussi une solution. Plus généralement, si  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont deux solutions, toute combinaison linéaire avec des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  arbitraires,

$$\begin{aligned} u &= C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) = C_1 A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ &= A \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (3.10)$$

est aussi une solution de l'équation avec  $A$  et  $\phi$  données par

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \\
 \cos \phi &= (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2)/A, \\
 \sin \phi &= (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2)/A
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Les conditions initiales de  $u(t)$  sont des combinaisons linéaires des conditions initiales de  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  avec les mêmes coefficients  $C_1$  et  $C_2$ . C'est le **principe de superposition** des solutions. La représentation de Fresnel illustre bien cette propriété. Les vecteurs de Fresnel  $\vec{u}_1(t)$  et  $\vec{u}_2(t)$ , qui représentent  $u_1$  et  $u_2$ , tournent autour de l'origine avec la même vitesse angulaire  $\omega$  et forment entre eux un angle constant  $(\phi_1 - \phi_2)$ . Leur somme  $u$  est la projection sur l'axe  $Ox$  de la somme vectorielle  $\vec{u}_1(t) + \vec{u}_2(t)$ . C'est un vecteur tournant avec la même vitesse angulaire  $\omega$ , de module  $A$  et de phase  $\omega t + \phi$ . Un calcul géométrique simple donne justement les relations (3.11). Le maximum de l'amplitude  $A$  est  $(A_1 + A_2)$  si  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont *en phase* ( $\phi_1 = \phi_2$ ) et le minimum de  $A$  est  $|A_1 - A_2|$  si  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont *en opposition de phase* ( $\phi_1 = \phi_2 \pm \pi$ ). Si  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont déphasés de  $\pm\pi/2$ , on dit qu'ils sont en *quadrature*. Les vecteurs qui les représentent sont orthogonaux et l'amplitude de leur superposition est  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ .

Si  $u_1$  et  $u_2$  n'ont pas la même fréquence, les vecteurs qui les représentent tournent à des vitesses différentes. La vibration résultante n'est pas périodique (sauf si  $\omega_1/\omega_2$  est égal au rapport de deux nombres entiers). Elle oscille entre une valeur maximale  $A_1 + A_2$ , lorsque les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens, et une valeur minimale  $|A_1 - A_2|$ , lorsque les deux vecteurs sont colinéaires et de sens opposés. Nous avons alors un phénomène de *battements* de fréquence  $\nu = |\nu_1 - \nu_2|$ .

### 3.3 REPRÉSENTATION COMPLEXE

Pour préciser les notations, rappelons d'abord quelques éléments de l'analyse complexe. Une variable complexe (désignée ici par un symbole souligné) s'écrit sous la forme algébrique

$$\underline{u} = x + jy ; \quad x = \operatorname{Re} \underline{u} \quad \text{et} \quad y = \operatorname{Im} \underline{u} \tag{3.12}$$

Où nous avons posé  $j^2 \equiv -1$ .  $x$  est la *partie réelle* de  $\underline{u}$  et  $y$  est la *partie imaginaire* de  $\underline{u}$ . Nous pouvons utiliser aussi la forme exponentielle

$$\underline{u} = \rho e^{j\phi} \quad \text{où } \rho = \text{module } \underline{u} \text{ et } \phi = \text{phase } \underline{u} \quad (3.13)$$

$\rho$  est le *module* de  $\underline{u}$  et  $\phi$  est sa *phase*. Utilisant la relation d'Euler<sup>(1)</sup>

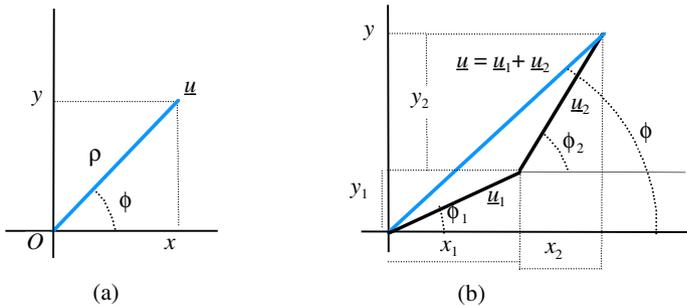
$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi, \quad (3.14)$$

nous trouvons les relations liant les deux formes<sup>(2)</sup>

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi ;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \phi = x/\rho, \quad \sin \phi = y/\rho \quad (\tan \phi = y/x) \quad (3.15)$$

Le nombre complexe  $u$  peut être représenté par un point du plan complexe (Fig. 3.3a) ;  $x$  et  $y$  sont alors les coordonnées cartésiennes de ce point tandis que  $\rho$  et  $\phi$  sont ses coordonnées polaires.



**Figure 3-3** a) Nombre complexe  $\underline{u}$ . b) Sommes de deux grandeurs complexes  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$ .

(1) Pour établir cette relation, on écrit la série de Taylor

$$e^{j\theta} = 1 + (j\theta)/1! + (j\theta)^2/2! + (j\theta)^3/3! + (j\theta)^4/4! + \dots$$

Notant que  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = -j$ ,  $j^4 = 1$  et ainsi de suite, nous pouvons réécrire cette série sous la forme

$$e^{j\theta} = [1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! + \dots] + j[\theta/1! - \theta^3/3! + \dots]$$

La série du premier crochet est la série de Taylor pour  $\cos \theta$  et celle du second crochet est la série de  $\sin \theta$ , d'où la relation d'Euler.

(2) Rappelons que la valeur de la tangente ne détermine l'angle qu'à  $\pi$  près. La fonction  $\text{Arctan}(x)$  est la détermination principale ( $-\pi/2 < x < \pi/2$ ).

La somme de deux nombres complexes peut être facilement évaluée en utilisant la forme algébrique :

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (3.16)$$

Le produit et le quotient de deux nombres complexes peuvent être évalués facilement en utilisant la forme exponentielle :

$$\underline{u}_1 \underline{u}_2 = (\rho_1 e^{j\phi_1})(\rho_2 e^{j\phi_2}) = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \quad (3.17)$$

$$\underline{u}_1 / \underline{u}_2 = (\rho_1 e^{j\phi_1}) / (\rho_2 e^{j\phi_2}) = (\rho_1 / \rho_2) e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \quad (3.18)$$

La solution générale de l'équation différentielle (3.4), s'écrit en notation complexe.

$$\underline{u}(t) = \underline{C} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{C} \equiv C e^{j\alpha}, \quad (3.19)$$

$\underline{C}$  est l'amplitude complexe telle que  $C = |\underline{C}|$ . Cette expression dépend aussi de deux paramètres  $C$  et  $\alpha$ . Prenant la partie réelle, nous trouvons

$$u(t) = \mathcal{Re}[\underline{u}(t)] = \mathcal{Re}[C e^{j(\omega t + \alpha)}] = C \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.20)$$

Comparant avec la forme  $u = A \cos(\omega t + \phi)$ , nous déduisons que

$$A = C = \text{module } \underline{C} \quad \text{et} \quad \phi = \alpha = \text{phase } \underline{C} \quad (3.21)$$

Ainsi l'amplitude de la solution réelle  $u$  est égale au module de l'amplitude de la solution complexe  $\underline{u}$  et la phase de  $u$  est égale à la phase de l'amplitude complexe. Le diagramme de Fresnel et le diagramme du plan complexe sont donc identiques. La représentation complexe est beaucoup plus pratique que la représentation de Fresnel ; elle est même inévitable pour analyser les circuits complexes.

La dérivée de la fonction  $\underline{u}(t) = \underline{A} e^{j\omega t}$  et sa primitive sont des fonctions harmoniques de même pulsation et données par les expressions

$$\dot{\underline{u}} = j\omega \underline{u}(t) = \omega \underline{A} e^{j(\omega t + \phi + \pi/2)} = \omega \underline{A} e^{j\pi/2} e^{j\omega t} \quad (3.22)$$

$$\int dt \underline{u}(t) = \underline{u} / j\omega = (A/\omega) e^{j(\omega t + \phi - \pi/2)} = (\underline{A}/\omega) e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \quad (3.23)$$



La dérivée d'une fonction harmonique  $\underline{u}$  est donc obtenue en la multipliant par  $j\omega$  ; ce qui revient à multiplier son amplitude par  $\omega$  et augmenter sa phase de  $\pi/2$  (Fig. 3.2b). La primitive de  $\underline{u}$  est obtenue en la divisant par  $j\omega$  ; ce qui revient à diviser son amplitude par  $\omega$  et diminuer sa phase de  $\pi/2$ . La dépendance du temps de ces fonctions est simplement un facteur  $e^{j\omega t}$ . La forme exponentielle est donc beaucoup plus facile à manipuler que les fonctions trigonométriques. À cause de la

linéarité des équations, la partie réelle qui représente effectivement la grandeur physique est évaluée à la fin du calcul. Notons que la représentation complexe n'est pas valable pour des grandeurs non linéaires telles que l'énergie. De telles grandeurs n'obéissent pas au principe de superposition ; elles doivent être évaluées directement en utilisant les grandeurs réelles.

L'analyse complexe simplifie le calcul de la superposition de deux fonctions harmoniques (3.10). En effet faisant d'abord la somme des fonctions complexes correspondantes, nous pouvons écrire

$$\underline{u} = \underline{A}_1 e^{j\omega t} + \underline{A}_2 e^{j\omega t} = \underline{A} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A_1 e^{j\phi_1} + \underline{A}_2 e^{j\phi_2} \quad (3.24)$$

Ainsi pour ajouter deux fonctions harmoniques de même pulsation, il suffit d'ajouter algébriquement leurs amplitudes complexes.

Explicitant les amplitudes complexes, nous trouvons

$$\underline{A} = (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) + j(A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) = A e^{j\phi} \quad (3.25)$$

où  $A$  et  $\phi$  sont justement données par (3.11). La fonction  $\underline{u}$  s'écrit donc

$$\underline{u} = A e^{j\phi} e^{j\omega t} = A e^{j(\omega t + \phi)} \text{ d'où } u = \mathcal{Re} \underline{u} = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.26)$$

Considérons, par exemple, une résistance  $R$ , une self-inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$  en série Fig.3.4a). La loi de conservation de la charge exige que l'intensité soit la même dans tous les éléments dans l'approximation quasi stationnaire. La d.d.p. aux bornes d'éléments en série s'ajoutent algébriquement à tout instant :

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_A - V_B = V_A - V_M + V_M - V_N + V_N - V_B \\ &= V_{AM} + V_{MN} + V_{NB} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si  $I = I_m \cos(\omega t + \phi_1)$  est l'intensité de courant orientée vers l'armature du condensateur qui porte la charge  $Q(t)$ , la charge du condensateur est telle que  $I = \dot{Q}$ , donc

$$Q = (I_m/\omega) \sin(\omega t + \phi_1) = (I_m/\omega) \cos(\omega t + \phi_1 - \pi/2) \quad (3.28)$$

Les d.d.p. aux bornes de la résistance, de la self-inductance et du condensateur sont respectivement

$$\begin{aligned}
 V_{AM} &\equiv V_R = RI = RI_m \cos(\omega t + \phi_1) \\
 V_{MN} &\equiv V_L = L\dot{I} = -L\omega I_m \sin(\omega t + \phi_1) = L\omega I_m \cos(\omega t + \phi_1 + \pi/2) \\
 V_{NB} &\equiv V_C = Q/C = (I_m/C\omega) \cos(\omega t + \phi_1 - \pi/2)
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$



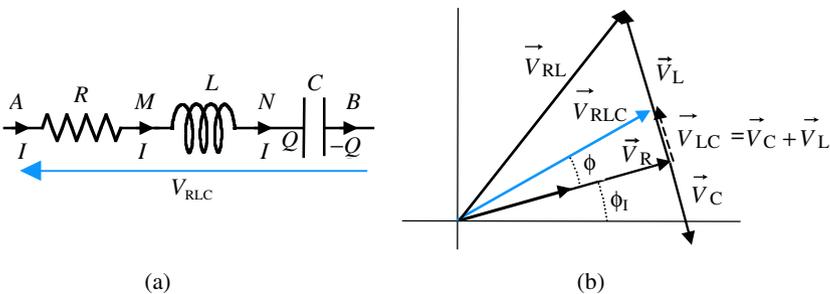
Ainsi les d.d.p. dans le circuit sont des fonctions harmoniques de même pulsation  $\omega$ . Nous écrivons toujours une grandeur harmonique comme une fonction cosinus d'amplitude positive et de phase comprise entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

La d.d.p. aux bornes de  $R$  est en phase avec l'intensité et elle a pour amplitude  $RI_m$ . Aux bornes de la self-inductance, la d.d.p. est en avance de phase de  $\pi/2$  sur l'intensité et elle a pour amplitude  $\omega LI_m$ . Finalement aux bornes du condensateur, la d.d.p. est en retard de phase de  $\pi/2$  sur l'intensité et son amplitude est  $I_m/\omega C$ . Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
 V_{AB} &= RI_m \cos(\omega t + \phi_1) + L\omega I_m \cos(\omega t + \phi_1 + \pi/2) \\
 &\quad + (I_m/C\omega) \cos(\omega t + \phi_1 - \pi/2) \tag{3.30} \\
 &= RI_m \cos(\omega t + \phi_1) + I_m(1/C\omega - L\omega) \sin(\omega t + \phi_1)
 \end{aligned}$$

C'est une expression de la forme (3.5). Utilisant les relations (3.9), nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 V_{AB} &= V_m \cos(\omega t + \phi_I + \phi_{RLC}) \\
 V_m &= I_m \sqrt{R^2 + (1/C\omega - L\omega)^2}, \quad \phi_{RLC} = \text{Arctan}[(L\omega - 1/C\omega)/R]
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$



**Figure 3-4** a) Une résistance, une self-inductance et un condensateur en série.

b) Représentation de Fresnel pour les tensions aux bornes des éléments. La somme des vecteurs  $\vec{V}_L$  et  $\vec{V}_C$  est  $\vec{V}_{LR}$  puis la somme de  $\vec{V}_{LR}$  avec  $\vec{V}_R$  est  $\vec{V}_{RLC}$ .

La représentation de Fresnel pour ces d.d.p. est illustrée dans la fig. 3.4b) où le vecteur  $\vec{I}$ , représentant l'intensité, forme un angle  $\phi_1$  avec l'axe  $Ox$  (origine des phases). Le vecteur  $\vec{V}_R$  de longueur  $RI_m$  est dans la direction de  $\vec{I}$ , le vecteur  $\vec{V}_L$  de longueur  $L\omega I_m$  est en avance de  $\pi/2$  sur  $\vec{I}$  et le vecteur  $\vec{V}_C$  de longueur  $I_m/C\omega$  est en retard de  $\pi/2$  sur  $\vec{I}$ . Pour avoir la tension  $V_{RL}$  aux bornes de l'ensemble  $L$  et  $R$ , par exemple, il faut ajouter les vecteurs  $\vec{V}_R$  et  $\vec{V}_L$ . On trouve le vecteur  $\vec{V}_{LR}$  de module  $V_m = I_m\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ . La tension  $V_{LR}$  est en avance de phase d'un angle  $\phi_{LR} = \text{Arctan}(L\omega/R)$  sur  $I(t)$ . De même, pour avoir la tension  $V_{RLC}$  aux bornes de l'ensemble  $RLC$ , on ajoute d'abord les vecteurs  $\vec{V}_L$  et  $\vec{V}_C$ , qui sont dans des directions opposées. On trouve un vecteur  $\vec{V}_{LC}$  de module  $V_m = I_m|1/C\omega - L\omega|$ . La tension  $V_{LC}$  est en avance ou en retard de phase de  $\pi/2$  sur  $I(t)$  selon que  $L\omega$  est plus grand ou plus petit que  $1/C\omega$ . La tension  $V_{RLC}$  est représentée par le vecteur de module  $V_m$  et en avance de phase  $\phi_{RLC}$  donnés justement par (3.31).

Le circuit étant linéaire, le principe de superposition permet d'utiliser aussi la représentation complexe. Pour cela, nous considérons l'intensité complexe  $\underline{I} = I_m e^{j(\omega t - \phi_1)}$  que nous écrivons sous la forme

$$\underline{I} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\phi_1} \quad (3.32)$$

où  $\underline{I}_m$  est l'amplitude complexe en général. Les d.d.p. aux bornes des éléments sont les fonctions complexes

$$\underline{V}_{AM} = R\underline{I} = R\underline{I}_m e^{j\omega t}, \quad \underline{V}_{MN} = L(dI/dt) = j\omega L\underline{I}_m e^{j\omega t},$$

$$\underline{V}_{NB} = Q/C = (1/C) \int dt \underline{I} = (\underline{I}_m/jC) e^{j\omega t} \quad (3.33)$$



Ainsi les tensions et les intensités complexes ont toutes la même dépendance en  $t$ , qui est le facteur  $e^{j\omega t}$ . On simplifie l'écriture des équations en omettant ce facteur ; les équations sont alors des relations algébriques liant les amplitudes complexes. La d.d.p. aux bornes du circuit RLC est donc

$$\underline{V}_{AB} = \underline{I}_m [R + j(\omega L - 1/\omega C)] e^{j\omega t} = I_m e^{j\phi_1} e^{j\omega t}$$

Prenant la partie réelle, nous trouvons les équations (3.31).

### 3.4 EFFET JOULE ET VALEURS EFFICACES

Considérons une intensité  $I = I_m \cos(\omega t + \phi_I)$  dans une résistance  $R$ . La d.d.p. aux bornes de  $R$  est  $V = V_m \cos(\omega t + \phi_I)$  où  $V_m = RI_m$ . L'énergie dissipée par effet Joule dans cette résistance entre  $t$  et  $t + dt$  est

$$dU_{(J)} = V(t)I(t)dt = V_m I_m \cos^2(\omega t + \phi_I)dt \quad (3.34)$$

La puissance instantanée est donc

$$P_{(J)} = V_m I_m \cos^2(\omega t + \phi_I) \quad (3.35)$$

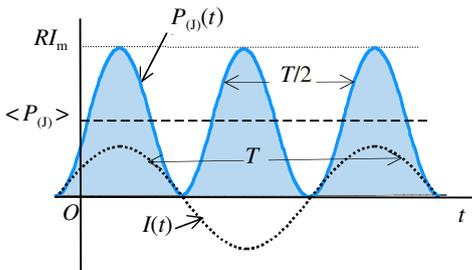


Figure 3-5 Puissance dissipée dans une résistance en fonction de  $t$ .

La Fig.3.5 illustre l'intensité  $I$  et la puissance  $P_{(J)}$  dissipée en fonction du temps.  $P_{(J)}$  oscille entre 0 et  $RI_m^2$  avec une fréquence double de celle du courant. L'énergie dissipée pendant une période est obtenue en intégrant l'expression (3.34) entre  $t$  et  $t + T$ , nous trouvons

$$U_{(J)} = \int_t^{t+T} dU_J = \int_t^{t+T} dt V_m I_m \cos^2(\omega t + \phi_I) = \frac{1}{2} V_m I_m T \quad (3.36)$$

La puissance moyenne dissipée dans la résistance est donc

$$\langle P_{(J)} \rangle = U_J/T = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} RI_m^2 = \frac{1}{2} V_m^2/R \quad (3.37)$$

Nous pouvons définir l'intensité et la d.d.p. efficaces comme étant celles du courant continu qui fournit la même puissance. Elles sont donc

$$I_{\text{eff}} = I_m/\sqrt{2}, \quad V_{\text{eff}} = V_m/\sqrt{2} \quad (3.38)$$

Ce qui permet d'écrire la puissance sous la forme

$$\langle P_{(J)} \rangle = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = R I_{\text{eff}}^2 = V_{\text{eff}}^2 / R \quad (3.39)$$



Lorsqu'on évoque la tension et l'intensité en courant alternatif, il s'agit souvent de valeurs efficaces. Ainsi la distribution d'électricité domestique se fait sous 220 V ; l'amplitude de la tension est donc  $\sqrt{2}V_{\text{eff}} = 311,13 \text{ V}$ .

La définition de la valeur efficace comme celle du courant continu qui produit, en moyenne sur une période, le même effet Joule dans une résistance, est valable dans le cas d'un courant périodique quelconque. Nous avons donc  $I_{\text{eff}}^2 = \langle I(t)^2 \rangle$ , d'où

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{T} \sqrt{\int_t^{t+T} dt I(t)^2} \quad (3.40)$$

Par exemple, une intensité qui prend les valeurs  $I_0$  et  $-I_0$  périodiquement, produit le même effet Joule qu'une intensité  $I_0$  qui ne change pas de signe. La valeur efficace est alors  $I_0$ . Dans le cas d'une intensité en dents de scie entre  $+I_0$  et  $-I_0$ , le calcul montre que la valeur efficace est  $I_0/\sqrt{3}$ .

### 3.5 CIRCUIT OSCILLANT LC

Considérons un circuit formé par un condensateur de capacité  $C$  et une self-inductance  $L$  et ne contenant aucune f.é.m. ou résistance. L'état d'équilibre correspond au condensateur non chargé, l'intensité de courant nulle et la d.d.p. nulle partout. En régime variable, des charges électriques peuvent s'accumuler sur les armatures du condensateur ; ce qui est équivalent à un courant électrique à travers le condensateur.

On excite ce circuit en débranchant le condensateur et en lui donnant une charge initiale  $Q_0$  (à l'aide d'une f.é.m. continue auxiliaire) puis on débranche la f.é.m. et on connecte le condensateur aux bornes de la self-inductance à l'instant  $t = 0$  (Fig.3.6). En orientant le courant vers l'armature qui porte la charge  $Q$ , l'intensité est liée à  $Q$  par la relation de conservation de la charge électrique

$$I = \dot{Q} \quad (3.41)$$

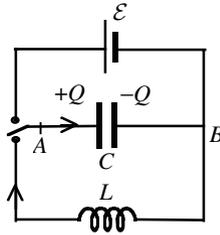


Figure 3-6 Circuit LC.

Les d.d.p. aux bornes du condensateur et de la self-inductance sont respectivement  $V_{MN} = Q/C$  et  $V_{NM} = LI\dot{}$ . Ajoutant membre à membre ces équations nous trouvons l'équation du circuit  $Q/C + LI\dot{}$  = 0. Utilisant la relation (3.41), cette équation s'écrit

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad \text{où } \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (3.42)$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique. Elle admet la solution générale

$$Q = A \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (3.43)$$

La relation (3.41) donne alors l'intensité de courant

$$I = \dot{Q} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi + \pi/2) \quad (3.44)$$

La charge du condensateur et l'intensité sont des fonctions harmoniques du temps de pulsation  $\omega_0$  et de période

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (3.45)$$



Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur, si  $L = 1\text{H}$  et  $C = 1\mu\text{F}$ , on trouve  $T = 6,28 \times 10^{-3}$  s.

Les constantes  $A$  et  $\phi$  peuvent être déterminées en imposant les conditions initiales. Notons que la charge électrique  $Q$  du condensateur ne peut pas subir une discontinuité ; car cela correspondrait à une intensité de courant infinie et une discontinuité de l'énergie du condensateur  $\frac{1}{2}Q^2/C$  ; ce qui est physiquement impossible. De même, l'intensité de courant dans une self-inductance ne peut pas subir une discontinuité ; car cela correspondrait à une discontinuité de l'énergie magnétique  $\frac{1}{2}LI^2$ .  $Q$  et  $I$  doivent donc être continues dans un circuit LC. Par

exemple, si à l'instant  $t = 0$  le condensateur portait une charge  $Q_0$  lorsque nous fermons le circuit, les conditions initiales sont  $Q(0) = Q_0$  et  $I(0) = 0$ . Nous en déduisons que  $Q_0 = A \cos \phi$  et  $0 = -A\omega_0 \sin \phi$ . La solution s'écrit donc

$$Q = Q_0 \cos(\omega_0 t), \quad I = \omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2) = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.46)$$

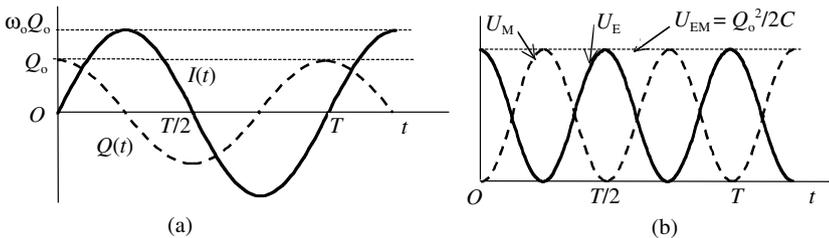
L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur et l'énergie magnétique emmagasinée dans la self-inductance sont respectivement

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{A^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \phi), \quad U_M = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{A^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t + \phi) \quad (3.47)$$

L'énergie électromagnétique totale du circuit est donc

$$U_{EM} = U_E + U_M = \frac{1}{2} A^2 / C. \quad (3.48)$$

Elle est constante car le circuit ne contient aucun générateur qui fournit de l'énergie et aucune résistance qui dissipe l'énergie.



**Figure 3-7** a) Variation de la charge et de l'intensité de courant en fonction de  $t$  dans un circuit LC. b) Variation de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique.



Dans le cas d'un condensateur initialement chargé puis branché sur une self-inductance, l'énergie totale est  $U_{(EM)} = Q_0^2/2C$ , qui est bien l'énergie électrique initialement emmagasinée dans le condensateur. L'énergie est d'abord purement électrique (car  $I = 0$  à l'instant  $t = 0$ ). Pendant la décharge, la charge  $Q$  et l'énergie électrique diminuent tandis que l'intensité et l'énergie magnétique augmentent. Lorsque le condensateur est complètement déchargé, l'énergie est complètement sous la forme magnétique et  $I$  atteint son maximum. À partir de cet instant, un courant de sens opposé commence

à recharger les armatures du condensateur avec des charges opposées aux charges initiales et l'énergie se transforme de nouveau en énergie électrique et ainsi de suite. Ainsi l'énergie magnétique joue le même rôle que l'énergie cinétique et l'énergie électrique joue le rôle de l'énergie potentielle d'un oscillateur mécanique, tel qu'une masse soumise à un ressort. La Fig. 3.7a illustre les variations de  $Q$  et  $I$  en fonction de  $t$  et la Fig. 3.7b illustre les variations des énergies  $U_M$  et  $U_E$ .

Notons aussi que l'équation du circuit peut être établie à partir de la loi de conservation de l'énergie. En effet écrivant que  $U_{EM} = U_E + U_M = C^{te}$ , on obtient en dérivant par rapport au temps l'équation

$$(Q/C)\dot{Q} + LI\dot{I} = 0 \quad (3.49)$$

Utilisant la relation  $\dot{Q} = I$  et divisant par  $I$ , on retrouve l'équation du circuit.

### 3.6 CIRCUIT OSCILLANT LCR

Nous considérons dans cette section un circuit formé par un condensateur  $C$ , une self-inductance  $L$  et une résistance  $R$  placés en série (Fig. 3.8). Dans ce cas l'énergie ne se transforme pas intégralement d'une forme à une autre, à cause de la perte d'énergie par effet Joule ; les oscillations sont donc atténuées.

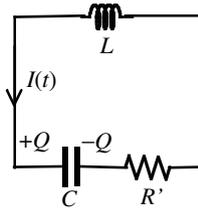


Figure 3-8 Circuit LCR.

L'équation du circuit doit être modifiée par la chute de potentiel  $IR$  aux bornes de la résistance pour devenir

$$Q/C + LI + RI = 0 \quad (3.50)$$

Utilisant la relation  $I = \dot{Q}$ , nous obtenons l'équation

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (3.51)$$

Où nous avons posé

$$\beta = R/2L \quad \text{et} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (3.52)$$

C'est l'équation d'un oscillateur amorti avec un *coefficient d'amortissement*  $\beta$  et une *pulsation propre*  $\omega_0$ .

L'énergie électromagnétique est la somme de l'énergie électrique dans le condensateur et l'énergie magnétique dans la self-inductance :

$$U_{EM} = \frac{1}{2}Q^2/C + \frac{1}{2}LI^2 \quad (3.53)$$

et son taux de variation dans le temps est

$$dU_{EM} = QI/C + LI\dot{I} = LI[\ddot{Q} + \omega_0^2 Q] = -RI\dot{Q} = -RI^2 \quad (3.54)$$

Où nous avons utilisé l'équation du circuit (3.51). Ce taux est toujours négatif ; ce qui veut dire que l'énergie totale du circuit diminue et cette diminution est justement l'énergie dissipée dans la résistance.

Pour résoudre l'équation (3.51), nous pouvons chercher des solutions de la forme

$$Q = e^{-st} \quad (3.55)$$

Où  $s$  est une constante à déterminer. Substituant cette expression à  $Q$  dans (3.51), nous trouvons que cette équation est satisfaite à tout instant  $t$ , si  $s$  est une solution de l'équation caractéristique

$$s^2 - 2\beta s + \omega_0^2 = 0 \quad (3.56)$$

On peut distinguer trois cas selon le signe du discriminant ( $\beta^2 - \omega_0^2$ ) :

**a) Cas d'une grande résistance ( $\beta^2 > \omega_0^2$  c'est-à-dire  $R^2 > 4L/C$ )**

Dans ce cas l'équation caractéristique admet deux racines réelles et positives

$$s_1 = \beta - \sigma \quad \text{et} \quad s_2 = \beta + \sigma \quad \text{avec} \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (3.57)$$

L'équation du circuit (3.51) admet alors les solutions  $e^{-s_1 t}$  et  $e^{-s_2 t}$  ou toute combinaison linéaire de ces solutions. La solution générale est donc

$$Q = A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t} \quad (3.58)$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont deux constantes d'intégration, qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales. L'intensité qui correspond à cette solution est

$$I = \dot{Q} = -s_1 A_1 e^{-s_1 t} - s_2 A_2 e^{-s_2 t} \tag{3.59}$$

Supposons par exemple, qu'on charge le condensateur à  $Q_0$  et on ferme le circuit à l'instant  $t = 0$ . Nous avons alors les conditions initiales

$$Q(t = 0) = Q_0 = A_1 + A_2, \quad I(t = 0) = 0 = -s_1 A_1 - s_2 A_2$$

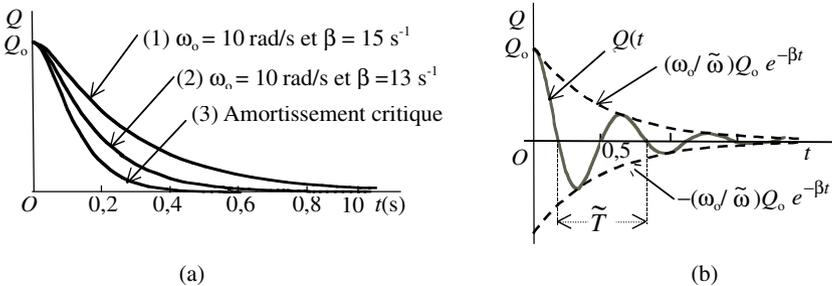
qui admettent la solution

$$A_1 = -(s_2/2\sigma) Q_0, \quad A_2 = (s_1/2\sigma) Q_0$$

La solution s'écrit alors

$$\begin{aligned} Q(t) &= (Q_0/2\sigma)[-s_2 e^{-s_1 t} + s_1 e^{-s_2 t}], \\ I(t) &= (\omega_0^2 Q_0/2\sigma)[e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}] \end{aligned} \tag{3.60}$$

La variation de  $Q$  en fonction du temps est illustrée par les courbes (1) et (2) de la Fig. 3.9a.  $Q$  décroît sans subir d'oscillations. À long terme, la charge est dominée par le premier terme et il en est de même pour l'intensité de courant. Nous disons que le circuit est amorti avec une constante d'atténuation  $\delta = \beta - \sigma$ .



**Figure 3-9** **a)** Charge du condensateur dans un circuit LCR très amorti pour  $\omega_0 = 10$  rad/s (courbe 1 pour  $\beta = 15$  s<sup>-1</sup> et courbe 2 pour  $\beta = 13$ ) et critique (courbe 3 pour  $\beta = 10$  s<sup>-1</sup>). **b)** cas d'un circuit LCR peu amorti pour  $\omega_0 = 10$  rad/s et  $\beta = 2$  s<sup>-1</sup>.

**b) Le cas critique ( $\beta^2 = \omega_0^2$  c'est-à-dire  $R^2 = 4L/C$ )**

Dans ce cas l'équation caractéristique admet une racine double réelle et positive

$$s = \beta \tag{3.61}$$

L'équation du circuit (3.51) admet alors la solution  $Fe^{-\beta t}$  où  $F$  est une constante arbitraire. Ce n'est pas la solution générale car elle ne dépend que d'une seule constante arbitraire. Pour trouver la solution générale, supposons que  $F$  est une fonction de  $t$  et cherchons la solution de la forme  $Q = F(t)e^{-\beta t}$ . Substituant cette expression dans l'équation du circuit (3.51), nous trouvons qu'elle est identiquement satisfaite si  $\ddot{F} = 0$ . Cette équation admet la solution générale  $F = A + Bt$ , où  $A$  et  $B$  sont deux constantes arbitraires. La solution de (3.51) est donc

$$Q = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (3.62)$$

C'est bien la solution générale ; car elle dépend de deux constantes arbitraires  $A$  et  $B$  qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales. L'intensité qui correspond à cette solution est

$$I = Q' = (B - \beta A - \beta t)e^{-\beta t} \quad (3.63)$$

Supposons que la charge du condensateur est  $Q_0$  lorsqu'on ferme le circuit à l'instant  $t = 0$  ; nous avons alors les conditions initiales

$$Q(t = 0) = Q_0 = A, \quad I(t = 0) = 0 = B - \beta A$$

qui admettent la solution  $A = Q_0$  et  $B = \beta Q_0$ . La solution s'écrit alors

$$Q(t) = Q_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}, \quad I(t) = -\beta^2 Q_0 e^{-\beta t} \quad (3.64)$$

Dans ce cas, la charge et l'intensité décroissent exponentiellement avec le temps sans changer de signe (voir la courbe 3 de la Fig. 3.9a).

### c) Cas d'une faible résistance ( $\beta^2 < \omega_0^2$ c'est-à-dire $R^2 < 4L/C$ )

Dans ce cas l'équation caractéristique admet deux racines complexes

$$s_1 = \beta + j\tilde{\omega} \quad \text{et} \quad s_2 = \beta - j\tilde{\omega} \quad \text{avec} \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (3.65)$$

La solution générale est alors

$$Q = e^{-\beta t} [A_1 e^{j\tilde{\omega} t} + A_2 e^{-j\tilde{\omega} t}],$$

$$I = \dot{Q} = -e^{-\beta t} [A_1(\beta - j\tilde{\omega})e^{j\tilde{\omega} t} + A_2(\beta + j\tilde{\omega})e^{-j\tilde{\omega} t}] \quad (3.66)$$

Où  $A_1$  et  $A_2$  sont deux constantes d'intégration, qui peuvent être choisies de façon que  $Q$  soit réelle. La solution peut être écrite aussi sous la forme réelle

$$Q = Ae^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi),$$

$$I = \dot{Q} = -Ae^{-\beta t} [\beta \cos(\tilde{\omega}t + \varphi) + \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi)] \quad (3.67)$$

Les constantes d'intégration  $A$  et  $\varphi$  (ou  $A_1$  et  $A_2$ ) peuvent être déterminées à partir des conditions initiales. Notons que l'intensité s'écrit aussi

$$I = A\omega_0 e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi + \pi - \alpha) \quad (3.68)$$

Où  $\alpha$  est donné par

$$\tan \alpha = \tilde{\omega}/\beta = \sqrt{4L/CR^2 - 1} \quad (0 < \alpha < \pi/2) \quad (3.69)$$

Supposons, par exemple, que la charge du condensateur est  $Q_0$  lorsqu'on ferme le circuit à l'instant  $t = 0$  ; nous avons alors les conditions initiales

$$Q(t = 0) = Q_0 = A \cos \varphi, \quad I(t = 0) = 0 = -A[\beta \cos \varphi + \tilde{\omega} \sin \varphi]$$

Ces deux équations admettent la solution

$$A = (\omega_0/\tilde{\omega})Q_0, \quad \cos \varphi = \tilde{\omega}/\omega_0, \quad \sin \varphi = -\beta/\omega_0$$

La solution s'écrit alors

$$Q(t) = (\omega_0/\tilde{\omega})Q_0 e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi),$$

$$I(t) = (\omega_0^2/\tilde{\omega})Q_0 e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi + \pi - \alpha) \quad (3.70)$$

La solution (3.67) pour  $Q(t)$  est illustrée dans la Fig. 3.9b. Elle ressemble à une oscillation harmonique à cause du facteur  $\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$  ; mais l'amplitude,  $Ae^{-\beta t}$ , décroît exponentiellement avec le temps. La charge n'est pas une fonction périodique du temps. Mais elle s'annule périodiquement, nous disons que c'est une oscillation pseudo-périodique de pseudo-pulsation  $\tilde{\omega}$ . La charge  $Q$  s'annule aux instants  $t$  tels que  $\cos(\tilde{\omega}t + \varphi) = 0$ , c'est-à-dire pour  $t_m = (1/\tilde{\omega})(m\pi + \pi/2 - \varphi)$  où  $m$  est un entier. La *pseudo-période* est donc

$$\tilde{T} = 2\pi/\tilde{\omega} = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (3.71)$$

La charge atteint les valeurs extrémales aux instants  $t_n$  tels que  $\dot{Q} = I = 0$ , c'est-à-dire pour

$$t_n = (1/\tilde{\omega})[n\pi - \text{Arctang}(\beta/\tilde{\omega}) - \varphi]$$

où  $n$  est entier. Deux passages consécutifs aux maximums (positifs) ou au minimums (négatifs) sont séparés par une pseudo-période  $\tilde{T}$ . Les valeurs de ces extremums sont

$$Q_n = Ae^{-\beta t_n} \cos(\tilde{\omega} t_n + \varphi) = (-1)^n (\tilde{\omega}/\omega_0) e^{-\beta t_n}$$

Nous trouvons qu'après une oscillation complète, l'amplitude est réduite par un facteur  $e^{-\beta \tilde{T}}$ , c'est-à-dire

$$Q_{n+2}/Q_n = e^{-\beta(t_{n+2}-t_n)} = e^{-\beta \tilde{T}} \quad (3.72)$$

Nous pouvons écrire aussi

$$\ln(Q_n/Q_{n+2}) = \beta \tilde{T} = 2\pi\beta/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 2\pi\sqrt{4L/CR^2 - 1} \quad (3.73)$$

La quantité  $\beta \tilde{T}$  est appelée *coefficient de décrétement logarithmique*.

Dans tous les cas du circuit RCL, la charge et l'intensité contiennent le facteur de décroissance exponentielle  $e^{-\delta t}$ .  $\delta$  est le coefficient d'amortissement. Il est égal au coefficient d'amortissement  $\beta$  dans le cas d'un faible amortissement et dans le cas d'un amortissement critique et à  $\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$  dans le cas d'un grand amortissement. Sa plus grande valeur est dans le cas d'un circuit LCR critique ( $\beta = \omega_0$ ) ; l'atténuation du courant est alors la plus rapide ; ce qui est souhaité dans certaines situations. Il faut alors choisir  $R$  égal à  $2\sqrt{L/C}$ .

L'inverse de  $\delta$ ,  $\tau = 1/\delta$ , qui a les dimensions du temps, est appelé **temps de relaxation**. C'est le temps caractéristique du circuit, qui indique la rapidité avec laquelle le circuit revient à l'équilibre ( $Q$  et  $I$  nulles). Pour avoir une idée de cette rapidité, pour  $t = 5\tau$ ,  $t = 8\tau$  et  $t = 10\tau$ , nous trouvons que l'amplitude est réduite par les facteurs  $6,7 \times 10^{-3}$ ,  $3,4 \times 10^{-4}$  et  $4,5 \times 10^{-5}$  respectivement. Donc pratiquement, après un temps de l'ordre de  $10\tau$ , l'oscillateur peut être considéré à l'équilibre de nouveau.

La pseudo-pulsation du circuit peut être écrite sous la forme

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad \text{où} \quad \eta = \beta/\omega_0 \quad (3.74)$$

$\eta$  est le *coefficient réduit d'amortissement*.

La quantité

$$f_q = \frac{\pi\tau}{T_0} \quad \text{ou} \quad f_q = \frac{1}{2\eta} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.75)$$

est appelé *facteur de qualité* du circuit LCR. Comme  $\pi\tau$  est l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que le circuit retourne à l'équilibre, le facteur de qualité peut être interprété comme un ordre de grandeur du nombre d'oscillations que le circuit effectue avant de revenir pratiquement à l'équilibre.

Discutons maintenant le bilan d'énergie dans ce circuit oscillant. L'énergie électrique et l'énergie magnétique emmagasinées dans le condensateur et la self-inductance sont

$$U_E = Q^2/2C = (A^2/2C)e^{-2\beta t} \cos^2(\tilde{\omega}t + \varphi),$$

$$U_M = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}e^{-2\beta t} [\beta \cos(\tilde{\omega}t + \varphi) + \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi)]$$

L'énergie électromagnétique totale emmagasinée s'écrit

$$U_{EM} = \frac{1}{2}LA^2e^{-2\beta t} [\omega_0^2 + \beta^2 \cos(2\tilde{\omega}t + 2\varphi) + \beta\tilde{\omega} \sin(2\tilde{\omega}t + 2\varphi)] \quad (3.76)$$

et sa variation pendant le temps  $dt$  est

$$dU_{EM} = -RA^2e^{-2\beta t} [\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi) + \beta \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)]^2 dt \quad (3.77)$$



Cette variation est toujours négative ; ce qui veut dire que l'énergie totale emmagasinée dans le circuit diminue et cette diminution est justement l'énergie dissipée dans la résistance. En effet celle-ci s'écrit

$$dU_J = I^2 R dt = RA^2e^{-2\beta t} [\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi) + \beta \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)]^2 dt \quad (3.78)$$

qui est justement l'opposé de  $dU_{EM}$ .

Tout en décroissant avec le temps à cause du facteur  $e^{-2\beta t}$ , l'énergie totale emmagasinée dans le circuit oscille légèrement à cause des fonctions trigonométriques. Il est parfois intéressant de voir comment l'énergie varie, en éliminant ces petites oscillations qui sont souvent inobservables à hautes fréquences. Ceci peut être fait en faisant la moyenne de l'énergie sur une période au voisinage de  $t$ , soit entre  $t - T/2$  et  $t + T/2$ . Nous trouvons

$$\langle U_{EM}(t) \rangle_T = (1/T) \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt U_{EM}(t) \quad (3.79)$$

L'évaluation exacte de cette intégrale est assez compliquée. Nous nous limitons au cas où la résistance est suffisamment faible pour supposer que l'exponentielle  $e^{-2\beta t}$  varie très peu pendant une période. C'est bien le cas si  $\delta T \ll 1$  c'est-à-dire  $R \ll (1/\pi)\sqrt{L/C}$  ; alors  $\langle U_{EM}(t) \rangle$  s'écrit approximativement

$$\langle U_{EM}(t) \rangle_T \approx \frac{LA^2}{2T} e^{-2\beta t} \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt [\omega_0^2 + \beta^2 \cos(2\tilde{\omega}t + 2\varphi) + \beta\tilde{\omega} \sin(2\tilde{\omega}t + 2\varphi)]$$

Les termes harmoniques ne donnent aucune contribution, nous trouvons alors

$$\langle U_{EM}(t) \rangle_T \approx \frac{1}{2} LA^2 \omega_0^2 e^{-2\beta t} \equiv \langle U_o \rangle e^{-2\beta t} \quad (3.80)$$

Où  $\langle U_o \rangle = \frac{1}{2} LA^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} A^2 / C$  est l'énergie moyenne initiale. On voit que cette énergie moyenne décroît exponentiellement avec le temps.

L'énergie dissipée pendant une période (entre  $t - T/2$  et  $t + T/2$ ) peut être évaluée dans la même approximation, nous trouvons

$$\langle U(t)_J \rangle_T \equiv (1/T) \int_{t-T/2}^{t+T/2} dU_J = \frac{1}{2} T R A^2 \omega_0^2 e^{-2\beta t} \quad (3.81)$$

Le rapport de  $\langle U_{EM}(t) \rangle_T$  à  $\langle U(t)_J \rangle_T$  est

$$\frac{\langle U_{EM}(t) \rangle_T}{\langle U(t)_J \rangle_T} = \frac{L}{TR} \approx \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{f_q}{2} \quad (3.82)$$

Où  $f_q$  est le facteur de qualité (3.75)



### POINTS-CLÉS

- L'unité d'angle à utiliser pour analyser les oscillations est le radian, qui est sans dimensions, et l'unité de pulsation est le radian par seconde et non le degré par seconde. Quand on parle de « retard » et « d'avance » il s'agit le plus souvent du déphasage  $\phi$  exprimé en radians et non du décalage temporel en secondes.
- Vous devez apprendre à transformer une forme trigonométrique en une autre. C'est la forme  $u = A \cos(\omega t + \phi)$  qu'on utilise habituellement

pour la représentation de Fresnel et qu'on obtient en prenant la partie réelle de la solution complexe. La forme  $x = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$  est plus commode pour imposer les conditions initiales. La représentation complexe est très utile et parfois indispensable pour mener les calculs. Vous devez maîtriser comment passer des formes réelles aux formes complexes et inversement, comment ajouter, retrancher, multiplier et diviser des expressions complexes et comment passer de la forme complexe algébrique à la forme exponentielle. Notez les règles que le module d'un produit est le produit des modules, le module d'un quotient est le quotient des modules, la phase d'un produit est la somme des phases et la phase d'un quotient est la différence des phases.

- ▶ La représentation de Fresnel et la représentation complexe se ressemblent, la partie réelle et la partie imaginaire de  $\underline{u}$  étant identiques aux composantes de  $\vec{u}$  mais l'analyse avec des nombres complexes est beaucoup plus simple que l'analyse vectorielle.
- ▶ On commet parfois une erreur en écrivant que la valeur efficace d'une tension est  $V_m/\sqrt{2}$  et celle de l'intensité est  $I_m/\sqrt{2}$ , pour un courant quelconque. *Les valeurs efficaces sont celles d'un courant continu qui correspond au même effet Joule dans une résistance.* Leurs carrés sont donc les valeurs moyennes de  $I(t)^2$  et  $V(t)^2$  sur une période, c'est-à-dire

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' I(t')^2 \quad \text{et} \quad V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' V(t')^2 .$$

C'est seulement dans le cas d'un courant sinusoïdal qu'on trouve  $I_{\text{eff}} = I_m/\sqrt{2} \approx 0,71 I_m$  et  $V_{\text{eff}} = V_m/\sqrt{2} \approx 0,71 V_m$ . Dans le cas d'une tension de valeur moyenne nulle et d'amplitude  $V_m$ , on trouve  $V_{\text{eff}} = V_m$  si elle est en créneau et  $V_{\text{eff}} = V_m/\sqrt{3} \approx 0,58 V_m$  si elle est en dents de scie.

- ▶ La pulsation  $\omega$  ou  $\omega_0$ , qui apparaît dans l'équation des oscillations, est une grandeur caractéristique du circuit tandis que l'amplitude et la phase sont deux *constantes d'intégration* ; elles apparaissent lorsqu'on intègre l'équation du circuit et elles peuvent être déterminées à partir des conditions initiales (charge et intensité initiales). La solution générale d'une équation différentielle du premier ordre dépend d'une seule constante arbitraire et celle d'une équation différentielle du second ordre dépend de deux constantes arbitraires.
- ▶ Tout oscillateur a deux formes d'énergie. La conservation de l'énergie d'un système isolé est une loi fondamentale de la nature. Si le système isolé a des forces internes dissipatives de l'énergie, son énergie d'oscillation diminue et cette diminution est égale à l'énergie transfor-

mée par ces forces dissipatives en une autre forme d'énergie. L'énergie totale est proportionnelle au carré de l'amplitude. L'amplitude de vibration d'un système amorti diminue donc comme  $A = A_0 e^{-\delta t} = A_0 e^{-t/\tau}$ . Son énergie moyenne (sur une période) diminue comme  $\langle U_0 \rangle e^{-2\delta t}$ .

## QUESTIONS DE RÉFLEXION

1. En observant deux tensions électriques  $V_1$  et  $V_2$  sur l'écran d'un oscilloscope, on a trouvé les courbes illustrées dans la Fig. 3.10, où l'échelle du temps est en centième de seconde et l'échelle des tensions est en millivolts. Déterminez l'amplitude et la fréquence de ces tensions. Quel est leur déphasage ?

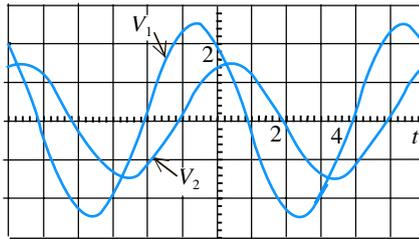


Figure 3-10

2. L'amplitude des oscillations est souvent prise positive. Comment changer une expression des oscillations avec une amplitude négative en une expression avec une amplitude positive ? Comment changer une expression  $x = A' \sin(\omega t + \varphi')$  en une expression  $x = A \cos(\omega t + \phi)$  ?

3. Dans un circuit électrique contenant un condensateur, la charge du condensateur est la primitive de l'intensité de courant :  $Q = \int dt I$ . Précisez les conventions de signes de  $Q$  et  $I$ . Supposons que l'intensité est harmonique de la forme  $I = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Déterminez l'amplitude et la phase de la charge.

4. Tracez le diagramme de Fresnel pour les fonctions harmoniques

$$x_1 = 10 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad x_2 = 5 \cos(\omega t + \pi/6).$$

Écrivez l'expression de leur somme. Écrivez cette expression en utilisant l'analyse trigonométrique.

5. Déterminez le module et la phase des nombres complexes suivants :

$$2j, \quad -3j, \quad -5, \quad 1/(2j), \quad \sqrt{2}j, \quad 3-4j \quad \text{et} \quad (3+j)/(1-3j).$$

6. Définissez l'intensité et la tension efficaces. La valeur efficace de la somme de deux tensions de même fréquence est-elle égale à la somme des tensions efficaces ? Supposons qu'on supprime l'alternance négative d'une tension sinusoïdale ; quelle est alors la tension efficace de la tension ainsi redressée ? Supposons qu'on redresse un courant sinusoïdal en changeant le sens de l'alternance négative ; quelle serait alors l'intensité efficace redressée ?

7. Précisez ce qu'on entend par *linéarité* d'une équation différentielle. Lesquelles des équations différentielles suivantes sont-elles linéaires ?

$$\begin{aligned} \dot{u} - 3u = 0, \quad \ddot{u} - 4u = 0, \quad \ddot{u} - 4tu = 0, \quad \ddot{u} + 2\dot{u} - 4u = 0, \\ \ddot{u} - 4u^2 = 0, \quad \ddot{u} - 4u = 5, \quad \ddot{u} + t\dot{u}^2 - 4u = 0 \end{aligned}$$

8. Un condensateur de capacité  $C$  porte la charge  $Q_0$ . On le branche à l'instant  $t = 0$  aux bornes d'une self-inductance  $L$ . Écrivez les expressions de l'intensité et de la charge du condensateur en fonction de  $t$ . Vérifiez que  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  a la dimension d'un temps. Écrivez les expressions de l'énergie dans le condensateur et dans la self-inductance. Discutez comment ces énergies varient pendant la première période d'oscillation.

9. Expliquez pourquoi l'intensité de courant initial est nulle si on branche un générateur sur une bobine mais non nécessairement nulle si on le branche sur un condensateur tandis que la charge est nulle dans ce dernier cas.

10. Le facteur de qualité est défini par  $f_q = \pi\tau/T_0$ . Quelle interprétation peut-on donner à  $\pi\tau$  et à  $f_q$  ? Un circuit a un temps de relaxation de 20 ms et une fréquence de 100 Hz. Approximativement quel est le nombre d'oscillations qu'il subit avant de revenir à l'équilibre après son excitation initiale ?

11. Écrivez l'équation d'un circuit  $RLC$  sans générateur en utilisant la conservation de l'énergie. Quelle est sa pseudo-période ? Dans quel cas le circuit est-il critique ?

## EXERCICES CORRIGÉS

**3-1** On observe la tension aux bornes d'un condensateur de capacité  $C = 2 \mu\text{F}$  sur l'écran d'un oscilloscope. C'est une sinusoïde d'amplitude  $2,5 \text{ V}$  et de période de  $0,5 \text{ ms}$  en partant à l'instant  $t = 0$  du point  $y = 1 \text{ V}$  et elle augmente. Déterminez sa pulsation. Écrivez l'expression de la tension, la charge du condensateur et l'intensité de courant. Quelle est la phase de  $V$  et  $I$  à l'instant  $t = 0$  ? Quelle est l'intensité maximale ?

**3-2** On considère l'équation d'oscillation  $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ . **a)** Vérifiez directement qu'elle admet comme solution générale les expressions suivantes

$$u = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad u = \text{Re}(C e^{j\omega t}).$$

Calculez  $A_1$  et  $A_2$  en fonction de  $C$ . Exprimez  $C$  en fonction de  $A_1$  et  $A_2$ . **b)** Tracez les vecteurs tournants qui représentent les deux vibrations  $A_1 \cos(\omega t)$  et  $A_2 \sin(\omega t)$  ainsi que leur somme. En déduire que cette somme peut être écrite sous la forme  $A \cos(\omega t + \varphi)$ , où  $A$  et  $\varphi$  sont liées à  $A_1$  et  $A_2$  par les relations (3.11).

**3-3** Supposons qu'on branche sur la voie  $x$  d'un oscilloscope une tension  $V_x(t) = a \cos(\omega t + \phi_1)$  et sur la voie  $y$  une tension  $V_y(t) = b \cos(\omega t + \phi_2)$ . Nous supposons que le déplacement du spot est proportionnel à la tension pour les deux voies.

**a)** Montrez que, si  $\phi_1 = \phi_2$ , le spot décrit la première diagonale du rectangle de côtés  $2a$  et  $2b$  et que, si  $\phi_2 - \phi_1 = \pi$ , le spot décrit la deuxième diagonale.

**b)** Montrez que, si  $\phi_2 - \phi_1 = \pi/2$ , le spot décrit une ellipse droite inscrite dans ce rectangle dans le sens des aiguilles d'une montre et que, si  $\phi_2 - \phi_1 = -\pi/2$ , il décrit cette ellipse dans le sens opposé. En particulier, si  $a = b$ , l'ellipse devient un cercle.

**c)** Montrez que, si  $\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi$ , le spot décrit une ellipse inscrite dans ce rectangle dans le sens des aiguilles d'une montre si  $0 < \Delta\phi < \pi$  et dans le sens opposé si  $\pi < \Delta\phi < 2\pi$ .

**d)** Montrez que, si les pulsations de  $V_x$  et  $V_y$  sont différentes, le spot décrit une courbe non fermée inscrite dans le rectangle sauf si le rapport  $\omega_x/\omega_y$  est celui de deux nombres entiers ; la courbe est alors fermée (appelée courbe de Lissajous).

**3-4** Écrivez l'expression  $V = 3 \cos(\omega t) + 2 \cos(\omega t - \pi/3)$  sous la forme  $V = A \cos(\omega t + \varphi)$  en utilisant la trigonométrie puis l'analyse complexe.

**3-5** On considère les tensions  $V_1 = A \cos(\omega t)$  et  $V_2 = B \sin(\omega t)$ .

**a)** Écrivez leur somme sous la forme  $V = C \cos(\omega t + \phi)$ .

**b)** Écrivez les représentations complexes de  $V_1$  et  $V_2$ . En déduisez  $V$ .

**c)** Tracez le diagramme de Fresnel pour  $V_1$  et  $V_2$  et retrouvez  $V$ .

**3-6** Déterminez la valeur efficace des tensions illustrées dans la Fig. 3.11. Le temps est en ms. La dernière est une tension sinusoïdale dont l'alternance négative est supprimée.

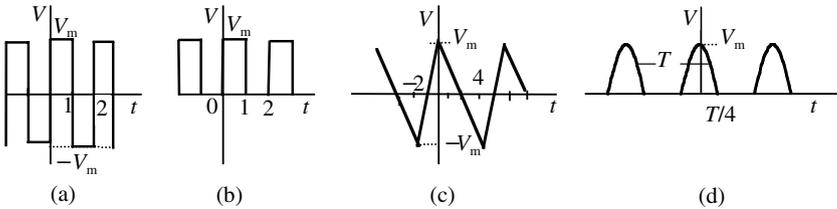


Figure 3-11

**3-7 a)** Le courant  $I = I_0 + I_m \cos(\omega t + \varphi)$  est la superposition d'un courant continu et un courant sinusoïdal. Quelle est la valeur moyenne de  $I$ . Quelle est sa valeur efficace ? Pouvez-vous concevoir un circuit pour éliminer la composante continue ? **b)** Considérons la superposition de deux tensions sinusoïdales  $V = A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t + \phi)$ . Quelle est sa valeur efficace (vous aurez à distinguer les cas où  $\omega_1 = \omega_2$  et  $\omega_1 \neq \omega_2$ ) ?

**3-8 a)** Quelle est la fréquence d'oscillation d'un circuit  $LC$  si  $L = 2$  H et  $C = 1$   $\mu\text{F}$  ? Le condensateur a été préalablement chargé à 100 V. Calculez la charge et l'énergie électrique emmagasinées.

**b)** On connecte ce condensateur chargé à la self-inductance  $L$  à l'instant  $t = 0$ . Écrivez l'expression de l'intensité du courant en fonction du temps.

**c)** Calculez l'énergie électrique et l'énergie magnétique et étudiez leur variation en fonction du temps.

**3-9 a)** Utilisant la loi de conservation de l'énergie, établir l'équation du circuit LCR.

**b)** Supposant que la résistance est faible, montrer que l'énergie dissipée  $\Delta U_J$  par cycle est liée à l'énergie emmagasinée

moyenne  $\langle U_{EM} \rangle$  par la relation  $\Delta U_J / \langle U_{Em} \rangle = 2\pi / f_q$ , où  $f_q$  est le facteur de qualité du circuit.

**3-10** On charge un condensateur de  $1,0 \mu\text{F}$  sous une tension de  $20 \text{ V}$  et on le branche sur une self-inductance de  $0,20 \text{ H}$ .

- Déterminez l'énergie nécessaire pour charger le condensateur et la fréquence d'oscillation.
- Écrivez les expressions de la charge et de l'intensité en fonction du temps. Quelle est l'intensité maximale ?
- Supposons que le circuit a une résistance de  $100 \Omega$ . Déterminez le coefficient d'amortissement, la pseudo-fréquence d'oscillation, le temps de relaxation et le facteur de qualité de ce circuit ?
- Écrivez les expressions de la charge et de l'intensité. Au bout de combien de temps l'amplitude de l'intensité est-elle réduite au centième de sa valeur initiale et au bout de combien de temps l'énergie moyenne se trouve-t-elle dissipée à  $99 \%$  dans la résistance ?

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**3-1** La fréquence est  $\nu = 1/T = 2 \text{ kHz}$ . La pulsation est  $\omega = 2\pi\nu = 1,26 \times 10^4 \text{ rad/s}$ . La tension est  $V = A \cos(\omega t + \phi)$ , où  $A = 2,5 \text{ V}$ ; la charge et l'intensité sont alors

$$Q = CV = CA \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{et } I = -CA\omega \sin(\omega t + \phi) = CA\omega \cos(\omega t + \phi + \pi/2)$$

- Les conditions initiales (pour  $t = 0$ ) sont  $2,5 \cos \phi = 1$  et  $-CA\omega \sin \phi > 0$ . La première condition donne  $\phi = \pm 1,16 \text{ rad}$ . La seconde condition est satisfaite pour  $\phi = -1,16 \text{ rad}$ . Nous trouvons donc

$$V = 2,5 \cos(1,26 \times 10^4 t - 1,16) \text{ V},$$

$$Q = 5 \times 10^{-6} \cos(1,26 \times 10^4 t - 1,16) \text{ C}$$

$$I = 63 \cos(1,26 \times 10^4 t + 0,411) \text{ mA}$$

- La phase de  $V$  à l'origine du temps est  $-1,16 \text{ rad}$  et celle de la vitesse est  $+0,411 \text{ rad}$ . L'intensité maximale est de  $63 \text{ mA}$ .

**3-2 a)** Considérons l'expression

$$u = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

Dérivant deux fois par rapport au temps, nous trouvons

$$\dot{u} = \omega[-A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)],$$

$$\ddot{u} = -\omega^2[A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)] = -\omega^2 u$$

$u$  vérifie donc l'équation différentielle

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

De même, si nous utilisons la représentation  $u = \text{Re}[\underline{C}e^{j\omega t}]$ , les dérivées sont

$$u = \text{Re}[j\omega \underline{C}e^{j\omega t}], \quad \ddot{u} = \text{Re}[-\omega^2 \underline{C}e^{j\omega t}] = -\omega^2 \text{Re}[\underline{C}e^{j\omega t}] = -\omega^2 u$$

$u$  vérifie donc l'équation différentielle  $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ . Notons que  $\underline{C}$  est, en général, complexe de la forme  $\underline{C} = Ae^{j\varphi}$  ; nous avons alors

$$\begin{aligned} u &= \text{Re}[Ae^{j(\omega t + \varphi)}] = A \text{Re}[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \\ &= A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos\varphi \cos(\omega t) - A \sin\varphi \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Comparant avec la forme  $u = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$ , nous trouvons

$$A_1 = A \cos\varphi = \text{Re } \underline{C}, \quad A_2 = -A \sin\varphi = -\text{Im } \underline{C}$$

et inversement

$$\underline{C} = \text{Re } \underline{C} + j \text{Im } \underline{C} = A_1 - jA_2 \implies |\underline{C}| = A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2},$$

$$\tan \varphi = -A_2/A_1$$

**b)** Supposons que  $A_1$  et  $A_2$  sont positifs.  $A_1 \cos(\omega t)$  est une oscillation de phase 0 ; elle est représentée par le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  de longueur  $A_1$  dans la direction  $Ox$  pris comme origine des phases (Fig. 3.12). L'oscillation  $A_2 \sin(\omega t) = A_2 \cos(\omega t - \pi/2)$  est représentée par le vecteur  $\overrightarrow{MN}$  de longueur  $A_2$  faisant avec  $Ox$  un angle  $-\pi/2$ . La somme de ces deux vecteurs est le vecteur  $\overrightarrow{ON}$  de longueur  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  faisant avec  $Ox$  un angle  $\varphi$  donné par  $\tan \varphi = -A_2/A_1$ . C'est donc effectivement un retard et la vibration résultante s'écrit  $u = A \cos(\omega t + \varphi)$  comme précédemment.

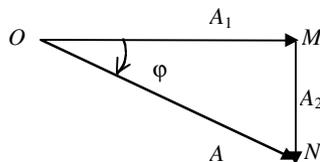


Figure 3-12

**3-3 a)** La position du spot a pour coordonnées proportionnelles à  $V_x$  et  $V_y$ . L'équation de la trajectoire est la relation entre  $V_x$  et  $V_y$ . Si  $\phi_1 = \phi_2$ , nous avons  $V_y = (b/a)V_x$ . C'est l'équation de la première diagonale du rectangle de côtés  $2a$  et  $2b$ . Si  $\phi_2 - \phi_1 = \pi$ , nous trouvons  $V_y = -(b/a)V_x$ . C'est l'équation de la deuxième diagonale.

**b)** Si  $\phi_2 - \phi_1 = \pm\pi/2$ , nous trouvons

$$V_x/a = \cos(\omega t + \phi_1) = \cos(\mp\omega t \mp \phi_1),$$

$$V_y/b = \cos(\omega t + \phi_1 \pm \pi/2) = \sin(\mp\omega t \mp \phi_1).$$

Nous en déduisons que  $V_x^2/a^2 + V_y^2/b^2 = 1$ . C'est l'équation d'une ellipse droite de demi-axes  $a$  et  $b$  dans les directions  $Ox$  et  $Oy$ . Le vecteur  $\mathbf{V}$  de composante  $V_x$  et  $V_y$  tourne avec la vitesse  $-\omega$  ou  $+\omega$  si  $\phi_2 - \phi_1 = +\pi/2$  ou  $-\pi/2$  respectivement. En particulier, si  $a = b$ , l'ellipse devient un cercle.

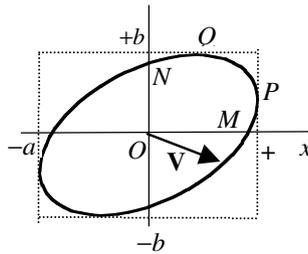


Figure 3-13 Trajectoire elliptique

**c)** Si  $\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi$ , nous trouvons

$$V_x/a = \cos(\omega t + \phi_1),$$

$$V_y/b = \cos(\omega t + \phi_1 + \Delta\phi) = \cos(\omega t + \phi_1)\cos\Delta\phi - \sin(\omega t + \phi_1)\sin\Delta\phi.$$

Évaluant  $\cos(\omega t + \phi_1)$  et  $\sin(\omega t + \phi_1)$  de ces deux équations et utilisant l'identité  $\cos^2(\omega t + \phi_1) + \sin^2(\omega t + \phi_1) = 1$ , nous trouvons l'équation de la trajectoire

$$V_x^2/a^2 + V_y^2/b^2 - 2(V_x V_y/ab)\cos(\Delta\phi) = \sin^2(\Delta\phi)$$

C'est l'équation d'une ellipse inscrite dans le rectangle de côtés  $a$  et  $b$ . Pour déterminer le sens, considérons par exemple le point  $P$  de la figure 3.13. Il correspond à  $\omega t + \phi_1 = 0$ , donc  $V_x = a$  et  $V_y = b \cos(\Delta\phi)$  et une dérivée  $dV_y/dt = -\omega \sin(\omega t + \phi_1 + \Delta\phi) = -\omega \sin(\Delta\phi)$ . Celle-ci est positive si  $\pi < \Delta\phi < 2\pi$ ; le point représentatif décrit alors l'ellipse dans le sens positif. Par contre, si  $0 < \Delta\phi < \pi$ , l'ellipse est décrite dans le sens négatif.

**d)** Si les pulsations de  $V_x$  et  $V_y$  sont différentes, la trajectoire est inscrite dans le rectangle mais les coordonnées ne reprennent pas les mêmes valeurs ; la courbe n'est pas fermée en général. Cependant, si le rapport des pulsations est égal au rapport de deux nombres entiers  $n_1$  et  $n_2$  ( $\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2$ , c'est-à-dire  $T_1/T_2 = n_2/n_1$ ), nous retrouvons les mêmes valeurs de  $x$  et  $y$  après un temps  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ . La trajectoire est alors une courbe fermée décrite avec la période  $T$  appelée *courbe de Lissajous*.

**3-4 a)** Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} V &= 3 \cos(\omega t) + 2 \cos(\pi/3) \cos(\omega t) + 2 \sin(\pi/3) \sin(\omega t) \\ &= 4 \cos(\omega t) + 1,732 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Comparant avec l'identité  $A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t)$ , nous déduisons que  $A \cos \varphi = 4$  et  $A \sin \varphi = -1,732$ . Élevant au carré et ajoutant ces deux équations, nous trouvons

$$A^2 = 4^2 + 1,732^2 \quad \text{d'où } A = 4,359$$

Et, par conséquent,

$$\cos \varphi = 0,9177 \quad \text{et} \quad \sin \varphi = -0,3974 \implies \varphi = -0,4086 \text{ rad}$$

$$\text{d'où } V = 4,359 \cos(\omega t - 0,4086)$$

**b)**  $V$  est la partie réelle de

$$\begin{aligned} \underline{V} &= 3e^{j\omega t} + 2e^{j(\omega t - \pi/3)} = (3 + 2e^{-j\pi/3})e^{j\omega t} \\ &= [3 + 2 \cos(\pi/3) - 2j \sin(\pi/3)]e^{j\omega t} \\ &= [4 - 1,732j]e^{j\omega t} = 4,359e^{j\varphi}e^{j\omega t} \end{aligned}$$

$$\text{où } \tan \varphi = -0,4330 \implies \varphi = -0,4086 \text{ rad,}$$

$$\text{d'où } V = \mathcal{Re} \underline{V} = 4,359 \cos(\omega t - 0,4086)$$



Dans ce cas simple, la représentation complexe ne facilite pas le calcul et la représentation de Fresnel exige des calculs vectoriels qui se réduisent pratiquement au calcul de la représentation trigonométrique.

**3-5 a)** Nous pouvons écrire

$$V = C \cos(\omega t + \phi) = C \cos \phi \cos(\omega t) - C \sin \phi \sin(\omega t).$$

Comparant avec  $V = V_1 + V_2 = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , nous trouvons que

$$C \cos \phi = A \quad \text{et} \quad -C \sin \phi = B.$$

$$\text{Ajoutant ces équations élevées au carré, nous trouvons } C^2 = A^2 + B^2.$$

Ce qui détermine  $C$ . Le déphasage  $\phi$  est tel que  $\cos \phi = A/C$  et  $\sin \phi = -B/C$ .

b) Les solutions  $V_1$  et  $V_2$  sont respectivement les parties réelles de

$$\underline{V}_1 = Ae^{j\omega t} \text{ et } \underline{V}_2 = Be^{j(\omega t - \pi/2)}$$

Leur superposition est  $\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = (A - jB)e^{j\omega t}$ . L'amplitude complexe  $(A - jB)$  peut être écrite sous la forme exponentielle  $Ce^{j\phi}$  avec

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \phi = A/C \text{ et } \sin \phi = -B/C.$$

Nous avons donc  $\underline{V} = Ce^{j(\omega t + \phi)}$  et sa partie réelle s'écrit  $V = C \cos(\omega t + \phi)$ .

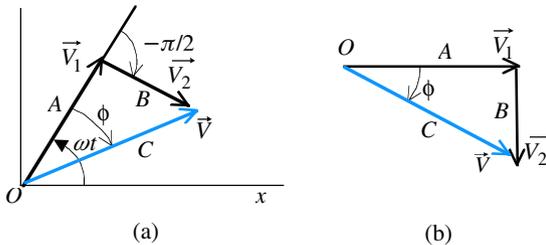


Figure 3-14

c) La fonction  $V_1$  est représentée par le vecteur  $\vec{V}_1$  de module  $A$  et de phase  $\omega t$  (Fig. 3.14a). La fonction  $V_2$  est représentée par le vecteur  $\vec{V}_2$  de module  $B$  et de phase  $(\omega t - \pi/2)$ . Leur superposition est représentée par le vecteur  $\vec{V}$ . Un calcul géométrique simple du triangle rectangle montre que le module de  $\vec{V}$  est  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Le vecteur  $\vec{V}$  forme avec  $\vec{V}_1$  un angle  $\phi$  tel que  $\tan \phi = -A/B$ . Nous retrouvons donc le vecteur représentant la superposition  $V$ .  $\phi$  est « l'avance » de phase de  $V$  sur  $V_1$ . Par exemple, si  $A$  et  $B$  sont positifs,  $\phi$  est compris entre  $-\pi/2$  et  $0$ ;  $V$  est alors effectivement un retard sur  $V_1$ . Comme  $V_1$  et  $V_2$  ont la même pulsation nous aurions pu faire la représentation de Fresnel à l'instant  $t = 0$  (Fig. 3.14b).

**3-6** La tension efficace est définie par

$$V_{\text{eff}}^2 = (1/T) \int_T dt V(t)^2$$

**a)** Dans le cas de la figure a) la période est 2 ms. La tension est constante et positive sur une demi-période et négative sur l'autre.  $V(t)^2$  est donc constante et on trouve

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt V_m^2 = V_m^2, \quad \text{d'où} \quad V_{\text{eff}} = V_m$$

**b)** Dans le cas de la figure b) la période est 2 ms et  $V$  est nulle sur une demi-période. Nous trouvons

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 dt V_m^2 = \frac{1}{2} V_m^2 \int_0^1 dt = \frac{1}{2} V_m^2 \quad \text{d'où} \quad V_{\text{eff}} = V_m / \sqrt{2}$$

**c)** Dans le cas de la figure c), prenons la période située entre  $-2$  et  $4$  ms. La tension s'écrit  $V = V_m(t + 1)$  pour  $-2 < t < 0$  et  $V = V_m(1 - t/2)$  pour  $0 < t < 4$ . Nous trouvons donc

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 &= (1/6) \int_{-2}^0 dt V_m^2 (t + 1)^2 + (1/6) \int_0^4 dt V_m^2 (1 - t/2)^2 \\ &= (1/6) V_m^2 (1/3) (t + 1)^3 \Big|_{-2}^0 + (1/6) V_m^2 (2/3) (t/2 - 1)^3 \Big|_0^4 \\ &= (1/3) V_m^2 \end{aligned}$$

d'où  $V_{\text{eff}} = V_m / \sqrt{3}$

**d)** Dans le cas de la figure d) la période est  $T$  et l'alternance négative est supprimée. Prenant une période entre  $-T/2$  et  $+T/2$ , nous avons  $V = 0$  pour  $-T/2 < t < -T/4$  et  $T/4 < t < T/2$  et  $V = V_m \cos \omega t$  pour  $-T/4 < t < T/4$ . Nous trouvons donc (en faisant le changement de variable  $x = \omega t$ ),

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 &= (V_m^2/T) \int_{-T/4}^{T/4} dt \cos^2(\omega t) = (V_m^2/2\pi) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cos^2 x \\ &= (V_m^2/4\pi) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx [1 + \cos 2x] = (V_m^2/4\pi) \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} V_m^2, \end{aligned}$$

d'où  $V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} V_m$ . Ce résultat est prévisible car le générateur fournit la moitié de l'énergie qu'il fournirait si l'alternance négative n'était pas supprimée.

**3-7 a)** Soit  $I = I_0 + I_m \cos(\omega t + \varphi)$ . La valeur moyenne de la fonction cosinus est nulle. La moyenne de  $I$  est donc  $I_0$ . La valeur efficace est donnée par la relation

$$\begin{aligned}
 I_{\text{eff}}^2 &= (1/T) \int_T dt I(t)^2 = (1/T) \int_T dt [I_0^2 + I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\
 &\quad + 2I_0 I_m \cos(\omega t + \varphi)] \\
 &= (1/T) \int_0^T dt [I_0^2 + \frac{1}{2} I_m^2 + \frac{1}{2} I_m^2 \cos(2\omega t + 2\varphi) \\
 &\quad + 2I_0 I_m \cos(\omega t + \varphi)] \\
 &= (1/T) [t I_0^2 + \frac{1}{2} t I_m^2 + (1/4\omega) I_m^2 \sin(2\omega t + 2\varphi) \\
 &\quad + (2/\omega) I_0 I_m \sin(\omega t + \varphi)] \Big|_0^T \\
 &= [I_0^2 + \frac{1}{2} I_m^2]
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que  $I_{\text{eff}} = \sqrt{I_0^2 + I_m^2/2}$ . Pour éliminer la composante continue il suffit de faire passer ce courant dans un condensateur. En régime permanent, le condensateur ne laisse pas passer un courant continu.

**b)** Dans le cas de la tension  $V = A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t + \phi)$ ,  $V_{\text{eff}}^2$  peut être définie comme la valeur moyenne de  $V(t)^2$  sur un long intervalle de temps  $\tau$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}}^2 &= (1/2\tau) \int_0^\tau dt [A^2 \cos^2(\omega_1 t) + B^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi) \\
 &\quad + 2AB \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \phi)] \\
 &= (1/2\tau) \int_0^\tau dt \{A^2 + A^2 \cos(2\omega_1 t) + B^2 + B^2 \cos(2\omega_2 t + 2\phi) \\
 &\quad + 2AB \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi] + 2AB \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi]\}
 \end{aligned}$$

• Supposons d'abord que  $\omega_1 \neq \omega_2$  ; nous trouvons

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}}^2 &= \left(\frac{1}{2}\tau\right) \{ \tau A^2 + (A^2/2\omega_1) \sin(2\omega_1 \tau) + \tau B^2 + (B^2/2\omega_2) \sin(2\omega_2 \tau + 2\phi) \\
 &\quad - (B^2/2\omega_2) \sin(2\phi) + 2[AB/(\omega_1 + \omega_2)] \sin[(\omega_1 + \omega_2)\tau + \phi] \\
 &\quad - 2[AB/(\omega_1 + \omega_2)] \sin \phi + 2[AB/(\omega_2 - \omega_1)] \sin[(\omega_2 - \omega_1)\tau + \phi] \\
 &\quad - 2[AB/(\omega_2 - \omega_1)] \sin \phi \}
 \end{aligned}$$

Si  $\tau$  est très grand,

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}(A^2 + B^2) \quad \text{et} \quad V_{\text{eff}} = \sqrt{A^2/2 + B^2/2}$$

• Par contre, si  $\omega_1 = \omega_2$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 &= (1/2\tau) \int_0^\tau dt \{A^2 + A^2 \cos(2\omega_1 t) + B^2 + B^2 \cos(2\omega_1 t + 2\phi) \\ &\quad + 2AB \cos(2\omega_1 t + \phi) + 2AB \cos \phi\} \\ &= (1/2\tau) \{ \tau A^2 + (A^2/2\omega_1) \sin(2\omega_1 \tau) + \tau B^2 \\ &\quad + (B^2/2\omega_1) \sin(2\omega_1 \tau + 2\phi) \\ &\quad - (B^2/2\omega_1) \sin(2\phi) + (AB/\omega_1) \sin(2\omega_1 \tau + \phi) \\ &\quad - (AB/\omega_1) \sin \phi + 2\tau AB \cos \phi \} \end{aligned}$$

À la limite d'un très grand  $\tau$ , nous trouvons

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}(A^2 + B^2 + 2AB \cos \phi)$$

$$\text{et } V_{\text{eff}} = \sqrt{A^2/2 + B^2/2 + AB \cos \phi}$$

**3-8 a)** La fréquence d'oscillation du circuit est

$$\nu = 1/2\pi\sqrt{LC} = 112,5 \text{ Hz}$$

La charge et l'énergie électrique emmagasinées sont

$$Q_o = CV = 1,0 \times 10^{-4} \text{ C}, \quad U_E = 1/2CV^2 = 5 \times 10^{-3} \text{ J}$$

**b)** La charge et l'intensité de courant sont

$$Q = A \cos(\omega t + \varphi), \quad I = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

La charge initiale est  $Q_o$  et l'intensité initiale est nulle, alors

$$Q(0) = A \cos \varphi = Q_o \text{ et } I(0) = -\omega A \sin \varphi = 0$$

$$\implies \varphi = 0 \text{ et } A = Q_o$$

$$Q = Q_o \cos(\omega t), \quad I = -\omega Q_o \sin(\omega t) = \omega Q_o \cos(\omega t + \pi/2)$$

**c)** L'énergie électrique et l'énergie magnétique sont respectivement

$$U_E = \frac{1}{2}Q^2/C = \frac{1}{2}(Q_o^2/C) \cos^2(\omega t),$$

$$U_M = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega^2 Q_o^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(Q_o^2/C) \sin^2(\omega t)$$

Les variations de  $U_E$  et  $U_M$  sont illustrées dans la Fig. 3.15. L'énergie se transforme de la forme électrique à la forme magnétique et inversement, l'énergie totale  $U_{EM} = U_E + U_M$  restant constante et égale à  $Q_o^2/2C$ , qui est l'énergie initiale du condensateur chargé.

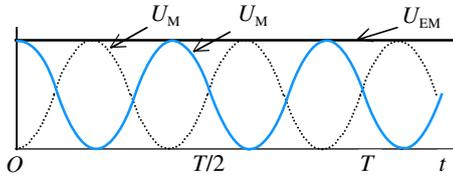


Figure 3-14

**3.9 a)** L'énergie totale emmagasinée dans le circuit est la somme de l'énergie électrique dans le condensateur et l'énergie magnétique dans la self-inductance :

$$U_{(EM)} = \frac{1}{2} Q^2 / C + \frac{1}{2} LI^2$$

Sa variation pendant  $dt$  est

$$dU_{(EM)} = (Q/C) \dot{Q} dt + LI \dot{I} dt = I [Q/C + L \ddot{Q}] dt$$

La diminution de l'énergie emmagasinée doit être égale à la perte d'énergie  $RI^2 dt$  par effet Joule, d'où l'équation

$$-LI[\ddot{Q} + \omega_0^2 Q] dt = RI^2 dt$$

c'est-à-dire  $\ddot{Q} + (R/L)\dot{Q} + Q/LC = 0$

**b)** Supposons que  $Q = Ae^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t + \phi)$  (voir les équations 3.67).

L'énergie dégagée par effet Joule entre  $t$  et  $t + \tilde{T}$  (en utilisant l'expression 3.80) pour l'énergie moyenne sur une période)

$$\begin{aligned} \Delta U_J &= \int_t^{t+\tilde{T}} dt RI^2 = \int_t^{t+\tilde{T}} dt R \dot{Q}^2 \\ &\approx RA^2 e^{-2\beta t} \int_t^{t+\tilde{T}} dt [\tilde{\omega}^2 \sin^2(\tilde{\omega}t + \phi) + \beta^2 \cos^2(\tilde{\omega}t + \phi) \\ &\quad + \tilde{\omega} \beta \sin(2\tilde{\omega}t + 2\phi)] \\ &\approx \frac{1}{2} RA^2 e^{-2\beta t} \tilde{T} (\tilde{\omega}^2 + \beta^2) = \frac{1}{2} RA^2 \tilde{T} \omega^2 e^{-2\beta t} \\ &\approx 2\beta T_0 \langle U_{(EM)}(t) \rangle \end{aligned}$$

où le facteur  $e^{-2\beta t}$  est presque constant pendant une pseudo-période  $\tilde{T}$  et celle-ci est presque égale à  $T_0$  si la résistance est faible.

Nous en déduisons que  $\Delta U_J / \langle U_{Em} \rangle \approx (2\pi/f_q)$ .

**3.10 a)** L'énergie emmagasinée dans le condensateur chargé est

$$U_{(E)} = \frac{1}{2} Q^2 / C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} (1 \times 10^{-6})(20)^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ J}$$

La pulsation et la fréquence d'oscillation de ce circuit sont

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 2,24 \times 10^3 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \nu_0 = \omega_0/2\pi = 536 \text{ Hz}$$

**b)** La charge et l'intensité s'écrivent

$$Q = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{et } I = \dot{Q} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t).$$

Les conditions initiales sont  $Q(0) = CV$  et  $I(0) = 0$  car l'énergie magnétique dans la self-inductance est alors nulle. Nous avons donc  $A = CV = 20 \mu C$  et  $B = 0$ . Les expressions de la charge (en  $\mu C$ ) et de l'intensité (en mA) de courant sont donc

$$Q = 20 \cos(\omega_0 t), \quad I = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) = -45 \sin(\omega t)$$

L'intensité de courant maximale dans le circuit est 45 mA.

**c)** Le coefficient d'amortissement, la pseudo-fréquence d'oscillation, le temps de relaxation et le facteur de qualité sont respectivement

$$\beta = R/2L = 250 \text{ s}^{-1},$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{2236^2 - 250^2} = 2226 \text{ rad/s} \implies \nu = 354 \text{ Hz}$$

$$\tau = 1/\beta = 4,00 \text{ ms}$$

$$\text{et } f_q = \pi\tau/T_0 = \frac{1}{2}\tau\omega_0 = \frac{1}{2}(4 \times 10^{-3})(2240) = 4,48$$

**d)** La charge et l'intensité de courant sont de la forme

$$Q = Ae^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t + \phi)$$

$$\text{et } I = Ae^{-\beta t} [-\beta \cos(\tilde{\omega}t + \phi) - \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t + \phi)]$$

Les conditions initiales  $Q = Q_0 = 20 \mu C$  et  $I = 0$  sont vérifiées si

$$A \cos \phi = Q_0 \quad \text{et} \quad A[-\beta \cos \phi - \tilde{\omega} \sin \phi] = 0$$

Prenant l'amplitude  $A$  positive, la première équation donne  $\cos \phi > 0$ , donc  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$  et la seconde équation donne  $\tan \phi = -\beta/\tilde{\omega} = -0,1123$ , d'où  $\phi = -0,1118 \text{ rad}$  et  $A = 20,1 \mu C$ . L'intensité s'écrit aussi

$$\begin{aligned} I &= Ae^{-\beta t} \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \beta^2} [\sin \phi \cos(\tilde{\omega}t + \phi) - \cos \phi \sin(\tilde{\omega}t + \phi)] \\ &= -A\omega_0 e^{-\beta t} \sin(\tilde{\omega}t) \end{aligned}$$

L'amplitude de l'intensité est réduite au centième de sa valeur initiale au bout du temps  $t$  tel que

$$A\omega_0 e^{-\beta t} = 10^{-2} A\omega_0 \implies e^{-\beta t} = 10^{-2}$$

$$\implies \beta t = 2 \ln 10 \implies t = 18,4 \text{ ms.}$$

L'énergie moyenne diminue selon la loi  $\langle U_{EM} \rangle = \langle U_{EM}(0) \rangle e^{-2\beta t}$ . Elle est dissipée à 99 % dans la résistance lorsque  $\langle U_{EM} \rangle = 10^{-2} \langle W_{EM}(0) \rangle$ , c'est-à-dire

$$e^{-\beta t} = 10^{-2} \implies \beta t = \ln 10 \implies t = 9,21 \text{ ms.}$$

# Dipôles

## PLAN

- 4.1 Définitions et représentations
- 4.2 Règles de Kirchhoff
- 4.3 Impédance
- 4.4 Association des dipôles
- 4.5 Puissance électrique dans les dipôles
- 4.6 Générateurs comme source de tension
- 4.7 Générateurs comme source de courant
- 4.8 Association des générateurs
- 4.9 Récepteurs
- 4.10 Dipôles non linéaires

## OBJECTIF

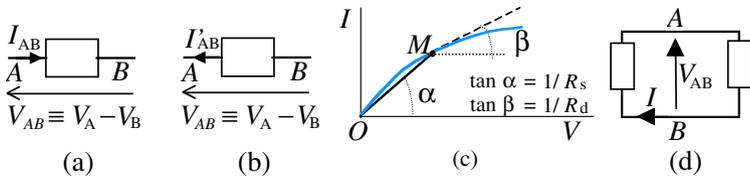
- Études des notions d'impédance, de puissance et d'association des dipôles passifs ainsi que celles des générateurs et des récepteurs.

## 4.1 DÉFINITIONS ET REPRÉSENTATIONS

Un *dipôle électrique* est un élément de circuit qui peut être connecté aux autres éléments par deux bornes : une entrée  $A$  et une sortie  $B$  (Fig. 4.1). Le dipôle est *actif* s'il contient une source d'énergie et il est *passif* s'il n'en contient aucune. Il est un *générateur*, s'il fournit de l'énergie au circuit et il est un *récepteur* s'il transforme l'énergie électrique en une autre forme utilisable (mécanique, chimique etc.).



Une résistance n'est pas considérée comme un récepteur proprement dit, car l'énergie qu'elle consomme n'est pas utilisable et tout dipôle a une certaine résistance. Un condensateur et une self-inductance ne sont pas des récepteurs ; car ils emmagasinent l'énergie puis ils la restituent au circuit.



**Figure 4-1** a) Représentation récepteur d'un dipôle électrique et b) Représentation générateur. c) Caractéristique et point de fonctionnement d'un dipôle récepteur et d) Connexion de deux dipôle pour former un circuit.

La d.d.p. aux bornes A et B d'un dipôle est désignée par  $V_{AB} \equiv V_A - V_B$  et représentée par une flèche allant de B vers A. C'est une grandeur algébrique qui est positive s'il s'agit effectivement d'une chute de potentiel et négative dans le cas contraire. L'intensité qui entre en une borne sort de l'autre dans l'approximation des régimes quasi stationnaires. Pour la représenter on peut utiliser l'une ou l'autre des conventions suivantes :

i) Dans la **convention récepteur**,  $I_{AB}$  désigne le courant *dans le dipôle* (Fig. 4.1a). C'est une grandeur algébrique positive si le courant circule effectivement de A vers B et négative dans le cas contraire.

ii) Dans la **convention générateur**,  $I'_{AB}$  désigne le courant *débité par le dipôle dans le circuit extérieur* dans le sens AB (Fig. 4.1b). C'est une grandeur algébrique égale à l'opposée de  $I_{AB}$  de la convention récepteur

$$I'_{AB} = -I_{AB} \quad (4.1)$$

Quelle que soit la représentation utilisée  $V_{AB}$  et  $I_{AB}$  sont des grandeurs algébriques et le dipôle peut être effectivement un générateur ou un récepteur selon qu'il fournit ou consomme de l'énergie électrique (voir la section 4.5). Dans la suite nous utilisons le plus souvent la représentation récepteur et nous omettons l'indice (AB) pour simplifier. Cependant, si deux dipôles sont reliés entre eux pour former un circuit et on choisit un sens de la d.d.p.  $V_{AB}$  à leurs bornes, les conventions sont nécessairement récepteur pour l'un et générateur pour l'autre (Fig. 4.1d).

L'équation **caractéristique** d'un dipôle est la relation qui lie la d.d.p.  $V_{AB}$  à ses bornes et l'intensité  $I_{AB}$ . Selon la nature du dipôle, cette relation peut être algébrique, différentielle ou intégrale. Dans le cas d'une résistance, une self-inductance et un condensateur, cette relation s'écrit respectivement

$$V = RI \quad [\text{résistance}] \quad (4.2)$$

$$V = L dI/dt \quad [\text{self-inductance}] \quad (4.3)$$

$$V = Q/C \quad [\text{condensateur}] \quad (4.4)$$



Ces relations sont valables avec les conventions de signe habituelles. Parfois le courant est alternatif ou continu mais de sens inconnu. On choisit alors un sens pour le circuit. Si on trouve que l'intensité est positive le courant est effectivement dans le sens choisi ; sinon il est dans le sens opposé. Pour écrire la d.d.p. aux bornes d'un condensateur, on désigne par  $Q$  la charge de l'une de ses armatures ; l'autre porte alors la charge  $-Q$ . Si le courant algébrique  $I$  est dirigé vers l'armature de charge  $+Q$ , la relation de conservation de la charge s'écrit  $dQ = I dt$ , c'est-à-dire

$$I = \dot{Q} \quad \text{ou} \quad Q = \int dt I \quad (4.5)$$

En revanche, si le courant est dirigé vers l'armature de charge  $-Q$ , nous devons changer le signe de  $I$  et écrire  $I = -\dot{Q}$  et  $Q = -\int dt I$ .

Dans le cas d'une caractéristique algébrique, la courbe représentant  $I$  en fonction de  $V$  (ou l'inverse) est appelée aussi **caractéristique** (Fig. 4.1c). Des valeurs correspondantes de  $V$  et  $I$ , définissent un **point de fonctionnement**. On définit la **résistance statique**  $R_s$  et la **résistance dynamique**  $R_d$  par les relations

$$R_s = V/I, \quad R_d = dV/dI \quad (4.6)$$

La résistance statique est la pente de la droite  $OM$  menée de l'origine au point de fonctionnement tandis que la résistance dynamique est la pente de la tangente à la caractéristique au point de fonctionnement.

Dans le cas d'un conducteur ohmique, la caractéristique est une ligne droite de pente  $1/R$  ; les deux résistances sont alors identiques. La Fig. 4.1c représente la caractéristique d'un dipôle presque linéaire si la d.d.p.  $V$  appliquée est faible. La résistance est alors indépendante de la d.d.p. La chaleur dégagée par effet Joule est effectivement évacuée hors du conducteur ; la température et la résistance restent constantes.



Par contre, si  $V$  est grande la chaleur dégagée n'est pas complètement évacuée ; la température et la résistance augmentent, donc la pente  $\alpha$  diminue. En courant alternatif, la caractéristique d'un dipôle non linéaire dépend de la fréquence et de l'amplitude de la d.d.p.

Le dipôle est *symétrique* si on peut échanger ses bornes  $A$  et  $B$  ; il a alors le même fonctionnement dans les deux sens du courant. Dans ce cas la caractéristique est symétrique par rapport à l'origine. C'est le cas d'une résistance, par exemple. Un dipôle actif n'est jamais symétrique.

La notion de linéarité des dipôles est un peu ambiguë. Au sens strict, un dipôle est *linéaire* si son équation caractéristique est linéaire. Cela veut dire que, si  $V_1$  et  $V_2$  sont les d.d.p. qui correspondent aux intensités  $I_1$  et  $I_2$ , la d.d.p.  $\alpha V_1 + \beta V_2$  correspond à l'intensité  $\alpha I_1 + \beta I_2$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles ou complexes. On dit alors que le dipôle vérifie le **principe de superposition**.

Les conducteurs ohmiques, les condensateurs et les self-inductances sont linéaires et, plus généralement, c'est le cas des circuits formés en connectant de tels éléments. Ce n'est pas le cas des générateurs et des récepteurs, dont la caractéristique est une droite de la forme  $V = \mathcal{E} - rI$  et  $V = \mathcal{E}' + rI$  respectivement (relation affine). Ces éléments sont linéaires au sens large du terme.

Supposons qu'un dipôle est linéaire et que les d.d.p.  $V_1$  et  $V_2$  correspondent aux intensités  $I_1$  et  $I_2$ . À l'intensité  $\underline{I} = I_1 + jI_2$  correspond la d.d.p. complexe  $\underline{V} = V_1 + jV_2$ . Il est donc possible d'analyser les dipôles pour des intensités et des d.d.p. complexes et de prendre à la fin du calcul les parties réelles ( $V_1 = \text{Re } \underline{V}$  qui correspond à  $I_1 = \text{Re } \underline{I}$ ). Il faut noter que cette méthode ne peut pas être utilisée pour évaluer la puissance instantanée dans un circuit, par exemple, car la puissance est quadratique en  $I$  ou  $V$ . Dans ce cas, il faut prendre les parties réelles de  $I$  et  $V$  avant de calculer la puissance.

## 4.2 RÈGLES DE KIRCHHOFF

Pour analyser l'association des dipôles et, en général, les circuits complexes, nous aurons besoin des **règles de Kirchhoff** :

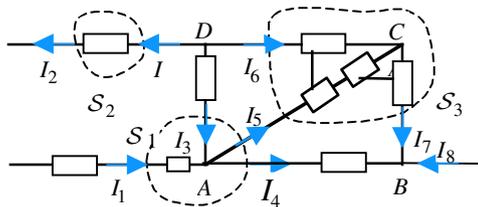


Figure 4-2 Règles de Kirchhoff dans un circuit.

### a) Règle des nœuds

La somme des intensités de courant qui arrivent en un nœud est égale à la somme des intensités de courant qui le quittent :

$$\boxed{\sum_i I_i^{(in)} = \sum_k I_k^{(ex)}} \quad (4.7)$$

Cette règle est une conséquence directe de la loi de conservation de la charge électrique, car il ne peut y avoir aucune accumulation ou disparition de charge en un point. Ainsi au nœud  $A$  dans la figure 4.2, nous avons  $I_1 + I_3 = I_4 + I_5$  et au nœud  $B$  nous avons  $I_4 + I_7 + I_8 = 0$ . Les courants étant algébriques, au nœud  $B$ , par exemple les intensités  $I_4$ ,  $I_7$  et  $I_8$  ne peuvent pas être de même signe.

La règle des nœuds peut être généralisée aux courants entrants et sortants d'une surface fermée quelconque, même si elle contient des circuits entiers ou des éléments de circuit pourvu qu'elle contienne des éléments entiers (elle ne peut pas contenir une seule armature d'un condensateur, par exemple). C'est le cas de la surface  $S_3$  par exemple ; nous avons alors  $I_5 + I_6 = I_7$ . Si nous l'appliquons à une surface telle que  $S_2$ , nous trouvons que l'intensité qui entre d'un côté sort de l'autre. L'intensité de courant est donc la même le long d'une branche, même si  $S_2$  contient un circuit complexe.

### b) Règle des mailles

*La somme des chutes de potentiel aux bornes d'éléments formant une maille est nulle :*

$$\boxed{\sum_i V_i = 0} \quad (4.8)$$

Par exemple, dans le cas de la maille  $ABCD$  de la figure 4.2, nous avons

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_D - V_C) + (V_D - V_A) = 0$$

Cette relation est une identité. Cependant l'expression (4.8) n'est pas dépourvue de sens. En effet on ne peut l'écrire que si le potentiel  $V$  existe, c'est-à-dire si le champ électrique dérive d'un potentiel et cela est une conséquence de la loi de conservation de l'énergie. En multipliant cette relation par une charge  $q$ , nous trouvons que le travail des

forces électriques sur  $q$  pour décrire la maille est nul et c'est justement la condition que le champ électrique soit conservatif, c'est-à-dire il dérive d'un potentiel. Précisons que les chutes de potentiel sont algébriques, donc positives s'il s'agit effectivement d'une chute de potentiel et négative s'il s'agit d'une augmentation de potentiel. Les tensions produites par les générateurs doivent être incluses dans l'équation (4.8) et aussi d'éventuelles forces électromotrices induites (voir la section 1.6).



Notons que les règles de Kirchhoff, qui sont liées à des lois fondamentales (conservations de la charge et de l'énergie) sont, en général, valables dans l'approximation quasi stationnaire même en régimes variables et dans le cas de dipôles non linéaires. Dans ce dernier cas, cependant, les conséquences de ces règles ne peuvent pas être facilement analysées. On fait alors recours à des méthodes d'approximation ou d'analyse numérique.

### 4.3 IMPÉDANCE

Si le générateur dans un circuit électrique est sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , la linéarité du circuit exige que la d.d.p. entre deux points quelconques et les intensités de courant dans les diverses branches soient sinusoïdales de même pulsation. Les caractéristiques du circuit dépendent souvent de la fréquence. La théorie de Fourier permet d'écrire toute fonction comme une superposition de fonctions sinusoïdales de diverses pulsations. La linéarité permet d'analyser le circuit pour chacune des pulsations et de faire la superposition des diverses grandeurs linéaires. Nous analysons dans cette section le fonctionnement d'un dipôle en régime sinusoïdal.

#### a) Impédances réelles

Supposons que l'intensité de courant dans un dipôle soit sinusoïdale. La chute de potentiel  $V$  est alors sinusoïdale de même pulsation sans être nécessairement en phase :

$$I = I_m \cos(\omega t + \phi_I) \quad \text{et} \quad V = V_m \cos(\omega t + \phi_V) \quad (4.9)$$

Où les phases sont comprises entre  $-\pi$  et  $+\pi$  et telles que les amplitudes soient positives.

Nous définissons l'*impédance réelle* (ou simplement *impédance*)  $Z$  d'un dipôle comme le rapport de  $V_m$  à  $I_m$

$$Z = V_m / I_m \quad (4.10)$$

C'est donc une généralisation de la notion de résistance. Elle est positive et elle s'exprime en ohms ( $\Omega$ ). Les équations caractéristiques (4.2), (4.3) et (4.4) impliquent que les impédances réelles d'une résistance  $R$ , d'une self-inductance  $L$  et d'une capacité  $C$  sont respectivement

$$Z_R = R, \quad Z_L = \omega L, \quad Z_C = 1/\omega C \quad (4.11)$$



À l'exception d'une résistance pure, l'impédance n'est pas une caractéristique du seul dipôle ; car elle dépend de la fréquence du courant. Dans le cas d'un courant continu ( $\omega = 0$ ), l'impédance d'une self-inductance pure est nulle et celle d'un condensateur est infinie ; alors la self-inductance ne joue aucun rôle dans le circuit et le condensateur coupe le courant. À haute fréquence, l'impédance d'une self-inductance est grande et celle d'un condensateur est faible ; alors la self-inductance oppose une plus grande réaction au courant tandis que le condensateur favorise sa transmission.

### b) Impédances complexes

Nous avons vu qu'il est souvent plus facile (et parfois inévitable) d'utiliser la représentation complexe plutôt que les fonctions trigonométriques ou la représentation de Fresnel. Si le dipôle est linéaire,  $I_1$  correspond à  $V_1$  et  $I_2$  correspond à  $V_2$ , l'intensité complexe  $\underline{I} = I_1 + jI_2$  correspond à  $\underline{V} = V_1 + jV_2$ . Inversement si  $\underline{I}$  correspond à  $V$ ,  $\mathcal{Re} \underline{I}$  correspond à  $\mathcal{Re} \underline{V}$ . Dans le cas d'un courant alternatif, supposons que

$$\underline{I} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{V} = \underline{V}_m e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\phi_1} \quad \text{et} \quad \underline{V}_m = V_m e^{j\phi_V} \quad (4.12)$$

L'impédance complexe est définie par

$$\underline{Z} = \underline{V}/\underline{I} = \underline{V}_m/\underline{I}_m = (V_m/I_m) e^{j(\phi_V - \phi_1)} \quad (4.13)$$

Le module de l'impédance complexe  $\underline{Z}$  est donc égal à l'impédance réelle  $Z$  et la phase de  $\underline{Z}$  est égale à l'avance de phase de  $\underline{V}$  sur  $\underline{I}$ .

$$Z = (V_m/I_m) = |\underline{Z}| \quad \text{et} \quad \phi_z = \phi_V - \phi_I \quad (4.14)$$

Dans les cas d'une résistance, une self-inductance et un condensateur, les relations (4.2), (4.3) et (4.4) donnent les d.d.p. respectivement

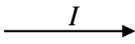
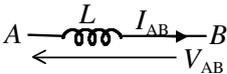
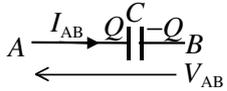
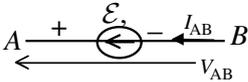
$$\begin{aligned} \underline{V}_R &= R\underline{I} = RI_m e^{j\omega t}, \quad \underline{V}_L = L\dot{\underline{I}} = j\omega LI_m e^{j\omega t}, \\ \underline{V}_C &= \underline{Q}/C = (1/C) \int dt \underline{I} = (1/jC\omega)\underline{I}_m e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Les impédances complexes de ces éléments sont donc

$$\underline{Z}_R = \underline{V}_R / \underline{I} = R, \quad \underline{Z}_L = \underline{V}_L / \underline{I} = j\omega L, \quad \underline{Z}_C = \underline{V}_C / \underline{I} = -j/\omega C \quad (4.16)$$

L'impédance d'une résistance pure est réelle tandis que celle d'une self-inductance ou d'un condensateur est imaginaire.

Tableau 4-1 Éléments de circuit.

Grandeur électrique	Symbole et représentation	Relations fondamentales
Charge électrique	$Q$	
Intensité de courant		$I(t) = dq/dt$ ou $q = \int dt i(t)$
Résistance		$V_{AB} \equiv V_A - V_B = RI_{AB}$
Self-inductance		$V_A - V_B = L dt_{AB}/dt$ $\underline{Z} = jL\omega$
Condensateur		$I_{AB} = dQ/dt$ $V_A - V_B = Q/C$ $\underline{Z} = 1/jC\omega$
Force électromotrice		$V_{AB} = \mathcal{E} - I_{AB}r$ $P_g = \mathcal{E}I_{AB}$ $P_{ex} = \mathcal{E}I_{AB} - I_{AB}^2r$

En général, l'impédance d'un dipôle est complexe, de la forme

$$\underline{Z} = R_z + jX_z \quad (4.17)$$

La partie réelle  $R_z$  est la **résistance** du dipôle (souvent positive) et la partie imaginaire  $X_z$  est sa **réactance**. On introduit aussi parfois l'**admittance**, égale à l'inverse de l'impédance

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} \quad (4.18)$$

L'impédance réelle  $Z$  et la phase  $\phi_z$  de  $\underline{Z}$  sont alors données par

$$Z = \sqrt{R_z^2 + X_z^2}, \quad \cos \phi_z = R_z/Z, \quad \sin \phi_z = X_z/Z \quad (4.19)$$

L'impédance complexe s'écrit aussi

$$\underline{Z} = Ze^{j\phi_z} \quad (4.20)$$

Notons aussi la relation  $\tan \phi_z = X_z/R_z$ ; mais cette relation ne suffit pas seule à déterminer  $\phi_z$  complètement. Cependant en pratique, comme  $R_z$  est souvent positive, la phase  $\phi_z$  est comprise entre  $-\pi/2$  et  $+\pi/2$ .

Si on connaît l'intensité complexe  $\underline{I} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$  et l'impédance du dipôle sous la forme (4.20), la d.d.p. complexe s'écrit

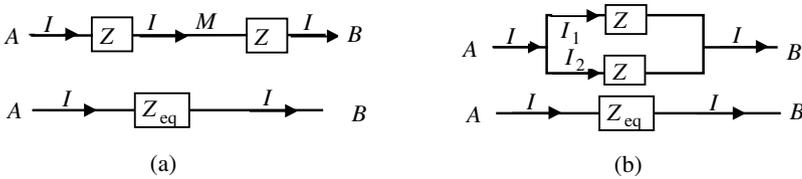
$$\underline{V} = \underline{V}_m e^{j\omega t} = \underline{Z} \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{V}_m e^{j(\omega t + \phi_1 + \phi_z)} \quad \text{où} \quad \underline{V}_m = \underline{Z} \underline{I}_m \quad (4.21)$$



Ainsi la d.d.p. a une amplitude égale au produit de l'amplitude de l'intensité par l'impédance réelle et elle est en avance de phase de  $\phi_z$  sur l'intensité.

## 4.4 ASSOCIATION DES DIPÔLES

L'un des avantages de l'utilisation des impédances complexes est qu'elles peuvent être évaluées facilement pour des dipôles en série ou en parallèle, contrairement aux impédances réelles.



**Figure 4-3** a) Montage des impédances en séries et b) montage en parallèle et impédances équivalentes

### a) Montage en série

Considérons deux dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  montés en série (Fig. 4.3a). L'intensité est la même dans ces dipôles. Si  $\underline{I}$  est l'intensité complexe, les d.d.p. aux bornes de ces dipôles sont

$$\underline{V}_{AM} = \underline{Z}_1 \underline{I}, \quad \underline{V}_{MB} = \underline{Z}_2 \underline{I}$$

Utilisant la loi d'addition des d.d.p. en série, qui est valable aussi pour les amplitudes complexes, nous trouvons

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_{AM} + \underline{V}_{MB} = \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$

L'impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  est celle qui présente, entre ses bornes, la même d.d.p.  $\underline{V}_{AB}$  pour la même intensité  $\underline{I}$ . On a alors  $\underline{V}_{AB} = \underline{Z}_{eq} \underline{I}$ , d'où

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \quad (4.22)$$

Ce résultat peut être facilement généralisé au cas de plusieurs impédances  $\underline{Z}_k$  montées en série ; l'impédance complexe équivalente est la somme algébrique de ces impédances

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k \quad (4.23)$$



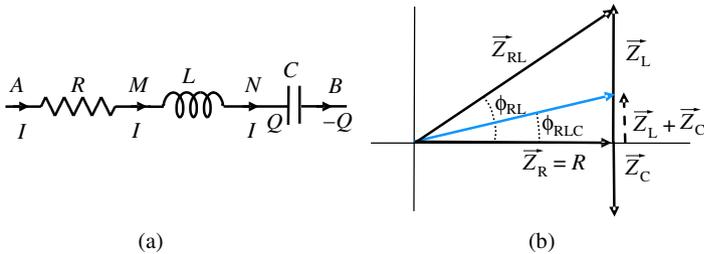
Comme application, considérons une résistance, une self-inductance et un condensateur montés en série (Fig. 4.4a). Utilisant les relations (4.16) et la règle d'association des dipôles en série (4.23), nous trouvons pour l'impédance équivalente

$$\underline{Z}_{\text{RLC}} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j(\omega L - 1/\omega C) \quad (4.24)$$

L'impédance réelle correspondante et sa phase sont donc

$$\underline{Z}_{\text{RLC}} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (4.25)$$

$$\phi_{\text{RLC}} = \text{Arctan} \frac{\omega L - 1/C\omega}{R} \quad (-\pi/2 < \phi_{\text{RLC}} < \pi/2) \quad (4.26)$$



**Figure 4-4** a) Une résistance, une inductance et un condensateur en série.

b) Diagramme de Fresnel pour les impédances. Les sommes des vecteurs  $\vec{Z}_L$  et  $\vec{Z}_R$  est  $\vec{Z}_{\text{RL}}$ . Pour avoir l'impédance totale  $\vec{Z}_{\text{RLC}}$ , on fait la somme  $\vec{Z}_L + \vec{Z}_C$  puis on ajoute  $\vec{Z}_R$ . Le diagramme de Fresnel pour les tensions est obtenu en multipliant les impédances par I.

La représentation de Fresnel pour les impédances est illustrée dans la Fig. 4.4b. R est représentée par le vecteur  $\vec{Z}_R$  de longueur R et porté par l'axe de référence Ox.  $\vec{Z}_L$  a pour module  $\omega L$  et il est en avance de phase de  $\pi/2$  (dans la direction Oy).  $\vec{Z}_C$  a pour module  $1/\omega C$  et il est en retard de phase de  $\pi/2$  (dans la direction opposée à Oy). L'impédance  $\underline{Z}_{\text{RL}}$  aux bornes de l'ensemble L et R (qui

pourrait être une bobine) est la somme vectorielle  $\vec{Z}_R + \vec{Z}_L$ . Elle est représentée par le vecteur  $\vec{Z}_{RL}$  de module  $Z_{RL}$  et qui forme avec  $Ox$  un angle  $\phi_{RL}$  donnés par

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{et} \quad \phi_{RL} = \text{Arctan}(L\omega/R). \quad (4.27)$$

La d.d.p. aux bornes de la bobine est donc en avance de phase  $\phi_{RL}$  sur l'intensité.

Pour trouver l'impédance totale  $Z_{RLC}$ , il faut faire la somme des vecteurs  $\vec{Z}_R$ ,  $\vec{Z}_L$  et  $\vec{Z}_C$ . Il convient de faire d'abord la somme vectorielle  $\vec{Z}_{LC} = \vec{Z}_L + \vec{Z}_C$ . C'est un vecteur de composante  $(L\omega - 1/C\omega)$  dans la direction  $Oy$ . La somme de  $\vec{Z}_{LC}$  et  $\vec{Z}_R$  est le vecteur  $\vec{Z}_{RLC}$  représentant l'impédance équivalente. Il a pour module  $Z_{RLC}$  et il forme avec  $Ox$  un angle  $\phi_{RLC}$  justement donnés par (4.25) et (4.26).

Si l'intensité de courant est  $I = I_m \cos(\omega t + \phi_I)$ , l'intensité complexe correspondante est  $\underline{I} = I_m e^{j(\omega t + \phi_I)}$ , la d.d.p. complexe entre  $A$  et  $B$  est  $\underline{V} = \underline{Z}_{RLC} \underline{I} = Z_{RLC} I_m e^{j(\omega t + \phi_I + \phi_{RLC})}$ . Nous en déduisons que la d.d.p. réelle entre  $A$  et  $B$  est

$$V = Z_{RLC} I_m \cos(\omega t + \phi_I + \phi_{RLC}) \quad (4.28)$$

La d.d.p. a donc pour amplitude  $Z_{RLC} I_m$  et elle est en avance de phase de  $\phi_{RLC}$  sur  $I$ . C'est effectivement une avance si  $Z_L > Z_C$  (c'est-à-dire  $L\omega > 1/C\omega$ ) et un retard dans le cas contraire.

Dans le cas d'une bobine de self-inductance  $L$  et de résistance  $R$ , la d.d.p. complexe à ses bornes est  $\underline{V} = \underline{Z}_{RL} \underline{I} = Z_{RL} I_m e^{j(\omega t + \phi_I + \phi_{RL})}$ . Nous en déduisons la d.d.p. réelle

$$V_{AN} = Z_{RL} I_m \cos(\omega t + \phi_I + \phi_{RL}) \quad (4.29)$$

## b) Montage en parallèle

Considérons les dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_k$  montés en parallèle (Fig. 4.3b). La règle des nœuds est valable pour les intensités instantanées et aussi pour les amplitudes complexes des intensités : L'intensité  $\underline{I}$  du circuit principal est la somme des intensités des branches

$$\underline{I} = \sum_k I_k \quad (4.30)$$

La d.d.p. entre les points de branchement s'écrit, en l'évaluant pour chacune des branches,

$$\underline{V}_{MN} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \dots, \quad \text{d'où} \quad \underline{I}_k = \underline{V}_{MN} / \underline{Z}_k \quad (4.31)$$

L'impédance complexe équivalente est celle qui, branchée entre les points  $M$  et  $N$ , correspond à la même d.d.p.  $\underline{V}_{MN}$  entre ces points pour le même courant  $\underline{I}$  principal. On a alors  $\underline{V}_{MN} = \underline{Z} \underline{I}$ . Utilisant (4.30) et (4.31), on déduit la relation

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{Y} = \sum_k \underline{Y}_k} \quad (4.32)$$

Où  $\underline{Y}_{\text{eq}} = 1/\underline{Z}_{\text{eq}}$  est l'admittance équivalente et les  $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$  sont les admittances des branches.

- Les relations (4.23) et (4.32) s'écrivent dans le cas de résistances

$$R_{\text{eq}} = \sum_i R_i \quad [\text{résistances en séries}] \quad (4.33)$$

$$1/R_{\text{eq}} = \sum_i 1/R_i \quad [\text{résistances en parallèle}] \quad (4.34)$$

- et dans le cas de condensateurs

$$1/C_{\text{eq}} = \sum_i 1/C_i \quad [\text{condensateurs en séries}] \quad (4.35)$$

$$C_{\text{eq}} = \sum_i C_i \quad [\text{condensateurs en parallèle}] \quad (4.36)$$

- Dans le cas de self-inductances suffisamment éloignées l'une de l'autre pour que les coefficients d'influence magnétique soient négligeables, nous trouvons

$$L_{\text{eq}} = \sum_i L_i \quad [\text{self-inductances en séries}] \quad (4.37)$$

$$1/L_{\text{eq}} = \sum_i 1/L_i \quad [\text{self-inductances en parallèle}] \quad (4.38)$$

### c) Diviseurs de tension et diviseur de courant

Supposons qu'on dispose d'une d.d.p.  $V_{AB}$  entre deux points  $A$  et  $B$  d'un circuit (Fig. 4.5a). Pour en extraire une tension  $V < V_{AB}$ , on branche entre  $A$  et  $B$  deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  en série. L'intensité dans ces résistances est  $I = V_{AB}/(R_1 + R_2)$  et la différence de potentiel aux bornes de  $R_1$  est  $V = IR_1 = V_{AB}R_1/(R_1 + R_2)$ . En choisissant des résistances appropriées, on peut avoir toute tension inférieure à  $V_{AB}$ . C'est le principe du **diviseur de tension** (rhéostats ou potentiomètres, voir la section 2.7). Pratiquement la résistance  $R_1 + R_2$  est fixe (un

enroulement de fil conducteur ou un conducteur rectiligne ou circulaire) et  $M$  est un curseur qu'on déplace jusqu'à avoir la tension  $V$  désirée. En courant alternatif, on peut utiliser des impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$ . On obtient ainsi entre  $A$  et  $M$  une tension  $\underline{V}_{AM} = \underline{V}_{AB} \underline{Z}_1 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ , d'amplitude  $V_{AM} = V_{AB} Z_1 / |Z_1 + Z_2|$  et en avance de phase sur  $\underline{V}_{AB}$  donnée par  $\phi = \text{phase}(\underline{Z}_1) - \text{phase}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ .

Pour avoir un **diviseur de courant**, on monte des résistances  $R_1$  et  $R_2$  en parallèle (Fig. 4.5b). La résistance équivalente est  $R_{eq} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Si  $I$  est l'intensité principale, la d.d.p. aux bornes de ces résistances est  $V = I R_{eq}$ . L'intensité dans  $R_1$  est donc  $I_1 = V / R_1 = I R_2 / (R_1 + R_2)$ . En choisissant les bonnes résistances, on peut avoir toute intensité inférieure à  $I$ .



En courant alternatif, on peut utiliser des impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$ . L'intensité dans  $Z_1$  est alors  $I_1 = I \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ . On peut ainsi régler l'amplitude du courant  $I_1 = I Z_2 / |Z_1 + Z_2|$  et son déphasage par rapport à  $I$ :  $\phi_1 - \phi_I = \text{phase}(\underline{Z}_2) - \text{phase}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ .

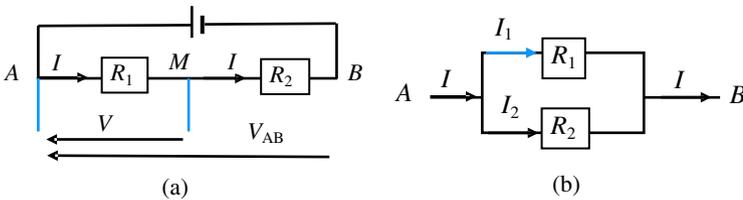


Figure 4-5 a) Diviseur de tension et b) diviseur de courant.

### 4.5 PUISSANCE ÉLECTRIQUE DANS LES DIPÔLES

En représentation récepteur, la charge qui traverse le dipôle de  $A$  vers  $B$  pendant un temps  $dt$  est  $dq = I_{AB} dt$ . L'énergie potentielle perdue par cette charge à l'intérieur du dipôle est  $dq(V_A - V_B) = V_{AB} I_{AB} dt$ . En d'autres termes, la puissance instantanée fournie par le courant électrique dans le dipôle est

$$P_{AB} = I_{AB} V_{AB} \tag{4.39}$$

Si  $I_{AB}$  et  $V_{AB}$  sont de même signe (le courant est dans le sens de la chute de potentiel), cette puissance est effectivement positive ; ce qui veut dire

que le dipôle reçoit de l'énergie électrique pour la transformer en chaleur ou en une autre forme d'énergie. Il peut aussi l'emmagasiner sous forme électrique dans des condensateurs ou magnétique dans des self-inductances et la restituer ensuite au circuit. Par contre, si  $I_{AB}$  et  $V_{AB}$  sont de signes opposés, la puissance (4.39) est négative ; ce qui veut dire que les charges gagnent de l'énergie pour la restituer au reste du circuit. Les puissances dans une résistance, une self-inductance et un condensateur sont respectivement

$$P_R = VI = RI^2 \quad [\text{résistance}] \quad (4.40)$$

$$P_L = VI = LI dI/dt = dU_M/dt \quad \text{où} \quad U_M = \frac{1}{2} LI^2 \quad [\text{self-inductance}] \quad (4.41)$$

$$P_C = VI = VdQ/dt = dU_E/dt \quad \text{où} \quad U_E = \frac{1}{2} Q^2/C \quad [\text{condensateur}] \quad (4.42)$$

Ces relations montrent que  $P_R$  est toujours positive (la résistance consomme de l'énergie). Par contre une self-inductance reçoit de l'énergie si  $I$  augmente et un condensateur reçoit de l'énergie si  $Q$  augmente et ils la restituent au reste du circuit dans les cas contraires. Si le régime est stationnaire ( $I$  et  $Q$  constantes ou périodiques) les valeurs moyennes de  $U_E$  et  $U_M$  sont constantes ; une self-inductance pure et un condensateur ne consomment alors aucune énergie.



Notons que  $I$  dans une self-inductance et  $Q$  dans un condensateur ne peuvent pas subir de discontinuités, car il en serait de même pour l'énergie emmagasinée et la puissance dans ces éléments serait infinie ; cette puissance ne peut être fournie par aucun générateur ou consommée par aucun récepteur.

Considérons un dipôle d'impédance  $\underline{Z} = Ze^{j\phi_z}$  transmettant une intensité  $\underline{I} = I_m e^{j(\omega t + \phi_I)}$ . La d.d.p. à ses bornes est  $\underline{V} = \underline{Z}\underline{I} = ZI_m e^{j(\omega t + \phi_I + \phi_z)}$ . Notons que la puissance n'est pas une grandeur linéaire (en  $I$  ou  $V$ ). En effet si la f.é.m.  $\mathcal{E}$  est multipliée par un facteur  $k$ ,  $I$  et  $V$  sont multipliées par  $k$  et la puissance instantanée  $P = VI$  est multipliée par  $k^2$ . Nous devons donc évaluer la puissance en utilisant les grandeurs réelles

$$I = I_m \cos(\omega t + \phi_I) \quad \text{et} \quad V = V_m \cos(\omega t + \phi_I + \phi_z) \quad \text{où} \quad V_m = ZI_m \quad (4.43)$$

L'énergie fournie à ce dipôle entre  $t$  et  $t + dt$  est

$$\begin{aligned} dU &= V(t)I(t) dt = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_1) \cos(\omega t + \phi_1 + \phi_z) dt \\ &= V_m I_m [\cos \phi_z \cos^2(\omega t + \phi_1) - \frac{1}{2} \sin \phi_z \sin(2\omega t + 2\phi_1)] dt \end{aligned}$$

L'énergie totale fournie pendant une période est

$$U = \int_t^{t+T} dU = \frac{1}{2} V_m I_m T \cos \phi_z.$$

La puissance moyenne fournie est donc

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= U/T = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi_z = \frac{1}{2} Z I_m^2 \cos \phi_z \\ &= \frac{1}{2} (V_m^2/Z) \cos \phi_z \end{aligned} \quad (4.44)$$

Utilisant les valeurs efficaces  $I_{\text{eff}} = I_m/\sqrt{2}$  et  $V_{\text{eff}} = V_m/\sqrt{2}$ , nous trouvons

$$\langle P \rangle = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \phi_z = Z I_{\text{eff}}^2 \cos \phi_z = (V_{\text{eff}}^2/Z) \cos \phi_z \quad (4.45)$$



Le facteur  $\cos \phi_z$  qui apparaît dans l'expression de la puissance moyenne, est appelé **facteur de puissance**. Dans le cas d'une résistance pure ( $\phi_z = 0$ ), le facteur de puissance est égal à 1 tandis que, dans le cas d'une self-inductance ( $\phi_z = \pi/2$ ) ou un condensateur ( $\phi_z = -\pi/2$ ), le facteur de puissance est nul. Une self-inductance ou un condensateur ne dissipent donc aucune énergie ; ils emmagasinent simplement l'énergie et la restituent au circuit sans perte.

Si nous écrivons l'impédance sous la forme  $\underline{Z} = R_z + jX_z$ , nous avons la relation  $Z \cos \phi_z = R_z$  ; la puissance s'écrit aussi

$$\langle P \rangle = R_z I_{\text{eff}}^2 = (R_z/Z^2) V_{\text{eff}}^2 \quad (4.46)$$

La puissance dissipée dans un dipôle d'impédance  $Z$  est positive ou négative selon le signe de  $\cos \phi$ . Le dipôle dissipe effectivement de l'énergie si  $\cos \phi$  est positif. Les éléments de circuit contenant des résistances sont toujours dissipatifs.



Certains dispositifs sont dissipatifs, bien qu'ils ne contiennent aucune résistance. Une antenne et un câble de transmission sont des exemples de tels dispositifs. L'énergie qui les alimente est transmise comme onde électromagnétique.

Notons aussi que la puissance instantanée s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} P(t) &= \text{Re}(\underline{I}) \text{Re}(\underline{V}) = \frac{1}{4} (\underline{I} + \underline{I}^*) (\underline{V} + \underline{V}^*) \\ &= \frac{1}{4} (\underline{VI}^* + \underline{IV}^*) + \frac{1}{4} (\underline{V}^* \underline{I} + \underline{IV}) \end{aligned}$$

Le premier terme est indépendant du temps ; il est donc égal à sa moyenne sur une période. Le second terme est une fonction périodique de pulsation  $2\omega$  ; sa moyenne sur une période est nulle. Nous pouvons donc écrire

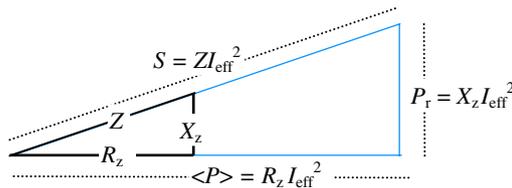
$$\langle P \rangle = \frac{1}{4}(\underline{VI}^* + \underline{IV}^*) = \frac{1}{2}\mathcal{Re}(\underline{VI}^*) = \frac{1}{2}\mathcal{Re}(\underline{IV}^*) \quad (4.47)$$

La **puissance apparente** du dipôle est définie par

$$S = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}}^2 \quad (4.48)$$

Elle s'exprime en **volt-ampère** (V.A) pour la distinguer de la puissance moyenne qui s'exprime en watts (W). En général, dans le cas d'un courant non sinusoïdal, on définit le facteur de puissance par le rapport

$$\text{Facteur de puissance} = \langle P \rangle / S. \quad (4.49)$$



**Figure 4-6** Représentation de l'impédance d'un dipôle et son triangle de puissance.

La figure (4.6) illustre la représentation complexe pour l'impédance  $\underline{Z} = R_z + jX_z$  ; c'est un triangle rectangle de côtés de l'angle droit  $R_z$  et  $X_z$  et d'hypoténuse  $Z = \sqrt{R_z^2 + X_z^2}$ . L'angle de  $R_z$  avec l'hypoténuse est la phase  $\phi_z$  de l'impédance. En multipliant les côtés par  $I_{\text{eff}}^2$ , on obtient le **triangle de puissance**. Son hypoténuse est la puissance apparente  $S = Z I_{\text{eff}}^2$  du dipôle, le côté qui correspond à  $R_z$  est la puissance moyenne  $\langle P \rangle = Z I_{\text{eff}}^2 \cos \phi_z = R_z I_{\text{eff}}^2$  et le troisième côté de longueur  $P_r = Z I_{\text{eff}}^2 \sin \phi_z = X_z I_{\text{eff}}^2$  est appelé **puissance réactive**.  $P_r$  est positive, négative ou nulle respectivement dans les cas de dipôles inductif, capacitif et résistif.



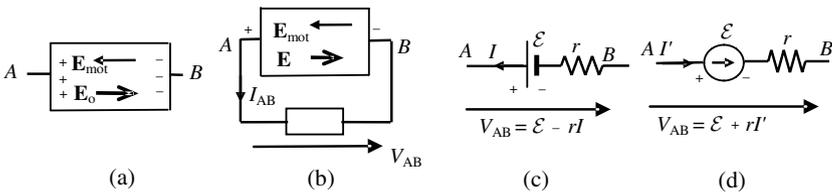
La norme impose la condition  $\tan \phi_z < 0,4$ , donc  $|P_r| < 0,4 \langle P \rangle$ . On peut respecter cette condition en insérant des condensateurs dans le circuit.

## 4.6 GÉNÉRATEURS COMME SOURCE DE TENSION

### a) Force électromotrice

Un générateur est un dispositif qui transforme en énergie électrique une autre forme d'énergie (chimique, calorifique, mécanique etc.). À l'intérieur du générateur, des forces non électriques déplacent les charges de conduction, créant ainsi un pôle positif  $A$  et un pôle négatif  $B$ . Les piles et les accumulateurs utilisent les propriétés chimiques pour créer cette d.d.p.; ce sont des *générateurs chimiques*. En revanche, les dynamos utilisent le phénomène d'induction dans un conducteur que des forces mécaniques déplacent dans un champ magnétique ; ce sont des *générateurs à induction*. Un générateur (tel qu'une pile ou un accumulateur) a des pôles (+) et (-) bien identifiés, on dit qu'il est *polarisé*. Un générateur à induction peut changer de polarité alternativement ; la d.d.p. à ses bornes est alors alternative.

Pour simplifier, l'analyse suivante est faite pour les générateurs de courant continu ; elle est valable pour les générateurs de courant alternatif en remplaçant les résistances par les impédances complexes et les f.é.m., les d.d.p. et les intensités par les amplitudes des grandeurs complexes correspondantes. Pour la puissance, on doit utiliser les valeurs efficaces avec le facteur de puissance approprié  $\cos \phi_z$ .



**Figure 4-7** **a)** Champ électrique  $\mathbf{E}_o$  et électromoteur  $\mathbf{E}_{mot}$  d'une source de tension qui ne débite pas (alors  $\mathbf{E}_o = \mathbf{E}_{mot}$ ), **b)** les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_{mot}$  lorsque la source débite dans un circuit (alors  $\mathbf{E}_o < \mathbf{E}_{mot}$ ). **c)** Représentation d'une source de tension (représentation générateur) et **d)** une autre représentation de cette source (représentation récepteur).

En considérant le générateur comme une *source de tension*, les forces non électriques peuvent être représentées par un *champ électromoteur*  $\mathbf{E}_{mot}$  à l'intérieur du dipôle. Ce champ est dirigé de la borne négative  $B$  vers la borne positive  $A$  et il agit sur les charges avec une force  $q\mathbf{E}_{mot}$  (Fig. 4.7a). Les charges positives accumulées en  $A$  et les charges

négatives accumulées en  $B$  produisent une d.d.p.  $V_{AB}$ . Ce qui correspond à l'intérieur du générateur à un champ électrique  $\mathbf{E}_0$  dirigé de  $A$  vers  $B$  qui équilibre le champ  $\mathbf{E}_{\text{mot}}$ , lorsque le générateur ne débite pas :

$$\mathbf{E}_{\text{mot}} = -\mathbf{E}_0 \quad [\text{courant débité nul}] \quad (4.50)$$

La circulation de  $\mathbf{E}_{\text{mot}}$  de  $B$  à  $A$  est la *force électromotrice* du générateur :

$$\mathcal{E} = \int_B^A d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{\text{mot}} \quad (4.51)$$



Utilisant (4.50), nous pouvons évaluer la d.d.p. entre les bornes lorsque le générateur ne débite pas

$$V(A) - V(B) = \int_B^A d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0 = \int_B^A d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{\text{mot}} = \mathcal{E} \quad [\text{courant débité nul}] \quad (4.52)$$

La d.d.p. aux bornes d'un générateur qui ne débite pas est donc égale à sa f.é.m.

### b) Tension aux bornes d'un générateur débitant un courant

Supposons que le générateur est branché à un circuit et il débite un courant d'intensité  $I \equiv I_{AB}$  dans le circuit extérieur (Fig. 4.7b). Le champ électrostatique  $\mathbf{E}$  dans le générateur n'est plus nécessairement égal à  $\mathbf{E}_0$ . Adoptons le modèle simple que nous avons utilisé pour étudier la conduction (section 2.2). La force totale qui agit sur une charge  $q$  à l'intérieur du générateur est

$$\mathbf{F}_{\text{in}} = q(\mathbf{E}_{\text{mot}} + \mathbf{E}) - b\mathbf{v}$$

où  $-b\mathbf{v}$  est la force de frottement qui est à l'origine de la résistance interne  $r$  du générateur. A l'état stationnaire, le mouvement des charges est uniforme,  $\mathbf{F}_{\text{in}} = 0$  et la vitesse est

$$\mathbf{v} = (q/b)(\mathbf{E}_{\text{mot}} + \mathbf{E})$$

La densité de courant à l'intérieur du générateur est alors

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} = (nq^2/b)(\mathbf{E}_{\text{mot}} + \mathbf{E}) = \sigma(\mathbf{E}_{\text{mot}} + \mathbf{E}) \quad (4.53)$$

où  $n$  est le nombre de porteurs de charges par unité de volume et  $\sigma$  est la conductivité interne. La loi d'Ohm s'écrit sous la même forme que dans un conducteur, mais en remplaçant  $\mathbf{E}$  par  $(\mathbf{E}_{\text{mot}} + \mathbf{E})$ , soit

$$rI = \int_B^A d\mathbf{r}(\mathbf{E}_{\text{mot}} + \mathbf{E}) = \mathcal{E} + (V_B - V_A)$$

où  $r$  est la résistance interne du générateur. La d.d.p. aux bornes du générateur lorsqu'il débite un courant  $I_{AB}$  dans le circuit extérieur est donc

$$V_{AB} = \mathcal{E} - rI_{AB} \quad (4.54)$$

En particulier, une source de tension idéale ( $r = 0$ ) a la même d.d.p. à ses bornes  $V_{AB} = \mathcal{E}$ , quelle que soit l'intensité débitée. Une source de tension réelle peut être considérée comme une source idéale montée en série avec une résistance  $r$  (Fig. 4.7 c et d).



Une pile ou un accumulateur est à une bonne approximation une source de tension. Dans ce qui précède,  $r$  représente une résistance ohmique. Elle peut ne pas l'être effectivement, même pour les piles et les accumulateurs habituels.

### c) Puissance d'un générateur

Étudions maintenant l'énergétique d'une source de tension lorsqu'elle débite un courant  $I \equiv I_{AB}$ . Pendant un temps  $\delta t$ , elle débite une charge  $\delta q = I \delta t$ . Le champ électromoteur agit sur cette charge avec une force  $\delta q \mathbf{E}_m$ . Le travail de cette force entre les pôles  $B$  et  $A$  est

$$\delta W = \delta q \int_B^A d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_m = \delta q \mathcal{E} = \delta t I \mathcal{E}$$

La puissance des forces non électriques est donc

$$P_{NE} = \mathcal{E} I \quad (4.55)$$

Toute cette puissance n'est pas disponible pour être utilisée dans le circuit extérieur car une partie

$$P_J = r I^2 \quad (4.56)$$

est dissipée par effet Joule par la résistance interne  $r$  du générateur. La puissance électrique fournie au circuit extérieur est donc

$$P_{ex} = \mathcal{E} I - r I^2 = I V_{AB} \quad (4.57)$$

Le rendement du générateur est le rapport de la puissance  $P_{ex}$  utilisable dans le circuit extérieur à la puissance totale non électrique  $P_{NE}$  nécessaire pour faire fonctionner le générateur :

$$\mathcal{R} = P_{ex}/P_{NE} = V_{AB}/\mathcal{E} = 1 - rI/\mathcal{E} \quad (4.58)$$

Le rendement diminue si l'intensité augmente. Il tend vers sa valeur maximale 1 si l'intensité  $I$  tend vers zéro. La puissance délivrée au circuit est maximale si  $I = \mathcal{E}/2r$  ; elle vaut alors  $\mathcal{E}^2/4r$  et le rendement est 0,5.

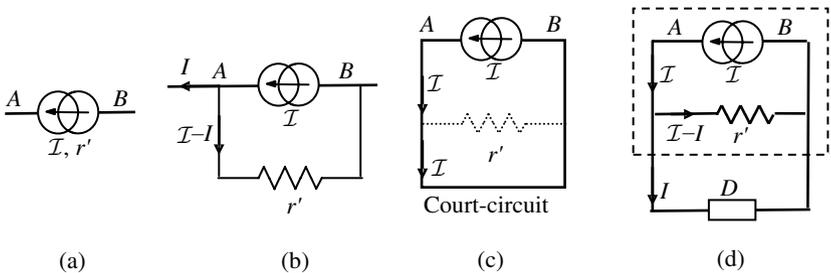


L'intensité  $I$  débitée par un générateur dépend du circuit extérieur. Comme  $V_{AB}$  ne peut pas être négative, l'intensité  $I$  ne peut pas dépasser la valeur  $\mathcal{E}/r$ . En fait le générateur ne peut pas débiter une intensité dépassant une certaine limite sans être endommagé (en le faisant débiter dans une faible résistance extérieure ou en le court-circuitant, par exemple). La puissance  $I(\mathcal{E} - Ir)$  fournie au circuit ne peut pas donc dépasser une certaine valeur caractéristique.

Le générateur, considéré comme une source de tension, est caractérisé par sa f.é.m.  $\mathcal{E}$  et sa résistance interne  $r$ . C'est la **représentation de Thévenin**. Une source de tension est *idéale* si la d.d.p. à ses bornes ne dépend pas du courant débité. La relation (4.54) montre que sa résistance interne  $r$  doit être nulle. Un générateur réel peut être considéré comme un générateur idéal monté en série avec une résistance  $r$  (voir les figures 4.7c et d). Notons que la f.é.m. peut ne pas être localisée dans un endroit déterminé du circuit; c'est le cas d'une f.é.m. induite dans un circuit (voir la section 1.6). D'autre part, une batterie est caractérisée par la charge totale qu'elle peut débiter, exprimée en ampère-heures ( $1A - h = 3\,600\text{ C}$ ).



Les générateurs de tension alternative utilisent l'induction électromagnétique pour convertir l'énergie mécanique (d'origine hydraulique, thermique, éolienne, nucléaire etc.) en énergie électrique. Ils sont essentiellement constitués de bobines d'induction tournant en face d'aimants ou d'électro-aimants. Le courant induit peut être redressé pour avoir un courant continu utilisable pour recharger les batteries d'une voiture, par exemple.



**Figure 4-8** Représentation schématique d'une source de courant : **a**) générateur réel, **b**) représentation d'un générateur réel comme une source de courant idéale ( $r' = \infty$ ) et une résistance  $r'$  finie montée en parallèle, **c**) le générateur court-circuité et **d**) source de courant débitant dans un circuit extérieur représenté par un dipôle  $D$ .

## 4.7 GÉNÉRATEURS COMME SOURCE DE COURANT

Un générateur peut être considéré aussi comme un dispositif capable de débiter un courant dans un circuit, c'est-à-dire une **source de courant** qui sort du pôle  $A$  et rentre au pôle  $B$ . Nous caractérisons le générateur par l'intensité  $\mathcal{I}$  qu'il débite, s'il est court-circuité, et par une résistance interne  $r'$  montée en parallèle. Les figures (4.8a et b) donnent une représentation schématique d'une telle source, les Fig.4.8c la représente lorsqu'elle est court-circuitée et la figure 4.8d lorsqu'elle débite dans un circuit extérieur représenté par un dipôle  $D$ . Dans ce dernier cas, la d.d.p.  $V_{AB}$  à ses bornes dépend du circuit extérieur. Une partie de l'intensité totale débitée  $\mathcal{I}$  passe dans la résistance  $r'$  ; elle est donnée par  $V_{AB}/r'$ . L'intensité qui passe dans le circuit extérieur est donc

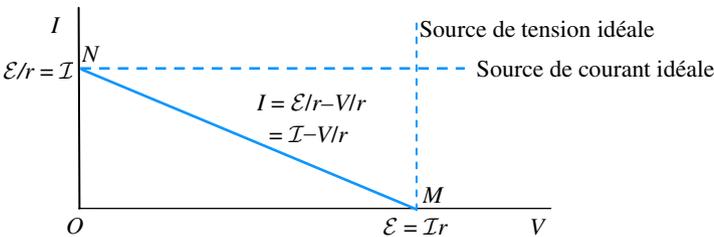
$$I = \mathcal{I} - V_{AB}/r' \quad (4.59)$$



Notons que, lorsque la source est court-circuitée, la résistance interne  $r'$  montée en parallèle n'a aucun effet, car  $V_{AB} = 0$  ; toute l'intensité débitée  $\mathcal{I}$  passe alors dans le court-circuit. Une source de courant est *idéale*, si elle débite le même courant  $I = \mathcal{I}$ , quelle que soit la d.d.p. à ses bornes. Pour cela, il faut que  $r'$  soit infinie.

La représentation du générateur comme une source de courant  $\mathcal{I}$  et de résistance interne  $r'$  (placée en parallèle) est appelée **représentation de Norton**. Lorsque ce générateur débite un courant d'intensité  $I$ , l'intensité débitée dans la résistance  $r'$  est  $\mathcal{I} - I$  ; ce qui correspond à une d.d.p.  $V_{AB} = r'(\mathcal{I} - I)$ . Comparant avec la relation  $V_{AB} = \mathcal{E} - Ir$  de la représentation de Thévenin, nous trouvons que les deux représentations sont équivalentes, quelle que soit l'intensité débitée, si

$$\mathcal{E} = Ir, \quad r' = r \quad (4.60)$$



**Figure 4-9** Caractéristique d'un générateur (en convention générateur, c'est-à-dire  $I$  est le courant débité) : le point  $M$  correspond à un circuit ouvert et le point  $N$  à un court-circuit..

Ces relations permettent de passer d'une représentation du générateur à l'autre. Ce qui facilite parfois l'analyse des circuits (voir le chapitre 6).

La figure 4.9 illustre la caractéristique d'un générateur. La courbe en continu est celle d'un générateur réel ; son équation est  $I = \mathcal{E}/r - V/r$  (en représentation source de tension) et  $I = \mathcal{I} - V/r$  (en représentation source de courant). La caractéristique coupe l'axe des tensions au point de fonctionnement  $M$  tel que  $V = \mathcal{E} = \mathcal{I}r$  ; ce qui correspond au générateur en circuit ouvert. Elle coupe l'axe des intensités au point de fonctionnement  $N$  tel que  $I = \mathcal{E}/r = \mathcal{I}$  ; ce qui correspond au générateur court-circuité. Les lignes  $V = \mathcal{E}$  et  $I = \mathcal{I}$  sont les caractéristiques d'une source de tension idéale et d'une source de courant idéale respectivement. Ce graphique montre qu'un générateur réel ne peut pas fournir une tension supérieure à  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{I}r$  ni une intensité supérieure à  $\mathcal{I}$  ou  $\mathcal{E}/r$ .

La puissance délivrée au circuit extérieur en représentation source de courant est

$$P_{\text{ex}} \equiv IV_{\text{AB}} = Ir(\mathcal{I} - I) \quad (4.61)$$

Tandis que la puissance nécessaire pour faire fonctionner le générateur est

$$P'_{\text{NE}} = \mathcal{I}V_{\text{AB}} \quad (4.62)$$

dont une partie

$$P'_j = V_{\text{AB}}(\mathcal{I} - I) \quad (4.63)$$

est dissipée dans la résistance interne  $r$ . Le rendement s'écrit donc en représentation de Norton

$$\mathcal{R} = P_{\text{ex}}/\mathcal{I}V_{\text{AB}} = I/\mathcal{E} \quad (4.64)$$

La puissance  $P_{\text{ex}}$  délivrée par une source de courant est maximale si  $I = \mathcal{I}/2$ , elle vaut alors  $1/4r\mathcal{I}^2$  et le rendement 0,5.



Notons qu'une source de tension et une source de courant équivalentes délivrent la même puissance au circuit extérieur (car  $V_{\text{AB}}$  et  $I$  sont les mêmes) mais la puissance perdue par effet Joule et la puissance totale nécessaire pour les faire fonctionner ne sont pas les mêmes.

## 4.8 ASSOCIATION DES GÉNÉRATEURS

On peut monter des générateurs en série ou en parallèle dans le but d'augmenter soit la d.d.p., soit le courant débité.

**a) Montage en série**

Si des sources de tension sont montées en série, elles débitent le même courant  $I$ . Par exemple, dans le cas du montage de la figure 4.10a, nous avons les relations

$$\begin{aligned} V_A - V_M &= \mathcal{E}_1 - Ir_1, & V_M - V_N &= \mathcal{E}_2 - Ir_2, \\ V_N - V_B &= -\mathcal{E}_3 - Ir_3 \end{aligned} \tag{4.65}$$

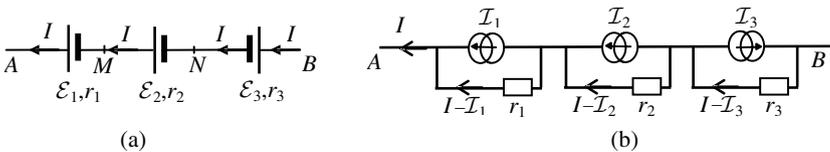
où  $\mathcal{E}_3$  est affectée d'un signe négatif car ce générateur est monté en opposition. Ajoutant membre à membre ces équations, nous trouvons

$$V_A - V_B = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - I(r_1 + r_2 + r_3). \tag{4.66}$$

Ce qui veut dire qu'il est possible de remplacer les trois sources par une seule source de f.é.m.  $\mathcal{E}_{eq}$  et de résistance interne  $r_{eq}$  données par

$$\mathcal{E}_{eq} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3, \quad r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3 \tag{4.67}$$

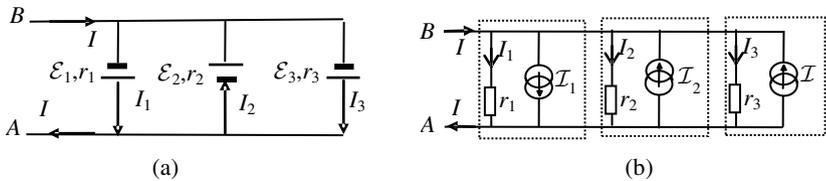
Un montage en série et dans le même sens de  $n$  sources de tension de f.é.m.  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r$  est équivalent à une seule source de tension de f.é.m.  $n\mathcal{E}$  et de résistance interne  $nr$ . Ce qui permet d'avoir la f.é.m. multipliée par  $n$  sans augmenter le courant débité ; mais la résistance interne est aussi multipliée par  $n$ .



**Figure 4-10** Générateur en série **a)** comme sources de tension et **b)** comme sources de courant.

Si on utilise la représentation source de courants, les courants dans les résistances internes sont illustrés dans la Fig. 4.10b. La d.d.p. entre  $A$  et  $B$  est alors  $V_A - V_B = r_1(I - \mathcal{I}_1) + r_2(I - \mathcal{I}_2) + r_3(I + \mathcal{I}_3)$ . La source équivalente de courant  $\mathcal{I}_{eq}$  et de résistance interne  $r_{eq}$  est telle que  $V_A - V_B = r_{eq}(I - \mathcal{I})$ . En comparant les deux expressions, nous déduisons que

$$r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{eq} = [r_1\mathcal{I}_1 + r_2\mathcal{I}_2 - r_3\mathcal{I}_3]/r_{eq} \tag{4.68}$$



**Figure 4-11** Générateurs en parallèle **a)** comme sources de tension et **b)** comme sources de courant.

### b) Montage en parallèle

Si des sources de tension sont montées en parallèle, la d.d.p. est la même à leurs bornes et les intensités  $I_i$  qu'ils débitent peuvent être différentes. Par exemple, dans le cas du montage de la figure 4.11a, l'intensité dans le circuit extérieur est donnée par la loi des nœuds

$$I = I_1 - I_2 + I_3 \quad (4.69)$$

La d.d.p. aux bornes de ces générateurs est alors

$$V_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = -\mathcal{E}_2 + I_2 r_2 = \mathcal{E}_3 - I_3 r_3 \quad (4.70)$$

Il est possible de remplacer les trois sources par une seule source de f.é.m.  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r$ , si celle-ci débite le même courant  $I$  dans le circuit extérieur sous la même d.d.p.  $V_{AB}$ . On doit alors avoir

$$V_{AB} = \mathcal{E}_{\text{eq}} - I r_{\text{eq}} \quad (4.71)$$

Calculant les valeurs de  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  de (4.70) et (4.71) et remplaçant dans (4.69), celle-ci est identiquement satisfaite (c'est-à-dire quelle que soit la d.d.p.  $V_{AB}$ ) si

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}}} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_3}{r_3}, \quad \frac{1}{r_{\text{eq}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \quad (4.72)$$

Ce montage de générateurs est donc équivalent à une source de tension de f.é.m.  $\mathcal{E}_{\text{eq}}$  et de résistance interne égale à la résistance du circuit passif (c'est-à-dire les forces électromotrices éteintes mais les résistances internes des générateurs maintenues). Ainsi un montage en parallèle et dans le même sens de  $n$  sources de tension  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r$  est équivalent à une seule source de tension de f.é.m.  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r/n$ .



On peut ainsi avoir un courant total intense sans que le courant dans les générateurs le soit. Il faut cependant éviter de monter en parallèle des sources de tension de f.é.m. différentes et de résistances faibles, car on risque d'avoir des courants intenses dans ces générateurs.

Si on utilise la représentation sources de courant (Fig. 4.11b), désignant par  $V \equiv V_{AB}$  la d.d.p. aux bornes, les intensités dans les résistances internes (dans les sens choisis) sont  $I_1 = V/r_1$ ,  $I_2 = V/r_2$  et  $I_3 = V/r_3$ . Si  $\mathcal{I}_{\text{eq}}$  est l'intensité de la source équivalente et  $r_{\text{eq}}$  est sa résistance interne, l'intensité débitée est

$$I = \mathcal{I}_{\text{eq}} - V/r_{\text{eq}}$$

D'autre part, la loi des nœuds donne

$$I = \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 - V/r_1 - V/r_2 - V/r_3.$$

En comparant les deux expressions, nous déduisons que

$$\mathcal{I}_{\text{eq}} = \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \quad \text{et} \quad 1/r_{\text{eq}} = 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 \quad (4.73)$$

Nous retrouvons ainsi les résultats (4.72), compte tenu de la relation  $\mathcal{I} = \mathcal{E}_i/r_i$ .



Des sources de courant idéales ne peuvent pas être montées en série. Par contre, un montage en série de sources de courant de résistances finies est équivalent à une source de courant de résistance  $R = \sum r_i$  et de courant  $\mathcal{I} = \sum \mathcal{I}_i r_i / R$ . Un montage de sources de courant en parallèle est équivalent à une source de courant  $\mathcal{I} = \sum \mathcal{I}_i$  et de résistance donnée par  $1/r_{\text{eq}} = \sum 1/r_i$ . Une coupure de courant est équivalente à une source idéale ( $r = \infty$ ) de courant  $\mathcal{I} = 0$ . Il ne faut pas donc ouvrir une branche contenant un générateur de courant, car cela revient à placer ce générateur en série avec une source de courant nul.

Un générateur est dit **lié** si ses caractéristiques ( $\mathcal{E}$  et  $r$  dans la représentation de Thevenin ou  $\mathcal{I}$  et  $r$  dans la représentation de Norton) dépendent du circuit dans lequel il est branché. Sinon il est dit **indépendant**.

## 4.9 RÉCEPTEURS

Un récepteur est un système qui transforme l'énergie électrique en une autre forme d'énergie (chimique dans une cuve électrolytique, mécanique dans un moteur électrique etc.).

Un récepteur (représenté dans la Fig. 4.12a) est caractérisé par sa force contre-électromotrice  $\mathcal{E}'$  et sa résistance interne  $r'$ . La force contre-électromotrice est liée à l'énergie utilisable  $\delta W'$  que peut fournir le récepteur pendant un temps  $\delta t$

$$\delta W_{\text{utile}} = \mathcal{E}' \delta q = \mathcal{E}' I \delta t$$

Où  $I$  est l'intensité de courant. La puissance utile est donc

$$P_{\text{utile}} = \mathcal{E}' I \quad (4.74)$$

L'énergie totale  $\delta W_T = \delta q V_{AB} = I V_{AB} \delta t$  consommée entre les bornes du récepteur est la somme de l'énergie utile  $\delta W_{\text{utile}}$  et de l'énergie  $\delta W_J = r' I^2 \delta t$  dissipée par effet Joule dans le récepteur. Nous devons donc avoir la relation de conservation de l'énergie,  $I V_{AB} \delta t = \mathcal{E}' I \delta t + r' I^2 \delta t$ , d'où la relation

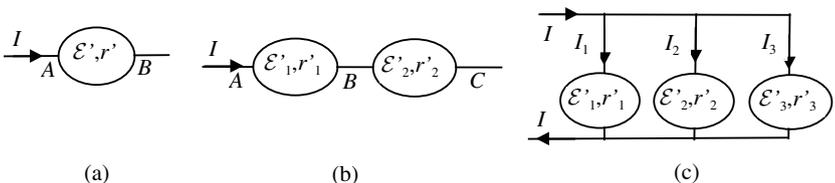
$$V_{AB} = \mathcal{E}' + r' I \quad (4.75)$$

La puissance totale consommée dans le récepteur est

$$P_T = \mathcal{E}' I + I^2 r' \quad (4.76)$$

Le rendement d'un récepteur est le rapport de la puissance utile  $I \mathcal{E}'$  fournie par le récepteur à la puissance totale  $\mathcal{E}' I + I^2 r'$  consommée entre ses bornes, soit

$$\mathcal{R} = \frac{I \mathcal{E}'}{I \mathcal{E}' + I^2 r'} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}' + I r'} \quad (4.78)$$



**Figure 4-12** a) Représentation d'un récepteur b) montage de récepteurs en série et c) montage de récepteurs en parallèle.

- Si on monte des récepteurs en série (Fig.4.12b), nous avons

$$V_A - V_B = \mathcal{E}'_1 + Ir'_1, \quad V_B - V_C = \mathcal{E}'_2 + Ir'_2$$

Nous en déduisons que

$$V_{AC} = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 + I(r'_1 + r'_2)$$

Le récepteur équivalent a donc une force contre-électromotrice  $\mathcal{E}'$  et une résistante  $r'$  données par

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 \quad \text{et} \quad r' = r'_1 + r'_2 \quad (4.78)$$

- Si on monte les récepteurs en parallèle (Fig.4.12c), nous trouvons

$$V_{AB} = \mathcal{E}'_1 + I_1 r'_1 = \mathcal{E}'_2 + I_2 r'_2 = \mathcal{E}'_3 - I_3 r'_3, \quad I = I_1 + I_2 - I_3$$

Nous en déduisons que

$$V_{AB} \left( \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} + \frac{1}{r'_3} \right) = I + \frac{\mathcal{E}'_1}{r'_1} + \frac{\mathcal{E}'_2}{r'_2} + \frac{\mathcal{E}'_3}{r'_3}$$

Le récepteur équivalent est tel que  $V_{AB} = \mathcal{E}'_{\text{eq}} + Ir'_{\text{eq}}$ . En comparant, nous déduisons que

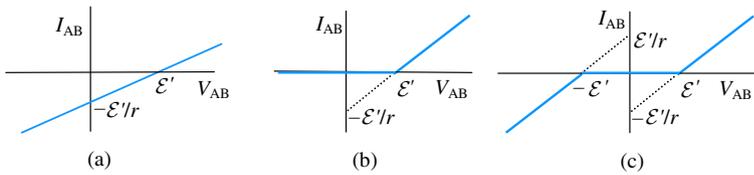
$$\frac{1}{r'_{\text{eq}}} = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} + \frac{1}{r'_3}, \quad \frac{\mathcal{E}'_{\text{eq}}}{r'_{\text{eq}}} = \frac{\mathcal{E}'_1}{r'_1} + \frac{\mathcal{E}'_2}{r'_2} + \frac{\mathcal{E}'_3}{r'_3} \quad (4.79)$$



Certains dispositifs polarisés fonctionnent comme générateurs de f.é.m.  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r$  si le courant les traverse du pôle négatif  $B$  au pôle positif  $A$  et comme récepteur de force contre-électromotrice  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ , s'ils sont montés en opposition (c'est-à-dire le courant les traverse du pôle positif  $A$  au pôle négatif  $B$ ). Utilisant la convention récepteur (c'est-à-dire le courant à l'intérieur du dipôle), la d.d.p. est  $V_{AB} = \mathcal{E}' + rI_{AB}$  et la puissance consommée est  $P_{AB} = V_{AB}I_{AB} = \mathcal{E}'I_{AB} + rI_{AB}^2$ . La caractéristique d'un tel dipôle est illustrée dans la figure 4.13a. D'autres récepteurs acceptent le courant dans un sens et le bloquent dans l'autre (c'est le cas d'un récepteur radio alimenté en courant continu). La figure 4.13b illustre la caractéristique d'un tel dispositif. D'autres dispositifs fonctionnent comme récepteur dans les deux sens du courant ; on dit qu'ils ne sont pas polarisés. Ils consomment alors une puissance  $V_{AB}I_{AB} = rI_{AB}^2 + |I_{AB}|\mathcal{E}'$  et ils fonctionnent sous une d.d.p.

$$V_{AB} = rI_{AB} - \mathcal{E}' \quad (\text{si } I_{AB} > 0) \quad \text{et} \quad V_{AB} = rI_{AB} - \mathcal{E}' \quad (\text{si } I_{AB} < 0). \quad (4.80)$$

Leur caractéristique est représentée dans la figure 4.13c.



**Figure 4-13** Caractéristique d'un récepteur **a)** polarisé, **b)** polarisé qui accepte le courant dans un seul sens et **c)** non polarisé.

## 4.10 DIPÔLES NON LINÉAIRES

Un dipôle est non linéaire, si la relation liant  $I$  à  $V$  n'est pas linéaire. En particulier, si la relation est algébrique, la résistance statique,  $R_s = V/I$ , et la résistance dynamique,  $R_d = dV/dI$ , ne sont ni égales ni constantes. C'est le cas des corps métalliques dont la résistance varie avec la température et des semi-conducteurs dont le nombre de porteurs de charge varie avec le champ (donc avec la densité de courant) et les impuretés (atomes ajoutés). Les dipôles non linéaires jouent un grand rôle comme composants électroniques.

### a) Diodes à jonction

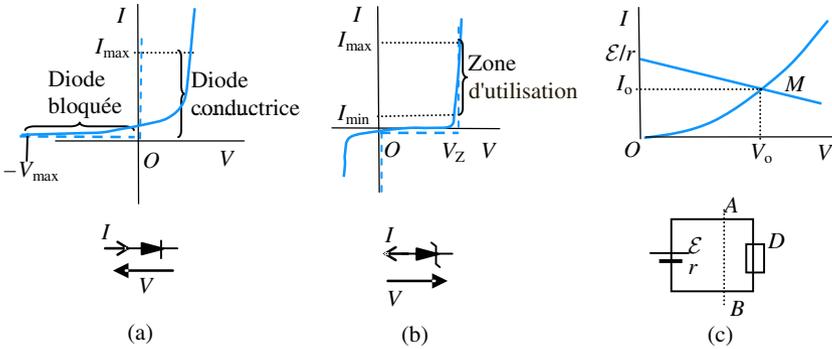
Les diodes et les triodes sont fabriquées en juxtaposant un semi-conducteur de type  $n$  (dont les charges de conduction sont surtout des électrons peu liés aux atomes) et un semi-conducteur de type  $p$  (dont les charges de conduction sont des « trous » c'est-à-dire des manques d'un électron à l'atome). La diode présente une résistance faible au courant circulant dans le sens  $p - n$  (sens passant) et une grande résistance dans le sens  $n - p$  et cette dernière augmente rapidement avec la tension appliquée. La caractéristique de la diode est illustrée dans la Fig. 4.14a.



L'intensité dans le sens passant ne doit pas dépasser une certaine limite  $I_{\max}$  qu'elle peut supporter. Dans le sens opposé, la tension ne doit pas dépasser une certaine limite  $-V_{\max}$ , sinon les électrons très accélérés peuvent ioniser les atomes, produisant ainsi un phénomène d'avalanche et un *claquage* de la diode. L'une des utilisations des diodes est comme redresseurs de courant.

### b) Diode régulatrice de tension

La caractéristique des diodes de ce type (la diode Zener, par exemple) est illustrée dans la figure 4.14b. Contrairement à la diode à jonction, la



**Figure 4-14** Caractéristique et représentation de dipôles non linéaires **a)** diode au germanium **b)** diode Zener. Les lignes en pointillé représentent la caractéristique de diodes idéales. **c)** Détermination graphique du point de fonctionnement d'un dipôle non linéaire.

diode Zener est au silicium qui peut supporter une tension négative relativement importante. Lorsque  $V$  atteint une valeur  $V_Z$ , la courbe devient presque verticale ; ce qui correspond à une très faible résistance. Ces diodes sont utilisées comme élément de protection contre la surtension et pour obtenir une tension continue stabilisée.

**c) Les varistances**

Ce sont des dipôles dont la caractéristique varie fortement sous l'effet de certains effets comme la température (thermistances), l'éclairement (photo résistances), champ magnétique (magnétorésistances) etc.

**d) Diode à effet tunnel**

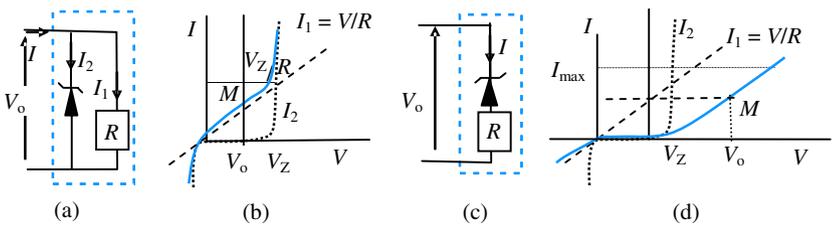
C'est une diode à jonction dans laquelle l'effet tunnel quantique permet d'avoir une caractéristique dont une partie a une pente négative (résistance négative).



L'analyse des circuits comportant des dipôles non linéaires ne peut pas être faite analytiquement. Pour déterminer le point de fonctionnement, on peut utiliser une méthode graphique, si on connaît les caractéristiques. Par exemple, si un générateur continu est branché sur un dipôle non linéaire  $D$  (Fig. 4.14c), la caractéristique du générateur est la droite  $I = \mathcal{E}/r - V/r$ . Le point de fonctionnement  $M$  est l'intersection de cette droite avec la caractéristique du dipôle. On peut aussi utiliser des méthodes d'approximation et d'analyse numérique.



Supposons, par exemple qu'une tension  $V$  est branchée sur une diode Zener idéale et une résistance associées en parallèle (Fig. 4.15a). La Figure 4.15b illustre la caractéristique de la diode Zener et celle de la résistance. Si  $V$  est inférieure à  $V_z$ , l'intensité est très faible dans la diode et égale à  $V/R$  dans la résistance. Si  $V$  dépasse  $V_z$ , la résistance de la diode devient très faible et presque tout le courant passe dans la diode, d'où l'utilisation de la diode Zener pour protéger des éléments de circuit contre la surtension.



**Figure 4-15** **a)** Association d'une diode Zener et une résistance en parallèle et **b)** caractéristique et point de fonctionnement  $M$  du dipôle global. **c)** Association de ces deux éléments en série et **d)** caractéristique et point de fonctionnement  $M$  du dipôle global.

- La caractéristique de dipôles en série peut être tracée point par point si on connaît leurs caractéristiques en utilisant la propriété que l'intensité est la même et que les d.d.p. s'ajoutent. De même, la caractéristique de deux dipôles en parallèle peut être tracée point par point en utilisant la propriété que la d.d.p. est la même dans les deux dipôles tandis que les intensités s'ajoutent. Il faut préciser aussi que les dipôles n'étant pas linéaires, le principe de superposition et, par conséquent, la représentation complexe des intensités et des tensions ne sont pas valables.

L'analyse du comportement des systèmes non linéaires montre que de petites modifications des conditions initiales ou des f.é.m. peuvent produire de grandes modifications dans le circuit. Certains systèmes soumis à des excitations harmoniques de pulsation  $\omega$ , peuvent avoir des réponses de pulsation  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ... et même des sous-harmoniques de pulsation  $\omega/2$ ,  $\omega/3$  etc. Ce comportement peut même être chaotique dans certaines situations ; il est alors complètement imprédictible (exactement comme l'écoulement turbulent d'un liquide ou les processus électriques dans le cœur).



## POINTS-CLÉS

- ▶ Ne confondez pas *linéarité* et *proportionnalité*. La relation de la d.d.p. aux bornes d'un dipôle à l'intensité peut être une proportionnalité ( $V = RI$ ), une dérivation [ $V = L(dI/dt)$ ] ou une intégration [ $V = (1/C) \int dtI$ ], qui sont toutes linéaires. Dans le cas d'un courant sinusoïdal en représentation trigonométrique les amplitudes de  $V$  et  $I$  sont dans le rapport  $z$  mais  $V$  et  $I$  ne sont pas toujours en phase. En représentation complexe  $\underline{V}$  et  $\underline{I}$  sont dans le rapport  $\underline{Z}$  mais il n'en est pas ainsi pour des courants non harmoniques tels que les fonctions en dents de scie ou en créneau.
- ▶ L'impédance réelle  $Z$  n'est pas la partie réelle de l'impédance complexe  $\underline{Z}$  mais  $Z$  est le module de  $\underline{Z}$ . Seules les impédances complexes se combinent selon les règles des impédances en série et des impédances en parallèle. Ces règles ne s'appliquent pas donc aux impédances réelles.
- ▶ Si une charge  $q$  se déplace d'un point  $A$  à un point  $B$ , le travail des forces électriques est  $q(V_A - V_B) \equiv qV_{AB}$ . Si  $V_A > V_B$ , une charge positive gagne de l'énergie. Si la charge se déplace dans le vide ou dans un milieu sans frottement, cette énergie est transformée en énergie cinétique (c'est le principe des accélérateurs électrostatiques). Dans un conducteur, les charges se déplacent avec une vitesse moyenne extrêmement faible. Comme  $q = It$ , les forces électriques fournissent une puissance  $P = IV$ . Cette puissance est dissipée par effet Joule ( $IV = RI^2$ ), emmagasinée dans un condensateur ( $IV = IQ/C$ ) ou une self-inductance ( $IV = ILdI/dt$ ), ou transformée en travail par un moteur électrique ( $IV = I\mathcal{E}'$  où  $\mathcal{E}'$  est la force contre-électromotrice).
- ▶ L'impédance est une généralisation de la notion de résistance en ce qui concerne la relation  $\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$ . Cela n'est pas vrai pour d'autres relations. Par exemple, en écrivant  $\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\phi_z}$ , la puissance moyenne est  $RI_{\text{eff}}^2$  ou  $(V_{\text{eff}}^2/Z) \cos \phi_z = RV_{\text{eff}}^2/Z^2$  et non  $ZI_{\text{eff}}^2$  ou  $V_{\text{eff}}^2/Z$ .

## QUESTIONS DE RÉFLEXION

1. Expliquez le lien entre les règles de Kirchhoff et les lois de conservation de la charge et de l'énergie.

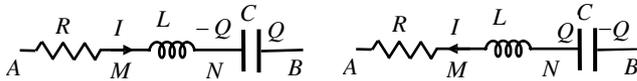


Figure 4-16

2. Connaissant l'intensité  $I(t)$ , qui n'est pas nécessairement sinusoïdale, écrire l'expression de la d.d.p.  $V_A - V_B$  pour les dipôles de la Fig. 4.16. Est-ce que l'impédance totale dépend de l'ordre de branchement des éléments ? Est-ce qu'elle dépend du sens du courant ?
3. Un dipôle est formé d'une résistance  $R$ , une self-inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$  en série. Peut-il être équivalent à une résistance ? Tracez le diagramme de Fresnel pour l'impédance dans ce cas.
4. Un condensateur plan porte une charge  $Q$ . Le diélectrique qui le remplit n'est pas parfait, mais il a une très faible conductivité  $\sigma$ . Montrez qu'il est le siège d'un courant de fuite  $I = \sigma Q/\varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est la permittivité du milieu. Comparez la résistance et la capacité du condensateur.
5. Quelle est la puissance dissipée dans un dipôle d'impédance  $\underline{Z} = R + jX$ , s'il est sous une d.d.p.  $V = V_m \cos(\Omega t + \phi_v)$  ? Cette puissance peut-elle être nulle ? Peut-elle être négative dans un dipôle passif ?
6. Une source de tension et une source de courant sont équivalentes si elles débitent le même courant  $I$  sous la même d.d.p.  $V$ . Quelles sont les relations liant leurs caractéristiques ? Comparez les puissances non électriques nécessaires pour les faire fonctionner, leurs effets Joule, les puissances qu'elles fournissent au circuit extérieur et leurs rendements.

## EXERCICES CORRIGÉS

- 4-1** On branche un condensateur de  $0,2 \mu\text{F}$  en série avec une résistance de  $1 \text{ k}\Omega$  sur un générateur de fréquence  $1 \text{ kHz}$ . En observant la d.d.p. aux bornes de la résistance sur l'écran d'un oscilloscope, on trouve qu'elle est  $V_1 = V_m \cos(\omega t)$ , où  $V_m = 4,5 \text{ V}$ .
- a) Écrivez l'expression de l'intensité du courant et la d.d.p.  $V_2$  aux bornes du condensateur.
  - b) Utilisant la représentation de Fresnel, écrivez l'expression de la f.é.m. du générateur.
  - c) Refaites la même analyse en utilisant la représentation complexe.

**4-2** Un condensateur de  $2,0 \mu\text{F}$  est monté en série avec une résistance de  $1,5 \text{ k}\Omega$  et l'ensemble est branché sur un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t)$  de valeur efficace  $10 \text{ V}$  et de fréquence  $50 \text{ Hz}$ . Déterminez l'impédance du circuit et l'intensité efficace. Écrivez les expressions de l'intensité et de la d.d.p. aux bornes du condensateur en fonction du temps.

**4-3** L'intensité efficace dans une bobine est de  $50 \text{ mA}$ , si elle est branchée sur un générateur de  $60 \text{ V}$  et  $100 \text{ Hz}$  et de  $20 \text{ mA}$ , si elle est branchée sur un générateur de  $40 \text{ V}$  et  $200 \text{ Hz}$ . Déterminez la self-inductance et la résistance de cette bobine. Quel est le déphasage de l'intensité par rapport à la f.é.m. dans ces deux cas ?

**4-4** Un générateur de f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}} = \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\omega t}$  est branché sur une bobine de self-inductance  $L$  et de résistance interne  $R$  et un condensateur de capacité  $C$  en série. Calculez l'impédance de la bobine, l'intensité débitée et la d.d.p.  $\underline{V}_b$  à ses bornes. L'amplitude de  $\underline{V}_b$  peut-elle être supérieure à  $\mathcal{E}_m$  ?

**4-5** Déterminez la résistance  $R$  dans le circuit de la Fig. 4.17 pour que la résistance équivalente entre  $A$  et  $B$  soit justement  $R_0$ .

**4-6** Déterminez les résistances équivalentes entre les points  $A$  et  $B$  puis entre les points  $C$  et  $D$  du circuit de la Fig.4.18.

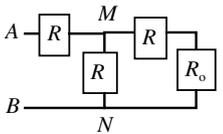


Figure 4-17

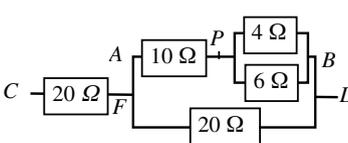


Figure 4-18

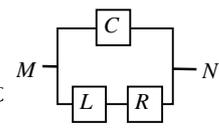


Figure 4-19

**4-7** On considère le circuit de la Fig. 4.19. Un générateur de f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}} = \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\omega t}$  est branché entre  $M$  et  $N$ . Calculez l'intensité débitée par ce générateur et l'intensité dans chacune des branches.

**4-8** Une tension  $V_{AB} = V_m \cos(\omega t)$  est branchée sur chacun des circuits de la figure 4.20. On suppose que  $V_m = 10 \text{ V}$ ,  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$ ,  $R = 0,5 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1,0 \mu\text{F}$  et  $L = 0,20 \text{ H}$ . Écrivez les expressions de l'intensité débitée et l'intensité dans chaque branche de ces circuits.

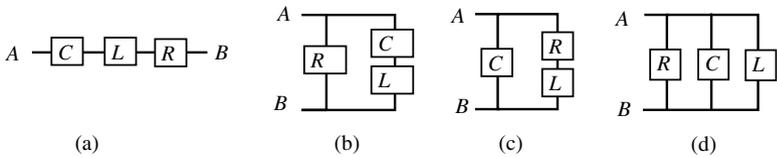


Figure 4-20

**4-9** On dispose d'une ampoule de 110 V et 100 W et une alimentation de 220 V et 50 Hz. Pour utiliser cette ampoule, on la branche en série avec une self-inductance  $L$ . Quelle doit être la valeur de  $L$  ? Est-il possible d'utiliser un condensateur au lieu de la self-inductance ?

**4-10** Une batterie de f.é.m. 12 V et de résistance interne  $5 \Omega$  est branchée sur une résistance de  $100 \Omega$ . Déterminez l'intensité débitée, la d.d.p. aux bornes de la batterie et l'énergie dissipée dans la résistance pendant 5 minutes.

**4-11 a)** Un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r$  débite dans un circuit. Quelle doit être l'intensité débitée  $I$  pour que la puissance fournie au circuit extérieur soit maximale ? Quel est alors le rendement ?

**b)** Répondez à la même question dans le cas d'une source de courant  $\mathcal{I}$  et de résistance interne  $r$ .

**c)** Un générateur de f.é.m. sinusoïdale  $\underline{\mathcal{E}}$  et d'impédance interne  $\underline{Z}_i$  alimente un dipôle d'impédance  $\underline{Z}_c$ . Montrez que la puissance moyenne débitée est maximale si  $Z_c = Z_i^*$ . Quelle est alors la puissance débitée et quel est le rendement ?

**4-12** Déterminez la source de tension et la source de courant équivalentes au circuit de la Fig. 4.21 s'il est branché sur un autre circuit entre A et B.

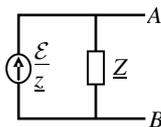


Figure 4-21

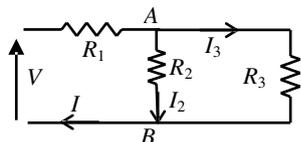


Figure 4-22

**4-13** On considère le circuit de la Fig. 4.22 alimenté par sur une tension  $V$ . Trouvez la relation entre les résistances pour que la puissance dégagée dans la résistance  $R_3$  varie très peu si celle-ci subit une petite variation  $\delta R_3$ .

**4-14** Un moteur électrique de rendement 90 % est alimenté par un courant continu de 5 A sous 220 V. Déterminez la puissance consommée, la puissance mécanique qu'il fournit, la puissance dissipée par effet Joule dans le moteur et la résistance interne de ce moteur.

**4-15** La d.d.p. aux bornes d'un échantillon de carbure de silicium aggloméré varie en fonction de l'intensité  $I$  selon la loi  $V = cI^\beta$  où  $c$  et  $\beta$  sont des constantes à une température donnée. Un tel élément est appelé varistance. On prendra  $c = 100$  et  $\beta = 0,2$  pour les applications numériques.

**a)** Tracez la caractéristique de cet échantillon. Écrivez l'expression de la puissance dissipée en fonction de  $I$ . Quelle doit être  $V$  pour que cette puissance ne dépasse pas une valeur  $P_0$  ?

**b)** Calculez la résistance statique  $R_s = V/I$  et la résistance dynamique  $R_d = dV/dI$  en fonction de  $I$ . Quelle est la relation entre  $R_s$  et  $R_d$  ?

**c)** On place en série une résistance ohmique  $R$  et une varistance et on applique une d.d.p.  $V$  à l'ensemble. Écrivez l'équation qui détermine  $I$ . Déterminez la résistance statique et la résistance dynamique équivalentes.

**d)** Répondez à la même question précédente dans le cas d'un montage en parallèle. Peut-on dire que la résistance équivalente ne dépend que de la d.d.p. appliquée ?

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**4-1 a)**  $I = V_1/R = (V_m/R) \cos(\omega t) = I_m \cos(\omega t)$  où  $I_m = V_m/R$   
 $= 4,5 \text{ mA}$

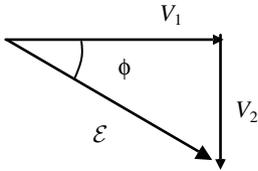
La d.d.p. aux bornes du condensateur est

$$V_2 = Q/C = (1/C) \int dt I = (I_m/C\omega) \sin(\omega t) = V_{2m} \cos(\omega t - \pi/2)$$

où  $V_{2m} = I_m/C\omega = 4,5 \times 10^{-3} / (0,2 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 10^3) = 3,58 \text{ V}$ ,  
 d'où  $V_2 = 3,58 \cos(\omega t - \pi/2)$

**b)** La représentation de Fresnel (illustrée dans la Fig. 4.23) donne

$$\mathcal{E} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 5,75 \text{ V},$$



$$\phi = \text{Arctan}(-V_2/V_1) = -0,672 \text{ rad}$$

d'où  $\mathcal{E} = 5,75 \cos(\omega t - 0,672)$

Figure 4-23

c) Utilisant la représentation complexe, nous trouvons  $\underline{V}_1 = V_m e^{j\omega t}$ ,  
 $I = \underline{V}/R = I_m e^{j\omega t}$  où  $I_m = V_m/R = 4,5/1000 \text{ A} = 4,5 \text{ mA}$ .

La d.d.p. aux bornes du condensateur est

$$\underline{V}_2 = Q/C = (1/C) \int dt \underline{I} = (I_m/jC\omega) e^{j\omega t} = V_{2m} e^{j\omega t}$$

$$\text{où } \underline{V}_{2m} = I_m/jC\omega = -3,58 \text{ j}$$

$$\text{Alors } \underline{\mathcal{E}} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = (4,5 - 3,58j) e^{j\omega t} = \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\omega t}$$

$$\text{où } \underline{\mathcal{E}}_m = 4,5 - 3,58 \text{ j} = |\underline{\mathcal{E}}_m| e^{j\phi} \text{ donc } |\underline{\mathcal{E}}_m| = \sqrt{4,5^2 + 3,58^2} = 5,75 \text{ V}$$

$$\text{et } \phi = \text{Arctan}(-3,58/4,5) = -0,672 \text{ rad}$$

Prenant la partie réelle, nous trouvons  $\mathcal{E} = 5,75 \cos(\omega t - 0,672)$

**4-2** L'impédance du circuit est

$$\underline{Z} = R + 1/jC\omega = 1500 - j/(2 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50) = 1500 - 1592j$$

$$= Z e^{j\phi}$$

$$\text{où } Z = \sqrt{1500^2 + 1592^2} = 2,187 \text{ k}\Omega$$

$$\text{et } \phi = -\text{Arctan}(1592/1500) = -0,8150 \text{ rad}$$

Le générateur a une tension efficace de 10 V, donc une amplitude  $\mathcal{E}_m = 14,14 \text{ V}$ . L'intensité efficace est

$$I_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}/Z = 10/2187 = 4,572 \text{ mA}, \quad \text{donc } I_m = 6,466 \text{ mA}$$

L'intensité est en retard sur la f.é.m. de  $\phi = -0,8148 \text{ rad}$  (c'est-à-dire une avance de 0,8150). La f.e.m. est  $\mathcal{E} = 14,142 \cos(\omega t)$ , où

$$\omega = 100\pi. \text{ L'intensité est donc } \underline{I} = I_m e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$\text{d'où } I = 6,466 \cos(\omega t + 0,8150) \text{ mA}$$

L'impédance du condensateur est

$$\underline{Z}_C = 1/jC\omega = 1592 e^{-j\pi/2} \text{ (en } \Omega)$$

La d.d.p. complexe aux bornes du condensateur est

$$\underline{V}_C = \underline{Z}_C \underline{I} = Z_C e^{-j\pi/2} I_m e^{j(\omega t - \phi)} = 10,29 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

La d.d.p. réelle est

$$V_C = 10,29 \cos(\omega t - \phi - \pi/2) = 10,29 \cos(\omega t - 0,7558)$$

**4-3** L'impédance du circuit est

$$\underline{Z} = R + jL\omega = Ze^{j\phi} \quad (0 < \phi < \pi/2)$$

$$\text{d'où} \quad Z^2 = R^2 + L^2\omega^2 = (V_{\text{eff}}/I_{\text{eff}})^2$$

Nous avons donc les deux relations

$$R^2 + L^2\omega_1^2 = (V_{\text{eff},1}/I_{\text{eff},1})^2 \quad \text{et} \quad R^2 + L^2\omega_2^2 = (V_{\text{eff},2}/I_{\text{eff},2})^2$$

Nous en déduisons que

$$L^2(\omega_2^2 - \omega_1^2) = (V_{\text{eff},2}/I_{\text{eff},2})^2 - (V_{\text{eff},1}/I_{\text{eff},1})^2$$

$$\text{c-à-d.} \quad 4\pi^2 L^2(200^2 - 100^2) = 2,56 \times 10^6$$

$$\text{d'où} \quad L = 1,47 \text{ H} \quad \text{et} \quad R = 767 \Omega$$

On a  $I = \underline{V}/\underline{Z}$ . Le déphasage de  $I$  par rapport à  $V$  est

$$\phi_I - \phi_V = -\phi_Z = -\text{Arctan}(L\omega/R)$$

• Dans le premier cas

$$\phi_I = -\text{Arctan}(1,47 \times 2\pi \times 100/766) = -0,87 \text{ rad (retard)}$$

• Dans le second cas

$$\phi_I = -\text{Arctan}(1,47 \times 2\pi \times 200/766) = -1,18 \text{ rad (retard)}$$

**4-4** L'impédance complexe totale est  $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$

$= R + j(\omega L - 1/\omega C)$ . L'intensité débitée est

$$\underline{I}_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{\mathcal{E}_m}{R + j(L\omega - 1/C\omega)}$$

L'impédance de la bobine est  $\underline{Z}_b = R + j\omega L$ . Elle est donc sous une d.d.p.

$$\underline{V}_{m,b} = \underline{Z}_b \underline{I}_m = \frac{(R + jL\omega)}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} \mathcal{E}_m \equiv V_m e^{j\phi}$$

$$\text{où} \quad V_m = \sqrt{\frac{R^2 + L^2\omega^2}{R^2 + (1/C\omega - L\omega)^2}} \mathcal{E}_m$$

$$\text{et} \quad \phi = \phi_b - \phi_z \quad \text{avec} \quad \phi_b = \text{Arctan}(\omega L/R)$$

$$\text{et} \quad \phi_z = \text{Arctan}(\omega L/R - 1/\omega C R).$$

Nous pouvons écrire aussi

$$\tan \phi = \frac{R}{\omega(CR^2 + CL^2\omega^2 - L)}, \quad \text{tel que} \quad 0 < \phi < \pi.$$

$V_m$  aux bornes de la bobine dépasse  $\mathcal{E}_m$  si  $Z_b > Z$ , c'est-à-dire  $\omega > \omega_0/\sqrt{2}$  où  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

**4-5** Entre  $M$  et  $N$  nous avons deux résistances  $R$  et  $R + R_0$  en parallèle. La résistance équivalente est  $R_{MN} = R(R + R_0)/(2R + R_0)$ . Cette résistance est en série avec  $R$ . La résistance équivalente entre  $A$  et  $B$  est donc

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R + R_{MN} = R + R(R + R_0)/(2R + R_0) \\ &= R(3R + 2R_0)/(2R + R_0) \end{aligned}$$

Elle est égale à  $R_0$  si  $R_0 = \sqrt{3}R$ .

**4-6** La résistance équivalente entre les points  $P$  et  $B$  est donnée par  $1/R_{PB} = 1/4 + 1/6$ , d'où  $R_{PB} = 2,4 \Omega$ . La résistance équivalente entre les points  $A$  et  $B$  est celle de deux résistances  $10 \Omega$  et  $2,4 \Omega$  en série, soit  $R_{AB} = 12,4 \Omega$ . La résistance équivalente entre  $F$  et  $D$  est celle de deux résistances de  $12,4 \Omega$  (de la branche  $FAPBD$ ) et  $20 \Omega$  en parallèle, soit

$$R_{FD} = 12,4 \times 20/(12,4 + 20) = 7,65 \Omega.$$

Enfin la résistance équivalente entre  $C$  et  $D$  est celle des deux résistances de  $20 \Omega$  et  $7,65 \Omega$  en série, soit  $R_{CD} = 27,65 \Omega$ .

**4-7** Les impédances des deux branches sont  $Z_{RL} = R + j\omega L$ ,  $Z_C = 1/jC\omega$ . L'impédance équivalente est donc, en utilisant l'équation (4.32)

$$\underline{Z} = \frac{Z_C Z_{RL}}{Z_C + Z_{RL}} = \frac{R + j\omega(L - CR^2 - C\omega^2 L^2)}{(1 - CL\omega^2)^2 + (\omega CR)^2}$$

Les amplitudes complexes des intensités débitées dans les deux branches sont respectivement

$$\underline{I}_m C = \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{\underline{Z}_C} = C\omega \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\pi/2}$$

$$\text{et } \underline{I}_{mRL} = \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{\underline{Z}_{RL}} = \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{R + jL\omega} = \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} e^{-j\phi_{RL}},$$

où  $\phi_{RL} = \text{phase } \underline{Z}_{RL} = \text{Arctan}(\omega L/R)$ . ( $0 < \phi < \pi/2$ ). L'intensité totale débitée est

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= \underline{I}_{m,1} + \underline{I}_{m,2} = \left( \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega \right) \underline{\mathcal{E}}_m = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega} \underline{\mathcal{E}}_m \\ &= \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2}} \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\phi} \end{aligned}$$

Où  $\phi = \text{Arctan}\left[\frac{\omega}{R}(R^2 C - L + L^2 C \omega^2)\right]$  telle que  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ .

**4-8 a)** L'impédance du circuit (a) est

$$\underline{Z}_a = R + jL\omega - j/C\omega = 500 + j(0,2 \times 100\pi - 1/1,0 \times 10^{-6} \times 100\pi)$$

$$= 500 - 3120j = 3160 e^{j\phi_a},$$

où  $\phi_a = \text{Arctan}(-3120/500) = -1,412 \text{ rad}$ .

Supposant que la d.d.p. est complexe  $\underline{V} = 10 e^{j\omega t}$ , l'intensité s'écrit

$$\underline{I}_a = \underline{V}/\underline{Z}_a = I_{m,a} e^{j(\omega t - \phi_a)}$$

où  $I_{m,a} = V_m/Z_a = 10/3160 \text{ A} = 3,165 \text{ mA}$

$$\implies \underline{I}_a = 3,165 \cos(\omega t + 1,412) \text{ (en mA)}$$

**b)** L'impédance du circuit (b) est

$$\underline{Z}_b = \frac{R(\underline{Z}_C + \underline{Z}_L)}{R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{jR(L\omega - 1/C\omega)}{R + j(L\omega - 1/C\omega)}$$

$$= \frac{-1,560}{0,5 - 3,120j} 10^3 = 493,7 e^{j\phi_b} \Omega$$

où  $\phi_b = \text{Arctan}(3,120/0,5) - \pi/2 = -0,1589 \text{ rad}$

L'intensité débitée s'écrit  $\underline{I}_b = \underline{V}/\underline{Z}_b = I_{m,b} e^{j(\omega t - \phi_b)}$  où

$$I_{m,b} = V_m/Z_b = 20,26 \text{ mA}, \implies I_b = 20,26 \cos(\omega t + 0,1589) \text{ mA}$$

Les intensités dans chacune des deux branches sont

$$\underline{I}_R = \underline{V}/R = I_{R,m} e^{j\omega t}$$

où  $I_{R,m} = V_m/R = 20 \text{ mA} \implies I_R = 20 \cos(\omega t) \text{ mA}$

$$\underline{I}_{CL} = \underline{V}/(\underline{Z}_C + \underline{Z}_L)$$

$$= 10 e^{j\omega t} / (-3120j) = 3,205 e^{j(\omega t + \pi/2)}$$

$$\implies I_{CL} = 3,205 \cos(\omega t + \pi/2) \text{ mA}$$

**c)** L'impédance du circuit (c) est

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_C(R + \underline{Z}_L)}{R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{(R + jL\omega)/jC\omega}{R + j(L\omega - 1/C\omega)}$$

$$= \frac{10^6(0,2 - 1,591j)}{500 - 3120,27j} = 507,6 e^{j\phi_c} \Omega$$

où

$$\phi_c = \text{Arctan}(-1,59155/0,2) - \text{Arctan}(-3120/500) = -0,0339 \text{ rad}$$

L'intensité débitée est  $\underline{I}_c = \underline{V}/\underline{Z}_c = I_{m,c}e^{j(\omega t - \phi_c)}$

où  $I_{m,c} = V_m/Z_c = 19,701 \text{ mA} \Rightarrow I_c = 19,70 \cos(\omega t + 0,0339) \text{ mA}$

Les intensités dans les deux branches sont

$$\underline{I}_C = jC\omega\underline{V} = I_{C,m} e^{j(\omega t + \pi/2)}$$

$$\begin{aligned} \text{où } I_{C,m} &= C\omega V_m = 1 \times 10^{-6} \times 100\pi \times 10 \text{ A} = 3,14 \text{ mA} \\ \Rightarrow I_C &= 3,1416 \cos(\omega t + \pi/2) \text{ mA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{RL} &= \underline{V}/(R + \underline{Z}_L) = V_m e^{j\omega t}/(R + jL\omega) = 10e^{j\omega t}/(500 + 62,83j) \\ &= 19,84 e^{j(\omega t - \phi_{RL})} \text{ où } \phi_{RL} = \text{Arctan}(62,83/500) = 0,1250 \text{ rad} \\ \Rightarrow I_{RL} &= 19,844 \cos(\omega t - 0,1250) \text{ (en mA)} \end{aligned}$$

**d)** L'admittance du circuit (d) est

$$\begin{aligned} \underline{Y}_d &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega}) = (2 - 15,601j) \times 10^{-3} \\ \Rightarrow \underline{Z}_d &= 1/\underline{Y}_d = 8,084 + 63,062j = 63,578 e^{j\phi_d} \end{aligned}$$

où  $\phi_d = \text{Arctan } 63,062/8,084 = 1,443 \text{ rad}$

• L'intensité débitée est  $\underline{I}_d = \underline{V}/\underline{Z}_d = I_{m,d} e^{j(\omega t - \phi_d)}$

$$\begin{aligned} \text{où } I_{m,d} &= V_m/Z_d = 157,3 \text{ mA} \\ \Rightarrow I_d &= 157,3 \cos(\omega t - 1,443) \text{ mA} \end{aligned}$$

• L'intensité dans chacune des branches est

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \underline{V}/R = I_{1m}e^{j\omega t} \text{ où } I_{1m} = V_m/R = 10/500 \text{ A} = 20 \text{ mA} \\ \Rightarrow I_R &= 20 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_L &= \underline{V}/\underline{Z}_L = V_m e^{j\omega t}/jL\omega = 10 e^{j\omega t}/62,83j = 159,1 e^{j(\omega t - \pi/2)} \text{ mA} \\ \Rightarrow I_L &= 159,1 \cos(\omega t - \pi/2) \text{ mA.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{V}/\underline{Z}_C = jC\omega V_m e^{j\omega t} = 3,1416 e^{j(\omega t + \pi/2)} \\ \Rightarrow I_C &= 3,1416 \cos(\omega t + \pi/2) \text{ mA.} \end{aligned}$$

**4-9** L'intensité doit être  $I_{\text{eff}} = P/V = 100/110 = 0,909 \text{ A}$ . La résistance de l'ampoule est  $R = V_{\text{eff}}/I_{\text{eff}} = 110/0,909 = 121 \Omega$ . L'impédance du circuit  $RL$  est

$$\underline{Z} = R + jL\omega \text{ d'où } Z^2 = R^2 + L^2\omega^2 = (V_{2\text{eff}}/I_{\text{eff}})^2 = 58564 \Omega^2$$

Nous devons donc avoir

$$L^2\omega^2 = 58564 - 121^2 = 43923 \Omega^2, \quad L\omega = 209,58 \Omega$$

d'où  $L = 209,6/2\pi \times 50 = 0,667 \text{ H}$

Si on utilise un condensateur, on doit avoir

$$1/C\omega = L\omega = 209,58 \Omega \implies C = 1/209,58 \times 2\pi \times 50 = 15,2 \mu\text{F}$$

**4-10** La résistance totale du circuit est  $R = 5 + 100 = 105 \Omega$ . L'intensité débitée est  $I = 12/105 = 0,1143 \text{ A}$ . La d.d.p. aux bornes de la batterie est  $V = \mathcal{E} - rI = 12 - 5 \times 0,1143 = 11,43 \text{ V}$ . L'énergie dissipée dans la résistance pendant 5 minutes est  $U_J = RI^2t = 100 \times 0,1143^2 \times (5 \times 60) = 391,8 \text{ J}$

**4-11 a)** La puissance totale fournie par le générateur est  $I\mathcal{E}$ . Celle qui est utile dans le circuit extérieur est  $P = IV_{\text{AB}} = I\mathcal{E} - I^2r$ . Comme fonction de  $I$ , la puissance  $P$  a un maximum pour  $I = \mathcal{E}/2r$ . La puissance extérieure est alors  $P_{\text{max}} = \mathcal{E}^2/4r$  et le rendement est  $P_{\text{max}}/\mathcal{E}I = 1 - Ir/\mathcal{E} = 0,5$ .

**b)** La source est équivalente à une source de courant  $\mathcal{I}$  idéale branchée en parallèle avec une résistance  $r$  (voir la Fig. 4.8b). L'intensité dans  $r$  est  $\mathcal{I} - I$  et la d.d.p. aux bornes de la source est  $V = R(\mathcal{I} - I)$ . La puissance fournie au circuit est  $P = VI = RI(\mathcal{I} - I)$ . Comme fonction de  $I$ , la puissance  $P$  a un maximum pour  $I = \mathcal{I}/2$ . La puissance extérieure est alors  $P_{\text{max}} = r\mathcal{I}^2/4$ . C'est le même résultat que dans la question (a) car  $\mathcal{E} = r\mathcal{I}$ .

**c)** Dans le cas d'un générateur harmonique, l'intensité débitée est  $\underline{I} = \underline{\mathcal{E}}/(\underline{Z}_c + \underline{Z}_i)$ . La d.d.p. aux bornes de  $\underline{Z}_c$  est alors  $\underline{V} = \underline{\mathcal{E}}\underline{Z}_c/(\underline{Z}_c + \underline{Z}_i)$ . La puissance moyenne fournie à  $\underline{Z}_c$  est

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{4}(\underline{I}\underline{V}^* + \underline{I}^*\underline{V}) \\ &= \frac{1}{4}|\underline{\mathcal{E}}|^2 \left( \frac{1}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_c} \frac{\underline{Z}_c^*}{\underline{Z}_i^* + \underline{Z}_c^*} + \frac{1}{\underline{Z}_i^* + \underline{Z}_c^*} \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_c} \right) \\ &= \frac{1}{4}|\underline{\mathcal{E}}|^2 \frac{\underline{Z}_c + \underline{Z}_c^*}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_c|^2} \end{aligned}$$

Écrivant  $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$  et  $\underline{Z}_c = R_c + jX_c$ , nous trouvons

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}|\underline{\mathcal{E}}|^2 \frac{R_c}{(R_i + R_c)^2 + (X_i + X_c)^2}$$

Le maximum de  $\langle P \rangle$  correspond aux dérivées partielles de  $\langle P \rangle$  par rapport à  $R_c$  et  $X_c$  nulles

$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial R_c} = \frac{1}{2}|\underline{\mathcal{E}}|^2 \frac{(R_i^2 - R_c^2) + (X_i + X_c)^2}{[(R_i + R_c)^2 + (X_i + X_c)^2]^2} = 0$$

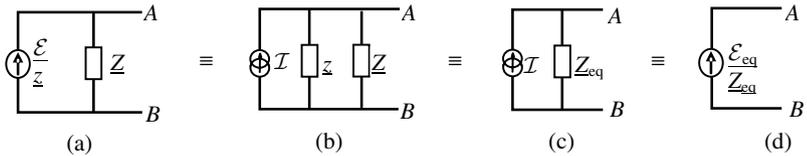
$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial X_c} = -|\mathcal{E}|^2 \frac{R_c(X_i + X_c)}{[(R_i + R_c)^2 + (X_i + X_c)^2]^2} = 0$$

Ces équations sont vérifiées si  $R_i = R_c$  et  $X_c = -X_i$ , c'est-à-dire  $\underline{Z}_c = \underline{Z}_i^*$ . La puissance fournie est alors  $\langle P \rangle = |\mathcal{E}|^2 / 8R_i$ . L'intensité débitée est  $\underline{I} = \mathcal{E} / 2R_i$  et la puissance totale fournie par le générateur est

$$\langle P_g \rangle = \frac{1}{4}(\underline{I}\mathcal{E}^* + \underline{I}^*\mathcal{E}) = \frac{1}{4R_i}|\mathcal{E}|^2$$

Le rendement est alors  $\langle P \rangle / \langle P_g \rangle = 0,5$

**4-12** Remplaçons la source de tension  $\underline{\mathcal{E}}$  et d'impédance interne  $\underline{z}$  par la source de courant équivalente  $\underline{I} = \underline{\mathcal{E}}/\underline{z}$  (Fig. 4.24b). Remplaçons les impédances  $\underline{z}$  et  $\underline{Z}$ , montées en parallèle, par l'impédance équivalente  $\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{z}\underline{Z}/(\underline{z} + \underline{Z})$  (Fig. 4.24c). Le circuit (a) est donc équivalent à une source de courant  $\underline{I} = \underline{\mathcal{E}}/\underline{z}$  et d'impédance interne  $\underline{Z}_{\text{eq}}$ . Il est possible aussi de représenter ce générateur par une source de tension  $\mathcal{E}_{\text{eq}} = \underline{I}\underline{Z}_{\text{eq}} = \mathcal{E}\underline{Z}/(\underline{z} + \underline{Z})$  et d'impédance interne  $\underline{Z}_{\text{eq}}$  (Fig. 4.24d).



**Figure 4-24** Sources de tension et de courant équivalentes à un circuit donné (a) entre A et B

**4-13** La résistance équivalente à  $R_2$  et  $R_3$  est  $R_2R_3/(R_2 + R_3)$ . Celle-ci étant en série avec  $R_1$ , la résistance totale est

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2R_3/(R_2 + R_3) = \Delta/(R_2 + R_3)$$

$$\text{où } \Delta = (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)$$

• L'intensité débitée est  $I = V/R_{\text{eq}}$  et la d.d.p. aux bornes de  $R_2$  et  $R_3$  est

$$V_{\text{AB}} = V - IR_1 = V(1 - R_1/R_{\text{eq}}) = VR_2R_3/\Delta.$$

• La puissance dégagée dans  $R_3$  est

$$P_3 = V_{\text{AB}}^2/R_3 = V^2R_2^2R_3/\Delta^2.$$

Si  $R_3$  varie de  $\delta R_3$ ,  $P_3$  varie de

$$\delta P_3 = (\partial P_3 / \partial R_3) \delta R_3 = \delta R_3 V^2 R_2^2 (R_1 R_2 - R_1 R_3 - R_2 R_3) / \Delta^3$$

Elle varie peu si  $\delta P_3 = 0$ , c'est-à-dire  $R_3 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

**4-14** La puissance consommée est  $P = VI = (220V)(5A) = 1100 \text{ W}$ .  
La puissance mécanique que le moteur fournit est  $P_m = 0,90P = 990 \text{ W}$ .  
La puissance dissipée par effet Joule est  $P_J = P - P_m = 110 \text{ W}$ .  
Cette puissance s'écrit aussi  $P_J = RI^2$ , d'où  $R = P_J / I^2 = 4,4 \Omega$ .

**4-15 a)** La caractéristique de cet échantillon est représentée dans la figure 4.25. Son équation est  $I = c^{-1/\beta} V^{1/\beta}$ , soit  $I = 10^{-10} V^5$ . La puissance dissipée est

$$P = VI = cI^{\beta+1} = 100 I^{1,2}$$

Elle ne dépasse pas  $P_o$  si  $I^{\beta+1} < P_o/c$ ,  
donc  $V/c^{1/(1+\beta)} P_o^{\beta/(1+\beta)} = 100^{0,833} P_o^{0,167}$

**b)** La résistance statique et la résistance dynamique sont respectivement

$$R_s = V/I = cI^{\beta-1} = 100 I^{-0,8}$$

$$R_d = dV/dI = c\beta I^{\beta-1} = 20 I^{-0,8}$$

On voit que  $R_s = 5R_d$ .

**c)** La d.d.p. aux bornes de l'ensemble est

$$V = V_R + V_v = IR + cI^\beta$$

La résistance statique et la résistance dynamique équivalentes sont respectivement

$$R_s = V/I = R + cI^{\beta-1} \quad \text{et} \quad R_d = dV/dI = R + c\beta I^{\beta-1}$$

Ce sont les sommes des résistances statiques et des résistances dynamiques respectivement.

**d)** Dans le cas d'un montage en parallèle, si  $V$  est la d.d.p. appliquée, les intensités dans la résistance ohmique et la varistance sont respectivement  $I_R = V/R$  et  $I_v = (V/c)^{1/\beta}$ . L'intensité principale est donc  $I = V/R + (V/c)^{1/\beta}$  et la résistance équivalente est donnée par la relation

$$1/R_{\text{eq}} = I/V = 1/R + c^{-1/\beta} V^{1/\beta-1}$$

Elle dépend de la d.d.p. appliquée.

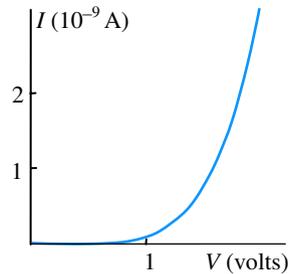


Figure 4-25





# Analyse des circuits

## PLAN

- 5.1 Définitions
- 5.2 Circuit RLC forcé
- 5.3 Résonance dans le circuit RLC
- 5.4 Bilan d'énergie en régime permanent
- 5.5 Application des règles de Kirchhoff
- 5.6 Analyse utilisant la superposition
- 5.7 Théorèmes de Thévenin et de Norton
- 5.8 Courants de mailles et réciprocity
- 5.9 Dualité

## OBJECTIF

- Études d'un circuit RLC alimenté par un générateur sinusoïdal et des méthodes d'analyse des circuits à plusieurs mailles

## 5.1 DÉFINITIONS

- Un circuit électrique est un ensemble d'éléments conducteurs reliés par des conducteurs filiformes de résistance négligeable et alimentés par des générateurs dans le but d'avoir une fonction déterminée (transport de l'énergie, transmission des signaux et leur traitement, étude de certaines propriétés électriques etc.).
- Le but de l'analyse d'un circuit électrique est de déterminer les intensités dans les diverses branches qui forment le circuit. Une fois

que les intensités sont connues, les différences de potentiel peuvent être facilement déterminées.

Un graphe est un schéma des connexions du circuit (sans être nécessairement une reproduction exacte des positions réelles des éléments du circuit).

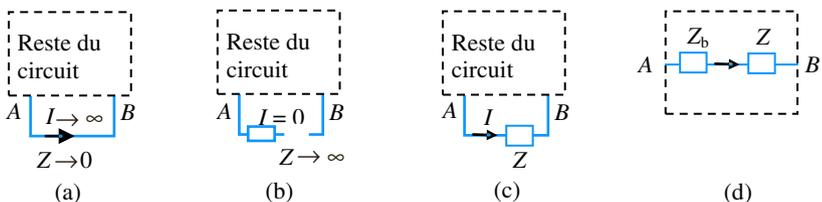
- Un **nœud** est un point où plus de deux conducteurs se rencontrent. Il ne s'agit pas nécessairement d'un point au sens géométrique ; des points d'un graphe représentant un circuit et reliés par des conducteurs sans impédance forment effectivement un nœud. Un nœud est donc l'ensemble des points qui ont le même potentiel à tout instant.
- Une **branche** est un ensemble de dipôles montés en série entre deux nœuds et une **maille** est un ensemble de branches constituant un contour fermé et qui ne passe qu'une seule fois par un nœud.

Si on connecte deux points  $A$  et  $B$  d'un circuit par un fil de résistance négligeable, ou plus généralement si on branche entre  $A$  et  $B$  un dipôle de très faible impédance, on forme un court-circuit (Fig. 5.1a). On impose alors aux points  $A$  et  $B$  d'être au même potentiel.



Si deux points d'un circuit ont une certaine d.d.p. fixe (s'ils sont connectés aux bornes d'un générateur, par exemple) et on les court-circuite, l'intensité de courant dans le court-circuit est très grande ; ce qu'il faut éviter.

Si on coupe une branche  $AB$  dans un circuit, l'intensité de courant dans cette branche devient nulle mais la d.d.p.  $V_{AB}$  n'est pas nécessairement nulle (Fig. 5.1b). Si on branche entre deux points  $A$  et  $B$  un dipôle d'impédance  $Z$  (un voltmètre, par exemple), on modifie les intensités et les d.d.p. dans le circuit et cette modification est d'autant plus importante que le rapport  $Z/Z_{eq}$  est faible (Fig. 5.1c). Ici  $Z_{eq}$  est l'impédance équivalente du circuit vue des points  $A$  et  $B$ . Enfin si on insère dans une branche un dipôle d'impédance  $Z$  (un ampèremètre, par exemple), on modifie les intensités et les d.d.p. dans le circuit et cette



**Figure 5-1** a) Court-circuit entre  $A$  et  $B$ , b) coupure entre  $A$  et  $B$ , c) branchement d'une impédance  $Z$  entre  $A$  et  $B$  et d) insertion d'une impédance  $Z$  dans une branche  $AB$ .

modification est d'autant plus grande que le rapport  $Z/Z_{eq}$  est grand (Fig. 5.1d). Ici  $Z_{eq}$  est l'impédance équivalente du circuit vue des bornes du dipôle inséré.

## 5.2 CIRCUIT RLC FORCÉ

### a) Équation du circuit

Considérons le circuit  $LCR$  de la Fig. 5.2a branché sur une f.é.m. harmonique

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t) \quad (5.1)$$

La loi de Kirchhoff permet d'écrire l'équation du circuit

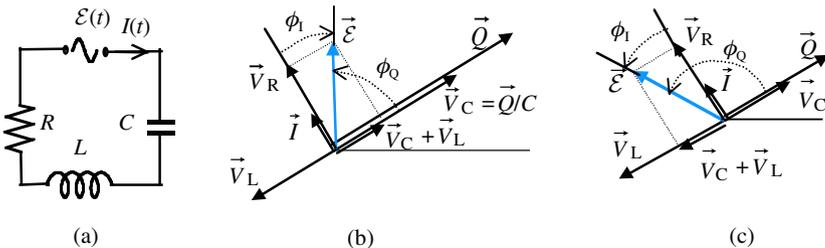
$$\begin{aligned} L\dot{I} + RI + Q/C &= \mathcal{E}_m \cos(\Omega t) \\ \implies L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C &= \mathcal{E}_m \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dans la suite nous désignons par  $\delta = R/2L$  le coefficient d'amortissement du circuit et par  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  sa pulsation propre.

Dans le régime permanent (voir le chapitre 6), l'intensité du courant et la charge du condensateur sont des fonctions harmoniques de même pulsation  $\Omega$  ; nous les écrivons sous la forme

$$Q = Q_m \cos(\Omega t - \phi_Q) \quad \text{et} \quad I = I_m \cos(\Omega t - \phi_I) \quad (5.3)$$

Avec les relations  $I_m = \Omega Q_m$  et  $\phi_I = \phi_Q - \pi/2$  (car  $I = \dot{Q}$ ).



**Figure 5-2** a) Circuit électrique  $LCR$  forcé, b) représentation de Fresnel dans le cas  $L\Omega < 1/C\Omega$  (c.-à-d.  $\Omega < \omega_0$ ) et c) représentation de Fresnel dans le cas  $L\Omega > 1/C\Omega$  (c.-à-d.  $\Omega > \omega_0$ ).

### b) Recherche de la solution par la méthode de Fresnel

Trouvons d'abord la solution de (5.2) par la méthode de Fresnel. La phase de  $I$  à l'origine est inconnue ; la direction du vecteur  $\vec{I}$ , qui la représente est prise arbitrairement pour le moment (Fig. 5.2b et c).

Le terme  $RI$  est alors un vecteur  $\vec{V}_R$  de longueur  $RI$  dans la même direction. Le terme  $L\dot{I}$  est représenté par un vecteur  $\vec{V}_L$  de longueur  $\Omega LI$  faisant un angle  $+\pi/2$  avec  $\vec{I}$ .  $Q$  étant la primitive de  $I$ , le terme  $Q/C$  est représenté par le vecteur  $\vec{V}_C$  de longueur  $I/\Omega C$  faisant un angle  $-\pi/2$  avec  $\vec{I}$ . Le premier membre de l'équation (5.2) est alors représenté par la somme vectorielle de ces trois vecteurs. La somme du premier et du troisième termes est le vecteur  $(\vec{V}_L + \vec{V}_C)$  de longueur  $I|\Omega L - 1/C\Omega|$  en retard ou en avance de phase  $\pi/2$  sur l'intensité selon que  $(\Omega L - 1/C\Omega)$  est négatif ou positif, c'est-à-dire  $\Omega < \omega_0$  ou  $\Omega_0 > \omega_0$  (Fig. 5.2b et c respectivement). Le premier membre de (5.2) est représenté par un vecteur  $(\vec{V}_L + \vec{V}_C + \vec{V}_R)$  de module  $IZ$ , où  $Z = \sqrt{R^2 + (1/C\Omega - L\Omega)^2}$  est l'impédance du circuit. Nous devons donc avoir

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (1/C\Omega - L\Omega)^2}} \quad (5.4)$$

On voit aussi que  $I$  est en retard sur  $\mathcal{E}$  de  $\phi_I$ , tel que

$$\cos \phi_I = \frac{R}{Z}, \quad \sin \phi_I = \frac{L\Omega - 1/C\Omega}{Z} \quad \text{ou} \quad \phi_I = \text{Arctan} \frac{L\Omega - 1/C\Omega}{R} \quad (5.5)$$

Nous en déduisons l'amplitude de  $Q$  et son retard de phase sur  $\mathcal{E}$

$$Q_m = \mathcal{E}_m / \Omega Z \quad \text{et} \quad \phi_Q = \phi_I + \pi/2 \quad (0 < \phi_I < \pi) \quad (5.6)$$

Si  $\Omega < \omega_0$  (Fig. 5.2a),  $I$  est effectivement en avance sur  $\mathcal{E}$  ( $\phi_I < 0$ ) et si  $\Omega > \omega_0$  (Fig. 5.2b),  $I$  est en retard sur  $\mathcal{E}$  ( $\phi_I > 0$ ).  $Q$  est toujours en retard sur  $\mathcal{E}$  ( $\phi_Q > 0$ ).

### c) Analyse utilisant les fonctions complexes

Nous cherchons maintenant la solution de (5.2) par la méthode des fonctions complexes. Notons d'abord que c'est une équation différentielle linéaire du second ordre. Elle obéit donc au principe de superposition. Considérant une f.é.m. complexe  $\underline{\mathcal{E}} = \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\Omega t}$ , l'équation du circuit s'écrit

$$L\ddot{\underline{Q}} + R\dot{\underline{Q}} + \underline{Q}/C = \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\Omega t} \quad (5.7)$$

La solution de (5.2) est alors la partie réelle de la solution de (5.7). Celle-ci est de la forme

$$\underline{Q} = \underline{Q}_m e^{j\Omega t}, \quad \underline{I}(t) = \dot{\underline{Q}} = j\Omega \underline{Q} = j\Omega \underline{Q}_m e^{j\Omega t} \equiv \underline{I}_m e^{j\Omega t} \quad (5.8)$$

Substituant l'expression de  $\underline{Q}$  dans l'équation (5.7) et utilisant l'impédance complexe, nous trouvons que l'équation est vérifiée si

$$\underline{Q}_m = \underline{\mathcal{E}}_m / j\Omega \underline{Z} \quad \text{et} \quad I_m = \underline{\mathcal{E}}_m / \underline{Z} \quad (5.9)$$

où nous avons posé

$$\underline{Z} = R + j(L\Omega - 1/C\Omega) = Z e^{j\phi_Z}, \quad (5.10)$$

$\underline{Z}$  est l'impédance complexe de module et de phase

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (1/C\Omega - L\Omega)^2}, \quad \phi_Z = \text{Arctan}[(L\Omega - 1/C\Omega)/R] \quad (5.11)$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{j\Omega \underline{Z}} e^{j\Omega t} = \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{\Omega \underline{Z}} e^{j(\Omega t - \phi_Z - \pi/2)}, \\ \underline{I}(t) &= \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{\underline{Z}} e^{j\Omega t} = \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{Z} e^{j(\Omega t - \phi_Z)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$\phi_Z$  est donc égale au retard de phase de l'intensité  $I$  sur la f.é.m.  $\mathcal{E}$  ; tandis que  $\phi_Z + \pi/2$  est le retard de la charge  $Q$  sur la f.é.m.

Connaissant l'intensité et la charge, nous pouvons calculer les d.d.p. aux bornes des éléments :

$$\begin{aligned} \underline{V}_R &= R \underline{I} = (R/\underline{Z}) \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\Omega t}, & \underline{V}_L &= \underline{Z}_L \underline{I} = (jL\Omega/\underline{Z}) \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\Omega t}, \\ \underline{V}_C &= \underline{Z}_C \underline{I} = (1/jC\Omega \underline{Z}) \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (5.13)$$

La solution de l'équation (5.2) est obtenue, en prenant la partie réelle des expressions précédentes. Prenant la phase de la f.é.m. nulle, c'est-à-dire  $\underline{\mathcal{E}}_m$  réelle, il suffit de remplacer simplement les fonctions exponentielles par les fonctions cosinus avec le même argument. Nous retrouvons évidemment (5.3) avec une amplitude et une phase données par (5.6).

### 5.3 RÉSONANCE DANS LE CIRCUIT RLC

Étudions les variations de l'amplitude de la charge, l'amplitude de l'intensité et le retard de phase  $\phi_I$  de l'intensité sur la f.é.m. d'excitation en fonction de la pulsation  $\Omega$ . Ces grandeurs sont données par

$$\boxed{Q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega \sqrt{R^2 + (L\Omega - 1/C\Omega)^2}}, \quad I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (L\Omega - 1/C\Omega)^2}},}$$

$$\boxed{\phi_I = \phi_Z = \text{Arctan}[(L\Omega - 1/C\Omega)/R]} \quad \text{et} \quad \phi_Q = \phi_Z + \pi/2 \quad (5.14)$$

La variation de l'amplitude de la charge  $Q_m$  en fonction de  $\Omega$  est illustrée dans la Fig. 5.3a pour quelques valeurs du coefficient d'amortissement  $\delta = R/2L$ . Quel que soit  $\delta$ ,  $Q_m$  augmente de  $Q_{st} = C\mathcal{E}_m$  pour  $\Omega = 0$ , passe par un maximum  $Q_{\max} = \mathcal{E}_m/2L\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  pour  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$  puis tend vers zéro à hautes fréquences. La Fig. 5.3b illustre la variation de l'amplitude  $I_m$  de l'intensité pour une valeur donnée de  $\delta$ . Elle augmente de 0 pour  $\Omega = 0$ , passe par un maximum  $I_{\max} = \mathcal{E}_m/R = \mathcal{E}_m/2L\delta$  pour  $\Omega = \omega_0$  puis décroît à zéro à hautes fréquences. Les maximums de  $Q(t)$  et  $I(t)$  sont d'autant plus prononcés que l'amortissement  $\delta$  est plus faible. Ils deviennent infinis si  $\delta = 0$  et le maximum de  $Q$  disparaît si  $\delta > \omega_0/\sqrt{2}$ . Le retard de phase  $\phi_I$  de l'intensité sur  $\mathcal{E}$  est représenté dans la Fig. 5.3c.  $\phi_I$  augmente de  $-\pi/2$  pour  $\Omega = 0$ , à  $\phi_I = 0$  pour  $\Omega = \omega_0$  et tend vers  $\phi_I = +\pi/2$  à haute fréquence.

Le passage de l'amplitude de l'intensité par un maximum pour  $\Omega = \omega_0$ , la pulsation du circuit libre, et le passage de l'amplitude de la charge par un maximum pour  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ , très voisin de  $\Omega = \omega_0$  (si  $\delta \ll \omega_0$ ), est un phénomène appelé **résonance**.

La solution prend les formes suivantes selon les valeurs de  $\Omega$  :

- À basses fréquences ( $\Omega \ll \omega_0$ ) :

$$Q = \mathcal{E}_m C \cos(\Omega t), \quad I(t) = \mathcal{E}_m \Omega C \cos(\Omega t + (\pi/2)) = -\mathcal{E}_m \Omega C \sin(\Omega t) \quad (5.15)$$

- Au voisinage de la résonance ( $\Omega \approx \omega_0$ ) :

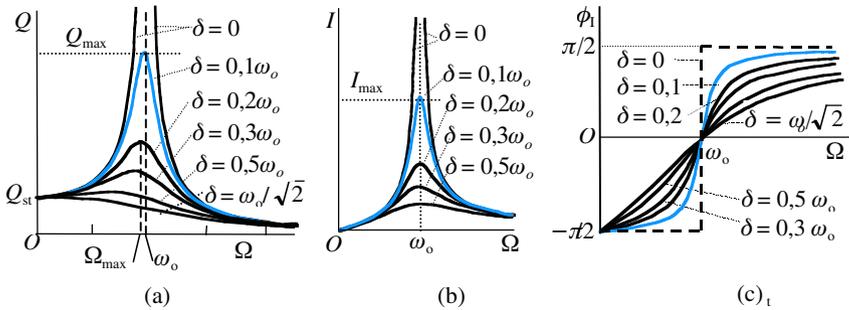
$$Q = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega R} \cos(\Omega t - 1/2\pi) = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega R} \sin(\Omega t), \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \cos(\Omega t) \quad (5.16)$$

- A hautes fréquences ( $\Omega \gg \omega_0$ ) :

$$Q = \frac{\mathcal{E}_m}{L\Omega^2} \cos(\Omega t - \pi), \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}_m}{L\Omega} \cos(\Omega t - 1/2\pi) = \frac{\mathcal{E}_m}{L\Omega} \sin(\Omega t) \quad (5.17)$$



Au voisinage de la résonance, l'intensité est en phase avec la f.é.m. d'excitation et loin de la résonance, elle est en quadrature. L'intensité du courant augmente comme  $\Omega$  pour les basses fréquences et diminue comme  $1/\Omega$  à hautes fréquences.



**Figure 5-3** La réponse d'un circuit RLC série en fonction de la pulsation de la f.é.m. d'excitation  $\Omega$  pour quelques valeurs du coefficient d'amortissement  $\delta$  : **a)** variation de l'amplitude de la charge, **b)** variation de l'amplitude de l'intensité et **c)** variation de la phase de  $I$ .

- Dans le cas idéal où  $\delta = 0$ , les courbes, qui représentent  $Q$  et  $I$  en fonction de  $\Omega$ , deviennent infinies pour  $\Omega = \omega_0$  et le déphasage  $\phi_I$  est discontinu en passant de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$ .
- Si l'amortissement augmente, les courbes de résonance deviennent de plus en plus plates et le maximum disparaît pour  $\delta = \omega_0/\sqrt{2}$ .
- Pour une valeur finie de  $\delta$ , la résonance est caractérisée par la largeur de la résonance. Cette quantité est définie comme la largeur de la bande de pulsation telle que

$$I_m > I_{\max}/\sqrt{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Omega^2 \pm 2\delta\Omega - \omega_0^2 = 0. \quad (5.18)$$

Les racines positives de cette équation sont

$$\Omega_{(\pm)} = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} \pm \delta \quad (5.19)$$

Nous définissons le facteur de qualité par

$$f_q = \frac{\omega_0}{\Omega_{(+)} - \Omega_{(-)}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{L\omega_0}{R}, \quad (5.20)$$

qui est le même que celui que nous avons défini dans la section 3.6 pour un circuit RLC libre, comme le nombre approximatif d'oscillations du circuit avant de revenir à l'équilibre. La **largeur de la résonance** peut être définie comme

$$\Gamma = \Omega_{(+)} - \Omega_{(-)} = 2\delta = R/L. \quad (5.21)$$



Dans la bande  $\omega_o - \Gamma/2 < \Omega < \omega_o + \Gamma/2$ , la réponse du circuit est importante. C'est la **bande passante** du circuit. Plus l'amortissement  $\delta$  est faible, plus le facteur de qualité est grand, le pic de la résonance est prononcé et la bande passante est étroite. Pour avoir une idée des ordres de grandeur, dans un poste récepteur de radio  $f_q$  est de l'ordre de 100, pour une cavité résonante en micro-ondes  $f_q$  est de l'ordre de  $10^4$  à  $10^5$  etc.

Notons que dans un circuit RLC, la somme algébrique des d.d.p. aux bornes de la résistance, la self-inductance et la capacité est égal à  $\mathcal{E}$  à tout instant. Les amplitudes des d.d.p. aux bornes de la self-inductance et du condensateur peuvent être beaucoup plus grandes que  $\mathcal{E}$ . Utilisant (5.13), nous définissons les surtensions aux bornes de ces éléments comme étant

$$\frac{V_{L,m}}{\mathcal{E}_m} = \frac{L\Omega}{Z}, \quad \frac{V_{C,m}}{\mathcal{E}_m} = \frac{1}{\Omega C Z} \quad (5.22)$$

À la résonance même,  $Z = R$  et ces surtensions prennent justement la valeur  $f_q$  du facteur de qualité.



La surtension peut provoquer la mise hors d'usage du condensateur, si le champ électrique dépasse la rigidité électrique de l'isolant qu'il contient. Aussi, à la résonance, l'intensité peut devenir très grande et provoquer un surchauffement de la résistance.

## 5.4 BILAN D'ÉNERGIE EN RÉGIME PERMANENT

Lorsqu'un circuit oscille sous l'effet de la f.é.m. d'un générateur, il peut échanger de l'énergie avec le générateur. Le circuit peut recevoir de l'énergie qu'il peut emmagasiner dans la self-inductance ou le condensateur ou dissiper par effet Joule dans la résistance. Il peut aussi restituer de l'énergie au générateur, pendant des intervalles de temps limités.

Utilisant l'équation du circuit (5.2), on peut facilement montrer que, pendant un intervalle de temps  $dt$ , l'énergie fournie par le générateur est la somme de la variation de l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la self-inductance ( $U_{em} = \frac{1}{2} Q^2/C + \frac{1}{2} LI^2$ ) et l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

Lorsque le régime permanent est atteint, le circuit revient périodiquement au même état. Donc, en moyenne sur une période, l'énergie emmagasinée reste constante et toute la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule. En effet ces puissances s'écrivent

$$P^{(g)} = I\mathcal{E} = (\mathcal{E}_m^2/Z) \cos(\Omega t) \cos(\Omega t - \phi_1) \quad (5.23)$$

$$P^{(J)} = RI^2 = R(\mathcal{E}_m/Z)^2 \cos^2(\Omega t - \phi_1) \quad (5.24)$$

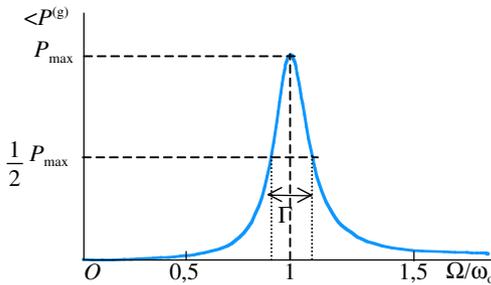
Leurs valeurs moyennes sur une période s'écrivent sous l'une des formes

$$\begin{aligned} \langle P^{(g)} \rangle &= \langle P^{(J)} \rangle = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_m^2/Z) \cos \phi_1 = \frac{1}{2} R\mathcal{E}_m^2/Z^2 \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi_1 = \frac{1}{2} Z I_m^2 \cos \phi_1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nous pouvons aussi utiliser l'intensité efficace  $I_{\text{eff}} = I_m/\sqrt{2}$  et la f.é.m. efficace  $\mathcal{E}_{\text{eff}} = \mathcal{E}_m/\sqrt{2}$ .

Notons que la puissance moyenne fournie par le générateur peut être calculée directement en utilisant les expressions complexes (voir la section 4.5) ; nous trouvons

$$\langle P^{(g)} \rangle = \frac{1}{4} (\underline{\mathcal{E}}I^* + \underline{I}\mathcal{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\mathcal{E}}I^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{I}\mathcal{E}^*) \quad (5.26)$$



**Figure 5-4** Variation de la puissance moyenne absorbée. La valeur maximale est  $P_{\text{max}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_o^2/R$ . La bande passante est définie par la condition  $\langle P^{(g)} \rangle > \frac{1}{2} P_{\text{max}}$ .

La variation de la puissance moyenne délivrée par le générateur en fonction de la pulsation  $\Omega$  est illustrée dans la Fig. 5.4. Elle augmente de zéro pour  $\Omega = 0$ , atteint un maximum  $P_{\text{max}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_o^2/R$ , pour  $\Omega = \omega_0$  puis décroît à zéro à hautes fréquences. La courbe illustre donc le phénomène de résonance pour  $\Omega = \omega_0$ . Nous pouvons définir la largeur de la résonance comme la largeur de la bande de pulsation telle que

$$\langle P \rangle > \frac{1}{2} P_{\text{max}} \quad (5.27)$$

Nous trouvons la même équation (5.18) et la même largeur de bande passante (5.21).

La puissance instantanée fournie au circuit est

$$P(t) = I(t)\mathcal{E}(t) = I_m \mathcal{E}_m \cos(\Omega t) \cos(\Omega t - \phi_z) \quad (5.28)$$

Elle oscille donc entre  $-I_m \mathcal{E}_m$  et  $I_m \mathcal{E}_m$ . Le produit  $I_m \mathcal{E}_m$  est la *puissance apparente*. Bien que la moyenne  $\langle P \rangle$  soit positive, à certains moments  $P(t)$  est négative ; le générateur restitue alors de l'énergie au générateur.

## 5.5 APPLICATION DES RÈGLES DE KIRCHHOFF

Rappelons d'abord les deux *règles de Kirchhoff* (voir le chapitre 4) :

• **Règle des nœuds** : La somme des intensités de courant qui arrivent en un nœud est égale à la somme des intensités de courant qui le quittent :

$$\sum_i I_i^{(\text{in})} = \sum_k I_k^{(\text{ex})} \quad (5.29)$$

• **Règle des mailles** : La somme des chutes de potentiel aux bornes d'éléments formant une maille est nulle :

$$\sum_i V_i = 0 \quad (5.30)$$

### a) Équations des mailles et détermination des intensités dans les branches



On peut étudier un circuit, en déterminant d'abord les intensités dans les diverses branches. Pour cela on commence par choisir les amplitudes  $I_i$  des intensités à déterminer. On réduit leur nombre en utilisant la règle des nœuds (5.29). Leur nombre  $N$  est le même que celui des mailles indépendantes. Une maille n'est pas indépendante des autres si elle est obtenue en juxtaposant d'autres mailles qui ont des branches communes. Chaque branche du circuit est alors au moins dans l'une des mailles indépendantes. Il est évident que, si les générateurs ont des f.é.m.  $\mathcal{E}^{(p)}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) harmoniques et de même pulsation  $\omega$ , les intensités dans les diverses branches sont harmoniques de même pulsation,  $I_i = \underline{A}_i e^{j\omega t}$  et il en est de même pour les d.d.p. Substituant ces expressions dans les équations des mailles, celles-ci deviennent  $N$  équations algébriques linéaires, pour déterminer les  $N$  amplitudes complexes  $\underline{A}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Les coefficients dans ces équations sont des combinaisons linéaires des impédances complexes des divers dipôles  $Z_d = R_d + j(\omega L_d - 1/\omega C_d)$ .



Pour écrire correctement l'équation d'une maille, on procède de la façon suivante : On choisit d'abord un sens de parcours de la maille. La chute de potentiel aux bornes d'un dipôle passif est  $\pm \underline{Z}_d \underline{I}_d$  selon que l'intensité  $\underline{I}_d$  qui le parcourt est dans le

sens de la maille ou non. La chute de potentiel aux bornes d'un générateur ( $p$ ) est  $\pm \mathcal{E}^{(p)}$  selon qu'on rencontre en premier le pôle positif ou le pôle négatif en parcourant la maille. L'équation de la maille est alors une équation algébrique dont le premier membre est une combinaison linéaire des intensités dans ses diverses branches et le second membre est la somme des forces électromotrices qu'elle contient, chacune affectée du signe (+) si elle tend à produire un courant dans le sens de la maille et du signe (-) dans le cas contraire.

Pour illustrer cette méthode, nous déterminons les intensités dans les branches du circuit de la Fig. 5.5. Prenons, pour intensités inconnues et indépendantes, les intensités  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  (ce choix a l'avantage de la symétrie). L'intensité  $\underline{I}_3$  est alors donnée par la loi des nœuds :  $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ . Écrivant la règle des mailles indépendantes  $ADCB$  et  $AFEB$  décrites dans les sens indiqués, nous trouvons les deux équations indépendantes

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{\mathcal{E}}_1 + \underline{\mathcal{E}}_3 + \underline{Z}_3 (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) &= 0, \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + \underline{\mathcal{E}}_3 - \underline{\mathcal{E}}_2 &= 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) + \underline{I}_2 (\underline{Z}_3) &= (\underline{\mathcal{E}}_1 - \underline{\mathcal{E}}_3), \\ \underline{I}_1 (\underline{Z}_3) + \underline{I}_2 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) &= (\underline{\mathcal{E}}_2 - \underline{\mathcal{E}}_3) \end{aligned}$$

La solution de ces équations est

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= [\underline{\mathcal{E}}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{\mathcal{E}}_2 \underline{Z}_3 - \underline{\mathcal{E}}_3 \underline{Z}_2] / \Delta, \\ \underline{I}_2 &= [-\underline{\mathcal{E}}_1 \underline{Z}_3 + \underline{\mathcal{E}}_2 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) - \underline{\mathcal{E}}_3 \underline{Z}_1] / \Delta, \\ \implies \underline{I}_3 &= [\underline{\mathcal{E}}_1 \underline{Z}_2 + \underline{\mathcal{E}}_2 \underline{Z}_1 - \underline{\mathcal{E}}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)] / \Delta, \end{aligned} \quad (5.31)$$

où  $\Delta = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$ . Connaissant les intensités, nous pouvons évaluer les différences de potentiel ; nous trouvons par exemple

$$V_A - V_B = \underline{I}_3 \underline{Z}_3 - \underline{\mathcal{E}}_3 = -[\underline{\mathcal{E}}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{\mathcal{E}}_2 \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{\mathcal{E}}_3 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2] / \Delta. \quad (5.32)$$

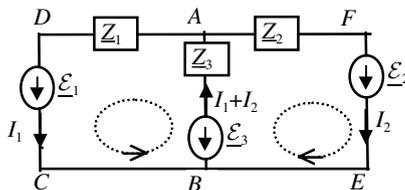


Figure 5-5 Circuit à analyser.



Pour vérifier ce résultat, prenons la limite  $Z_3 \rightarrow \infty$ , nous trouvons  $I_1 = -I_2 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/(Z_1 + Z_2)$ . Ce résultat correspond à une seule maille, obtenue en supprimant la branche  $AB$ ; car une impédance infinie est équivalente à l'absence de la branche.

## b) Equation des nœuds et détermination des tensions aux nœuds



Nous pouvons déterminer directement les tensions aux nœuds de la façon suivante. Le potentiel étant défini à une constante près, nous pouvons déterminer seulement les différences de potentiel. On choisit donc un nœud de référence auquel  $V = 0$  (si l'un des nœuds est relié à la masse, on le prend comme référence). Il nous reste  $n - 1$  potentiels inconnus  $V_i$ . On exprime les intensités dans les diverses branches en fonction des  $V_i$  et on écrit la règle des nœuds de Kirchhoff. Ce qui nous donne  $n - 1$  équations indépendantes pour déterminer les  $V_i$  et, par suite, les intensités dans les branches.

Considérons le circuit de la Fig 5.5. Prenons  $B$  comme point de référence ( $V_B = 0$ ). Le seul potentiel à déterminer est  $V_A$ . Les expressions des intensités en fonction de  $V_A$  sont

$$I_{ADCB} = (V_A + \mathcal{E}_1)/Z_1, \quad I_{BA} = -(V_A + \mathcal{E}_3)/Z_3$$

et  $I_{AFEB} = (V_A + \mathcal{E}_2)/Z_2$

Écrivons l'équation des nœuds en  $B$  (ou en  $A$ ), nous trouvons

$$I_{ADCB} + I_{AFEB} = I_{BA}$$

d'où  $V_A = -[\mathcal{E}_1 Z_2 Z_3 + \mathcal{E}_2 Z_1 Z_3 + \mathcal{E}_3 Z_1 Z_2]/\Delta$ . (5.33)

## c) Théorème de Millman

Une autre propriété des circuits, connue sous le nom de *théorème de Millman*, est parfois utile. Si des branches  $A_i N$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) d'un circuit se rencontrent en un nœud  $N$  (Figure 5.6a) et on connaît les potentiels  $V_i$  aux points  $A_i$ , ce théorème permet de déterminer le potentiel  $V_N$ .

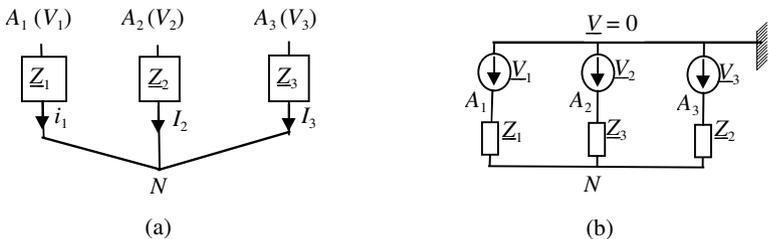


Figure 5-6 a) Théorème de Millman en absence de générateurs, b) son interprétation.

Si le circuit ne comporte pas de générateurs ou de récepteurs, nous avons les relations  $\underline{V}_i - \underline{V}_N = \underline{Z}_i \underline{I}_i$ . Nous en déduisons que  $\underline{I}_i = \underline{Y}_i (\underline{V}_i - \underline{V}_N)$ , où  $\underline{Y}_i = 1/\underline{Z}_i$  est l'admittance de la branche (i). Substituant ces expressions dans l'équation des nœuds  $\sum_i \underline{I}_i = 0$ , nous en déduisons que

$$\underline{V}_N = (\sum_i \underline{V}_i \underline{Y}_i) / (\sum_i \underline{Y}_i) \quad (5.34)$$

Si les branches contiennent des générateurs de f.é.m.  $\mathcal{E}_i$ , nous devons les ajouter aux  $\underline{V}_i$ , chacune affectée du signe (+) ou (-) selon qu'en allant de  $N$  à  $A_i$ , on rencontre en premier le pôle positif ou le pôle négatif.



On peut interpréter ce résultat en imaginant que les potentiels  $V_i$  sont produits par des générateurs branchés entre la masse ( $V = 0$ ) et les points  $A_i$  (Fig. 5.6b). Ce qui est équivalent à trois sources de tension montées en parallèle et branchés entre le point  $N$  et la masse. La relation (5.34) n'est autre que la f.é.m. équivalente (voir l'équation (4.72) en remplaçant les résistances par des impédances complexes).

## 5.6 ANALYSE UTILISANT LA SUPERPOSITION

Si les dipôles qui forment un circuit sont linéaires, les règles de Kirchhoff étant linéaires, la solution du système des  $n$  équations linéaires du circuit obéit au principe de superposition suivant :

Dans un circuit  $C$  contenant des générateurs indépendants (1), (2), ... l'intensité  $\underline{I}_i$  dans chaque branche (i) est la superposition des intensités  $\underline{I}_i^{(1)}, \underline{I}_i^{(2)}, \dots$  dans les circuits  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$  obtenus en éteignant tous les générateurs sauf un seul, les impédances internes des générateurs étant maintenues dans le circuit. Ce principe de superposition est valable aussi pour les d.d.p.

Éteindre une source de tension (considérée comme une source idéale et une impédance interne  $Z^{\text{in}}$  en série) revient à court-circuiter la source idéale (mettre  $\mathcal{E} = 0$ ) et laisser  $Z^{\text{in}}$ . De même, éteindre une source de courant (considérée comme une source idéale  $\mathcal{I}$  et une impédance interne  $Z^{\text{in}}$  en parallèle) revient à couper la branche de la source idéale et laisser la branche  $Z^{\text{in}}$ .

Ce principe est valable si les générateurs sont *indépendants* (ou *autonomes*). Cela veut dire que les caractéristiques ( $\mathcal{E}$  et  $r$  ou  $\mathcal{I}$  et  $r$ ) de chacun ne dépendent pas des autres ou des courants qu'ils débitent.



Par exemple, un transistor peut être considéré comme une source de courant  $I$  de sortie qui dépend fortement du courant d'entrée ; il n'est pas donc autonome ; on dit aussi qu'il est *contrôlé, lié* ou *dépendant*.

Pour analyser le circuit, on commence par remplacer les f.é.m. réelles par des f.é.m. complexes et réduire le nombre des générateurs, en remplaçant les générateurs en série ou en parallèle par les générateurs idéaux équivalents. Considérons le circuit  $C^{(p)}$ , obtenu en éteignant tous les générateurs sauf  $\underline{\mathcal{E}}^{(p)}$  (en conservant les impédances internes). L'évaluation des intensités correspondantes  $\underline{I}_i^{(p)}$  dans les diverses branches est facilitée par les règles d'association des impédances. Enfin on ajoute pour chaque branche (i) les intensités  $\underline{I}_i^{(1)}, \underline{I}_i^{(2)}, \dots$  produites par tous les générateurs  $\underline{\mathcal{E}}^{(p)}$  pris individuellement.

Comme application, considérons le circuit de la Fig. 5.5. Conservant seulement l'une des f.é.m., on obtient les trois circuits de la Fig. 5.7. Dans chacun, les courants sont produits par un seul générateur dans des impédances montées en parallèle. Dans le cas du premier circuit, par exemple  $\underline{Z}_2$  et  $\underline{Z}_3$  sont en parallèle, leur résistance équivalente est  $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$  ; d'où les intensités dues au générateur  $\underline{\mathcal{E}}_1$

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= \underline{\mathcal{E}}_1 / (\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_1) = \underline{\mathcal{E}}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) / \Delta, \\ I_2^{(1)} &= -(\underline{Z}_{eq} / \underline{Z}_2) I_1^{(1)} = \underline{\mathcal{E}}_1 \underline{Z}_3 / \Delta \end{aligned}$$

Nous évaluons de la même façon les courants  $\underline{I}_1^{(2)}$  et  $\underline{I}_2^{(2)}$  dus au générateur  $\underline{\mathcal{E}}_2$  dans le cas du second circuit de la Fig. 5.7 et les courants  $\underline{I}_1^{(3)}$  et  $\underline{I}_2^{(3)}$  dus au générateur  $\underline{\mathcal{E}}_3$  dans le cas du troisième circuit. Ajoutant ces intensités partielles, nous retrouvons les intensités  $\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{(1)} + \underline{I}_1^{(2)} + \underline{I}_1^{(3)}$  etc.

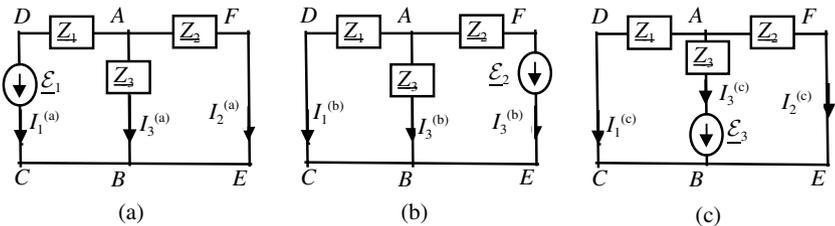


Figure 5-7 Utilisation du principe de superposition.

Le principe de superposition est valable même si les générateurs sont harmoniques de pulsations différentes  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Les intensités et les tensions sont alors des superpositions de fonctions harmoniques de pulsations  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Si le circuit est alimenté par un générateur non harmonique, la théorie de Fourier permet d'écrire sa f.é.m. comme une superposition de f.é.m. harmoniques de pulsations  $\omega_i$ . Les intensités et les tensions sont alors des superpositions de fonctions harmoniques de ces pulsations  $\omega_i$ . Comme les impédances dépendent de la pulsation, les intensités et les tensions n'ont pas la même forme que la f.é.m. du générateur.

## 5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON

Le principe de superposition a pour conséquence une propriété connue sous le nom de *théorème de Thévenin* :

Supposons que la d.d.p. entre deux points  $A$  et  $B$  d'un circuit (1) est  $\underline{V}_{AB}$  et que le circuit passif (c'est-à-dire les forces électromotrices éteintes en conservant les impédances internes des générateurs) a une impédance équivalente  $\underline{Z}_{AB}$  entre  $A$  et  $B$ . Les d.d.p. et les intensités dans un circuit (2) branché entre  $A$  et  $B$  sont les mêmes que si le circuit (2) était branché sur un générateur de f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}}_{Th} = \underline{V}_{AB}$  et d'impédance interne égale à  $\underline{Z}_{AB}$ .

Pour établir ce théorème, considérons le circuit (1) dont l'impédance passive est  $\underline{Z}_{AB}$  et tel que la d.d.p. entre deux points  $A$  et  $B$  est  $\underline{V}_{AB}$  (Fig. 5.8a). Branchons entre  $A$  et  $B$  une impédance  $\underline{Z}_2$  et un générateur idéal de f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}}_2 = \underline{V}_{AB}$  en opposition, c'est-à-dire créant entre  $A$  et  $B$  la même d.d.p.  $\underline{V}_{AB}$  (Fig. 5.8b). Il est évident que l'intensité de courant dans le circuit (2), ainsi branché, est nulle et que la d.d.p. entre  $A$  et  $B$  reste  $\underline{V}_{AB}$ . Invertissons maintenant le générateur du circuit (2) et supprimons toutes les f.é.m. du circuit (1) en maintenant leurs impédances internes, pour avoir un circuit (1) passif (Fig. 5.8c). L'intensité débitée par  $\underline{\mathcal{E}}_2$  est alors  $\underline{I}_{AB} = \underline{\mathcal{E}}_2 / (\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_2)$ .

Faisons maintenant la superposition des deux circuits (5.8b) et (5.8c), nous trouvons le circuit de la Fig. 5.8d, avec le circuit (1) possédant toutes ses f.é.m. et le circuit (2) sans la f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}}_2$  mais avec l'impédance  $\underline{Z}_2$ . D'après le principe de superposition, la nouvelle intensité de courant dans le circuit (2) est la superposition des intensités des circuits (b) et (c). Nous trouvons donc

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{V}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_2},$$

exactement comme si nous avions un générateur de f.é.m. de Thévenin  $\mathcal{E}_{Th} = \underline{V}_{AB}$  et d'impédance interne  $\underline{Z}_{AB}$ .

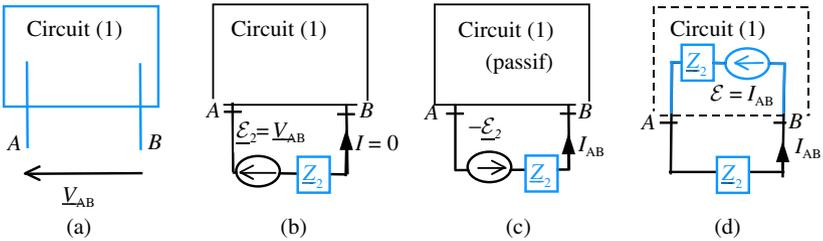


Figure 5-8 Théorème de Thévenin.

Tout générateur peut être considéré comme une source de tension  $\underline{\mathcal{E}}$  ou une source de courant  $\underline{I}$  (telle que  $\mathcal{E} = I r$ ). Nous en déduisons le **théorème de Norton** :

Si un circuit (2) est branché entre deux points A et B d'un circuit (1), les d.d.p. et les intensités dans le circuit (2) sont les mêmes que si le circuit (1) était remplacé par une source de courant d'intensité  $\underline{I}_{Nor}$  égale à l'intensité débitée par le circuit (1) s'il était court-circuité entre A et B et d'impédance passive  $\underline{Z}_{AB}$  égale à l'impédance équivalente du circuit (1) entre A et B.

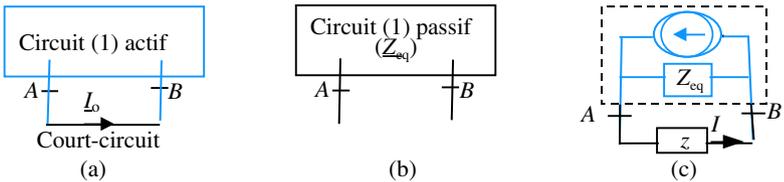


Figure 5-9 Théorème de Norton **a)** Intensité de court-circuit, **b)** le circuit passif et  $\underline{Z}_{eq}$  vue de A et B et **c)** Le circuit (1) débitant dans un autre circuit est équivalent à une source de courant  $\underline{I} = -\underline{I}_0$  et de résistance interne  $\underline{Z}_{eq}$ .

Appliquons les théorèmes de Thévenin et de Norton pour déterminer l'intensité de courant  $I_1$  dans le circuit de la Fig. 5.5. Débranchons par la pensée la branche ADCB, qui transporte ce courant. Le circuit ouvert (1) restant (Fig. 5.10a) peut être considéré comme une source de Thévenin de f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}}_{Th} = \underline{V}'_{AB}$  et d'impédance interne  $\underline{Z}_{AB}$  égale à

l'impédance équivalente à  $\underline{Z}_2$  et  $\underline{Z}_3$  montées en parallèle (Fig. 5.10b), soit  $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$ . L'intensité dans cette maille est

$$\underline{I}' = (\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2) / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$$

La d.d.p. entre  $A$  et  $B$  est alors

$$\underline{V}'_{AB} = \underline{Z}_3 \underline{I}' - \mathcal{E}_3 = -(\mathcal{E}_3 \underline{Z}_2 - \mathcal{E}_2 \underline{Z}_3) / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$$

Utilisant le théorème de Thévenin, si on branche le tronçon (2) entre  $A$  et  $B$ , l'intensité  $\underline{I}_1$  est la même que celle du circuit 5.10c, soit

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}'_{AB} + \mathcal{E}_1}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_1} = \frac{1}{\Delta} [\mathcal{E}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \mathcal{E}_2 \underline{Z}_3 - \mathcal{E}_3 \underline{Z}_2]$$

où  $\Delta = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$

Nous retrouvons donc le même résultat (5.31).

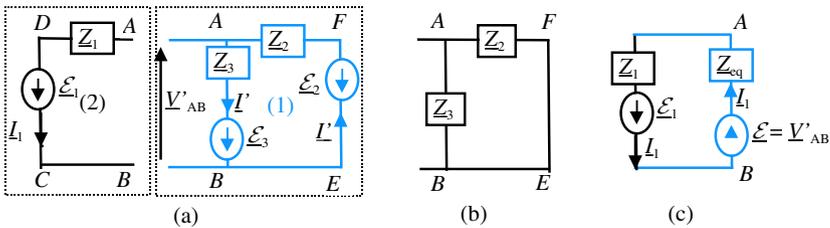


Figure 5-10 Utilisation du théorème de Thévenin.

Pour utiliser le théorème de Norton, nous séparons par la pensée la branche  $DC$ , qui transporte le courant  $\underline{I}_1$  à déterminer. Le reste du circuit peut être considéré comme une source de Norton d'intensité  $\underline{I}$  égale au courant de court-circuit entre  $N$  et  $M$  (Fig. 5.11a) et d'impédance interne égale à l'impédance équivalente  $\underline{Z}_{NM} = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$  du circuit passif vu des points  $M$  et  $N$  (Fig. 5.11b). Dans le circuit court-circuité (Fig. 5.11a), considérant les mailles  $ABMN$  et  $FEMN$ , nous trouvons les intensités  $\underline{I}_{AB} = \mathcal{E}_3 / \underline{Z}_3$  et  $\underline{I}_{FE} = \mathcal{E}_2 / \underline{Z}_2$  d'où  $\underline{I} = \underline{I}_{NM} = -\mathcal{E}_3 / \underline{Z}_3 - \mathcal{E}_2 / \underline{Z}_2$ . Le circuit initial de la Fig. 5.5 est donc équivalent au circuit de la Fig. 5.11c. L'intensité dans  $BA$  est  $\underline{I}_{BA} = \underline{I}_1 - \underline{I}$ . La loi des mailles pour  $ABCD$  donne  $\mathcal{E}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{NM} (\underline{I}_1 - \underline{I})$ . Nous en déduisons le résultat (5.31) pour  $\underline{I}_1$ .

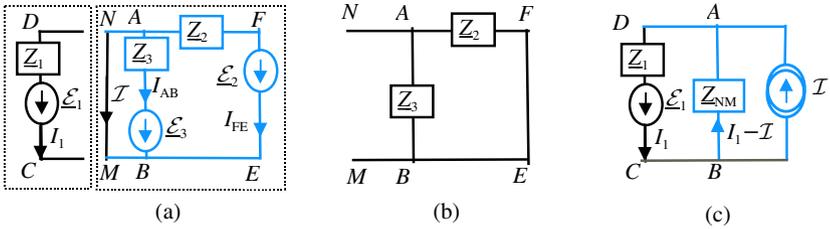


Figure 5-11 Utilisation du théorème de Norton.

## 5.8 COURANTS DE MAILLES ET RÉCIPROCITÉ

Pour analyser un circuit on peut utiliser ce qu'on appelle *courants des mailles*. Considérons, par exemple, le circuit de la figure 5.12 qui a trois mailles indépendantes. Orientons ces mailles dans le même sens et associons à chaque maille ( $m$ ) (où  $m = 1, 2, 3$ ) un « courant de maille » d'intensité  $i^{(m)}$ . L'intensité dans une branche de la maille ( $m$ ), qui n'est pas commune avec d'autres mailles, est alors  $i^{(m)}$ . Dans la branche commune aux mailles  $m$  et  $m'$ , l'intensité est la différence des intensités  $i^{(m)}$  et  $i^{(m')}$ . Écrivant la règle de Kirchhoff pour les trois mailles, nous trouvons les équations

$$\underline{Z}_1 \underline{i}^{(1)} - \mathcal{E}_1 + \underline{Z}_4 [\underline{i}^{(1)} - \underline{i}^{(3)}] + \mathcal{E}_3 + \underline{Z}_5 [\underline{i}^{(1)} - \underline{i}^{(2)}] = 0,$$

$$\underline{Z}_3 \underline{i}_3 - \underline{Z}_4 [\underline{i}^{(1)} - \underline{i}^{(3)}] + \mathcal{E}_3 = 0, \quad \underline{Z}_2 \underline{i}^{(2)} - \mathcal{E}_2 - \underline{Z}_5 [\underline{i}^{(1)} - \underline{i}^{(2)}] = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) \underline{i}^{(1)} - \underline{Z}_5 \underline{i}^{(2)} - \underline{Z}_4 \underline{i}^{(3)} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3,$$

$$-\underline{Z}_5 \underline{i}^{(1)} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) \underline{i}^{(2)} = \mathcal{E}_2,$$

$$-\underline{Z}_4 \underline{i}^{(1)} + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \underline{i}^{(3)} = \mathcal{E}_3 \quad (5.35)$$

Dans l'équation de la maille ( $m$ ), nous remarquons que le coefficient de l'intensité  $\underline{i}^{(m)}$  de cette maille est la somme des impédances de cette maille tandis que le coefficient de l'intensité  $\underline{i}^{(i)}$  ( $i \neq m$ ) est égal à l'opposé de l'impédance de la branche commune aux mailles ( $m$ ) et ( $i$ ). Au second membre de l'équation de la maille ( $m$ ) nous trouvons les f.é.m. de cette maille avec un signe (+) si la f.é.m. produit un courant

dans le même sens que  $i^{(m)}$  et un signe (-) si elle produit un courant de sens opposé. Ce qui est remarquable dans ces équations est que la matrice  $[M]$  des coefficients est symétrique.

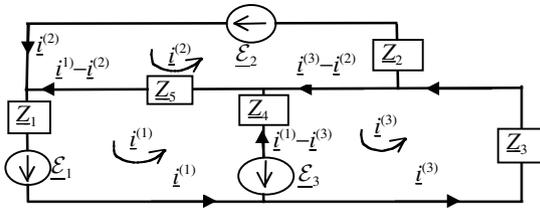


Figure 5-12

Dans le cas d'une seule f.é.m. dans la maille (1) ( $\underline{\mathcal{E}}_1 = \underline{\mathcal{E}}$  et  $\underline{\mathcal{E}}_2 = \underline{\mathcal{E}}_3 = 0$ ), la solution s'écrit

$$\underline{i}^{(1)} = \underline{\mathcal{E}}\underline{\mu}_{11}/\det[\underline{M}], \quad \underline{i}^{(2)} = -\underline{\mathcal{E}}\underline{\mu}_{12}/\det[\underline{M}] \quad \text{et} \quad \underline{i}^{(3)} = \underline{\mathcal{E}}\underline{\mu}_{13}/\det[\underline{M}], \tag{5.36}$$

où  $\underline{\mu}_{ij}$  est le mineur de l'élément  $\underline{M}_{ij}$  dans la matrice des coefficients (c'est-à-dire le déterminant obtenu en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ ). Supposons maintenant que la même f.é.m. soit placée dans la maille (2) ( $\underline{\mathcal{E}}_2 = \underline{\mathcal{E}}$  et  $\underline{\mathcal{E}}_1 = \underline{\mathcal{E}}_3 = 0$ ) ; la solution s'écrit

$$\underline{i}'_1 = -\underline{\mathcal{E}}\underline{\mu}_{21}/\det[\underline{M}], \quad \underline{i}'_2 = \underline{\mathcal{E}}\underline{\mu}_{22}/\det[\underline{M}] \quad \text{et} \quad \underline{i}'_3 = -\underline{\mathcal{E}}\underline{\mu}_{23}/\det[\underline{M}], \tag{5.37}$$

Puisque la matrice  $[M]$  est symétrique, les mineurs  $\underline{\mu}_{12}$  et  $\underline{\mu}_{21}$  sont égaux, donc  $\underline{i}_2 = \underline{i}'_1$ . Nous obtenons ainsi la règle de réciprocité suivante :

Si une f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}}$ , placée dans la branche  $j$  d'un circuit, produit une intensité de courant  $\underline{i}_k$  dans une branche  $k$ , la même f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}}$ , placée dans la branche  $k$ , produit dans la branche  $j$  la même intensité ( $\underline{i}'_j = \underline{i}_k$ ).

Notons que la f.é.m. doit être placée dans le même sens dans l'une ou l'autre des deux branches et les intensités sont algébriques dans les sens choisis pour les mailles.



On peut définir la f.é.m.  $\underline{e}_m$  de la maille ( $m$ ) comme la somme des f.é.m. de cette maille, chacune affectée du signe (+) si elle tend à produire un courant dans le sens choisi pour la maille et du signe (-) dans le cas contraire. On peut alors grouper les  $n$  intensités  $\underline{i}_i$  dans une matrice colonne  $\underline{\mathbf{I}}$  et les  $n$  f.é.m. de mailles  $\underline{e}_m$  en une matrice colonne  $\underline{\mathbf{e}}$ . Les  $n$  équations du circuit prennent alors la forme matricielle

$$[\underline{M}]\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{e}} \text{ où } \underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ et } [\underline{M}] = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

## 5.9 DUALITÉ

Considérons un circuit RLC série alimenté par une source de tension  $\underline{\mathcal{E}}$  et un circuit formé par une résistance  $R'$ , un condensateur de capacité  $C'$  et une self-inductance  $L'$  montées en parallèle et alimentés par une source de courant  $\underline{\mathcal{I}'}$  (Figures 5.13 a et b respectivement). L'équation du premier circuit pour  $\underline{I}$  et du second pour  $\underline{V}' \equiv \underline{V}(A_1)$  sont

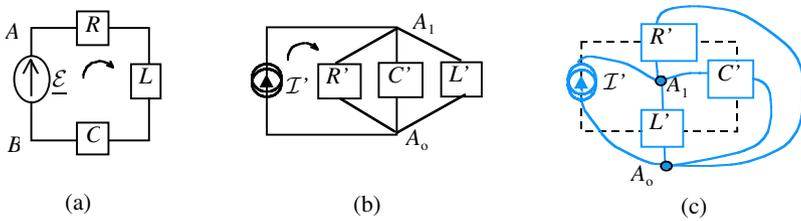
$$L\underline{\dot{I}} + R\underline{I} + (1/C) \int_0^t dt \underline{I} = \underline{\mathcal{E}}(t) - \underline{\mathcal{E}}(0) \quad (5.39)$$

$$C'\underline{\dot{V}'} + (1/R')\underline{V}' + (1/L') \int_0^t dt \underline{V}' = \underline{\mathcal{I}'}(t) - \underline{\mathcal{I}'}(0) \quad (5.40)$$

On voit que l'une de ces équations se transforme en l'autre en changeant  $\underline{I}$  en  $\underline{V}'$ ,  $L$  en  $C'$ ,  $C$  en  $L'$ ,  $R$  en  $G' = 1/R'$  ( $G$  étant la conductance) ou inversement ; ce qui correspond à changer une impédance complexe en admittance (inverse d'une impédance) et à changer  $\underline{\mathcal{E}}(t)$  en  $\underline{\mathcal{I}'}(t)$  et inversement. On dit que l'un des circuits est le *dual* de l'autre.

Cette *dualité* peut être généralisée aux circuits complexes et elle peut être utile dans l'analyse de certains circuits. Le circuit et son dual ont des topologies différentes : les dipôles en série de l'un correspondent à des dipôles en parallèle de l'autre, les mailles de l'un correspondent à des nœuds de l'autre (mais avec un nœud supplémentaire) et le circuit ouvert de l'un correspondent à un court-circuit de l'autre.

La figure 5.13c illustre comment déterminer le dual (b) d'un circuit (a) simple. Cette construction peut être généralisée aux circuits (a) complexes de la façon suivante : On commence par réduire les impédances et les sources dans chaque branche de (a) à un seul dipôle équivalent. On place un point  $A_i$  à l'intérieur de chaque maille indépendante ( $i$ ) du circuit (a) et un point supplémentaire  $A_0$  à l'extérieur. Ces points seront les nœuds du circuit dual (b). On joint les paires de nœuds ( $i$ ) et ( $j$ ) en passant



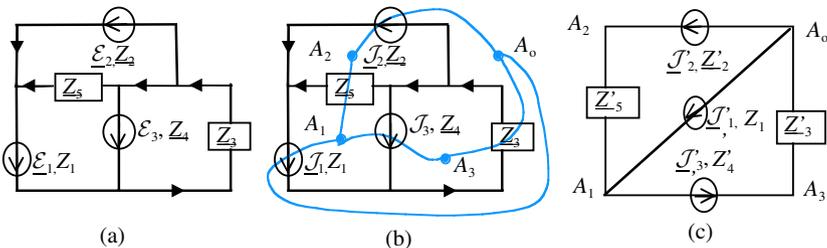
**Figure 5-13** **a)** Circuit RLC série, **b)** son dual et **c)** détermination du circuit (b) dual du circuit (a)

par le dipôle du circuit (a) qui est commun aux mailles (*i*) et (*j*) correspondantes. On joint le nœud  $A_0$  aux autres nœuds  $A_j$  en passant par le dipôle  $Z_j$  si celui-ci n'est pas commun à la maille (*j*) et une autre. Puis on remplace chaque dipôle par son dual.

Comme application, considérons le circuit de la figure 5.12 comprenant trois mailles indépendantes. Associant les impédances et les sources de chacune des branches en un seul dipôle, on obtient le circuit de la figure 5.14a. Plaçons des points  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$  comme dans la figure 5.14b et joignons-les ; nous obtenons le circuit de la figure 5.14c, où les  $\underline{Z}'_p$  sont les duales des  $\underline{Z}_p$ . Supposons que  $V = 0$  en  $A_0$  et désignons par  $V'_1, V'_2$  et  $V'_3$  les potentiels en  $A_1, A_2$  et  $A_3$ . Remplaçant les sources de courant par les sources de tension équivalentes, nous trouvons les équations des nœuds de ce circuit :

$$\begin{aligned}
 -V'_1/\underline{Z}'_5 + \underline{V}'_2(1/\underline{Z}'_2 + 1/\underline{Z}'_5) &= \mathcal{J}'_2 \\
 -\underline{V}'_1/\underline{Z}'_4 + \underline{V}'_3(1/\underline{Z}'_3 + 1/\underline{Z}'_4) &= \mathcal{J}'_3 \\
 \underline{V}'_1/\underline{Z}'_1 + \underline{V}'_2/\underline{Z}'_2 + \underline{V}'_3/\underline{Z}'_3 &= \mathcal{J}'_1 + \mathcal{J}'_2 \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

Ces équations sont semblables aux équations (5.35) ou à leurs combinaisons linéaires.



**Figure 5-14** **a)** Le circuit de la figure 5.12, **b)** détermination de son dual et **c)** le graphe du circuit idéal.



## POINTS-CLÉS

- La recherche de la solution pour un oscillateur forcé en utilisant les fonctions trigonométriques est longue, la méthode de la représentation de Fresnel est rapide dans certains cas. La méthode des fonctions complexes est conseillée, surtout pour analyser les circuits électriques complexes.
- La pulsation de résonance dépend de la façon dont on la définit. L'amplitude de l'intensité du courant et la puissance moyenne fournie par le générateur ont des maximums pour une pulsation d'excitation  $\Omega = \omega_0$ . Par contre l'amplitude de la charge du condensateur a un maximum pour  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ . Pour  $\Omega = \omega_0$ , l'impédance du circuit est égale à  $R$  et l'intensité du courant est en phase avec la f.é.m.
- La réponse d'un circuit à une f.é.m.  $\mathcal{E}$  quelconque peut être étudiée en faisant l'analyse de Fourier de cette f.é.m. La réponse est alors la somme des oscillations produites par les forces harmoniques qui constituent la f.é.m.  $\mathcal{E}$  ; les plus importantes sont celles qui sont proches de la pulsation propre de l'oscillateur.
- Pour analyser un circuit, commencez par le simplifier en remplaçant les impédances  $\underline{Z}_k$  en série par l'impédance équivalente ( $\underline{Z}_{\text{eq}} = \Sigma \underline{Z}_k$ ) et les impédances  $\underline{Z}_k$  en parallèle par l'impédance équivalente ( $\underline{Y}_{\text{eq}} = \Sigma \underline{Y}_k$  où  $\underline{Y}_{\text{eq}} = 1/\underline{Z}_{\text{eq}}$  et  $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$  sont les admittances). Certaines impédances peuvent être ni en série ni en parallèle. Choisissez ensuite des mailles indépendantes en profitant des symétries, s'il y en a ; elles vous permettent de contrôler les résultats. Appliquez ensuite les règles de Kirchhoff par l'une des méthodes, que nous avons discutées, pour avoir les équations des intensités ou des potentiels. Les théorèmes de Thévenin et de Norton peuvent parfois être utiles. Si vous pouvez établir que deux nœuds sont au même potentiel, une branche qui les connecte ne transporte aucun courant. Il n'y a aucun courant dans une branche qui n'aboutit pas à un nœud. Vérifier les résultats en considérant des limites  $Z \rightarrow 0$  ou  $Z \rightarrow \infty$ . Cette dernière limite est équivalente à la suppression de la branche d'impédance  $Z$ .
- Si un circuit comporte  $n$  nœuds, le nombre de potentiels de nœuds à déterminer est  $n - 1$ , car le potentiel est défini à une constante additive près. On peut affecter un potentiel 0 à un point particulier du circuit ; d'habitude pris à la masse ou au pôle négatif de l'un des générateurs dans le circuit.

- Une source de tension idéale impose une d.d.p. déterminée à ses bornes, quels que soient les dipôles montés en parallèle. C'est, par exemple, le cas de l'électricité domestique : si vous branchez un appareil à la prise de courant, la tension efficace est 220 V et vous pouvez calculer le courant débité en oubliant tous les autres appareils (qui sont tous branchés en parallèle). De même, une source de courant idéale impose le courant qu'elle débite, quels que soient les dipôles montés en série avec elle.

## QUESTIONS DE RÉFLEXION

1. Tracez le diagramme de Fresnel pour l'impédance d'un circuit LCR série alimenté par une f.é.m. de pulsation  $\Omega$ . Déduisez la phase  $\phi_z$  et l'impédance réelle. Tracez ce diagramme à la résonance même. Pouvez-vous utiliser le diagramme de Fresnel pour déterminer l'intensité débitée par un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t)$  dans une résistance  $R$ , une self-inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$  montés en parallèle ?
2. Utilisant la représentation de Fresnel dans le cas d'un circuit LCR série branché sur un générateur de f.é.m. sinusoïdale  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t)$ , la d.d.p. aux bornes de la résistance peut-elle être en phase avec la f.é.m. ? Cette d.d.p. peut-elle avoir un module plus grand que  $\mathcal{E}_m$  ? Les d.d.p. aux bornes de la self-inductance et du condensateur peuvent-elles avoir un module plus grand que  $\mathcal{E}_m$  ?
3. Discutez les variations de l'amplitude et de la phase de l'intensité dans un circuit RLC alimenté par un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t)$ , si on fait varier la résistance.
4. Vérifiez que le facteur de qualité est égal au rapport  $Q_{\max}/Q_{\text{st}}$ , où  $Q_{\max}$  est l'amplitude à la résonance et  $Q_{\text{st}}$  est l'amplitude à basse fréquence.
5. Montrez que, si l'on fait varier la pulsation propre  $\omega_0$  d'un circuit RLC forcé, l'amplitude de la charge du condensateur a un maximum pour  $\omega_0 = \Omega$ . Pour capter une émission radio, on modifie la capacité  $C$  d'un circuit RLC pour que sa fréquence propre devienne égale à celle de l'onde. Expliquez cet effet. Pour éviter l'interférence des autres émissions, faut-il que la résistance du circuit soit grande ou faible ?
6. Est-ce que la puissance instantanée fournie par le générateur à un oscillateur est toujours positive ? Nous avons trouvé que la valeur

moyenne de l'énergie totale emmagasinée dans un circuit soumis à une f.é.m. harmonique est constante dans le temps. Est-ce que ce résultat est raisonnable ? Est-ce qu'il est valable si la f.é.m. est périodique mais non harmonique ? Est-ce qu'il est valable pendant le régime transitoire ?

**7.** Écrivez le théorème de Millman dans le cas de deux branches qui se rencontrent en un point (formant ainsi une seule branche). Que devient ce théorème si les points  $A_1, A_2, \dots$  sont confondus ? Y a-t-il une relation de ce théorème au principe de superposition ?

**8.** Énoncez les théorèmes de Thévenin et de Norton, sont-ils équivalents ? Appliquez ces théorèmes à des générateurs montés en série et des générateurs montés en parallèle.

## EXERCICES CORRIGÉS

**5-1** On monte en série une bobine de self-inductance  $L$  et de résistance interne  $R$  et un condensateur de capacité  $C$  et on les branche sur une tension  $V = V_m \cos(\omega t)$ .

**a)** Écrivez l'équation de l'intensité. Tracez le diagramme de Fresnel pour ce circuit et en déduire l'expression de l'intensité  $I$  et des d.d.p.  $V_C$  et  $V_b$  aux bornes du condensateur et de la bobine.

**b)** Retrouvez ces résultats à l'aide de l'analyse complexe.

**c)** Supposant que  $L = 5 \text{ H}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $V_m = 20 \text{ V}$  et une fréquence de 50 Hz, calculez l'impédance du circuit et écrivez les expressions de  $I$ ,  $V_C$  et  $V_b$ .

**d)** Quel est le facteur de puissance ? Quelle est la puissance moyenne fournie par le générateur ?

**5-2** On considère le circuit de la Fig. 5.15 où un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\Omega t)$  est branché sur un condensateur  $C$  monté en parallèle avec une bobine de résistance  $R$  et de self-inductance  $L$ .

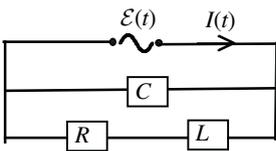


Figure 5-15

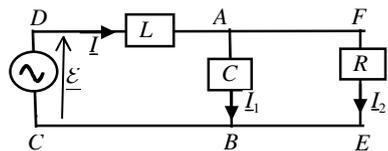
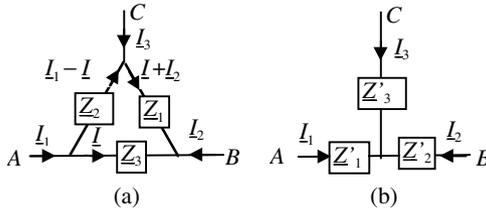


Figure 5-16

Calculez l'intensité et la puissance moyenne débitées par le générateur. Supposant que  $R$  est faible, montrez que l'intensité passe par un minimum (*antirésonance*) pour une pulsation d'excitation proche de  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

**5-3** On branche le circuit de la Fig. 5.16 sur un générateur de 220 V et 50 Hz. Sachant que  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0,5 \mu\text{F}$  et  $L = 5 \text{ H}$ , calculez les amplitudes de  $I_1$  et  $I_2$  et leurs déphasages comparés à  $\mathcal{E}$ . Calculez l'intensité débitée par le générateur. Calculez la puissance moyenne fournie par le générateur et celle qui est dissipée dans la résistance.



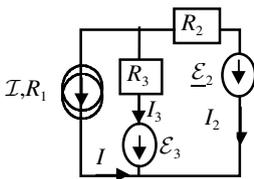
**Figure 5-17** Équivalence d'une maille triangulaire et un nœud.

**5-4** On considère une maille triangulaire (figure 5.17a). Écrivez les expressions des impédances de la figure 5.17b pour que les deux circuits soient équivalents, c'est-à-dire  $I_1, I_2, I_3, V_1, V_2$  et  $V_3$  dans le circuit (b) sont les mêmes que dans le circuit (a)

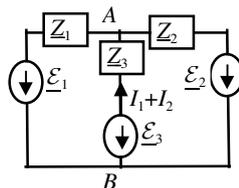
**5-5** Supposons que dans un circuit (1), deux points  $A$  et  $B$  ont une d.d.p.  $V_{AB}$  et l'impédance passive vue de ces deux points est  $Z_{AB} = R_{AB} + jX_{AB}$ . Déterminez la puissance moyenne transférée à un circuit passif (2) d'impédance  $Z_2 = R_2 + jX_2$  branché entre  $A$  et  $B$ . Pour quelles valeurs de  $Z_2$  ce transfert est-il maximal ?

**5-6** Établissez directement le théorème de Norton en utilisant le principe de superposition.

**5-7** Calculez les intensités dans les diverses branches du circuit de la fig. 5.18, comportant une source de courant et deux sources de tension.



**Figure 5-18**



**Figure 5-19**

**5-8** Déterminez l'intensité dans la branche  $AB$  du circuit de la Fig. 5.19 en utilisant l'analogie source de tension et source de courant.

**5-9** Vérifiez que, si l'on échange la f.é.m. et l'ampèremètre dans le circuit de la Fig. 5.20, la lecture de celui-ci reste la même. Cette propriété de réciprocité est valable pour tout circuit contenant une seule f.é.m.

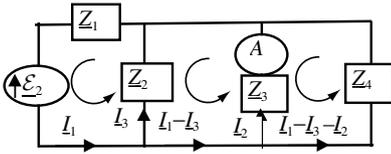


Figure 5-20

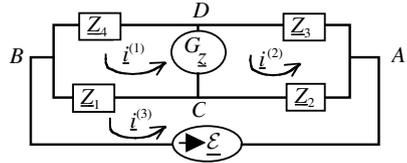


Figure 5-21

**5-10 Pont de Wheatstone :** Le pont de Wheatstone, illustré dans la figure (5.21), permet de comparer les impédances. L'élément  $G$  a une impédance  $z$  ; il est habituellement un galvanomètre sensible.

- Utilisant les courants des mailles, déterminer l'intensité dans  $G$ . En déduire la condition pour que l'intensité dans  $G$  soit nulle.
- Retrouvez le résultat précédent en utilisant le théorème de Thévenin.
- Retrouvez le résultat précédent en utilisant le théorème de Norton.

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**5-1 a)** L'équation du circuit  $LCR$  série (figure 5.22a) est

$$L\dot{I} + RI + (1/C) \int dt I = V.$$

Écrivant  $I = I_m \cos(\omega t - \phi)$ , la représentation de Fresnel est illustrée dans la figure 5.22b. Nous en déduisons que  $V_m^2 = RI_m^2 + (L\omega I_m - I_m/C\omega)^2$  ; alors l'amplitude de l'intensité et son retard de phase sur la tension sont

$$I_m = V_m/Z \quad \text{où} \quad Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

$$\text{et} \quad \phi = \text{Arctan}[(L\omega - 1/C\omega)/R]$$

$Z$  est l'impédance du circuit. Les d.d.p.  $V_C$  et  $V_b$  aux bornes du condensateur et de la bobine sont représentées par les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  de longueur

$I_m/C\omega$  et en retard de  $\pi/2$  sur  $I$  et  $\vec{OP}$  de longueur  $I_m\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$  et en avance de  $\phi_b = \text{Arctan}(L\omega/R)$  sur  $I$  ( $0 < \phi_b < \pi/2$ ). Nous avons donc

$$V_C = (I_m/C\omega)\cos(\omega t - \phi - \pi/2)$$

$$\text{et } V_b = I_m\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cos(\omega t - \phi + \phi_b)$$

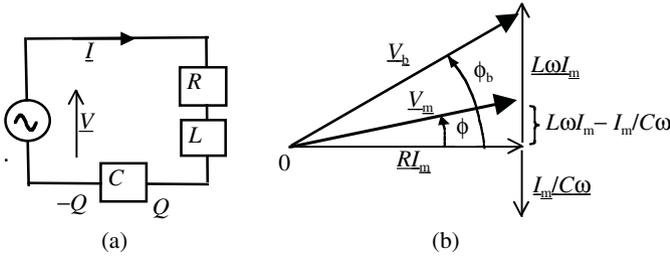


Figure 5-22

**b)** Supposons que la tension est complexe  $\underline{V} = V_m e^{j\omega t}$  et l'intensité est  $\underline{I} = I_m e^{j\omega t}$ . L'équation du circuit donne

$$[j\omega L + R - j/C\omega]I_m = V_m \implies I_m = V_m/\underline{Z},$$

$$\text{où } \underline{Z} = R + j(L\omega - 1/C\omega) \equiv Z e^{j\phi}$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

$$\text{et } \phi = \text{phase}(\underline{Z}) = \text{Arctan}[(L\omega - 1/C\omega)/R].$$

L'intensité est donc

$$\underline{I} = \underline{V}_m/\underline{Z} e^{j\omega t} = (V_m/Z) e^{j(\omega t - \phi)} \implies I = (V_m/Z) \cos(\omega t - \phi)$$

$\underline{Z}$  est l'impédance complexe totale du circuit. Les impédances complexes aux bornes du condensateur et de la bobine sont respectivement

$$\underline{Z}_C = 1/jC\omega = (1/C\omega) e^{-j\pi/2}$$

$$\text{et } \underline{Z}_b = R + jL\omega = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} e^{j\phi_b}$$

où  $\phi_b = \text{Arctan}(L\omega/R)$ . Les d.d.p. aux bornes du condensateur et de la bobine sont respectivement

$$\underline{V}_C = \underline{Z}_C \underline{I} = (I/C\omega) e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)} \implies V_C = (I/C\omega) \cos(\omega t - \phi - \pi/2)$$

$$V_b = Z_b I = I_m \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} e^{j(\omega t - \phi + \phi_b)}$$

$$\implies V_b = I_m \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \cos(\omega t - \phi + \phi_b).$$

c) Utilisant les données numériques, nous trouvons  $\omega = 100 \pi$  et

$$Z = \sqrt{100^2 + (5 \times 100 \pi - 1/1 \times 10^{-6} \times 100 \pi)^2} = 1615 \Omega$$

$$\tan \phi = -16,123 \implies \phi = -1,509 \text{ rad}$$

$$\tan \phi_b = L\omega/R = 15,71 \implies \phi_b = 1,507 \text{ rad}$$

$$I_m = 20/1615 = 12,38 \text{ mA} \implies I = 12,38 \cos(100\pi t + 1,509) \text{ mA}$$

Les d.d.p. aux bornes du condensateur et de la bobine sont

$$V_C = [12,38 \times 10^{-3} / 1 \times 10^{-6} \times 100 \pi] \cos(100\pi t + 1,509 - \pi/2)$$

$$= 39,41 \cos(100\pi t - 0,06195) \text{ volts}$$

$$V_b = 12,38 \times 10^{-3} \sqrt{100^2 + 5^2 \times 100^2 \pi^2}$$

$$\cos(\omega t + 1,509 + 1,507)$$

$$= 19,49 \cos(100\pi t + 3,016) \text{ volts}$$

d) Le facteur de puissance est  $\cos \phi = 0,0619$

• La puissance instantanée fournie par le générateur est

$$P = VI = V_m I_m \cos(\omega t) [\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi]$$

La puissance moyenne sur une période est

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi = \frac{1}{2} \times 20 \times 12,381 \times 10^{-3} \times 0,0619$$

$$= 7,66 \times 10^{-3} \text{ W}$$

**5-2** L'impédance du condensateur est  $Z_c = 1/jC\Omega$  et celle de la bobine est  $Z_{RL} = R + j\Omega L$ . L'impédance équivalente des deux branches est donnée par la relation

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_{J,R}} = jC\Omega + \frac{1}{R + j\Omega L} \implies Z = \frac{R + j\Omega L}{1 - LC\Omega^2 + jRC\Omega}$$

L'impédance réelle équivalente est

$$Z = |Z| = \sqrt{\frac{R^2 + L^2 \Omega^2}{(1 - LC\Omega^2)^2 + (RC\Omega)^2}}$$

L'amplitude complexe de l'intensité de courant est

$$I_m = \frac{\underline{\mathcal{E}}_m}{Z} = \underline{\mathcal{E}}_m \frac{1 - LC\Omega^2 + jRC\Omega}{R + jL\Omega} = \underline{\mathcal{E}}_m \frac{R + j\Omega(L^2 C \Omega^2 + R^2 C - L)}{R^2 + L^2 \Omega^2}$$

On peut l'écrire aussi sous la forme  $\underline{I}_m = I_m e^{-j\phi_z}$ . Posant  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  et  $\delta = R/2L$ , l'amplitude et la phase de  $\underline{I}_m$  s'écrivent

$$I_m = \mathcal{E}_m C \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}{\Omega^2 + 4\delta^2}}, \quad \phi_z = \text{Arctan}\left(\frac{\Omega}{2\delta\omega_0^2}(\omega_0^2 - \Omega^2 - 4\delta^2)\right)$$

Le facteur de puissance est  $\cos \phi_z = R/\sqrt{R^2 + \Omega^2(L^2 C \Omega^2 + R^2 C - L)^2}$ . La puissance moyenne débitée par le générateur est

$$\langle P_{\text{(ex)}} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{E}_m I_m \cos \phi_z = \frac{1}{2} \frac{R \mathcal{E}_m^2}{R^2 + L^2 \Omega^2}$$

L'intensité a un minimum si  $Z^2$  a un maximum ; pour cela il faut que  $\frac{\partial Z^2}{\partial \Omega^2} = \frac{-L^2 C^2 \Omega^4 - 2L^2 C^2 R^2 \Omega^2 + L^2 + 2LCR^2 - R^4 C^2}{[(1 - LC\Omega^2)^2 + (RC\Omega)^2]} = 0$  c'est-à-dire  $\Omega^2 = \omega_0^2[(1 + 2CR^2/L)^{1/2} - R^2 C/L] \approx \omega_0^2$ . Alors  $Z_{\text{max}} = L/CR = f_q^2 R$  où  $f_q$  est le facteur de qualité du circuit. L'amplitude de l'intensité est alors minimale  $I_{m, \text{min}} = \mathcal{E}_m/Z = \mathcal{E}_m CR/L$  et sa phase  $\phi_z$  est nulle. Les oscillations dans le circuit LCR sont maintenues avec un courant  $I$  très faible. La figure 5.23 illustre la variation de  $I_m$  en fonction de  $\Omega/\omega_0$ . Nous avons là une antirésonance dans un circuit bouchon.

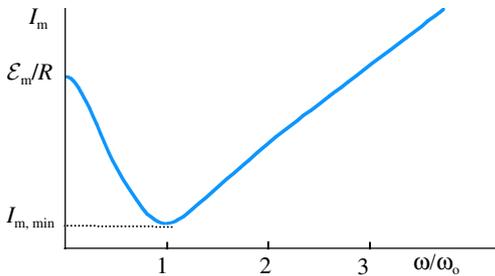


Figure 5-23 Antirésonance

**5-3** Soient  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  les intensités dans le condensateur et la résistance respectivement. L'intensité débitée par le générateur est  $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ . La règle des mailles appliquée à  $DABC$  et  $AFEB$  donne

$$\underline{Z}_L(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + \underline{Z}_C \underline{I}_1 = \underline{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C \underline{I}_1 - R \underline{I}_2 = 0$$

Nous en déduisons que

$$\underline{I}_1 = \underline{\mathcal{E}} R / \Delta \quad \text{et} \quad \underline{I}_2 = \underline{\mathcal{E}} \underline{Z}_C \Delta = \underline{\mathcal{E}} / j C \omega \Delta$$

$$\begin{aligned}\text{où } \Delta &= R(\underline{Z}_L + \underline{Z}_C) + \underline{Z}_C \underline{Z}_L = L/C + jR(L\omega - 1/C\omega) \\ &= (1 - 4,7954j) \times 10^7 = 4,8986 \times 10^7 e^{j\phi_\Delta}\end{aligned}$$

$$\text{avec } \phi_\Delta = -\text{Arctan } 4,7954 = -1,3652 \text{ rad.}$$

Les amplitudes et les phases de ces courants sont (en prenant la phase de  $\underline{\mathcal{E}}$  nulle)

$$I_1 = 220\sqrt{2} \times 10^4 / 4,899 \times 10^7 = 63,513 \text{ mA,}$$

$$\phi_1 = \text{phase}(\underline{\mathcal{E}}R/\Delta) = -\phi_\Delta = 1,3652 \text{ rad}$$

$$I_2 = 220\sqrt{2}/0,5 \times 10^{-6} \times 100\pi \times 4,8986 \times 10^7 = 40,434 \text{ mA,}$$

$$\phi_2 = \text{phase}(\underline{\mathcal{E}}\underline{Z}_C/\Delta) = -\pi/2 - \phi_\Delta = -0,2056 \text{ rad}$$

L'intensité débitée par le générateur est

$$\begin{aligned}\underline{I} &= I_1 e^{j\phi_1} + I_2 e^{j\phi_2} = (I_1 \cos \phi_1 + I_2 \cos \phi_2) \\ &\quad + j(I_1 \sin \phi_1 + I_2 \sin \phi_2) = 52,549 + 53,921 j \text{ (en mA)} = I e^{j\phi}\end{aligned}$$

$$I = 75,292 \text{ mA} \text{ et } \phi = \text{Arctan } 53,921/52,549 = 0,7983 \text{ rad}$$

Nous trouvons le même résultat en évaluant l'impédance du circuit

$$\begin{aligned}\underline{Z}_T &= \underline{Z}_L + \frac{R\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} \\ &= \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{1 + jRC\omega} = Z e^{j\phi_Z},\end{aligned}$$

$$\text{où } Z = 4,1322 \times 10^3 \Omega \text{ et } \phi_Z = -0,7983 \text{ rad}$$

$$\text{Nous avons alors } I = \underline{\mathcal{E}}/\underline{Z} = I e^{j\phi}, \text{ où } I = \mathcal{E}/Z = 75,293 \text{ mA}$$

$$\text{et } \phi = \text{phase } \underline{\mathcal{E}} - \text{phase } \underline{Z} = -\phi_Z = 0,7983 \text{ rad}$$

**5-4** La loi des nœuds exige que  $I_3 = -I_1 - I_2$ . Choisissons les courants dans la maille comme dans la figure 5.17a. Les courants externes et les d.d.p. dans les deux circuits sont les mêmes si

$$\begin{aligned}\underline{V}_A - \underline{V}_B &= \underline{I} \underline{Z}_3 = \underline{I}_1 \underline{Z}'_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}'_2, \\ \underline{V}_A - \underline{V}_C &= (\underline{I}_1 - \underline{I}) \underline{Z}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}'_1 + (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \underline{Z}'_3, \\ \underline{V}_B - \underline{V}_C &= (\underline{I} + \underline{I}_2) \underline{Z}_1 = \underline{I}_2 \underline{Z}'_2 + (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \underline{Z}'_3\end{aligned}$$

Ces relations sont satisfaites quelles que soient  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  si

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_1 \underline{Z}'_1 / \underline{Z}_3 - \underline{I}_2 \underline{Z}'_2 / \underline{Z}_3, \quad \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_2 \underline{Z}_1 = \underline{Z}'_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}'_3 \underline{Z}_3, \\ &\quad \underline{Z}'_1 \underline{Z}_1 = \underline{Z}'_3 \underline{Z}_3, \\ \underline{Z}'_2 \underline{Z}_2 &= \underline{Z}'_3 \underline{Z}_3, \quad \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}'_2 = \underline{Z}'_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}'_3 \underline{Z}_3\end{aligned}$$

Ce qui donne les relations

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / S, \quad \underline{Z}'_2 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 / S \quad \text{et} \quad \underline{Z}'_3 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / S$$

$$\text{où } \underline{S} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$$

Les relations inverses sont

$$R_1 = \Delta / \underline{Z}'_1, \quad R_2 = \Delta / \underline{Z}'_2 \quad \text{et} \quad R_3 = \Delta / \underline{Z}'_3$$

$$\text{où } \Delta = \underline{Z}'_1 \underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_1 \underline{Z}'_3 + \underline{Z}'_2 \underline{Z}'_3$$

**5-5** Le circuit (1), branché sur le circuit (2), est équivalent à un générateur de f.é.m.  $\underline{\mathcal{E}} = \underline{V}_{AB}$  et d'impédance interne  $\underline{Z}_{AB}$ . L'intensité débitée est

$$\underline{I}_{AB} = \underline{\mathcal{E}} / (\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_2) = \underline{V}_{AB} / [R_{AB} + R_2 + j(X_{AB} + X_2)]$$

La nouvelle d.d.p. entre  $A$  et  $B$  est alors  $V'_{AB} = \mathcal{E} - \underline{Z}_{AB} \underline{I}_{AB} = \underline{Z}_2 \underline{I}_{AB}$ . La puissance moyenne transférée au circuit (2) est

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{4} (\underline{V}_{AB} \underline{I}_{AB}^* + \underline{V}'_{AB} \underline{I}_{AB}) = \frac{1}{4} |\underline{I}_{AB}|^2 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2^*) \\ &= \frac{1}{2} |V_{AB}|^2 R_2 [(R_{AB} + R_2)^2 + (S_{AB} + S_2)^2]^{-2} \end{aligned}$$

Cette puissance est maximale si ses dérivées par rapport à  $R_2$  et  $X_2$  sont nulles, d'où  $S_2 = -S_{AB}$  et  $R_2 = R_{AB}$ , c'est-à-dire  $\underline{Z}_2^* = \underline{Z}_{AB}$ .

**5-6** Supposons que l'intensité de court-circuit entre  $A$  et  $B$  est  $\underline{\mathcal{I}}$  dans le sens indiqué et que l'impédance équivalente du circuit passif entre  $A$  et  $B$  est  $\underline{Z}_{eq}$  (Fig. 5.24a). Branchons entre  $A$  et  $B$  une source de courant auxiliaire idéale d'intensité  $\underline{\mathcal{I}}$  et l'impédance interne  $\underline{z}$  (en parallèle) comme dans la Fig. 5.24b). Il est évident alors qu'aucun courant ne passe dans l'impédance  $\underline{z}$ . Éteignons maintenant les générateurs du circuit (1) en conservant leurs impédances internes et inversons le sens de la source auxiliaire (Fig. 5.24c). Un calcul simple donne l'intensité de courant débitée dans le circuit passif :  $\underline{I} = \underline{\mathcal{I}} / (1 + \underline{Z}_{eq} / \underline{z})$  et l'intensité débitée dans  $\underline{z}$  :  $\underline{I}' = \underline{\mathcal{I}} / (1 + \underline{z} / \underline{Z}_{eq})$ .

La superposition des sources des circuits (b) et (c) correspond au circuit de la Fig. 5.24d avec la même intensité  $\underline{I}'$  dans  $\underline{z}$ . La d.d.p. entre  $A$  et  $B$  est alors  $\underline{V}_{AB} = \underline{\mathcal{I}} \underline{z} / (1 + \underline{z} / \underline{Z}_{eq})$ . On vérifie bien que l'intensité débitée  $\underline{I}'$  s'écrit  $\underline{I}' = \underline{\mathcal{I}} - \underline{V}_{AB} / \underline{Z}_{eq}$ , exactement comme si on avait une source de courant d'intensité  $\underline{\mathcal{I}}$  et de résistance interne  $\underline{Z}_{eq}$  (Fig. 5.24e).

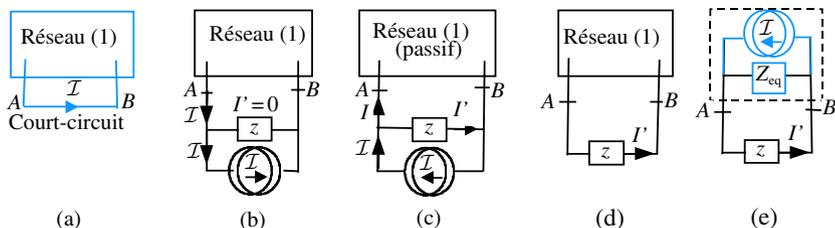


Figure 5-24 Théorème de Norton

**5-7** Le circuit de la Fig. 5.18 est équivalent au circuit de la Fig. 5.25, où la résistance interne de la source de courant est branchée en parallèle à une source de courant  $I$  idéale. Choissant les intensités indépendantes  $I_1$  et  $I_2$  comme dans la figure, nous avons  $I_3 = -I_1 - I_2$  les équations des mailles  $ABEF$  et  $ABCD$  s'écrivent

$$(\mathcal{J} - I_1)R_1 - (I_1 + I_2)R_3 - \mathcal{E}_3 = 0,$$

$$I_2R_2 - \mathcal{E}_2 + (I_1 + I_2)R_3 + \mathcal{E}_3 = 0$$

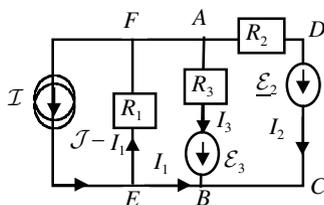


Figure 5-25 Circuit équivalent

ou bien

$$I_1(R_1 + R_3) + I_2R_3 = \mathcal{J}R_1 - \mathcal{E}_3, \quad I_1R_3 + I_2(R_2 + R_3) = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$$

Nous trouvons donc les mêmes équations que pour le circuit de la figure 5.5. C'est un résultat à prévoir car une source de courant  $\mathcal{J}$  de résistance interne  $R_1$  est équivalente à une source de même résistance interne et de f.é.m.  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{J}R_1$ .

**5-8** Remplaçons dans le circuit de la Fig. 5.19 la source de tension idéale  $\underline{\mathcal{E}}_1$  et l'impédance  $\underline{Z}_1$  (en série) par une source de courant  $\underline{\mathcal{I}}_1 = \underline{\mathcal{E}}_1/\underline{Z}_1$  idéale et une impédance  $\underline{Z}_1$  (en parallèle) et de même pour la source de tension  $\underline{\mathcal{E}}_2$  et l'impédance  $\underline{Z}_2$ ; nous obtenons ainsi le circuit équivalent de la Fig. 5.26a. Ensuite remplaçons ces deux sources de courant montées en parallèle par la source de courant équivalente  $\underline{\mathcal{I}}_{\text{eq}} = \underline{\mathcal{I}}_1 + \underline{\mathcal{I}}_2 = \underline{\mathcal{E}}_1/\underline{Z}_1 + \underline{\mathcal{E}}_2/\underline{Z}_2$  et une impédance en parallèle

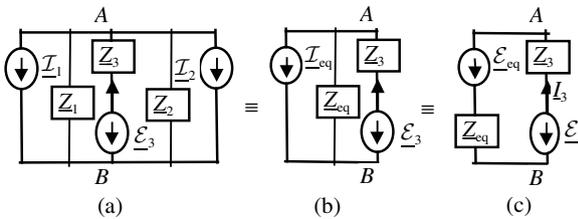
$\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$  ; on obtient ainsi le circuit de la Fig. 5.26b. Enfin remplaçons cette source équivalente de courant par une source de tension

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}_{\text{eq}} = \underline{Z}_{\text{eq}} \underline{I}_{\text{eq}} &= [\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)] [\underline{\mathcal{E}}_1 / \underline{Z}_1 + \underline{\mathcal{E}}_2 / \underline{Z}_2] \\ &= (\underline{\mathcal{E}}_1 \underline{Z}_2 + \underline{\mathcal{E}}_2 \underline{Z}_1) / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \end{aligned}$$

et d'impédance interne  $\underline{Z}_{\text{eq}}$  ; on obtient le circuit de la Fig. 5.26c. L'intensité  $I_3$  dans ce circuit est donnée par

$$I_3 = (\underline{\mathcal{E}}_{\text{eq}} - \underline{\mathcal{E}}_3) / (\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_3) = [\underline{\mathcal{E}}_1 \underline{Z}_2 + \underline{\mathcal{E}}_2 \underline{Z}_1 - \underline{\mathcal{E}}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)] / \Delta$$

où  $\Delta = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$ . Nous retrouvons ainsi l'expression (5.31)



**Figure 5-26** Analyse d'un circuit utilisant l'équivalence des sources de tension et des sources de courant.

**5-9** Les équations des mailles du circuit (a) sont

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_3 &= -\underline{\mathcal{E}}, & -\underline{Z}_2 \underline{I}_3 + \underline{Z}_3 \underline{I}_2 &= 0, \\ & & -\underline{Z}_3 \underline{I}_2 + \underline{Z}_4 (\underline{I}_1 - \underline{I}_3 - \underline{I}_2) &= 0 \end{aligned}$$

Posant  $\Delta = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4$ , les intensités s'écrivent

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= -(\underline{\mathcal{E}}/\Delta) \underline{Y}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4), & \underline{I}_2 &= -(\underline{\mathcal{E}}/\Delta) \underline{Y}_1 \underline{Y}_3, \\ & & \underline{I}_3 &= -(\underline{\mathcal{E}}/\Delta) \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \end{aligned}$$

Les équations des mailles du circuit (b) sont

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 \underline{I}'_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}'_3 &= 0, & -\underline{Z}_2 \underline{I}'_3 + \underline{Z}_3 \underline{I}'_2 &= -\underline{\mathcal{E}}, \\ & & -\underline{Z}_3 \underline{I}'_2 + \underline{Z}_4 (\underline{I}'_1 - \underline{I}'_3 - \underline{I}'_2) &= \underline{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Ce qui donne les intensités

$$\begin{aligned} \underline{I}'_1 &= -(\underline{\mathcal{E}}/\Delta) \underline{Y}_1 \underline{Y}_3, & \underline{I}'_2 &= -(\underline{\mathcal{E}}/\Delta) \underline{Y}_3 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4), \\ & & \underline{I}'_3 &= (\underline{\mathcal{E}}/\Delta) \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 \end{aligned}$$

On trouve bien la relation de réciprocité  $I'_1 = I_2$ . Noter que la f.é.m. doit être branchée dans le même sens dans la maille.

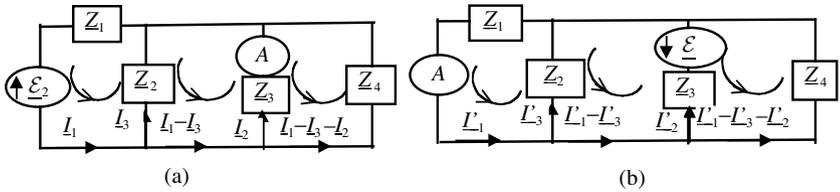


Figure 5-27 Courants des mailles et réciprocité.

**5-10 a)** Choisissons les courants des mailles comme dans la figure 5.21 ; nous pouvons alors immédiatement écrire les équations des mailles :

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_1 + \underline{z} + \underline{Z}_4)\underline{i}^{(1)} - \underline{z}\underline{i}^{(2)} - \underline{Z}_1\underline{i}^{(3)} &= 0, \\ -\underline{z}\underline{i}^{(1)} + (\underline{Z}_2 + \underline{z} + \underline{Z}_3)\underline{i}^{(2)} - \underline{Z}_2\underline{i}^{(3)} &= 0 \\ -\underline{Z}_1\underline{i}^{(1)} - \underline{Z}_2\underline{i}^{(2)} + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{i}^{(3)} &= \underline{\varepsilon} \end{aligned}$$

La solution de ces équations est

$$\begin{aligned} \underline{i}^{(1)} &= \underline{\varepsilon}[\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) + \underline{z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)]/\Delta \\ \underline{i}^{(2)} &= \underline{\varepsilon}[\underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) + \underline{z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)]/\Delta \\ \underline{i}^{(3)} &= \underline{\varepsilon}[(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) + \underline{z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)]/\Delta \end{aligned}$$

où  $\Delta = \Delta' + \underline{z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)$   
 et  $\Delta' = \underline{Z}_1\underline{Z}_2(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$

L'intensité dans  $G$  est donc

$$\underline{I}_{CD} = \underline{i}^{(1)} - \underline{i}^{(2)} = \underline{\varepsilon}(\underline{Z}_1\underline{Z}_3 - \underline{Z}_2\underline{Z}_4)/\Delta$$

La condition pour que l'intensité dans  $G$  soit nulle est

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_3 = \underline{Z}_2\underline{Z}_4.$$

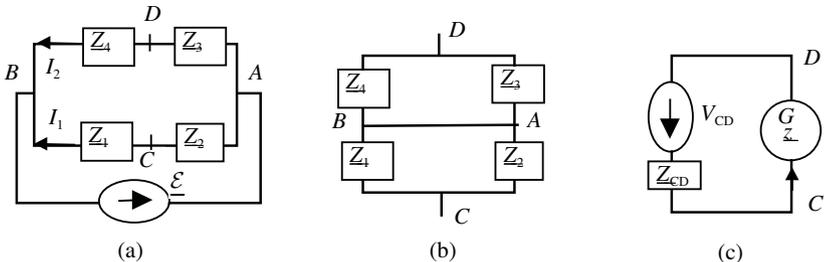


Figure 5-28 Analyse du pont de Wheatstone en utilisant le théorème de Thévenin.

**b)** Pour calculer l'intensité dans  $G$  supposons que cette branche est supprimée et évaluons la d.d.p. entre  $C$  et  $D$  et l'impédance du circuit, vue de ces points (Fig. 5.28a). Les intensités aux points  $C$  et  $D$  sont

$$I'_1 = \underline{\varepsilon}/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \quad \text{et} \quad I'_2 = \underline{\varepsilon}/(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4).$$

Nous en déduisons la d.d.p.  $V'_{CD}$  en circuit ouvert

$$V'_{CD} = -\underline{Z}_2 I'_1 + \underline{Z}_3 I'_2 = \underline{\varepsilon}(\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_2 \underline{Z}_4)/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4).$$

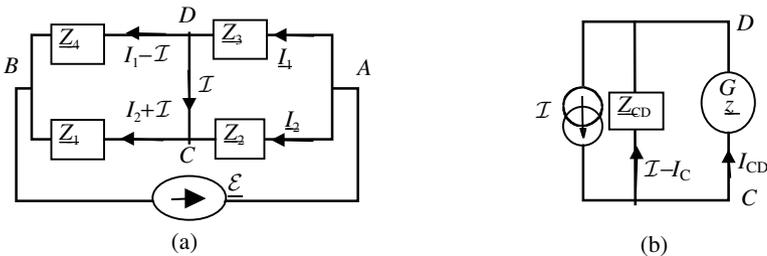
Pour évaluer l'impédance passive vue de  $C$  et  $D$ , notons que le circuit est alors équivalent à celui de la Fig. 5.28b avec  $A$  et  $B$  connectés par un fil sans résistance. Ce fil peut donc être remplacé par un nœud. Nous avons alors  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  en parallèle et  $\underline{Z}_3$  et  $\underline{Z}_4$  en parallèle et les deux montés en série. L'impédance vue de  $C$  et  $D$  est donc

$$\begin{aligned} Z_{CD} &= \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 / (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \\ &= \Delta' / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Thévenin, l'intensité dans  $G$  est la même qu'un générateur de f.é.m.  $V'_{CD}$  et d'impédance interne  $Z_{CD}$  (Fig. 5.28c). Elle est donc

$$I_{CD} = V'_{CD} / (Z_{CD} + \underline{z})$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de la question (a).



**Figure 5-29** Analyse du pont de Wheatstone en utilisant le théorème de Norton.

**c)** Pour calculer l'intensité dans  $G$  en utilisant le théorème de Norton, supposons que les points  $C$  et  $D$  sont court-circuités et évaluons l'intensité  $I_{DC}$  dans ce court-circuit (Fig. 5.29a). Les points  $C$  et  $D$  sont au même potentiel. Nous avons alors les équations

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 I_1 &= \underline{Z}_2 I_2, & \underline{Z}_4 (I_1 - I) &= \underline{Z}_1 (I_2 + I) \\ \text{et} \quad \underline{Z}_3 I_1 + \underline{Z}_4 (I_1 - I) &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ces équations permettent de déterminer  $I_1$ ,  $I_2$  et  $\mathcal{I}$ . Nous trouvons

$$\underline{\mathcal{I}} = \underline{\mathcal{E}}(\underline{Z}_2\underline{Z}_4 - \underline{Z}_1\underline{Z}_3)/D'$$

$$\text{où } D' = \underline{Z}_1\underline{Z}_2(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$

D'après le théorème de Norton, l'intensité dans  $G$  est la même qu'une source de courant  $\mathcal{I}$  idéale branchée en parallèle avec une impédance  $\underline{Z}_{CD}$  et débitant dans  $G$  (Fig. 5.29b). Nous avons alors  $\underline{Z}_{CD}(\mathcal{I} - I_{CD}) = z I_{CD}$ , d'où

$$I_{CD} = \underline{Z}_{CD}\mathcal{I}/(\underline{Z}_{CD} + z) = \underline{\mathcal{E}}(\underline{Z}_2\underline{Z}_4 - \underline{Z}_1\underline{Z}_3)/D$$

## Régimes transitoires

## PLAN

- 6.1 Régimes permanents et régimes transitoires
- 6.2 Circuit RC
- 6.3 Circuit RL
- 6.4 Circuits RCL

## OBJECTIF

- Étude des régimes transitoires lors de l'établissement et la coupure des courants.

### 6.1 RÉGIMES PERMANENTS ET RÉGIMES TRANSITOIRES

Considérons un circuit alimenté par un générateur de force électromotrice  $\mathcal{E}(t)$ . Le générateur est nécessairement branché à un certain moment et débranché à un autre. Tout circuit est le siège d'un phénomène d'induction plus ou moins important et il peut contenir des condensateurs. Nous avons vu que l'intensité de courant ne peut pas subir une discontinuité (c'est-à-dire une grande variation pendant un temps infiniment court), car cela correspondrait à une discontinuité de l'énergie magnétique  $\frac{1}{2}LI^2$  et donc à une puissance très grande qu'aucun générateur ne peut fournir et aucun circuit ne peut consommer. Pour la même raison, la charge d'un condensateur ne peut pas subir une discontinuité, car cela correspondrait à une discontinuité de l'énergie  $\frac{1}{2}Q^2/C$ .

Lors du branchement ou débranchement du générateur le circuit doit passer d'un régime **permanent** à un autre. Cette transition dure un certain temps plus ou moins court selon la nature du circuit ; on dit que le circuit est alors dans un **régime transitoire**. En choisissant des paramètres convenables du circuit, on peut soit raccourcir la durée du régime transitoire, soit la prolonger selon la fonction recherchée du circuit.

L'équation d'un circuit est de la forme générale

$$\mathcal{D}.V(t) = \mathcal{E}(t) \quad (6.1)$$

où  $\mathcal{D}$  est un *opérateur*, c'est-à-dire une expression contenant des dérivations, des intégrations et des multiplications par des constantes.



C'est une équation **inhomogène**, qui fait correspondre à la force électromotrice d'excitation  $\mathcal{E}(t)$  le potentiel  $V(t)$ , qui constitue la **réponse** à l'excitation. Une relation semblable peut être écrite pour l'intensité  $I(t)$ .

Même si le circuit est *libre* (c'est-à-dire il ne contient aucun générateur), il peut être le siège de courants et de tensions s'il est initialement excité. Le circuit obéit alors à l'**équation homogène**

$$\mathcal{D}.V_1(t) = 0 \quad (6.2)$$

Si le circuit ne contient que des dipôles linéaires, l'opérateur  $\mathcal{D}$  est linéaire, c'est-à-dire si  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes, il vérifie la relation

$$\mathcal{D}.(C_1 V_1 + C_2 V_2) = C_1 \mathcal{D}.V_1 + C_2 \mathcal{D}.V_2. \quad (6.3)$$

Si  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  sont deux solutions de l'équation (6.2), toute combinaison linéaire  $V_1(t) = C_1 V_1(t) + C_2 V_2(t)$  est aussi une solution, quelles que soient les constantes  $C_1$  et  $C_2$ . Nous disons que le circuit obéit au **principe de superposition**. Les conditions initiales de  $V_1(t)$  sont des combinaisons des conditions initiales de  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  avec les mêmes constantes  $C_1$  et  $C_2$ .

Si  $\mathcal{D}$  est un opérateur différentiel qui ne contient que la dérivée première, on dit que le circuit est du **premier ordre**. C'est le cas d'un circuit qui ne contient qu'une seule forme de stockage d'énergie (électrique dans des condensateurs ou magnétique dans des self-inductances).

- Si  $V_1(t)$  est une solution de (6.2), la fonction  $V_1(t) = C_1 V_1(t)$  est une solution et toute solution est de cette forme (on dit que c'est la **solution générale**).

- Si  $\mathcal{D}$  est un opérateur différentiel qui contient la dérivée première et la dérivée seconde, le circuit est du **second ordre** ; c'est le cas d'un circuit qui contient à la fois des condensateurs et des self-inductances.
- Si  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  sont deux solutions indépendantes de (6.2), la fonction  $V_l(t) = C_1 V_1(t) + C_2 V_2(t)$  est la solution générale de l'équation.
- Si  $V_l(t)$  est la solution générale de l'équation (6.2) du circuit libre et  $V_p(t)$  est une solution particulière de l'équation du circuit forcé (6.1), on peut montrer que

$$V(t) = V_l(t) + V_p(t) \quad (6.4)$$

est la solution générale de l'équation (6.1). Les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$ , dont dépend  $V_l(t)$ , peuvent être choisies pour que  $V(t)$  vérifie les conditions initiales. En revanche, la solution particulière  $V_p$  ne dépend pas des conditions initiales.

Si l'équation (6.1) est linéaire, la réponse  $V(t)$  a une forme mathématique semblable à celle de la f.é.m. d'excitation  $\mathcal{E}(t)$  :  $V$  un polynôme si  $\mathcal{E}$  est un polynôme,  $V = A e^{-\beta t}$  si  $\mathcal{E} = a e^{-\beta t}$ ,  $V = \underline{A} e^{-j\omega t}$  si  $\mathcal{E} = \underline{a} e^{-j\omega t}$  etc. Donc, si  $\mathcal{E}$  est une fonction harmonique de pulsation  $\omega$ ,  $V$  l'est aussi (sans être nécessairement en phase).

Nous avons vu dans la section 3.6 que les oscillations libres d'un circuit  $RLC$  sont amorties. Leur amplitude décroît en fonction du temps comme  $e^{-\delta t}$ . Si l'amortissement est faible ou critique, la constante d'atténuation est  $\delta = R/2L$ . Les oscillations libres de tout circuit, qui contient des résistances, sont amorties à cause de la dissipation de l'énergie par effet Joule. Le temps de relaxation  $\tau = 1/\delta$  dépend des caractéristiques du circuit.



Lorsqu'on branche un générateur sur un circuit, les oscillations dans le régime transitoire sont de la forme (6.4). Après un temps de l'ordre de  $10\tau$ ,  $V_l$  devient négligeable et la solution  $V(t)$  se réduit à la solution particulière  $V_p(t)$  du circuit forcé. Inversement si le circuit est en régime permanent  $V_p(t)$  et on le débranche à un instant  $t_0$ , les oscillations deviennent celles des oscillations libres  $V_l$  avec les constantes  $C_1$  et  $C_2$  déterminées par les conditions initiales à l'instant  $t_0$ . Ce régime transitoire d'extinction du courant dure aussi environ  $10\tau$ .

Une analyse semblable peut être faite dans le cas d'un circuit formé de plusieurs mailles, plusieurs nœuds et plusieurs générateurs. Les  $N$  équations des mailles indépendantes permettent de déterminer les  $N$  intensités inconnues  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) du régime permanent. Pour avoir

la solution générale dans le régime transitoire, nous devons lui ajouter la solution générale du même système d'équations<sup>(1)</sup> sans les f.é.m. Cette solution dépend de  $2N$  constantes arbitraires ; ce qui permet d'imposer autant de conditions initiales. Pour simplifier, nous considérons seulement les circuits formés par une seule maille.

## 6.2 CIRCUIT RC

### 1) Équation différentielle du circuit et sa solution générale

Si un circuit électrique contient un condensateur, des charges électriques peuvent s'accumuler sur ses armatures ; ce qui permet au courant électrique de circuler en dehors du condensateur. Considérons un circuit formé d'une résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$  et alimenté par un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E}$  (Fig. 6.1a). Soit  $Q(t)$  la charge du condensateur et  $I(t)$  l'intensité dans un sens choisi. Si  $I$  est positive, le courant est effectivement dans le sens choisi et  $Q$  augmente. L'équation de conservation de la charge ( $dQ = I dt$ ) s'écrit

$$I(t) = \dot{Q} \quad (6.5)$$

Cette relation est valable aussi si  $Q$  diminue ; alors  $I$  est dans le sens opposé au sens choisi et les deux membres de l'équation (6.5) sont négatifs.

La loi des mailles permet d'écrire l'équation du circuit

$$Q/C - \mathcal{E} + IR = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{R\dot{Q} + Q/C = \mathcal{E}} \quad (6.6)$$

La solution de cette équation différentielle, linéaire et non homogène est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et la solution générale de l'équation homogène ( $\mathcal{E} = 0$ ). La solution particulière est la constante  $Q_0 = C\mathcal{E}$ . La solution de l'équation différentielle homogène

$$R\dot{q} + q/C = 0 \quad (6.7)$$

(1) Pour étudier le régime transitoire, les mêmes équations des mailles sont valables, pourvu que les impédances des self-inductances et des condensateurs soient considérées comme des opérateurs

$$\underline{Z}_L \underline{\dot{i}}(t) = L \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \int dt \quad \text{c'est-à-dire} \quad \underline{Z}_L \underline{\dot{i}}(t) = L \frac{\partial \dot{i}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C \underline{\dot{i}}(t) = \frac{1}{C} \int dt \dot{i}(t)$$

Dans le cas d'un circuit formé de  $N$  mailles, au lieu d'un seul mode de pulsation  $\omega_0$  et de coefficient d'amortissement  $\delta$ , les oscillations libres sont des combinaisons linéaires de  $N$  modes de pulsations  $\omega_{(p)}$  et de coefficients d'amortissement  $\delta_{(p)}$  ( $p = 1, 2 \dots N$ ).

peut être obtenue par la méthode de séparation des variables. En effet elle s'écrit sous la forme

$$dq/q = -dt/\tau \quad \text{où} \quad \tau = RC \quad (6.8)$$

En intégrant, nous trouvons  $\ln q = -t/\tau + \alpha$ , où  $\alpha$  est une constante arbitraire. Nous pouvons écrire aussi

$$q = A e^{-t/\tau} \quad (6.9)$$

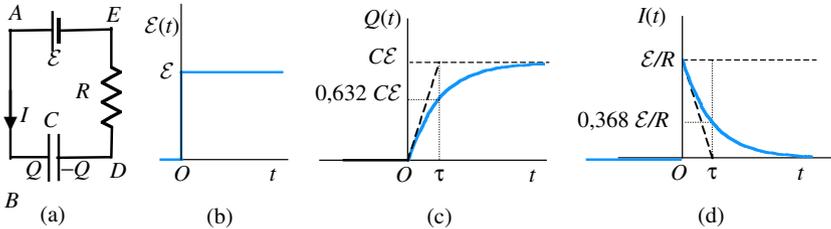
Où nous avons redéfini la constante arbitraire par  $A = e^\alpha$ . La solution générale de l'équation (6.6) s'écrit donc

$$Q = C\mathcal{E} + A e^{-t/\tau} \quad (6.10)$$

Utilisant l'équation (6.5), nous trouvons l'intensité de courant :

$$I = \dot{Q} = -(A/\tau)e^{-t/\tau} \quad (6.11)$$

La constante d'intégration  $A$  est déterminée par la charge initiale en imposant la loi de conservation de l'énergie ou de la charge.



**Figure 6-1** a) Circuit RC, b) Échelon de tension, c) variation de  $Q$  en fonction du temps lors du chargement du condensateur et d) variation de  $I$  en fonction du temps.

### b) Chargement d'un condensateur

Supposons que la charge du condensateur est nulle à l'instant  $t = 0$ , lorsqu'on branche le circuit RC sur le générateur de f.é.m.  $\mathcal{E}$ . Cette f.é.m. est un *échelon de tension* représenté dans la Fig. 6.1b

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \theta(t) \quad (6.12)$$

où  $\theta(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $\theta(t) = 1$  si  $t > 0$ . La conservation de la charge exige que  $Q(0) = 0$  juste après le branchement ; ce qui implique que  $A = -C\mathcal{E}$ , d'où

$$Q(t) = C\mathcal{E}[1 - e^{-t/\tau}], \quad I(t) = (\mathcal{E}/R)e^{-t/\tau} \quad (6.13)$$

Les variations de  $Q$  et  $I$  en fonction du temps sont illustrées dans les figures 6.1c et 6.1d respectivement. La charge augmente exponentiellement de 0 à la valeur limite  $C\mathcal{E}$ , qui est atteinte en principe au bout d'un temps infini, mais pratiquement assez rapidement, car la variation est exponentielle. L'intensité décroît exponentiellement de sa valeur initiale  $\mathcal{E}/R$  pour s'annuler en principe au bout d'un temps infini. Les variations de  $Q$  et  $I$  dépendent fortement de la **constante du temps**  $\tau$ . Pour avoir une idée de la rapidité avec laquelle ces quantités tendent vers leurs valeurs limites, le tableau 6.1 donne les variations de  $Q$  et  $I$  en fonction de  $t/\tau$ .



Nous trouvons qu'après un temps de l'ordre de  $7\tau$ ,  $Q/C\mathcal{E}$  ne diffère de 1 que de  $10^{-3}$  et  $I$  n'est que le millième de  $\mathcal{E}/R$ . Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de  $\tau$ , nous trouvons  $\tau = 0,1$  ms pour  $R = 100 \Omega$  et  $C = 1\mu\text{F}$  et  $\tau = 2$  ms pour  $R = 2000 \Omega$  et  $C = 1\mu\text{F}$ .

**Tableau 6-1** Variations de  $Q$  et  $I$  en fonction de  $t/\tau$  lors du chargement d'un condensateur

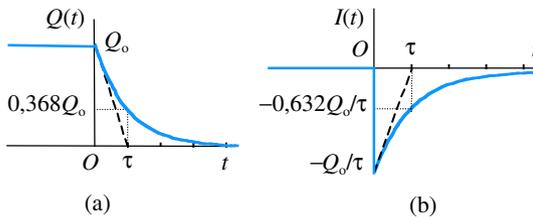
$t/\tau$	1	2	3	5	7	10
$Q/C\mathcal{E}$	0,632	0,865	0,950	0,993	$1 - 9 \times 10^{-4}$	$1 - 5 \times 10^{-5}$
$I/(\mathcal{E}/R)$	0,368	0,135	$4,98 \times 10^{-2}$	$6,74 \times 10^{-3}$	$9,12 \times 10^{-4}$	$4,54 \times 10^{-5}$

### c) Décharge d'un condensateur

Dans ce cas  $\mathcal{E}$  est nulle dans l'équation du circuit (6.6) et dans la solution générale (6.10). Supposons que la charge initiale du condensateur est  $Q_0$ . La condition  $Q(0) = Q_0$  donne  $A = Q_0$  ; ce qui permet d'écrire

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad I(t) = -(Q_0/\tau) e^{-t/\tau} \quad (6.14)$$

Les figures 6.2a et 6.2b illustrent la variation de  $Q$  et  $I$  en fonction du temps ; elles décroissent exponentiellement avec la constante de temps  $\tau$ .



**Figure 6-2** Variation de  $Q$  et de  $I$  en fonction du temps pendant la décharge d'un condensateur.

### d) Considérations énergétiques

L'équation du circuit (6.6) peut être obtenue en écrivant que l'énergie  $\mathcal{E}I dt$ , fournie par le générateur pendant  $dt$ , est égale à la somme de l'énergie  $RI^2 dt$  dissipée dans la résistance et la variation de l'énergie emmagasinée dans le condensateur  $d(Q^2/2C) = QI dt/C$ .

- Durant la charge, l'énergie du condensateur augmente selon l'équation

$$U_{(E)} = Q^2/2C = \frac{1}{2}C^2\mathcal{E}^2[1 - e^{-t/\tau}]^2 \quad (6.15)$$

- Durant la décharge à partir d'une charge initiale  $Q_0$ , la diminution de l'énergie entre les instants  $t = 0$  et  $t$  est

$$\Delta U_{(E)} = Q_0^2/2C - (Q_0^2/2C)e^{-2t/\tau} \quad (6.16)$$

Comme il n'y a pas alors de générateurs dans le circuit,  $\Delta U_{(E)}$  doit être égale à l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\Delta U_{(J)} = \int_0^t dt I^2 R = (Q_0^2/C\tau) \int_0^t dt e^{-2t/\tau} = (Q_0^2/2C)[1 - e^{-2t/\tau}] \quad (6.17)$$



La constante de temps  $\tau$  caractérise le temps de réponse du circuit à l'excitation électrique produite par le générateur et aussi le temps de retour du circuit excité à l'équilibre ( $Q = 0$ ) ; pour cela  $\tau$  est appelée aussi **temps de relaxation** du circuit. Cette notion peut être généralisée à tout système qui évolue sous l'effet d'une excitation extérieure. En effet tout système ne peut pas répondre instantanément à une telle excitation et ne peut pas revenir instantanément à l'équilibre lorsque l'excitation est supprimée.

## 6.3 CIRCUIT RL

### a) Équation différentielle du circuit et sa solution générale

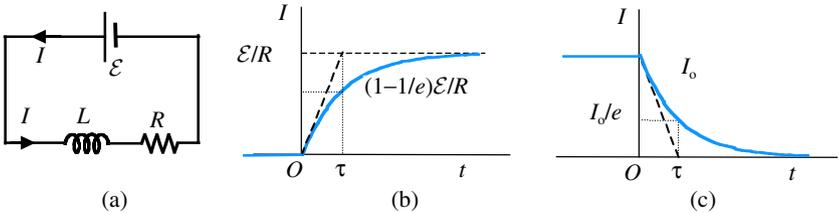
Considérons un circuit formé d'une résistance  $R$ , une self-inductance  $L$  et une f.é.m.  $\mathcal{E}$  en série (Fig. 6.3a). La règle des mailles donne l'équation

$$L\dot{I} + RI = \mathcal{E} \quad (6.18)$$

Une méthode semblable à celle de la section précédente donne la solution particulière de l'équation complète  $I_p = \mathcal{E}/R$  et la solution générale  $I_l = B e^{-t/\tau}$  pour l'équation du circuit libre ( $\mathcal{E} = 0$ ). Ici  $\tau = L/R$  est la *constante de temps ou temps de relaxation* du circuit. La solution générale de l'équation (6.18) est donc

$$I(t) = \mathcal{E}/R + B e^{-t/\tau} \quad (6.19)$$

La constante d'intégration  $B$  est à déterminer à partir de l'intensité initiale.



**Figure 6-3** a) Circuit RL, b) établissement du courant et c) coupure du courant.

### b) Établissement du courant dans le circuit

Supposons qu'on ferme le circuit à l'instant  $t = 0$ . La condition initiale  $I(0) = 0$  implique que  $B = -\mathcal{E}/R$ . La solution s'écrit alors

$$I(t) = (\mathcal{E}/R)[1 - e^{-t/\tau}] \quad (6.20)$$

La variation de  $I$  en fonction du temps est illustrée dans la Fig. 6.3b. Ainsi, lorsqu'on ferme le circuit, l'intensité ne s'établit pas instantanément mais augmente exponentiellement de 0 à sa valeur limite  $\mathcal{E}/R$ , qu'elle atteint asymptotiquement (théoriquement au bout d'un temps infini).



Pratiquement pour  $t \approx 10\tau$ ,  $I$  ne diffère de sa valeur limite que de 45 pour un million et pour les circuits électroniques usuels,  $\tau$  est très court. Ainsi pour  $L = 1$  H et  $R = 1000 \Omega$  on trouve  $\tau = 1$  ms.

### c) Coupure du courant dans le circuit LR

Nous avons dans ce cas  $\mathcal{E} = 0$  dans l'équation du circuit (6.18) et dans la solution générale (6.19). Celle-ci se réduit à celle de l'équation du circuit libre  $I(t) = B e^{-t/\tau}$ . Si initialement l'intensité est  $I_0$ , nous devons avoir  $B = I_0$  et la solution s'écrit

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad (6.21)$$

L'intensité décroît exponentiellement de sa valeur initiale  $I_0$  à 0 avec un temps de relaxation  $\tau$ . La variation de  $I$  en fonction du temps est illustrée dans la Fig. 6.3c.

### d) Considérations énergétiques

L'équation du circuit (6.18) peut être obtenue en écrivant que l'énergie  $\mathcal{E} I dt$  fournie pendant  $dt$  par le générateur est égale à la somme de l'énergie  $RI^2 dt$  dissipée dans la résistance et la variation de l'énergie emmagasinée dans la self-inductance  $d(\frac{1}{2}LI^2) = LI(dI/dt) dt$ .

Pendant l'établissement du courant, l'énergie de la self-inductance augmente en fonction du temps selon l'équation

$$U_{(M)} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI_0^2[1 - e^{-t/\tau}]^2 \quad (6.22)$$

Après le débranchement du générateur, la diminution de l'énergie emmagasinée dans la self-inductance entre les instants  $t = 0$  et  $t$  est alors

$$\Delta U_{(M)} = \frac{1}{2}LI_0^2 - \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-2t/\tau} \quad (6.23)$$

Comme il n'y a pas alors de générateurs dans le circuit,  $\Delta U_{(M)}$  doit être égale à l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\Delta U_{(J)} = \int_0^t dt I^2 R = RI_0^2 \int_0^t dt e^{-2t/\tau} = \frac{1}{2}LI_0^2[1 - e^{-2t/\tau}] \quad (6.24)$$

## 6.4 CIRCUITS RLC

Le circuit RLC se distingue des circuits RC et RL par le fait qu'il est du second ordre et que, si la résistance est faible, le courant et les tensions dans le circuit libre peuvent être oscillatoires (voir la section 3.6 pour la solution et la signification des symboles).

L'équation du circuit branché sur le générateur est

$$\boxed{Q/C + L\dot{I} + RI = \mathcal{E}(t)} \quad (6.25)$$

Utilisant la relation  $I = \dot{Q}$ , cette équation s'écrit

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \mathcal{E}(t)/L \quad \text{où} \quad \beta = R/2L \quad \text{et} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (6.26)$$

Considérons d'abord le cas où le circuit est branché sur un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E}$  constante. La solution particulière de l'équation (6.26) est  $Q_p = \mathcal{E}/L\omega_0^2 = C\mathcal{E}$ . C'est la charge du condensateur branché directement sur le générateur.

Utilisant les solutions établies dans la section 3.6 dans les cas d'un circuit sur-amorti, sous-amorti et critique et ajoutant la solution particulière  $Q_p$ , nous trouvons les solutions :

- circuit sur-amorti :  $Q = C\mathcal{E} + A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t}$

- circuit sous-amorti :

$$Q = C\mathcal{E} + e^{-\beta t} [A_1 \cos(\tilde{\omega}t) + A_2 \sin(\tilde{\omega}t)]$$

- circuit critique :  $Q = C\mathcal{E} + (A + Bt)e^{-\beta t}$  (6.27)

Imposant les conditions initiales  $Q = 0$  et  $I = \dot{Q} = 0$ , nous trouvons les solutions dans ces cas :

- circuit sur-amorti :  $Q = (C\mathcal{E}/2\sigma)[2\sigma - s_2 e^{-s_1 t} + s_1 e^{-s_2 t}]$

- circuit sous-amorti :

$$Q = C\mathcal{E}\{1 - e^{-\beta t} [\cos(\tilde{\omega}t) + (\delta/\tilde{\omega})\sin(\tilde{\omega}t)]\}$$

- circuit critique :  $Q = C\mathcal{E}[1 + (1 + \delta t)e^{-\beta t}]$  (6.28)

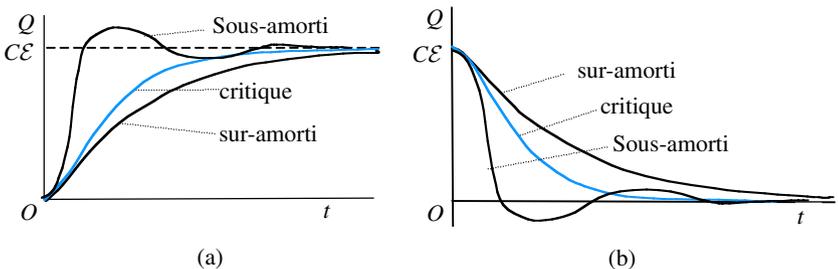
Considérons maintenant la décharge du condensateur dans le circuit  $RLC$ . Supposons qu'à l'instant  $t = 0$  la charge était  $C\mathcal{E}$ . L'équation du circuit est celle du circuit libre ( $\mathcal{E} = 0$  dans 6.25) avec les conditions initiales  $Q(t = 0) = C\mathcal{E}$  et  $I(t = 0) = 0$ . Utilisant les solutions de la section 3.6 et imposant les conditions initiales, nous trouvons les solutions :

circuit sur-amorti :  $Q = (C\mathcal{E}/2\sigma)[s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}]$

circuit sous-amorti :  $Q = C\mathcal{E} e^{-\beta t} [\cos(\tilde{\omega}t) + (\delta/\tilde{\omega})\sin(\tilde{\omega}t)]$

circuit critique :  $Q = C\mathcal{E}(1 + \delta t)e^{-\beta t}$  (6.29)

Ces solutions sont illustrées dans les figures 6.4a pour la charge et 6.4b pour la décharge.



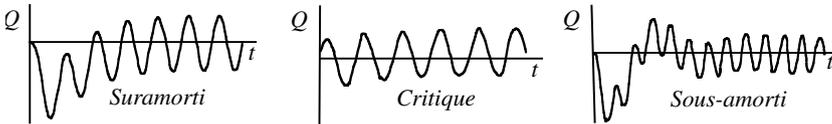
**Figure 6-4** Circuit  $RLC$  : **a**) Charge d'un condensateur lors du branchement du générateur et **b**) décharge du condensateur de charge initiale  $C\mathcal{E}$  dans le circuit  $RLC$ .

Une analyse semblable peut être faite dans le cas d'une f.é.m. harmonique en ajoutant la solution de l'oscillateur libre à la solution du régime permanent écrite sous la forme (voir la section 5.2)

$$Q_p = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

$$A = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega Z} \sin \phi_Z = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega Z^2} \left( \frac{1}{C\Omega} - L\Omega \right) \quad \text{et} \quad B = \frac{\mathcal{E}_m}{\Omega Z} \cos \phi_Z = \frac{R\mathcal{E}_m}{\Omega Z^2} \quad (6.30)$$

La figure (6.5) illustre la variation de la charge du condensateur si  $Q(0) = 0$  et  $I(0) = 0$  et dans le cas d'un circuit sur-amorti, critique et sous-amorti respectivement.



**Figure 6-5** Régime transitoire dans un circuit RLC branché sur une f.é.m harmonique dans les cas d'un circuit sur-amorti, critique et sous-amorti respectivement.



### POINTS-CLÉS

- Une capacité, une self-inductance et une résistance ne sont pas nécessairement celles de dipôles électriques réels. L'isolant qui remplit un condensateur n'est jamais parfait, mais il a une certaine conductance de fuite  $G$  ; ce qui correspond à une grande résistance  $R = 1/G$  en parallèle avec un condensateur idéal. De même, la résistance d'un circuit et sa self-inductance peuvent être faibles mais jamais strictement nulles.
- L'équation d'un circuit LCR, par exemple, contient des termes qui dépendent de  $I$  (tels que  $L\dot{I}$  et  $RI$ ) et des termes qui dépendent de  $Q$  (tels que  $Q/C$ ). Comme  $I$  et  $Q$  ne sont pas indépendantes ( $I = \dot{Q}$ ), on peut toujours écrire l'équation comme une équation différentielle pour  $Q$ . Pour résoudre une telle équation on peut chercher une solution de la forme  $Q = e^{-st}$ . En substituant cette expression dans l'équation, on trouve qu'elle est une solution, si  $s$  vérifie une équation caractéristique algébrique de même ordre que l'équation du circuit. Dans le cas d'un circuit à plusieurs mailles, il faut

choisir les bonnes variables indépendantes. Les équations du circuit forment un système linéaire d'équations différentielles avec les f.é.m. aux seconds membres.

- ▶ Le nombre  $n$  de solutions indépendantes d'une équation différentielle est égal à son ordre (c'est-à-dire  $n = 1$  si l'équation ne dépend pas des dérivées supérieures à 1 et  $n = 2$  si l'équation ne dépend pas des dérivées supérieures à 2 et ainsi de suite).
- ▶ Dans le cas d'un circuit  $RC$ , la variable utilisée est  $Q$ . Si  $R$  tend vers 0, le temps caractéristique  $\tau = RC$  tend vers zéro ; ce qui veut dire que  $Q$  atteint sa valeur de régime permanent instantanément. Sa dérivée, qui est l'intensité, est infinie à cet instant. Pour cela ; il faut toujours charger et décharger un condensateur à travers une résistance. Par contre, dans le cas d'un circuit  $RL$ , la variable utilisée est  $I$ . Si  $R$  tend vers 0, le temps caractéristique  $\tau = L/R$  tend vers l'infini ; ce qui veut dire que  $I$  atteint sa valeur de régime permanent après un temps infini.
- ▶ À proprement parler, la solution particulière, de l'équation  $\mathcal{D}.V(t) = \mathcal{E}(t)$ , n'est pas unique car on peut toujours lui ajouter une solution de l'équation homogène  $\mathcal{D}.V_l(t) = 0$ . On choisit une solution particulière qui ne dépend d'aucune constante arbitraire. Cette solution ne dépend pas donc des conditions initiales. C'est la propriété des systèmes linéaires. N'oubliez pas que de tels systèmes sont des modélisations mathématiques. Les systèmes réels sont plus complexes et ils contiennent une certaine part de non-linéarité. Leur analyse est beaucoup plus complexe et souvent impossible sans le recours à des méthodes d'approximation ou des méthodes numériques.

## QUESTIONS DE RÉFLEXION

1. Expliquez ce qu'on entend par régime permanent et régime transitoire dans un circuit. Qu'est ce qui empêche le régime permanent de s'établir immédiatement ? Est-ce que le régime permanent d'un circuit dépend des conditions initiales ?
2. Vérifiez que  $\tau = RC$  a la dimension d'un temps et que la tangente aux courbes  $Q(t)$  et  $I(t)$  à l'origine du temps coupe l'axe du temps ou la ligne  $Q = C\mathcal{E}$  du régime permanent au point  $t = \tau$ .
3. Vérifiez que  $\tau = L/R$  a effectivement la dimension d'un temps.

4. Considérons un circuit  $LCR$  série branché sur un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E}$ . Lorsqu'on débranche le générateur, le courant continue pendant un court intervalle de temps. Il y a alors dissipation d'énergie dans la résistance. D'où vient cette énergie ?

5. Expliquez pourquoi la charge et l'intensité ne peuvent pas subir de discontinuités dans le cas du circuit  $RLC$  tandis que  $I$  peut subir une discontinuité dans le cas du circuit  $RC$ .

## EXERCICES CORRIGÉS

6-1 Pour charger un condensateur de capacité  $C$ , on le branche sur une batterie de f.é.m.  $\mathcal{E}$ . Soit  $R$  la résistance totale du circuit.

a) Calculez l'énergie emmagasinée dans le condensateur en fonction du temps. Après combien de temps son énergie atteint-elle la moitié de sa valeur asymptotique ?

b) Calculez l'énergie débitée entre  $t$  et  $t + dt$  pendant la charge et l'énergie perdue par effet Joule. Vérifier la conservation de l'énergie.

6-2 Un générateur de f.é.m.  $\mathcal{E}$  et de résistance interne  $r$  débite dans un condensateur et une résistance  $R$  branchés en parallèle (Fig. 6.6).

a) Déterminer les intensités  $I_1$  et  $I_2$  lorsqu'on ferme l'interrupteur. Quelle est la charge asymptotique du condensateur ?

b) Supposant que cette charge asymptotique est atteinte, on ouvre l'interrupteur. Écrivez les expressions de la charge et de l'intensité en fonction du temps.

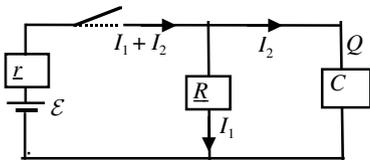


Figure 6-6

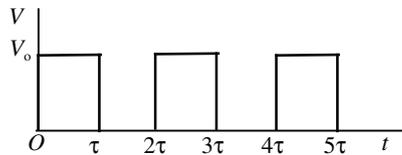


Figure 6-7

6-3 Une tension en forme de signaux rectangulaires (Fig. 6.7) est appliquée à un condensateur de capacité  $C$  branché en série avec une résistance  $R$ . Étudier les tensions  $V_R$  aux bornes de la résistance et  $V_C$  aux bornes du condensateur. Pour cela on commence par donner l'allure de la courbe  $V_C$ . On suppose qu'en régime permanent, le condensateur a une charge  $q_0$  aux instants  $2n\tau$  et qu'au bout d'une période  $T = 2\tau$  il

reprend cette charge. En déduire la valeur de  $q_0$  et l'expression de l'intensité en fonction du temps. Calculez la tension moyenne aux bornes du condensateur.

**6-4** Une résistance  $R$  et une self-inductance  $L$  en série sont branchées sur une tension  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t)$ .

**a)** Écrire l'équation du circuit et tracer le diagramme de Fresnel correspondant. En déduire l'expression  $I(t)$  de l'intensité. Quelle est l'impédance de ce circuit ? Quelles sont les tensions aux bornes de  $R$  et aux bornes de  $L$ . Calculez la puissance instantanée fournie par le générateur et sa valeur moyenne.

**b)** Écrivez la solution du régime transitoire.

**c) Applications numériques :** Calculez la puissance moyenne fournie par le générateur et écrivez les expressions des tensions aux bornes de  $R$  et  $L$  dans le régime permanent si  $R = 3,0 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $\mathcal{E}_m = 100 \text{ V}$  et la fréquence est de  $50 \text{ Hz}$ .

**6-5** On considère le circuit de la figure 6.8, où le condensateur présente une certaine fuite représentée par une conductance  $G = 1/R$ . Écrivez les équations de mailles et vérifiez que la charge  $Q$  du condensateur vérifie l'équation d'un circuit  $LCR$  série avec une résistance  $R' = L/CR$ . Déterminez la charge  $Q$ , le courant débité et le courant de fuite dans le régime permanent.

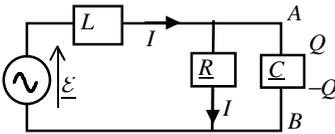


Figure 6-8

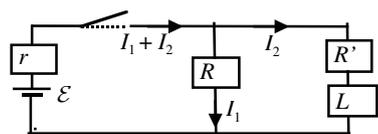


Figure 6-9

**6-6** On considère le circuit de la Fig. 6.9, où  $\mathcal{E}$  est une f.é.m. constante.

**a)** Déterminez les intensités  $I_1$  et  $I_2$  comme fonctions du temps, lorsqu'on ferme le circuit.

**b)** Supposant que les intensités ont atteint les valeurs limites, déterminer les intensités lorsqu'on débranche la f.é.m. Montrez que, pendant un temps très court, la tension aux bornes de la résistance  $R$  peut être supérieure à  $\mathcal{E}$ .

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**6-1 a)** La charge du condensateur est  $Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$  et l'intensité est  $I = \dot{Q} = (\mathcal{E}/R)e^{-t/\tau}$ , où  $\tau = RC$  est la constante de temps. L'énergie emmagasinée dans le condensateur est

$$U_E = \frac{1}{2} Q^2/C = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2(1 - e^{-t/\tau})^2$$

La valeur asymptotique de  $U_E$  est  $\frac{1}{2} C\mathcal{E}^2$  à la limite  $t \rightarrow \infty$ . L'énergie atteint la moitié de cette valeur à l'instant  $t$  tel que  $\frac{1}{4} C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2(1 - e^{-t/\tau})^2$ , c'est-à-dire  $e^{-t/\tau} = 1 - 1/\sqrt{2} = 0,293$  et  $t = 1,228 \tau$ .

**b)** L'énergie débitée entre  $t$  et  $t + dt$  est

$$dU_g = \mathcal{E} I dt = (\mathcal{E}^2/R)e^{-t/\tau} dt$$

• L'énergie perdue par effet Joule est

$$dU_J = RI^2 dt = (\mathcal{E}^2/R)e^{-2t/\tau} dt$$

• L'énergie électrique dans le condensateur est  $\frac{1}{2} Q^2/C$ . Sa variation est

$$dU_E = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2(1 - e^{-t/\tau})(2/\tau)e^{-t/\tau} dt = (\mathcal{E}^2/R)(e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau}) dt$$

• La variation de l'énergie totale dans le circuit est

$$\begin{aligned} dU_T = dU_J + dU_E &= (\mathcal{E}^2/R)e^{-2t/\tau} dt + (\mathcal{E}^2/R)(e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau}) dt \\ &= (\mathcal{E}^2/R)e^{-t/\tau} dt \end{aligned}$$

Elle est bien égale à l'énergie  $dU_g$  débitée par le générateur pendant  $dt$ .

**6-2 a)** La charge du condensateur est  $Q$  telle que  $I_2 = \dot{Q}$ . Les équations des mailles s'écrivent

$$Q/C - RI_1 = 0 \quad \text{et} \quad r(I_1 + I_2) + RI_1 = \mathcal{E}$$

La seconde équation donne

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - rI_2}{r + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + R} - \frac{r}{r + R} \dot{Q}$$

La première équation s'écrit alors

$$Q + \tau' \dot{Q} = C\mathcal{E}' \quad \text{où} \quad \tau' = CrR/(r + R) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E}R/(r + R)$$

La solution générale de cette équation est  $Q = C\mathcal{E}' + Ae^{-t/\tau'}$ . Si le condensateur n'était pas initialement chargé ( $Q = 0$  pour  $t = 0$ ) nous

devons avoir  $A = -C\mathcal{E}'$ . La solution s'écrit donc  $Q = C\mathcal{E}'(1 - e^{-t/\tau})$ .  
Dérivant par rapport à  $t$ , nous trouvons

$$I_2 = \dot{Q} = (C/\tau)\mathcal{E}'e^{-t/\tau} = (\mathcal{E}/r)e^{-t/\tau}$$

La première équation des mailles donne alors

$$I_1 = \frac{Q}{RC} = \frac{1}{R}\mathcal{E}'(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{\mathcal{E}}{r+R}(1 - e^{-t/\tau})$$

La charge asymptotique du condensateur (pour  $t \rightarrow \infty$ )

$$Q_{\text{lim}} = C\mathcal{E}' = C\mathcal{E}R/(r+R)$$

**b)** Si on ouvre l'interrupteur, on trouve une seule maille  $RC$  (Fig. 6.10).

Nous avons alors  $I = -\dot{Q}$  et l'équation du circuit s'écrit

$$Q/C - RI = 0 \quad \text{c.-à-d.} \quad Q + \tau\dot{Q} = 0$$

où  $\tau = RC$ . La solution générale de cette équation est  $Q = Ae^{-t/\tau}$ . Si le condensateur porte initialement la charge  $Q_{\text{lim}}$ , nous devons avoir  $Q(t=0) = Q_{\text{lim}}$ , c'est-à-dire  $A = Q_{\text{lim}}$ . La solution s'écrit donc

$$Q = Q_{\text{lim}} e^{-t/\tau} = \frac{C\mathcal{E}R}{r+R} e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad I = \frac{Q_{\text{lim}}}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{r+R} e^{-t/\tau}$$

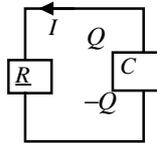


Figure 6-10

**6-3** On prévoit que la courbe qui représente  $Q = CV_c$  augmente de 0 à une certaine valeur pour  $t = \tau$  pendant que le condensateur se charge. Puis  $Q$  diminue entre  $\tau$  et  $2\tau$  pendant que le condensateur se décharge et ainsi de suite. En régime permanent, la charge est périodique, de période  $T = 2\tau$ . Supposons que la charge est  $q_0$  aux instants  $nT = 2n\tau$ . Entre  $2n\tau$  et  $2n\tau + \tau$  le condensateur se charge selon la relation  $Q = CV_0 + Ae^{-t/\tau}$ . La condition initiale ( $Q = q_0$  pour  $t = 2n\tau$ ) donne  $Ae^{-2n} = q_0 - CV_0$ , donc

$$\text{Pour } 2n\tau < t < 2n\tau + \tau: \quad Q(t) = CV_0 + (q_0 - CV_0)e^{2n-t/\tau}.$$

À l'instant  $t = 2n\tau + \tau$ , la charge  $Q$  est maximale et égale à  $q_{\text{max}} = CV_0 + e^{-1}(q_0 - CV_0)$ . Entre  $2n\tau + \tau$  et  $2(n+1)\tau$ , le condensateur se

décharge selon la relation  $Q = Be^{-t/\tau}$ . La condition  $Q = q_{\max}$  pour  $t = 2n\tau + \tau$  donne  $Be^{-2n-1} = CV_0 + e^{-1}(q_0 - CV_0)$ , donc

Pour  $2n\tau + \tau < t < 2n\tau + 2\tau$  :

$$Q(t) = [e^{2n+1}CV_0 + e^{2n}(q_0 - CV_0)]e^{-t/\tau}$$

Pour  $t = 2n\tau + 2\tau$ , la charge  $Q$  est de nouveau égale à la charge minimale  $q_0$  si

$$[e^{2n+1}CV_0 + e^{2n}(q_0 - CV_0)]e^{-2n-2} = q_0$$

Ce qui donne

$$q_0 = CV_0/(e+1) \quad \text{et} \quad q_{\max} = CV_0e/(e+1)$$

La charge est alors

$$\text{Pour } 2n\tau < t < 2n\tau + \tau : Q(t) = CV_0[1 - \frac{1}{e+1}e^{2n+1-t/\tau}]$$

$$\text{Pour } 2n\tau + \tau < t < 2n\tau + 2\tau : Q(t) = CV_0\frac{e}{e+1}e^{2n+1-t/\tau}$$

Elle est représentée dans la figure 6.11. L'intensité de courant s'écrit

$$\text{Pour } 2n\tau < t < 2n\tau + \tau : I(t) = \dot{Q} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{e+1} e^{2n+1-t/\tau}$$

Pour  $2n\tau + \tau < t < 2n\tau + 2\tau$  :

$$I(t) = \dot{Q} = -\frac{V_0}{R} \frac{e}{e+1} e^{2n+1-t/\tau}$$

Prenant la moyenne sur une période  $2\tau$ , nous obtenons la charge moyenne

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{1}{2\tau} \int_{2n\tau}^{2n\tau+2\tau} dt Q(t) \\ &= \frac{1}{2\tau} CV_0 \int_{2n\tau}^{2n\tau+\tau} dt [1 - \frac{1}{e+1} e^{2n+1-t/\tau}] \\ &\quad + \frac{1}{2\tau} CV_0 \frac{e}{e+1} \int_{2n\tau+\tau}^{2n\tau+2\tau} dt e^{2n+1-t/\tau} \\ &= \frac{1}{2\tau} CV_0 [\tau + \tau \frac{1-e}{e+1}] - \frac{1}{2\tau} CV_0 \tau \frac{1-e}{e+1} = \frac{1}{2} CV_0 \end{aligned}$$

La tension moyenne est donc  $\langle V \rangle = \langle Q \rangle / C = \frac{1}{2} V_0$

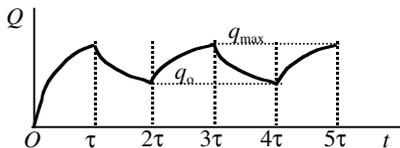


Figure 6-11

**6-4 a)** Le circuit est représenté dans la figure 6.12a. Son équation s'écrit

$$L\dot{I} + RI = \mathcal{E}_m \cos(\omega t) \implies \tau\dot{I} + I = (\mathcal{E}_m/R) \cos(\omega t) \text{ où } \tau = L/R$$

La solution du régime permanent est harmonique,  $I = I_m \cos(\omega t - \phi)$ , d'où

$$L\dot{I} = -LI_m\omega \sin(\omega t - \phi) = LI_m\omega \cos(\omega t - \phi + \pi/2)$$

La représentation de Fresnel pour l'équation du circuit (figure 6.12b) donne

$$\mathcal{E}_m = I_m \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \implies I_m = (\mathcal{E}_m/Z)$$

$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$  est l'impédance réelle du circuit. Son impédance complexe est  $\underline{Z} = R + jL\omega$ . L'intensité est donc en retard de  $\phi = \text{Arctan}(L\omega/R)$  ( $0 < \phi < \pi/2$ ) sur la f.é.m. Elle s'écrit donc

$$I(t) = (\mathcal{E}_m/Z) \cos(\omega t - \phi)$$

Les d.d.p. aux bornes de  $R$  et aux bornes de  $L$  sont respectivement

$$V_R = RI = (R\mathcal{E}_m/Z) \cos(\omega t - \phi),$$

$$V_L = L(dI/dt) = (\omega L\mathcal{E}_m/Z) \cos(\omega t - \phi + \pi/2)$$

La puissance instantanée fournie par le générateur est

$$P = \mathcal{E}I = (\mathcal{E}_m^2/Z) \cos(\omega t - \phi) \cos(\omega t)$$

Sa valeur moyenne est

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= (\mathcal{E}_m^2/Z) \langle [\cos(\omega t) \cos \phi + \sin(\omega t) \sin \phi] \cos(\omega t) \rangle \\ &= (\mathcal{E}_m^2/2Z) \cos \phi = (R\mathcal{E}_m^2/2Z^2) \end{aligned}$$

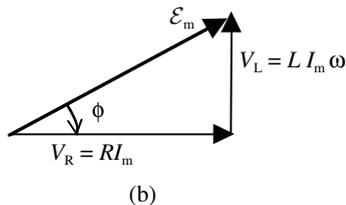
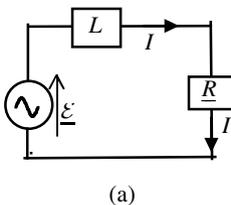


Figure 6-12

**b)** • La solution générale de l'équation de la maille sans générateur est

$$I = Ae^{-t/\tau}$$

• La solution générale du régime transitoire est donc

$$I = Ae^{-t/\tau} + (\mathcal{E}_m/Z) \cos(\omega t - \phi)$$

- La condition initiale  $I = 0$  pour  $t = 0$  donne

$$A + (\mathcal{E}_m/Z)\cos\phi = 0, \quad \text{d'où } A = -(\mathcal{E}_m/Z)\cos\phi = -R\mathcal{E}_m/Z^2$$

- La solution s'écrit donc

$$I = (\mathcal{E}_m/Z)[\cos(\omega t - \phi) - (R/Z)e^{-t/\tau}]$$

**c)** Si  $R = 3,0 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $\mathcal{E}_m = 100 \text{ V}$  et la fréquence est de  $50 \text{ Hz}$ , nous trouvons

$$\omega = 100\pi \text{ rad/s}, \quad Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = 3,016 \text{ k}\Omega, \quad \phi = 0,1043 \text{ rad}, \\ < P > = 1,65 \text{ W}$$

$$V_R = (R\mathcal{E}_m/Z) \cos(\omega t - \phi) = 99,47 \cos(100\pi t - 0,1043) \text{ volts}$$

$$V_L = (L\omega\mathcal{E}_m/Z) \cos(\omega t - \phi + \pi/2) = 10,416 \cos(100\pi t + 1,4665)$$

**6-5** C'est un circuit à deux mailles. Prenons la charge  $Q$  du condensateur et l'intensité débitée  $I$  comme variables indépendantes. L'intensité dans la résistance  $R$  est  $I - \dot{Q}$ . Les équations de mailles s'écrivent

$$R(I - \dot{Q}) - Q/C = 0 \quad \text{et} \quad L\dot{I} + Q/C = \mathcal{E}$$

De la première équation nous obtenons  $I = Q/CR + \dot{Q}$ . La seconde équation s'écrit alors

$$L\ddot{Q} + (L/CR)\dot{Q} + Q/C = \mathcal{E}$$

C'est l'équation d'un circuit  $LCR$  série avec une résistance  $R' = L/CR$ .

Dans le régime permanent, les grandeurs ne dépendent pas de  $t$ ; alors  $Q = C\mathcal{E}$  et  $I = \mathcal{E}/R$ . Le courant de fuite est évidemment le courant débité  $I$ .

**6-6 a)** Les équations des mailles s'écrivent

$$RI_1 - R'I_2 - L\dot{I}_2 = 0 \quad \text{et} \quad r(I_1 + I_2) + RI_1 = \mathcal{E}$$

La seconde équation donne

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - rI_2}{r + R}$$

La première équation s'écrit alors

$$\tau\dot{I}_2 + I_2 = R\mathcal{E}/\Delta \quad \text{où } \tau = L(r + R)/\Delta \text{ et } \Delta = rR + rR' + RR'$$

La solution générale de cette équation est  $I_2 = \mathcal{E}R/\Delta + Ae^{-t/\tau}$ . L'intensité étant initialement nulle, nous devons avoir  $A = -\mathcal{E}R/\Delta$ .

La solution s'écrit donc

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\Delta} R(1 - e^{-t/\tau}), \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{\Delta} \left[ R' + \frac{rR}{r+R} e^{-t/\tau} \right]$$

Les valeurs asymptotiques des courants (lorsque  $t \rightarrow \infty$ ) sont

$$I_{1,\text{lim}} = R'\mathcal{E}/\Delta \quad \text{et} \quad I_{2,\text{lim}} = R\mathcal{E}/\Delta$$

**b)** Si on ouvre l'interrupteur, on trouve une seule maille  $RL$  (Fig. 6.13) dont l'équation est

$$(R + R')I + L\dot{I} = 0 \quad \text{c.-à-d.} \quad \tau\dot{I} + I = 0 \quad \text{où} \quad \tau = L/(R + R')$$

La solution générale de cette équation est  $I = Be^{-t/\tau}$ . Si l'intensité initiale dans la self-inductance est  $I_{2,\text{lim}}$ , nous devons avoir  $B = I_{2,\text{lim}}$ .

La solution s'écrit donc

$$I = I_{2,\text{lim}}e^{-t/\tau} = (R\mathcal{E}/\Delta)e^{-t/\tau}$$

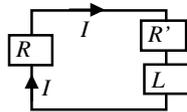


Figure 6-13

Notons que rien n'exige que l'intensité dans la branche de  $R$  soit continue.

La tension aux bornes de  $R$  est

$$V_R = RI = (R^2\mathcal{E}/\Delta)e^{-t/\tau}$$

Elle peut dépasser  $\mathcal{E}$  si  $e^{-t/\tau} > \Delta/R^2$ . Comme l'exponentielle est nécessairement inférieure à 1, cette condition peut être vérifiée si  $\Delta < R^2$ , c'est-à-dire si  $R' < R(R - r)/(R + r)$ . La tension aux bornes de  $R$  est alors supérieure à  $\mathcal{E}$  pour  $t < \tau \ln(R^2/\Delta)$ .

- 7.1 Définitions
- 7.2 Fonction de transfert et bande passante
- 7.3 Quadripôles en  $T$
- 7.4\* Réponse d'un filtre à un signal
- 7.5\* Systèmes non linéaires
- 7.6\* Annexe : Intégration complexe

- Introduction de la notion de filtre et analyse de la fonction de transfert et du gain des quadripôles en  $T$ .

## 7.1 DÉFINITIONS

Un **filtre** ou *système de transmission* est un dispositif conçu pour recevoir un signal  $u_e(t)$  à l'entrée et produire un signal  $u_s(t)$  à la sortie.

Ici  $u_e$  et  $u_s$  peuvent représenter la même grandeur physique ou non ; dans ce chapitre il s'agit le plus souvent d'une tension électrique. Dans certains cas  $u_s$  est proportionnel à  $u_e$  mais souvent  $u_s$  a une forme différente de celle de  $u_e$ , surtout dans les régimes transitoires au début et à la fin du signal, à cause des oscillations propres du système. Le signal de

\* Les sections 7.4, 7.5 et 7.6 ainsi que les exercices correspondants, marqués d'un astérisque, peuvent être omises en première lecture sans nuire à la continuité du texte.

sortie peut être observé directement, enregistré ou traité pour en extraire des informations en amplifiant certaines composantes de fréquence et en atténuant d'autres, en modifiant les phases etc.



Les filtres jouent un rôle important dans les systèmes de traitement du signal et en télécommunications (émetteurs et récepteurs radio et de télévision, postes de radars etc.).

Un filtre électronique est un circuit qui peut être représenté par un **quadripôle** comportant une **entrée**, qui reçoit un signal  $u_e(t)$  produit par un générateur extérieur et une **sortie**, sur laquelle un autre système (appelé **charge**) peut être branché (Fig. 7.1a). Le filtre, appelé aussi **opérateur**, transmet donc l'action du générateur à la charge.

- Le filtre est **passif** s'il ne contient que des éléments incapables de fournir une puissance moyenne (tels que les résistances, les condensateurs, les bobines etc.). Par conséquent, l'énergie du signal de sortie ne peut pas excéder celle du signal d'entrée.
- Le filtre est **actif** s'il contient au moins un composant actif (un transistor, un amplificateur opérationnel etc.). Les filtres actifs peuvent amplifier le signal en augmentant son énergie. Nous considérons seulement les filtres passifs dans ce chapitre.

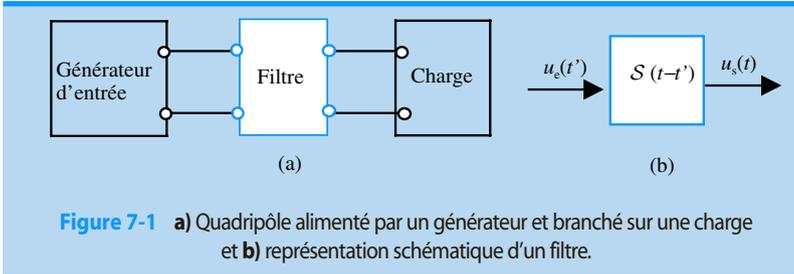
Un filtre fait correspondre un signal de sortie  $u_s(t)$  au signal d'entrée  $u_e(t)$  (Fig. 7.1b). Cette correspondance peut être exprimée par l'équation

$$u_s(t) = \mathcal{S}(t, t')u_e(t') \quad (7.1)$$

Où l'**opérateur de transmission**  $\mathcal{S}$  peut dépendre du temps  $t$  de réception du signal d'entrée et du temps  $t'$  d'observation du signal de sortie, car le système de transmission peut produire un certain décalage du temps. Cet opérateur peut faire intervenir des dérivations et des intégrations par rapport au temps.

Le filtre est dit **stationnaire** si la répétition du signal d'entrée donne toujours le même signal de sortie. Pour cela, il faut que l'équation (7.1) reste valable si on effectue une translation de l'origine du temps. L'opérateur  $\mathcal{S}$  ne dépend pas alors de  $t$  et  $t'$  séparément mais de leur différence  $(t - t')$  :

$$u_s(t) = \mathcal{S}(t - t')u_e(t') \quad (7.2)$$



Comme tout système physique, un filtre doit être **causal**. Cela veut dire que la réponse du système ne peut pas précéder l'excitation. En d'autres termes, si  $u_e$  est nulle pour  $t < t_0$ , il en est de même pour  $u_s$ . Cela exige que

$$S(t - t') = 0 \quad \text{pour} \quad t < t' \quad (7.3)$$

Si le filtre est **linéaire**, son opérateur  $S$  est linéaire. Le *principe de superposition* est alors valable : Une superposition de signaux  $u_e = a_1 u_{1e} + a_2 u_{2e}$  à l'entrée produit un signal  $u_s = a_1 u_{1s} + a_2 u_{2s}$  à la sortie avec les mêmes coefficients  $a_1$  et  $a_2$ .  $S$  doit donc vérifier la condition

$$S(a_1 u_{1e} + a_2 u_{2e}) = a_1 S u_{1e} + a_2 S u_{2e} \quad (7.4)$$

Il est alors possible d'analyser le filtre en utilisant la représentation complexe  $\underline{u}_e$  et  $\underline{u}_s$  des signaux et de prendre leurs parties réelles pour représenter les signaux physiques. Dans ce cas l'opérateur  $\underline{S}(t - t')$  est complexe en général.

L'analyse de Fourier permet aussi de considérer tout signal d'entrée  $\underline{u}_e$  comme une superposition de signaux harmoniques, chacun produisant un signal de sortie  $\underline{u}_s$  de même pulsation.



Les résistances, les condensateurs et les self-inductances sont linéaires à une bonne approximation ; il en est de même pour les circuits formés de ces éléments. Nous considérons dans ce chapitre surtout les systèmes de transmission linéaires.

## 7.2 FONCTION DE TRANSFERT ET BANDE PASSANTE

### a) Fonction de transfert

Si un quadripôle est alimenté par une tension  $\underline{V}_e$  et sa sortie est branchée sur une charge  $\underline{Z}_c$ , l'intensité  $\underline{I}_e$  à l'entrée, l'intensité  $\underline{I}_s$  à la sortie et la

tension de sortie  $\underline{V}_s = \underline{Z}_c \underline{I}_s$  dépendent de  $\underline{Z}_c$  (et évidemment de  $\underline{V}_e$ ). D'après le *théorème de Thévenin* (voir la section 5.7),  $\underline{V}_s$  et  $\underline{I}_s$  sont les mêmes que si la charge  $\underline{Z}_c$  était alimentée directement par un générateur de force électromotrice égale à la tension de sortie  $\underline{V}_s(\infty)$ , si la sortie était ouverte (c'est-à-dire  $\underline{Z}_c \rightarrow \infty$ ) et une impédance interne égale à l'impédance du circuit formé par le générateur et le quadripôle. L'évaluation de la tension  $\underline{V}_s(\infty)$  a donc une grande importance pratique et nous la désignons dans la suite simplement par  $\underline{V}_s$  (Fig.7.2).

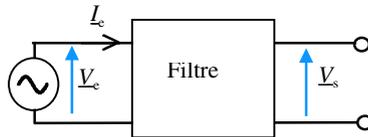


Figure 7-2 Quadripôle électrique avec la sortie ouverte ( $\underline{Z}_c = \infty$ ).

Si un filtre linéaire est branché sur une tension d'entrée harmonique,  $\underline{V}_e = \underline{A}_e(\Omega)e^{j\Omega t}$ , la tension de sortie dans le régime permanent est harmonique de même pulsation,  $\underline{V}_s = \underline{A}_s(\Omega)e^{j\Omega t}$ .

Le filtre peut être caractérisé par la *fonction de transfert* en tension

$$\underline{\mathcal{G}}(\Omega) = \underline{V}_s / \underline{V}_e = \underline{A}_s / \underline{A}_e \quad (7.5)$$

En général, c'est une fonction complexe de la pulsation  $\Omega$  et des grandeurs caractéristiques du filtre. Écrivons-la sous la forme exponentielle

$$\underline{\mathcal{G}}(\Omega) = G(\Omega)e^{j\phi(\Omega)} \quad \text{où} \quad G(\Omega) = |\underline{\mathcal{G}}(\Omega)| = |\underline{A}_s / \underline{A}_e| \quad (7.6)$$

Nous convenons de prendre toujours  $-\pi < \phi \leq \pi$ . Le signal de sortie est alors

$$\underline{V}_s(t) = G(\Omega)\underline{A}_e(\Omega)e^{j[\Omega t + \phi(\Omega)]} = G(\Omega)\underline{A}_e(\Omega)e^{j\Omega[t + \phi(\Omega)/\Omega]} \quad (7.7)$$



Le filtre agit donc à la fois sur l'amplitude et la phase du signal. L'amplitude est multipliée par le **gain**  $G(\Omega)$ ; qui représente l'atténuation ou l'amplification du signal par le filtre. Le signal subit aussi une avance de phase  $\phi(\Omega)$ , c'est-à-dire un **retard temporel**  $-\phi(\Omega)/\Omega$ . Si  $-\phi/\Omega$  est positif, le signal de sortie est effectivement en retard sur le signal d'entrée et si  $-\phi/\Omega$  est négatif, le signal de sortie est effectivement en avance. Le gain et le retard temporel sont tous les deux responsables de la déformation, que subit le signal.

Si le signal d'entrée est réel, le signal de sortie l'est aussi. La fonction de transfert doit donc vérifier la relation de réflexion

$$\boxed{\underline{G}(\Omega) = \underline{G}(-\Omega)^*} \quad \text{c.-à-d. } G(\Omega) = G(-\Omega) \text{ et } \phi(\Omega) = -\phi(-\Omega) \quad (7.8)$$

La partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de transfert vérifient alors les relations

$$\text{Re } \underline{G}(\Omega) = \text{Re } \underline{G}(-\Omega) \quad \text{et} \quad \text{Im } \underline{G}(\Omega) = -\text{Im } \underline{G}(-\Omega) \quad (7.9)$$

D'autre part, la causalité exige que  $\phi$  n'augmente pas avec  $\Omega$ .

### b) Bande passante

Souvent le gain a un maximum  $G_o$  pour une pulsation d'excitation caractéristique  $\Omega_o$ ; la fonction de transfert est alors  $\underline{G}_o = G_o e^{j\phi(\Omega_o)}$  (voir la figure 7.3a). L'énergie des oscillations étant toujours proportionnelle au carré de l'amplitude,  $\Omega_o$  correspond à un gain en puissance maximal.

*On convient de définir la **bande passante** du filtre comme la bande de fréquence, telle que la puissance transmise est supérieure à la moitié de la puissance de sortie maximale. Elle est donc limitée par les pulsations de coupure  $\Omega_{\text{inf}}$  et  $\Omega_{\text{sup}}$  telles que  $G = G_o/\sqrt{2}$ .*

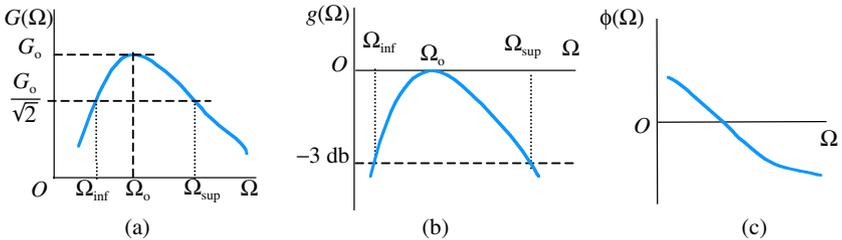
La nature de la bande passante et les pulsations de coupure dépendent des caractéristiques du filtre. Celui-ci peut être peu sélectif, s'il a une large bande passante, ou très sélectif, s'il a une bande passante étroite.

Le théorème de Fourier permet de considérer toute tension à l'entrée comme une superposition de tensions harmoniques. Un signal  $\underline{V}_e$  dont les composantes spectrales sont situées dans la bande passante produit une réponse  $\underline{V}_s \approx \underline{G}_o \underline{V}_e$  grande et presque sans déformation. Par contre, si le signal a des composantes spectrales situées en dehors de la bande passante, il est réduit et déformé par le filtre.

Selon la nature de la bande passante, on peut classer les filtres en plusieurs types, dont les plus courants sont les suivants :

- Un filtre est **passse-haut** si  $\Omega_{\text{inf}}$  n'est pas nulle et  $\Omega_{\text{sup}}$  est infinie. Ce filtre laisse passer les fréquences supérieures à  $\Omega_{\text{inf}}$  et atténue les fréquences inférieures à  $\Omega_{\text{inf}}$ . En acoustique, c'est un atténuateur de sons graves ; il est donc utilisé pour supprimer ou réduire les bruits.

- Un filtre est *passé-bas* si  $\Omega_{\text{inf}}$  est nulle et  $\Omega_{\text{sup}}$  est finie : Ce filtre laisse passer les fréquences inférieures à  $\Omega_{\text{sup}}$  et atténue les fréquences supérieures à  $\Omega_{\text{sup}}$ . En acoustique, c'est un atténuateur de sons aigus.
- Un filtre est *passé-bande* si  $\Omega_{\text{inf}}$  et  $\Omega_{\text{sup}}$  sont finies et non nulles : Ce filtre laisse passer les fréquences comprises entre  $\Omega_{\text{inf}}$  et  $\Omega_{\text{sup}}$  et atténue les autres. Ce type de filtres est utilisé dans les récepteurs tels que les postes radio et de télévision qui doivent sélectionner une émission particulière qu'on désire capter. Dans le cas d'un filtre formé par un oscillateur à un seul degré de liberté, la largeur de la bande passante est égale à la largeur de la résonance.
- Un filtre est *coupe-bande* s'il atténue les pulsations comprises entre  $\Omega_{\text{inf}}$  et  $\Omega_{\text{sup}}$ , toutes les deux finies.



**Figure 7-3** a) La fonction gain et la bande passante, b) le gain en décibels et c) la phase en fonction de  $\Omega$ .

On définit aussi le **gain en décibels** (db) comme

$$g_{\text{db}}(\Omega) = 20 \log \frac{G(\Omega)}{G_0} \quad (7.10)$$

Les Figures 7.3b et 7.3c représentent les variations de  $g_{\text{db}}(\Omega)$  et  $\phi(\Omega)$  respectivement. La bande passante est l'intervalle  $[\Omega_{\text{inf}}, \Omega_{\text{sup}}]$  dans lequel  $G(\Omega) > G_0/\sqrt{2}$  (Fig.7.3a) ; ce qui correspond à  $g_{\text{db}}$  compris entre  $-20 \log \sqrt{2} \approx -3$  db et 0 db.

### c) Diagrammes de Bode

Pour illustrer le comportement du filtre à la fois à basse et à haute fréquence, il convient parfois de tracer  $g_{\text{db}}$  et  $\phi$  en fonction de  $\log \Omega$ , on obtient ainsi le **diagramme de Bode** pour le quadripôle (Fig. 7.4a et b).

Le point  $\Omega = 0$  est alors projeté vers  $-\infty$ . Schématiquement, la courbe est presque assimilable à ses asymptotes rectilignes. On peut aussi représenter  $g_{db}$  et  $\phi$  en fonction de  $\log x$ , où  $x \equiv \Omega / \Omega_0$  ; cela revient à traduire les courbes de  $g_{db}$  et  $\phi$  de  $\log \Omega_0$  vers la gauche. Dans cette représentation,  $g_{db}$  a un maximum nul pour  $\log x = 0$  (qui correspond à  $x = 1$ , c'est-à-dire  $\Omega = \Omega_0$ ).

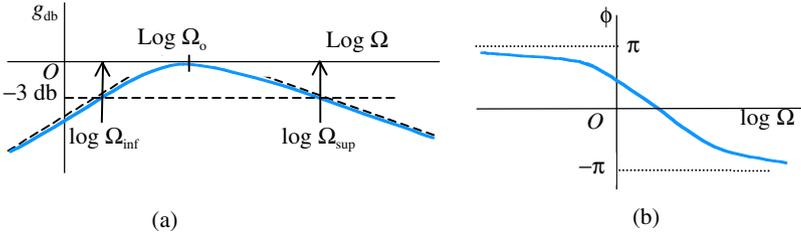


Figure 7-4 Diagramme de Bode pour le gain et pour la phase.

### 7.3 QUADRIPOLES EN T

#### a) Fonction de transfert

Considérons le quadripôle de la figure 7.5, formé par deux impédances  $Z_1$  et  $Z_3$  en série et une impédance  $Z_2$  en shunt. Si un générateur de tension  $V_e$  est branché à l'entrée, il débite une intensité  $I_e = V_e / (Z_1 + Z_2)$  à l'entrée. Si la sortie est ouverte,  $I_s$  est nulle et la tension de sortie est

$$V_s = Z_2 I_e = V_e \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

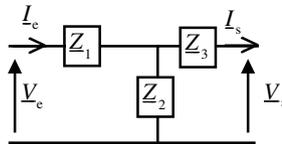


Figure 7-5 Filtre en T.

La fonction de transfert en tension est donc

$$\underline{G} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{7.11}$$

Notons que les caractéristiques du quadripôle ouvert ne dépendent pas de l'impédance  $Z_3$ . Le quadripôle est un simple diviseur de tension. Le comportement de  $G$  et  $\phi$  comme fonctions de  $\Omega$  peut être assez compliqué.

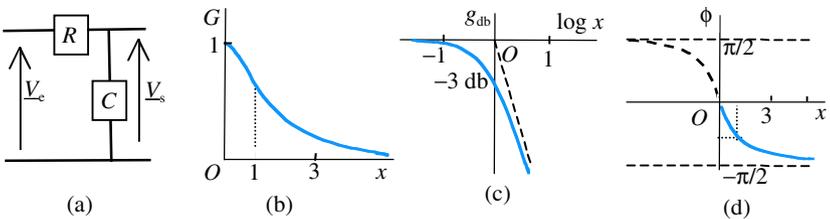
### b) Exemple de filtres passe-bas

Considérons le circuit RC de la Fig.7.6a avec les bornes du condensateur comme sortie. Nous avons alors  $\underline{Z}_1 = R$  et  $\underline{Z}_2 = 1/jC\Omega$ . En utilisant la pulsation caractéristique du circuit  $\omega_0 = 1/RC$  et posant  $x = \Omega/\omega_0$ , la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{G} = \frac{1}{1 + jx}. \quad (7.12)$$

Ce qui correspond à un gain et une phase

$$G = |\underline{G}| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad g_{\text{db}} = -10 \log(1 + x^2) \quad \text{et} \quad \phi = -\text{Arctan } x \quad (7.13)$$



**Figure 7-6** a) Circuit RC avec la sortie aux bornes du condensateur, b) le gain  $G$  en fonction de  $x = \Omega/\omega_0$ , et c) diagramme de Bode pour le gain et d) la phase en fonction de  $x$ . La bande passante est la partie grisée de l'axe des  $x$  et de log  $x$ .

La figure 7.6b illustre le gain  $G$  en fonction de  $x = \Omega/\omega_0$ , la figure 7.6c est le diagramme de Bode pour le gain en décibels et la figure 7.6d représente la phase en fonction de  $x$ . C'est un filtre passe-bas avec la pulsation de coupure  $\omega_0$ , telle que  $g_{\text{db}} = -3 \text{ db}$  et  $\phi = -\pi/4$ .

La courbe de  $g_{\text{db}}$  a pour asymptote l'axe  $g_{\text{db}} = 0$ , qui correspond à  $\Omega \rightarrow 0$ , et une autre asymptote rectiligne ( $g_{\text{db}} \rightarrow -20 \log x$ ), qui correspond à  $\Omega \rightarrow \infty$ . Schématiquement, la courbe peut être approximativement représentée par ces asymptotes rectilignes. La courbe de  $\phi$  a pour asymptotes l'axe  $\phi = 0$  (qui correspond à  $\Omega \rightarrow 0$ ) et une autre asymptote horizontale à  $\phi = -\pi/2$  (qui correspond à  $\Omega \rightarrow \infty$ ).

### c) Exemple de filtres passe-haut

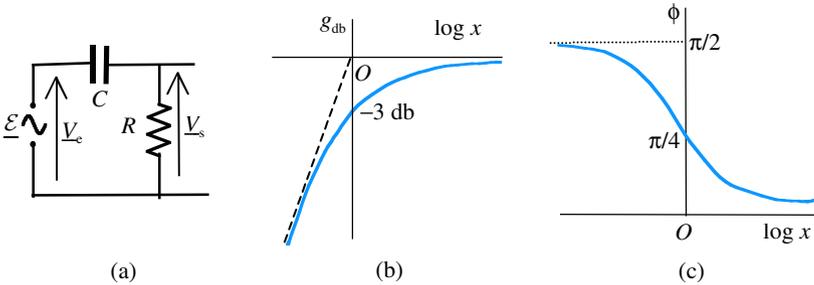
Si nous prenons les bornes de la résistance comme sortie (Fig.7.7a), nous avons un filtre en  $T$  avec  $\underline{Z}_1 = 1/jC\Omega$  et  $\underline{Z}_3 = R$ . Posant  $\omega_0 = 1/RC$  et  $x = \Omega/\omega_0$ , la fonction de transfert (7.11) s'écrit alors

$$\underline{g} = \frac{jx}{1 + jx} \quad (7.14)$$

Ce qui correspond à un gain et une phase

$$G = |\underline{g}| = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad g_{\text{db}} = 10 \log x^2 - 10 \log(1 + x^2),$$

$$\phi = \pi/2 - \text{Arctan } x = \text{Arctan}(1/x) \quad (7.15)$$



**Figure 7-7** a) Circuit RC avec la sortie aux bornes de la résistance, b) et c) diagramme de Bode correspondant. La bande passante est la partie grisée de l'axe  $\log x$  où  $x = \Omega/\omega_0$ .

Les figures 7.7b et 7.7c illustrent le diagramme de Bode pour ce filtre. C'est un filtre passe-haut avec une coupure en  $x = 1$  (c'est-à-dire  $\Omega = \omega_0$ ) alors  $g_{\text{db}} = -3 \text{ dB}$  et  $\phi = \pi/4$ . La courbe de  $g_{\text{db}}$  a pour asymptote l'axe  $g_{\text{db}} = 0$  (qui correspond à  $\Omega \rightarrow \infty$ ) et une autre asymptote rectiligne oblique ( $g_{\text{db}} \rightarrow 20 \log x$ ), qui correspond à  $\Omega \rightarrow 0$ . La courbe de  $\phi$  a pour asymptote l'axe  $\phi = 0$  (qui correspond à  $\Omega \rightarrow 0$ ) et une autre asymptote horizontale à  $\phi = \pi/2$  (qui correspond à  $\Omega \rightarrow \infty$ ).

#### d) Exemple de filtres passe-bande

Considérons le quadripôle de la Fig. 7.8, formé par un circuit RCL avec les bornes de la résistance comme sortie. Nous avons alors  $\underline{Z}_1 = j(L\Omega - 1/C\Omega)$  et  $\underline{Z}_2 = R$ . Nous utilisons le facteur de qualité du circuit  $f_q = \omega_0 L/R$  et nous posons  $x = \Omega/\omega_0$ , où  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  est la pulsation caractéristique du circuit. La fonction de transfert (7.11) s'écrit alors

$$\underline{g}(\Omega) \equiv G e^{j\phi} \equiv \frac{V_s}{V_e} = \frac{x}{x + j f_q (x^2 - 1)} \quad (7.16)$$

Le gain en tension  $G$  et la phase  $\phi$  s'écrivent donc

$$G(\Omega) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + f_q^2(1-x^2)^2}}, \quad \phi = \text{Arctan} \left[ \frac{f_q(1-x^2)}{x} \right] \quad (7.17)$$

$G$  a un maximum  $G_o = 1$  pour  $x = 1$ , c'est-à-dire pour  $\Omega$  égale à la pulsation propre  $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$ , pour laquelle  $\phi = 0$ . Le gain  $G$  prend la valeur  $G_o/\sqrt{2}$  pour

$$\Omega_{(\pm)} = (\omega_o/2f_q) \left[ \sqrt{1 + 4f_q^2} \pm 1 \right] \quad (7.18)$$

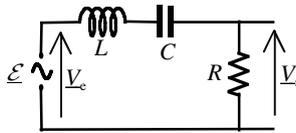


Figure 7-8 Filtre passe-bande.

Ce sont les mêmes pulsations  $\Omega_{(\pm)}$  de la section 5.3 qui déterminent la *largeur de résonance*  $\Gamma = \Omega_{(+)} - \Omega_{(-)} = \omega_o/f_q = R/L$ . Ce quadripôle est donc un filtre passe-bande. La Fig. 7.9a illustre la variation du gain  $G$  en fonction de  $\Omega$ . La Fig. 7.9b illustre le gain en décibels  $g_{db}$  en fonction de  $\log \Omega$  ; il a un maximum nul pour  $\Omega = \omega_o$ . Les pulsations de coupure  $\Omega_{(-)}$  et  $\Omega_{(+)}$  correspondent à  $g_{db} = -3$  db. La Fig. 7.9c illustre la phase  $\phi$  de  $\underline{G}(\Omega)$ . On trouve que  $\underline{V}_s$  est en avance de phase sur  $\underline{V}_e$  à basse fréquence et en retard à haute fréquence. Ce déphasage est nul à la résonance.

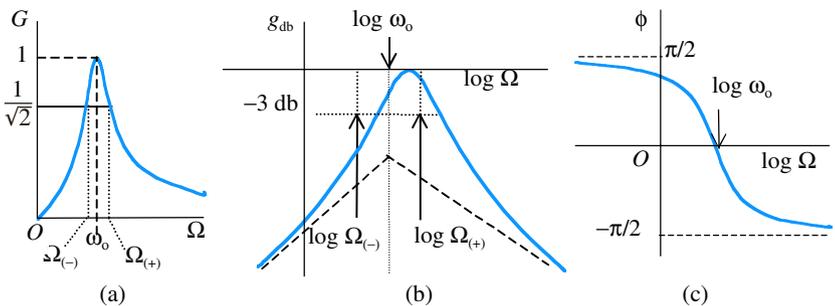


Figure 7-9 a) Le gain  $G$  du filtre LCR, b) et c) diagramme de Bode correspondant. La bande passante est la partie grisée de l'axe  $\log \Omega$ .

$G$  et  $\phi$  varient lentement en fonction de la fréquence au voisinage des coupures dans le cas des quadripôles RC, et plus rapidement dans le cas du quadripôle RLC.



En utilisant des circuits formés d'un plus grand nombre d'éléments, on peut avoir des coupures de fréquence plus nettes. Des filtres peuvent être conçus pour toutes les gammes de fréquence, aussi bien à basse qu'à haute fréquence. Les condensateurs opposent une plus grande impédance à basse fréquence, contrairement aux selfs, tandis que les résistances ne dépendent pas de la fréquence. Les résistances jouent un rôle important dans la constante de temps du circuit, limitant plus ou moins le courant. Notons que les composantes produisent aussi des bruits parasites, c'est-à-dire de faibles signaux aléatoires.

## 7.4\* RÉPONSE D'UN FILTRE À UN SIGNAL

Si le signal d'entrée est sinusoïdal de la forme  $\underline{V}_e = \underline{A}_e e^{j\omega t}$ , le signal de sortie est

$$\underline{V}_s(t) = \underline{\mathcal{G}}(\nu) \underline{A}_e e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \omega = 2\pi\nu \quad (7.19)$$

Un signal d'entrée quelconque peut être considéré comme une superposition de signaux harmoniques de diverses fréquences :

$$\underline{V}_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \underline{A}_e(\nu) e^{j\omega t}, \quad (7.20)$$

où l'intégration doit être remplacée par une sommation dans le cas d'un spectre discret.  $\underline{A}_e(\nu)$  est la *fonction spectrale* du signal. La théorie de Fourier permet d'écrire la relation inverse

$$\underline{A}_e(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{V}_e(t) e^{-j\omega t}, \quad (7.21)$$

Le système étant linéaire, chaque composante spectrale  $\underline{A}_e(\nu) e^{j\omega t}$  produit une composante  $\underline{\mathcal{G}}(\nu) \underline{A}_e(\nu) e^{j\omega t}$  à la sortie. Le signal de sortie est la superposition de ces composantes

$$\underline{V}_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \underline{\mathcal{G}}(\nu) \underline{A}_e(\nu) e^{j\omega t} \quad (7.22)$$

La fonction spectrale du signal de sortie est donc

$$\underline{A}_s(\nu) = \underline{\mathcal{G}}(\nu) \underline{A}_e(\nu) \quad (7.23)$$

Définissons la « fonction porte » au voisinage de  $t_0$ , de largeur  $\eta$  et de hauteur  $1/\eta$  par

$$\begin{aligned} \underline{V}_p(t - t_0) &= 1/\eta \quad \text{pour} \quad -\eta/2 < t - t_0 < \eta/2 \\ &= 0 \quad \text{pour} \quad t - t_0 < -\eta/2 \quad \text{ou} \quad t - t_0 > \eta/2 \end{aligned} \quad (7.24)$$

La surface sous cette courbe est égale à 1 et sa fonction spectrale est

$$\underline{A}_p(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{V}_p(t - t_0) e^{-j\omega t} = \frac{1}{\eta} \int_{t_0 - \eta/2}^{t_0 + \eta/2} dt e^{-j\omega t} = e^{-j\omega t_0} \frac{\sin(\omega\eta/2)}{\omega\eta/2} \quad (7.25)$$

La limite de la fonction porte, si  $\eta \rightarrow 0$  est désignée comme une *impulsion* (ou *fonction de Dirac*) à l'instant  $t_0$ . La propriété importante de la fonction de Dirac est que

$$\int_a^b dt f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0) \quad \text{si } a < t_0 < b$$

$$= 0 \quad \text{si } t_0 < a \text{ ou } t_0 > b \quad (7.26)$$

Sa fonction spectrale est la limite de  $\underline{A}_p(\nu)$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , c'est-à-dire

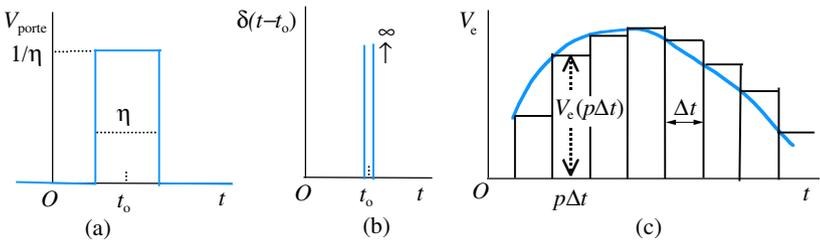
$$\underline{A}_{\text{Dirac}}(\nu) = e^{-j\omega t_0} \quad (7.27)$$

La **réponse impulsionnelle** d'un système de transmission est la réponse à un signal d'entrée  $V_e = \delta(t')$ . Utilisant les équations (7.23) et (7.27) pour  $t_0 = 0$ , nous trouvons que

$$\underline{A}_{\text{imp}}(\nu) = \underline{G}(\nu)\underline{A}_{\text{Dirac}}(\nu) = \underline{G}(\nu) \quad (7.28)$$

La fonction spectrale de la réponse impulsionnelle n'est autre que la fonction de transfert. La réponse impulsionnelle est donc (d'après 7.22)

$$\underline{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \underline{G}(\nu) e^{j\omega t} \quad (7.29)$$



**Figure 7-10** a) Fonction porte, b) fonction de Dirac et c) décomposition de  $V_e(t)$  en fonctions portes.

Connaissant la réponse impulsionnelle, nous pouvons écrire la réponse à un signal d'entrée quelconque  $\underline{V}_e$ . En effet, divisons la durée temporelle de la fonction d'entrée  $\underline{V}_e(t)$  en petits intervalles de temps  $\Delta t$  (voir la figure 7.10c). La fonction  $\underline{V}_e$  peut être considérée comme une succession de fonctions portes de largeur  $\eta = \Delta t$  multipliées par

$\underline{V}_e(p\Delta t)$ . La réponse  $\underline{V}_s$  est la superposition des réponses à tous ces signaux rectangulaires. On trouve ainsi à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\underline{V}_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underline{g}(t-t') \underline{V}_e(t') \quad (7.30)$$

L'intégrale du second membre est appelée *convolution* de  $\underline{g}$  et  $\underline{V}_e$ .

Notons aussi que, si  $V_e$  est réelle, il en est de même pour  $V_s$ . La fonction  $\underline{G}(\nu)$  vérifie donc la condition de parité (7.8) et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \underline{g}(t) &= \int_{-\infty}^0 d\nu \underline{G}(\nu) e^{j\omega t} + \int_0^{\infty} d\nu \underline{G}(\nu) e^{j\omega t} \\ &= \int_0^{\infty} d\nu G(\nu) e^{-j\omega t - j\phi(\nu)} + \int_0^{\infty} d\nu G(\nu) e^{j[\omega t + \phi(\nu)]} \\ &= 2 \int_0^{\infty} d\nu G(\nu) \cos[\omega t + \phi(\nu)] \end{aligned} \quad (7.31)$$

On utilise aussi la **réponse indicielle**  $\underline{V}_s(t)_{\text{ind}}$ , qui est la réponse à un signal d'entrée égal à l'échelon unité,  $\underline{V}_e(t) = \theta(t)$ , où  $\theta(t)$  est nulle si  $t < 0$  est égale à 1 si  $t > 0$ . Nous trouvons

$$\underline{V}_s(t)_{\text{ind}} = \int_0^{\infty} dt' \underline{g}(t-t') = \int_{-\infty}^t dt' \underline{g}(t') \quad (7.32)$$

Cette relation montre que

$$\partial \underline{V}_{s,\text{ind}} / \partial t = \underline{g}(t) \quad (7.33)$$

## 7.5\* SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Un circuit électrique est non linéaire s'il contient des éléments (résistance, self-inductance, capacité etc.) dont les caractéristiques dépendent de la tension à laquelle ils sont soumis (ou de l'intensité de courant qu'ils transportent).

Plus généralement, un système est non linéaire si sa réponse n'est pas linéaire en fonction de l'excitation. Les éléments contenant des gaz, les conducteurs céramiques, les diélectriques et les corps ferromagnétiques sont non linéaires. La linéarité d'un système est toujours une approximation qui n'est valable que dans une certaine bande de fréquence et pour des excitations faibles.

Pour étudier l'effet de la non linéarité des systèmes de transmission, supposons, par exemple, que le système transforme un signal d'entrée réel  $V_e(t)$  en un signal de sortie<sup>(1)</sup>

$$V_s(t) = H V_e(t) + K V_e(t)^2 \quad (7.34)$$

À cause du terme quadratique  $V_e(t)^2$ , le système n'est pas linéaire. Si  $V_e$  est harmonique de la forme  $V_e = A_e \cos(2\pi\nu t)$ , le signal de sortie est

$$\begin{aligned} V_s(t) &= H A_e \cos(2\pi\nu t) + K A_e^2 \cos^2(2\pi\nu t) \\ &= \frac{1}{2} K A_e^2 + H A_e \cos(2\pi\nu t) + \frac{1}{2} K A_e^2 \cos(4\pi\nu t) \end{aligned} \quad (7.35)$$

C'est la superposition d'un terme constant, d'un terme harmonique de fréquence  $\nu$  et d'un terme harmonique de fréquence  $2\nu$ . Le signal de sortie est donc déformé. De même, si le signal d'entrée est la superposition de deux signaux harmoniques de fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , le signal de sortie est une superposition d'un terme constant et de termes harmoniques de fréquences  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $2\nu_1$ ,  $2\nu_2$  et  $\nu_1 \pm \nu_2$ .



C'est ce qu'on constate facilement en écoutant deux sons de fréquences différentes ; notre oreille n'est pas donc un détecteur linéaire. Cependant si l'amplitude  $A_e$  est faible, les termes de fréquences différentes de celle du signal d'entrée sont faibles et le récepteur est presque linéaire. La distorsion des faibles signaux est donc faible ; on dit que le récepteur fonctionne alors en *petits signaux*.

D'autre part, si le signal est très faible, la réponse observée [par exemple sur l'écran d'un oscilloscope à sa limite de sensibilité] est différente du signal et irrégulière d'une façon aléatoire. Cela s'explique par les perturbations aléatoires appelées *bruit de fond*. Elles sont dues au faible rayonnement électromagnétique ambiant, qui est capté par le circuit et à l'agitation thermique des électrons de conduction dans les conducteurs. Le capteur a donc une *plage de fonctionnement*, telle que la non-linéarité et le bruit de fond sont négligeables.

## 7.6\* ANNEXE : INTÉGRATION COMPLEXE

Considérons une fonction  $f(z)$  de la variable complexe  $z$ . Supposons qu'elle a une détermination unique et qu'elle est dérivable. On dit qu'elle

(1) Dans le cas d'un système non linéaire, il n'est pas valable d'utiliser des signaux complexes puis prendre leurs parties réelles.

à un pôle au point  $z_0$ , si elle se comporte comme  $1/(z - z_0)^p$  lorsque  $z$  s'approche de  $z_0$ . Ici  $p$  est un nombre entier positif appelé *ordre du pôle*. Elle s'écrit alors comme une série de puissances de  $(z - z_0)$  sous la forme

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (7.36)$$

Considérons l'intégrale  $\int_C dz f(z)$  sur un contour fermé  $C$ . À l'exception du terme  $a_{-1}/(z - z_0)$ , les primitives de tous les termes de la série ont une détermination unique ; elles reprennent donc les mêmes valeurs au retour au point de départ sur  $C$  ; l'intégrale de tous ces termes est donc nulle (si la série des primitives est convergente). Écrivant  $(z - z_0) = \rho e^{j\phi}$ , la primitive du terme  $a_{-1}(z - z_0)^{-1}$  est

$$a_{-1} \ln(z - z_0) = a_{-1} \ln(\rho e^{j\phi}) = a_{-1} \ln \rho + ja_{-1}\phi$$

Le terme  $a_{-1} \ln \rho$  reprend la même valeur au retour au point de départ. Si le contour fermé  $C$  ne contient pas  $z_0$  (figure 7.11a), l'angle  $\phi$  reprend la même valeur et l'intégrale de ce terme est nulle. L'intégrale  $\int_C dz f(z)$  est donc nulle si le contour  $C$  ne contient aucun pôle de  $f(z)$ . Par contre, si le contour fermé  $C$  contient le pôle  $z_0$  (figure 7.11b et c), l'angle  $\phi$  varie de  $\pm 2\pi$ , selon que  $C$  est décrit dans le sens positif ou négatif respectivement. L'intégrale s'écrit alors :

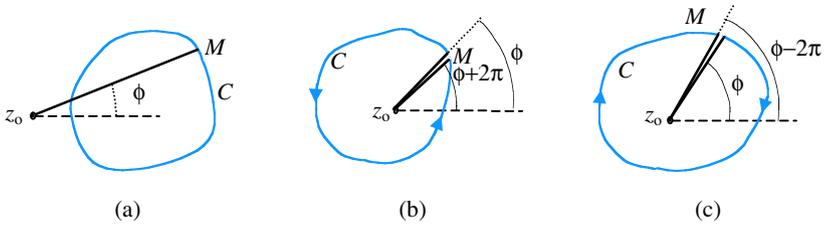
$$\int_C dz f(z) = \pm 2j\pi a_{-1}$$

$a_{-1}$  s'appelle *résidu* de  $f(z)$  en  $z_0$ . Ce résultat se généralise aux contours contenant plusieurs pôles de  $f(z)$  ; nous trouvons

$$\boxed{\int_C dz f(z) = \pm 2j\pi \sum r_j} \quad (7.37)$$

où les  $r_j$  sont les résidus des pôles de  $f(z)$  qui sont à l'intérieur du contour  $C$ . Ce résultat est appelé *théorème des résidus*.

Le théorème des résidus peut être utilisé pour évaluer certaines intégrales. Nous sommes concernés dans ce chapitre par l'intégration sur les fréquences de  $0$  à  $+\infty$ . Utilisant la symétrie  $\underline{G}(-\nu) = \underline{G}(\nu)^*$ , on étend d'abord l'intégration sur tout l'axe des réels de  $-\infty$  à  $+\infty$  puis on



**Figure 7-11** Dans le plan complexe, le nombre  $z$  représenté par  $M$  décrit un contour  $C$ .

- a) Si  $C$  ne contient pas  $z_0$  la phase de  $\phi$  de  $(z - z_0)$  reprend la même valeur.
- b) Si  $M$  tourne autour de  $z_0$  dans le sens positif,  $\phi$  varie de  $2\pi$  et
- c) Si  $M$  tourne autour de  $z_0$  dans le sens négatif,  $\phi$  varie de  $-2\pi$ .

complète cet axe par un demi-cercle dans le demi-plan supérieur ou inférieur. Si la fonction à intégrer décroît plus vite que  $|z|^{-2}$  lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ , l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 lorsque son rayon tend vers l'infini. L'évaluation de l'intégrale se réduit alors à celle des résidus aux pôles. Notons enfin que l'analyse des éléments de circuit est une modélisation et qu'aucun système physique ne répond effectivement à une excitation de fréquence infinie. Si la condition  $|f(z)| < |z|^{-2}$  n'est pas respectée, on peut multiplier  $f(z)$  par  $e^{-\eta|z|}$  pour assurer une décroissance rapide et on prend la limite  $\eta \rightarrow 0$  à la fin du calcul.



### POINTS-CLÉS

- Si un système de transmission n'est pas *linéaire*, le principe de superposition n'est pas valable ; il n'est pas alors possible d'utiliser la représentation complexe et l'analyse de Fourier des signaux.
- La *réponse impulsionnelle*  $\underline{g}(t)$  d'un système linéaire permet d'évaluer la réponse à un signal d'entrée quelconque  $\underline{V}_e$ , comme la convolution de  $\underline{g}(t)$  et  $\underline{V}_e(t)$ . La causalité implique que  $\underline{g}(t) = 0$  si  $t < 0$  ; car la réponse ne peut pas précéder le signal d'entrée. La primitive de  $\underline{g}(t)$  est la réponse *indicielle* (c'est-à-dire qui correspond à une fonction d'entrée égale à l'échelon).
- D'habitude, on évalue la fonction de transfert  $\underline{G}(\nu)$  et sa bande passante pour les valeurs positives de la fréquence. Pour évaluer la réponse impulsionnelle  $\underline{g}(t)$  ou à un signal quelconque en utilisant la convolution, il faut toujours symétriser  $\underline{G}(\nu)$  selon la règle  $\underline{G}(-\nu) = \underline{G}(\nu)^*$ .

- Si  $\phi(\omega)$  est la phase de la fonction de transfert, nous avons interprété  $\tau = -\phi(\omega)/\omega$  comme un *retard temporel*.  $\phi$  peut être positive ou négative ; le filtre peut donc produire une avance temporelle ( $\tau < 0$ ) ou un retard temporel ( $\tau > 0$ ). Par contre, le *temps de propagation de groupe*  $\tau_g = -d\phi/d\omega$  représente le temps que met effectivement le signal pour être transmis et il doit être positif. La phase  $\phi$  est donc une fonction décroissante de  $\omega$ . Le signal sinusoïdal est un concept mathématique. La relation d'incertitude exige qu'un signal physique ait toujours une bande de fréquence  $\Delta\nu$  de largeur non-nulle, car il a une durée temporelle finie  $\Delta t$ .
- La déformation d'un signal par un système de transmission est due aux variations du gain  $G$  et de la phase  $\phi$  en fonction de la fréquence. Si un signal est formé de plusieurs composantes spectrales, le système de transmission produit une atténuation (ou une amplification) qui n'est pas la même pour ces composantes et la phase produit des décalages temporels différents pour ces composantes.

## QUESTIONS DE RÉFLEXION

1. Expliquez les notions suivantes : Système de transmission linéaire et stationnaire, fonction de transfert, gain et gain en décibels, bande passante et fréquences de coupure d'un filtre. Quels sont les différents types de filtres ?
2. Quelle est l'origine de  $\sqrt{2}$  dans la définition des valeurs efficaces et quelle est l'origine de  $-3$  db dans la définition de la bande passante ? Expliquez ce qu'on entend par *diagramme de Bode*.
3. On suppose que la phase  $\phi$  de la fonction de transfert  $\underline{G}(\omega)$  est comprise entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Supposant que  $V_s$  est réelle si  $V_e$  est réelle, montrer que  $\underline{G}(\omega)$  vérifie la relation de réflexion  $\underline{G}(\omega) = \underline{G}(-\omega)^*$ , c'est-à-dire  $G(\omega) = G(-\omega)$  et  $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$ .
4. L'antenne d'un poste de radio reçoit les ondes électromagnétiques. Des courants électriques de mêmes fréquences y sont induits et ces courants alimentent un circuit *LCR*. Celui-ci permet de sélectionner la fréquence de l'onde choisie. Quelles sont les propriétés de ce système comme filtre ?
5. La fonction de transfert du quadripôle en  $T$  de la figure 7.5 est  $\underline{G}(\Omega) = \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ . Est-il raisonnable que  $\underline{G}(\Omega)$  ne dépende pas de

$\underline{Z}_3$  ? Que devient la fonction de transfert d'un quadripôle en  $T$  si  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  sont de même nature (deux résistances, deux condensateurs ou deux self-inductances) ?

**6.** Considérons un filtre dont la fonction de transfert est  $\underline{G}(\omega)$  et un signal d'entrée qui est la superposition de deux signaux harmoniques :  $\underline{V}_{e,1} + \underline{V}_{e,2} = A e^{j(\omega t + \phi)} + B e^{j(\omega' t + \phi')}$ . Écrivez l'expression du signal de sortie et vérifiez qu'il n'a pas la même forme que le signal d'entrée.

## EXERCICES CORRIGÉS

**7-1** On considère les quadripôles de la Fig. 7.12. On suppose que la résistance du circuit (b) est faible. Calculez dans chaque cas la fonction de transfert, le gain et la phase  $\phi$  de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée. Quelle est la nature de la bande passante dans chaque cas ?

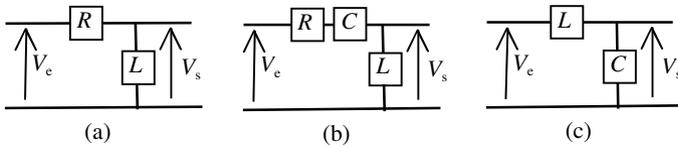


Figure 7-12

**7-2** On considère le quadripôle de la Fig. 7.13, où  $R$  est faible. Calculez la fonction de transfert, le gain et le déphasage  $\phi$  de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée. Déterminez la bande passante.

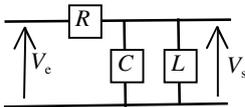


Figure 7-13

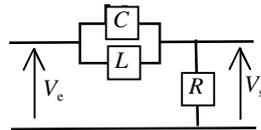


Figure 7-14

**7-3** On considère le filtre de la Fig. 7.14 où  $L$  est la self-inductance d'une bobine de résistance négligeable. Calculez la fonction de transfert, le gain et la phase. Quelle est la nature de ce filtre ?

**7-4** On considère le quadripôle de la figure 7.15 alimenté par un générateur de pulsation  $\Omega$ . **a)** Déterminez sa fonction de transfert. **b)** Calculez le gain en décibels si  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  sont deux résistances égales à  $R$  tandis que  $\underline{Z}_3$  et  $\underline{Z}_4$  sont deux condensateurs de même capacité  $C$ . **c)** Calculez le gain en décibels si  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_3$  sont deux résistances égales à  $R$  tandis que  $\underline{Z}_2$  et  $\underline{Z}_4$  sont deux condensateurs de même capacité  $C$ .

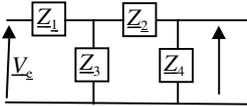


Figure 7-15

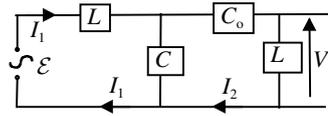


Figure 7-16

**7-5\*** Déterminez les pulsations normales du circuit de la Fig. 7.16. Écrivez la fonction de transfert en tension et discuter la nature du filtre.

**7-6\*** Écrivez la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal dont la fonction de transfert  $\underline{G}(\nu)$  est égale à  $G$  pour  $0 < \nu < \nu_0$  et  $\underline{G}(\nu) = 0$  pour  $\nu > \nu_0$ . Déduisez-en la réponse indicielle de ce filtre.

**7-7\*** Évaluez la réponse impulsionnelle des filtres passe-bas, et passe-bande de la section 7.3, dont les fonctions de transfert sont respectivement  $\underline{G}_1 = 1/(1 + jx)$  et  $\underline{G}_2 = 2j\epsilon x/(1 + 2j\epsilon x - x^2)$ , où  $\epsilon = 1/2f_q$ .

**7-8\*** Supposons que la tension aux bornes d'une résistance non linéaire est  $V = R_0 i + \alpha i^2$ . Un circuit est formé par cette résistance, une self-inductance  $L$  et un générateur de force électromotrice constante  $\mathcal{E}$  en série. Écrivez l'équation différentielle pour l'intensité dans ce circuit. Supposant que la f.é.m. est branchée à l'instant  $t = 0$ , montrez que la solution s'écrit

$$i(t) = \frac{2\mathcal{E}}{R_0} \frac{\operatorname{tgh}(\delta t)}{\operatorname{tgh}(\delta t) + \sqrt{1 + \beta}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{4\alpha\mathcal{E}}{R_0^2} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{R_0}{2L} \sqrt{1 + \beta}$$

Déterminez la réponse indicielle si la sortie est prise aux bornes de la résistance. Quelle est la limite de  $i$  dans le régime permanent ( $t \gg 1/\delta$ ) ? Comparez avec le cas d'une résistance ohmique ( $\alpha = 0$ ). Considérez aussi le cas où  $V = \alpha i^2$ .

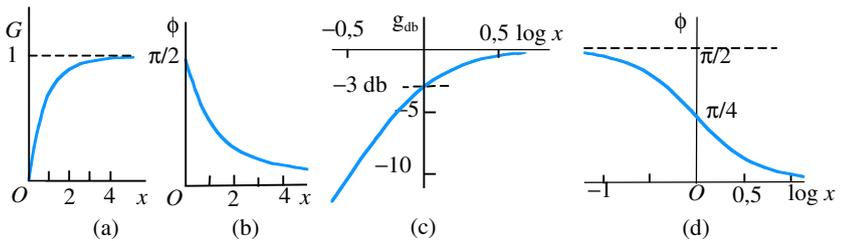
## SOLUTIONS DES EXERCICES

**7-1 a)** Il s'agit d'un circuit en  $T$  (voir la section 7.3) avec  $\underline{Z}_1 = R$  et  $\underline{Z}_2 = j\omega L$ . Posant  $x = \omega/\omega_0$ , où  $\omega_0 = R/L$ , nous pouvons écrire

$$\underline{G} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jx}{1 + jx} = \frac{x(x + j)}{1 + x^2}$$

Le gain  $G$ , le gain en décibels  $g_{\text{db}}$  et la phase  $\phi$  sont respectivement

$$G = x/\sqrt{1 + x^2}, \quad g_{\text{db}} = -10 \log(1 + 1/x^2) \quad \text{et} \quad \phi = \text{Arctan}(1/x)$$



**Figure 7-17** **a)**  $G$  en fonction de  $x$ , **b)**  $\phi$  en fonction de  $x$ , **c)**  $g_{\text{db}}$  en fonction de  $\log x$  et **d)**  $\phi$  en fonction de  $\log x$ .

Les figures 7.17a et 7.17b illustrent les variations de  $G$  et  $\phi$  en fonction de  $x$ . Le gain augmente de 0 pour  $x = 0$  (c'est-à-dire  $\omega = 0$ ) et tend asymptotiquement vers 1 pour  $x \rightarrow \infty$  (c'est-à-dire  $\omega \rightarrow \infty$ ). C'est un filtre passe-haut. Les limites de la bande passante sont déterminées par la condition  $G = G_{\text{max}}/\sqrt{2}$ ; ce qui correspond à  $x = 1$ , c'est-à-dire  $\omega = \omega_0$ . La phase  $\phi$  diminue de  $\pi/2$  pour  $\omega = 0$  à 0 pour  $\omega \rightarrow \infty$ . Les figures 7.17c et 7.17d illustrent les variations de  $g_{\text{db}}$  et  $\phi$  en fonction de  $\log x$  (diagrammes de Bode).

**b)** Pour étudier le circuit (b), posons  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $R = 2L\omega_0\varepsilon$  et  $x = \omega/\omega_0$ . La fonction de transfert, le gain et la phase s'écrivent alors

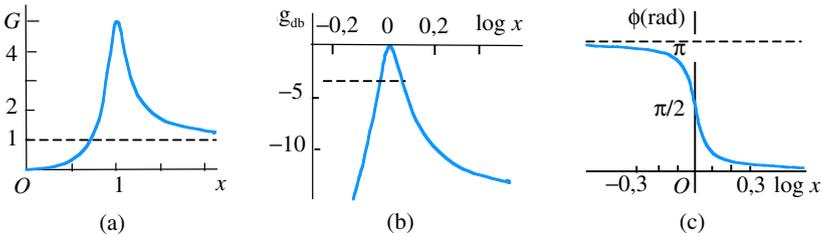
$$\underline{G} = \frac{\underline{V}_L}{\underline{V}_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega - j/C\omega} = \frac{x^2}{x^2 - 1 - 2j\varepsilon x}$$

$$G = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4\varepsilon^2 x^2}} \quad \text{et} \quad \phi = \text{Arctan}\left(\frac{2\varepsilon x}{x^2 - 1}\right) \quad (0 < \phi < \pi)$$

$G$  augmente de 0 pour  $x = 0$  à un maximum  $G_{\max} = 1/2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \approx 1/2\varepsilon$  pour  $x = 1/\sqrt{1-2\varepsilon^2} \approx 1 + \varepsilon^2$  puis décroît à 1 pour  $x \rightarrow \infty$ . Le circuit est donc un filtre passe-bande. Les limites de la bande passante sont déterminées par la condition  $G = G_{\max}/\sqrt{2}$ ; ce qui donne  $x \approx 1 \pm \varepsilon$ . Le gain en décibels

$$g_{\text{db}} = 40 \log x - 10 \log[(x^2 - 1)^2 + 4\varepsilon^2 x^2] + 10 \log[4\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)]$$

La variation de  $G$  en fonction de  $x$  est illustrée dans la Fig. 7.18a. Celles de  $g_{\text{db}}$  et  $\phi_b$  en fonction de  $\log x$  (diagramme de Bode) sont illustrées dans les figures 7.18b et 7.18c.



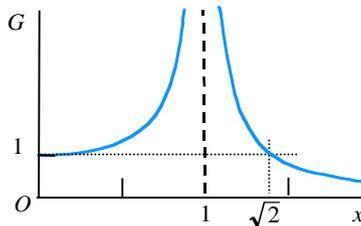
**Figure 7-18** a)  $G$  en fonction de  $x$ , b)  $g_{\text{db}}$  en fonction de  $\log x$  et c)  $\phi$  en fonction de  $\log x$ .

**c)** Dans le cas du filtre idéal  $LC$ , posant  $\omega_0^2 = 1/LC$ , nous trouvons

$$\underline{G} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Dans ce cas la fonction de transfert est réelle. Le gain est

$$G = 1/|1 - x^2|$$



**Figure 7-19**

La variation de  $G$  en fonction de  $x$  est illustrée dans la Fig. 7.19. Elle augmente de 1 pour  $x = 0$  (c'est-à-dire  $\omega = 0$ ) à l'infini pour  $x = 1$  (c'est-à-dire  $\omega = \omega_0$ ) et tend vers zéro comme  $\omega_0^2/\omega^2$  à haute fréquence. Dans ce cas, la bande passante ne peut pas être définie de la

façon habituelle. Si on la définit (arbitrairement) par la condition  $G > 1$ , on trouve que le filtre est passe-bas avec une bande passante  $x < \sqrt{2}$ , c'est-à-dire  $\omega < \sqrt{2} \omega_0$ . Cependant, si on suppose que  $L$  est la self-inductance d'une bobine de faible résistance  $R$ , on trouve un gain  $G = [(x^2 - 1)^2 + 4\gamma^2 x^2]^{-1/2}$ , où  $\gamma^2 = R^2 C / 4L$ . Le gain a alors un maximum  $\approx 1/2 \gamma$  pour  $x \approx 1$  et la bande passante est approximativement  $1 - \gamma < x < 1 + \gamma$ . À la limite  $\gamma \rightarrow 0$  (c'est-à-dire)  $R \rightarrow 0$ , la largeur de cette bande devient nulle.

**7-2** L'impédance du condensateur et de la self-inductance montés en parallèle est  $Z_{CL} = j\omega / C(\omega_0^2 - \omega^2)$ , où  $\omega_0 = \sqrt{LC}$ . L'impédance totale vue de l'entrée du circuit est  $Z_T = R + j\omega / C(\omega_0^2 - \omega^2)$ . L'intensité de courant débitée par le générateur est donc  $I = V_e / Z_T$  et la tension aux bornes de  $C$  et  $L$  est  $V_{LC} = Z_{CL} I$ . Posant  $x = \omega / \omega_0$  et  $f_q = 1 / RC\omega_0$  (facteur de qualité du circuit), la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{g} = \frac{V_{LC}}{V_e} = \frac{x f_q}{x f_q + j(x^2 - 1)}$$

Le gain, la phase et le gain en décibels sont respectivement

$$G = x f_q / \sqrt{(x^2 - 1)^2 + x^2 f_q^2}, \phi_b = \text{Arctan}[(1 - x^2) / f_q x].$$

$$g_{db} = 20 \log(f_q x) - 10 \log[(x^2 - 1)^2 + f_q^2 x^2]$$

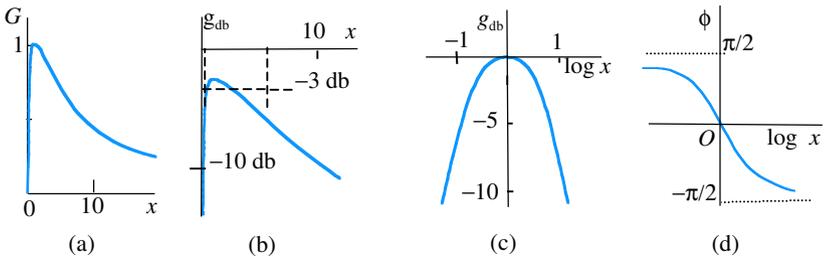


Figure 7-20

Les variations de  $G$  et  $g_{db}$  en fonction de  $x$  sont illustrées dans les figures 7.20a et 7.20b.  $G$  augmente de 0 pour  $x = 0$  à un maximum  $G_{max} = 1$  pour  $x = 1$  puis décroît comme  $f_q/x$  pour  $x \rightarrow \infty$ . C'est donc un filtre passe-bande. Les limites de la bande passante sont déterminées par la condition  $G = G_{max} / \sqrt{2}$ , qui donne  $x = \frac{1}{2} [\sqrt{4 + f_q^2} \pm f_q]$ .

La bande passante en  $\omega$  est donc  $[\frac{1}{2}\omega_0(\sqrt{4+f_q^2}-f_q), \frac{1}{2}\omega_0(\sqrt{4+f_q^2}+f_q)]$ . La largeur de bande  $f_q\omega_0$  est d'autant plus grande que  $f_q$  est grande (c'est-à-dire  $R$  est faible). Si  $R$  est faible ( $f_q \gg 2$ ), la bande passante est  $[\omega_0/f_q, \omega_0 f_q]$ . La fréquence de coupure inférieure est basse. Les variations de  $g_{db}$  et  $\phi$  en fonction de  $\log x$  (diagramme de Bode) sont illustrées dans la Fig. 7.20b et 7.20d.

**7-3** Nous avons dans ce cas un circuit en  $T$  avec  $\underline{Z}_2 = R$  et  $\underline{Z}_1$  égale à l'impédance équivalente de la self et le condensateur montés en parallèle, soit  $\underline{Z}_1 = jL\Omega/(1 - CL\Omega^2)$ . Posons  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $f_q = \omega_0 L/R$  (facteur de qualité) et  $x = \Omega/\omega_0$ . La fonction de transfert s'écrit alors

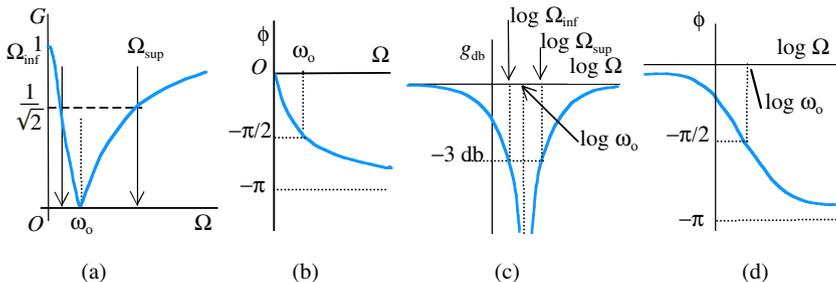
$$\underline{G} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + jxf_q}$$

Le gain en tension  $G$  et la phase  $\phi$  sont

$$G = \sqrt{\frac{(1 - x^2)^2}{(1 - x^2)^2 + x^2 f_q^2}}$$

$$\phi = \text{phase}(1 - x^2 - jxf_q) = \arctan \frac{xf_q}{x^2 - 1} \quad (-\pi < \phi < 0)$$

La figure 7.21a illustre la variation de  $G$  en fonction de  $\Omega$ . Le gain diminue de 1 pour  $\Omega = 0$  à 0 pour  $\Omega = \omega_0$  puis augmente asymptotiquement à 1 à haute fréquence. La valeur  $G = 0$  pour  $\Omega = \omega_0$  veut dire qu'il s'agit d'un circuit bouchon ; l'intensité débitée  $I$  est alors minimale. La variation de la phase  $\phi$  est illustrée dans la Figure 7.21b. Elle diminue de 0 pour  $\Omega = 0$  à  $-\pi/2$  pour  $\Omega = \omega_0$  et asymptotique-



**Figure 7-21** a) Le gain  $G$  en fonction de  $\Omega$ , b) la phase  $\phi$  en fonction de  $\Omega$ , c) et d) diagramme de Bode. La bande passante est la partie grisée de l'axe  $\log \Omega$ .

ment à  $-\pi$  à haute fréquence. Les figures 7.21c et 7.21d sont le diagramme de Bode pour ce circuit. Le quadripôle est un filtre coupe-bande. Les pulsations de coupure sont données par la condition  $G^2 = 1/2$  ; elles sont donc

$$\Omega_{\min} = \frac{1}{2} \omega_0 [\sqrt{f_q^2 + 4} - f_q] \quad \text{et} \quad \Omega_{\max} = \frac{1}{2} \omega_0 [\sqrt{f_q^2 + 4} + f_q]$$

**7-4 a)** Si la sortie est ouverte,  $\underline{Z}_2$  et  $\underline{Z}_4$  sont en série. Elles sont équivalentes à  $\underline{Z}' = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4$ . Les impédances  $\underline{Z}'$  et  $\underline{Z}_3$  sont en parallèle ; elles sont donc équivalentes à  $\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)$ . L'impédance totale du circuit à l'entrée est

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

L'intensité débitée est  $\underline{I}_e = \underline{V}_e/\underline{Z}_e$ . L'intensité dans  $\underline{Z}_4$  est  $\underline{I}_4 = \underline{I}_e \underline{Z}_{\text{eq}}/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)$ . La tension aux bornes de  $\underline{Z}_4$ , c'est-à-dire la tension de sortie, est donc  $\underline{V}_s = \underline{I}_4 \underline{Z}_4 = \underline{V}_e \underline{Z}_4 \underline{Z}_{\text{eq}}/\underline{Z}_e(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)$ .

Nous en déduisons que

$$\underline{G} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}$$

Comme vérification, si  $\underline{Z}_4 \rightarrow \infty$ , nous retrouvons la fonction de transfert du quadripôle en  $T$ .

**b)** Dans le cas  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R$  et  $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = 1/jC\omega$ , posant  $\omega_0 = 1/RC$  et  $x = \omega/\omega_0$ , nous trouvons

$$\underline{G} = 1/(1 - x^2 + 3jx)$$

Le gain et la phase sont

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + 7x^2 + x^4}}, \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \frac{3x}{x^2 - 1} \quad (-\pi < \phi < 0)$$

$G$  décroît en fonction de  $x$  à partir de 1 pour  $x = 0$ . C'est un filtre passe bas. Le gain en décibels est

$$g_{\text{db}} = 20 \log(G/G_{\max}) = -10 \log(1 + 7x^2 + x^4)$$

La pulsation de coupure est telle que  $G = G_{\max}/\sqrt{2}$  d'où  $x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{53} - 7) = 0,140$  et  $x = 0,374$ . Notons que, si  $x \rightarrow \infty$ ,  $g_{\text{db}} \rightarrow -40 \log x + \mathcal{O}(1/x^2)$ . Les variations de  $G$  et  $g_{\text{db}}$  en fonction de  $x$  sont illustrées dans les figures 7.22a et 7.22b. Celles de  $g_{\text{db}}$  et  $\phi_b$  en fonction de  $\log x$  (diagramme de Bode) sont illustrées dans les figures 7.22c et 7.22d.

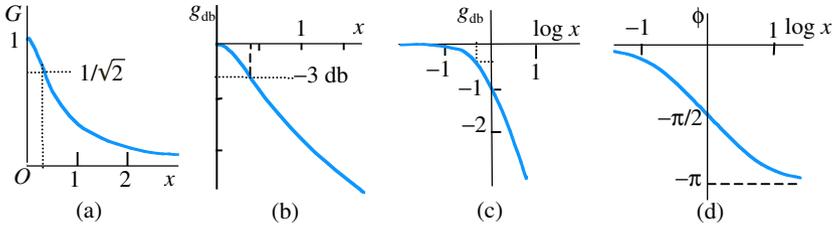


Figure 7-22

**c)** Dans le cas  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3 = R$  et  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_4 = 1/jC\omega$ , posant  $\omega = x\omega_0$ , où  $\omega_0 = 1/RC$ , nous trouvons

$$\underline{G} = 1/(4 + jx)$$

Le gain et la phase sont

$$G = 1/\sqrt{16 + x^2} \quad \text{et} \quad \phi = -\text{Arctan}(x/4) \quad (-\pi/2 < \phi < 0)$$

$G$  décroît en fonction de  $x$  à partir de  $\frac{1}{4}$  pour  $x = 0$ . C'est un filtre passe bas. Le gain en décibels est

$$g_{\text{db}} = 20 \log(G/G_{\text{max}}) = -10 \log(1 + x^2/16)$$

La pulsation de coupure est telle que  $G = G_{\text{mx}}/\sqrt{2}$ , d'où  $x = 4$ . Notons que si  $x \rightarrow \infty$ ,  $g_{\text{db}} \rightarrow 20 \log 4 - 20 \log x$ . Les variations de  $G$  et  $g_{\text{db}}$  en fonction de  $x$  pour sont illustrées dans les figures 7.23a et 7.23b et celles de  $g_{\text{db}}$  et  $\phi$  en fonction de  $\log x$  (diagramme de Bode) sont illustrées dans les figures 7.23c et 7.23d.

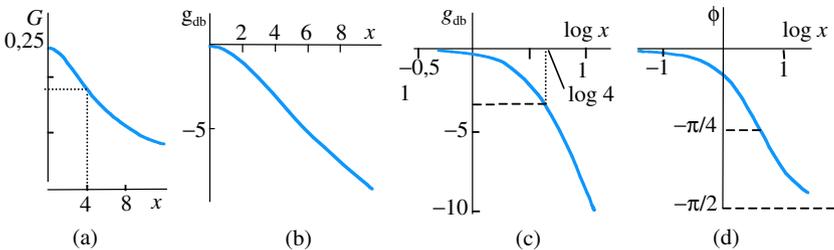


Figure 7-23

**7-5\*** Les équations des mailles sont

$$\underline{Z}_L I_1 + \underline{Z}_C (I_1 - I_2) = \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_L I_2 + \underline{Z}_{C_0} I_2 - \underline{Z}_C (I_1 - I_2) = 0$$

Cherchons des solutions de la forme  $I_i = A_i e^{j\omega t}$ , nous trouvons l'équation caractéristique  $\underline{Z}_L(\underline{Z}_L + \underline{Z}_{C_0}) + \underline{Z}_C(2\underline{Z}_L + \underline{Z}_{C_0}) = 0$ . Posant  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}$  et  $\omega'^2 = \frac{1}{LC}$ , cette équation s'écrit

$$\omega^4 - (\omega_0^2 + 2\omega'^2)\omega^2 + \omega'^2\omega_0^2 = 0.$$

Les pulsations normales sont les racines de cette équation :

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{1}{2} [2\omega'^2 + \omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 + 4\omega'^4}]$$

$$\text{et } \omega_{(2)}^2 = \frac{1}{2} [2\omega'^2 + \omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 + 4\omega'^4}]$$

Si la force électromotrice est  $\underline{\mathcal{E}} = \underline{\mathcal{E}}_m e^{j\omega t}$ , les amplitudes des courants sont

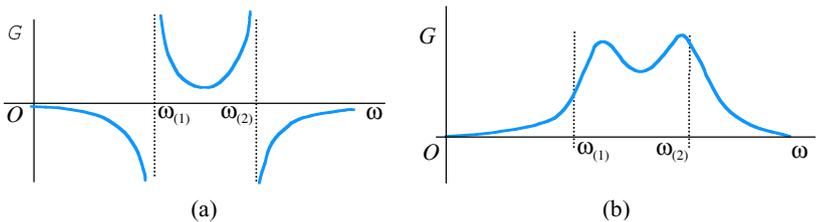
$$\underline{I}_1 = j\underline{\mathcal{E}} \frac{\omega}{L} \frac{\omega'^2 + \omega_0^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_{(1)}^2)(\omega^2 - \omega_{(2)}^2)}$$

$$\text{et } \underline{I}_2 = j\underline{\mathcal{E}} \frac{\omega}{L} \frac{\omega'^2}{(\omega^2 - \omega_{(1)}^2)(\omega^2 - \omega_{(2)}^2)}$$

La tension de sortie est  $\underline{V}_L = \underline{Z}_L \underline{I}_2$  et la fonction de transfert est

$$\underline{\mathcal{G}} = \frac{\underline{Z}_L \underline{I}_2}{\underline{\mathcal{E}}} = - \frac{\omega'^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_{(1)}^2)(\omega^2 - \omega_{(2)}^2)}$$

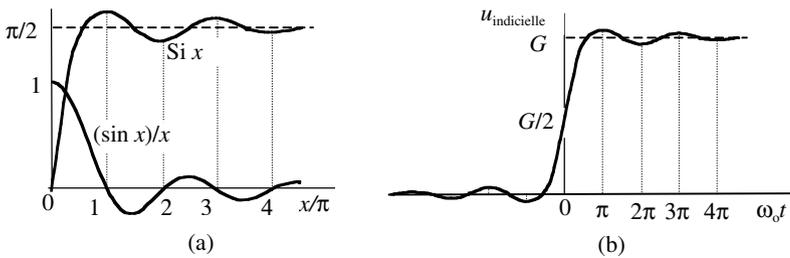
Elle est réelle dans ce cas, à cause de l'absence d'amortissement (c'est-à-dire de résistance). Elle tend vers l'infini, si la pulsation d'excitation tend vers l'une des pulsations normales (Fig. 7.24a). Le gain  $G$  est le module de  $\underline{\mathcal{G}}$  (7.24b). Dans les cas réalistes, la résistance n'est pas nulle mais faible,  $G$  reste fini et il a un maximum si  $\Omega$  est proche de l'une des pulsations normales. Le circuit est donc un filtre passe-bande. Si on supprime le condensateur  $C_0$ , tout en maintenant le fil de connexion, c'est-à-dire à la limite  $C_0 \rightarrow \infty$ ,  $\omega_{(1)}$  tend vers zéro et  $\omega_{(2)}$  tend vers  $\omega' \sqrt{2}$  ; le circuit est alors un filtre passe-bas.



**Figure 7-24** a) la fonction de transfert et b) le gain en fonction de  $\Omega$ .

**7-6\*** Pour évaluer la réponse impulsionnelle, nous devons d'abord étendre la fonction de transfert  $\underline{G}(\nu)$  aux fréquences négatives selon l'équation  $\underline{G}(-\nu) = \underline{G}(\nu)^*$ . La réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier de  $\underline{G}(\nu)$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \underline{g}(t) &= \int_0^{\nu_0} d\nu e^{i\omega t} \underline{G}(\nu) + \int_{-\nu_0}^0 d\nu e^{i\omega t} \underline{G}(\nu) \\ &= G \int_0^{\nu_0} d\nu e^{i\omega t} + G \int_0^{\nu_0} d\nu e^{-i\omega t} = \frac{G \sin(2\pi\nu_0 t)}{\pi t} \\ &= 2\nu_0 G \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{où } x = 2\pi\nu_0 t \end{aligned}$$



**Figure 7-25 a)** La fonction  $(\sin x)/x$ , la fonction  $\text{Si } x$  et **b)** la réponse indicelle en fonction de  $\omega_0 t$ .

La réponse indicelle est la réponse à la tension d'entrée égale à l'échelon ; c'est la convolution de la fonction  $\underline{g}(t)$  et la fonction échelon [voir l'équation (7.30)] :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{\text{ind}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \underline{g}(\tau) \theta(t - \tau) = \int_{-\infty}^t d\tau \underline{g}(\tau) \\ &= \frac{G}{\pi} \left[ \int_0^t d\tau \frac{\sin(\omega_0 \tau)}{\tau} + \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{\sin(\omega_0 \tau)}{\tau} \right] \\ &= \frac{G}{\pi} \left[ \int_0^{\omega_0 t} d\xi \frac{\sin \xi}{\xi} + \int_0^{\infty} d\xi \frac{\sin \xi}{\xi} \right] = \frac{G}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \text{Si}(\omega_0 t) \right] \end{aligned}$$

où nous avons posé  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ , fait le changement de variable  $\xi = \omega_0 \tau$  et introduit la fonction

$$\text{Si}(x) = \int_0^x d\xi \frac{\sin \xi}{\xi}$$

appelée *intégrale de sinus*. Elle est nulle pour  $x = 0$  et elle tend vers  $\pi/2$  si  $x \rightarrow \infty$ . Elle est impaire en  $x$  comme on peut le vérifier facilement. Les fonctions  $(\sin x)/x$  et  $\text{Si } x$  sont représentées dans la figure 7.25a. La réponse indicelle  $u(t)_{\text{ind}}$  est illustrée dans la figure 7.25b.

En absence de coupure  $\omega_0 \rightarrow \infty$ , la réponse tend vers  $G\theta(t)$  (avec  $\theta(0) = 1/2$ ), comme prévu.

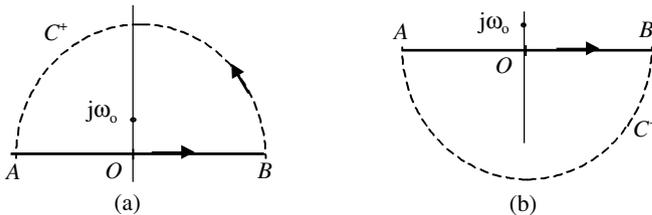
**7-7\*** La réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier de la fonction de transfert. Dans le cas du premier circuit  $\underline{g}_1$  n'est pas suffisamment décroissante pour  $x \rightarrow \infty$ . Nous la multiplions par un facteur de décroissance approprié, tel que  $e^{-\eta/|\omega|}$  et nous prenons  $\eta = 0$  à la fin du calcul, alors

$$\underline{g}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{1}{1+jx} e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{-j\nu_0}{\omega - j\omega_0} e^{-\eta|\omega|} e^{j\omega t}$$

L'intégrant a un pôle en  $j\omega_0$ . Si  $t$  est positif, nous complétons l'axe des  $\omega$  réels par un demi-cercle  $C^+$  de grand rayon dans le demi-plan supérieur (Fig. 7.26a) ; car sur  $C^+$  la fonction  $e^{j\omega t} = e^{j(\rho \cos \phi + j\rho \sin \phi)t} \rightarrow 0$ . Le pôle est à l'intérieur de ce contour décrit dans le sens positif et son résidu est  $-j\nu_0 e^{-\eta|\omega_0|} e^{-\omega_0 t}$ . Le théorème des résidus donne alors (en prenant la limite  $\eta \rightarrow 0$ )

$$\underline{g}_1(t) = 2j\pi \times \text{résidu} = \omega_0 e^{-\omega_0 t} \quad (\text{si } t > 0).$$

En revanche, si  $t$  est négatif, nous complétons l'axe des  $\omega$  réels par un demi-cercle  $C^-$  de grand rayon dans le demi-plan inférieur (Fig. 7.26b). Aucun pôle n'est à l'intérieur de ce contour et l'intégrale est nulle.



**Figure 7-26** Évaluation de la réponse impulsionnelle  $\underline{g}_1(t)$  par intégration complexe.

Dans le cas du filtre passe-bande RLC de fonction de transfert  $\underline{g}_2$ , où  $x = \omega/\omega_0$  et  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , nous posons  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ . La réponse impulsionnelle s'écrit

$$\underline{g}_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \underline{g}_2(\nu) e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{2j\varepsilon x}{1 + 2j\varepsilon x - x^2} e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} \underline{g}_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu = \frac{2j\varepsilon x}{1 + 2j\varepsilon x - x^2} e^{j\omega t} \\ &= -j \frac{\varepsilon \omega_0}{2\pi \tilde{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \frac{\tilde{\omega} + j\varepsilon \omega_0}{\omega - \tilde{\omega} - j\varepsilon \omega_0} + \frac{\tilde{\omega} + j\varepsilon \omega_0}{\omega + \tilde{\omega} - j\varepsilon \omega_0} \right] e^{j\omega t} \end{aligned}$$

L'intégrant a deux pôles en  $\pm \tilde{\omega} + j\varepsilon \omega_0$ , tous les deux dans le demi-plan complexe supérieur et de résidus respectifs  $r^{\pm} = (\tilde{\omega} \pm j\varepsilon \omega_0) e^{j(\pm \tilde{\omega} + j\varepsilon \omega_0)t}$ .

- Si  $t$  est positif, nous complétons l'axe des  $\omega$  réels par un demi-cercle  $C^+$  de grand rayon dans le demi-plan supérieur, nous trouvons alors

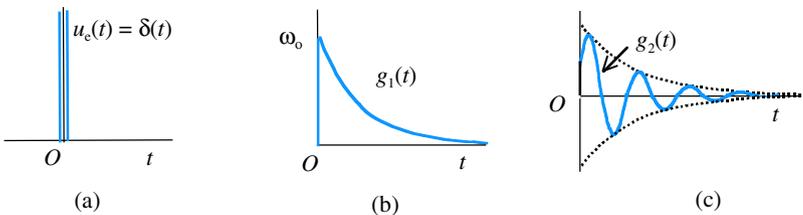
$$\begin{aligned} \underline{g}_2(t) &= +2j\pi \left( -j \frac{\varepsilon \omega_0}{2\pi \tilde{\omega}} \right) (r^+ + r^-) \\ &= 2\varepsilon \omega_0 [\cos(\tilde{\omega}t) - \varepsilon(\omega_0/\tilde{\omega}) \sin(\tilde{\omega}t)] e^{-\varepsilon \omega_0 t} \end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$\underline{g}_2(t) = 2(\varepsilon \omega_0^2 / \tilde{\omega}) e^{-\varepsilon \omega_0 t} \cos(\tilde{\omega}t + \alpha) \quad \text{où } \alpha = \text{Arctan}(\varepsilon \omega_0 / \tilde{\omega}) \quad (\text{si } t > 0).$$

- En revanche, si  $t$  est négatif, nous complétons l'axe des  $\omega$  réels par un demi-cercle  $C^-$  de grand rayon dans le demi-plan inférieur. Aucun pôle n'est à l'intérieur de ce contour et l'intégrale est nulle.

Les figures 7.27a, b et c illustrent respectivement le signal d'entrée impulsionnel et les fonctions  $\underline{g}_1(t)$  et  $\underline{g}_2(t)$ . Elles montrent la déformation du signal sous l'effet des régimes transitoires du circuit caractérisés par la pulsation  $\omega_0$ .



**Figure 7-27** a) Signal d'entrée impulsionnel b) réponse du filtre passe bas c) réponse du filtre passe-bande et d) réponse du filtre passe-haut.

**7-8\*** L'équation de ce circuit est

$$L(di/dt) + R_0 i + \alpha i^2 = \mathcal{E}.$$

Séparant les variables et intégrant, nous trouvons

$$\int_0^t \frac{dt}{L} = - \int_0^i \frac{di}{\alpha i^2 + R_0 i - \mathcal{E}} \implies 2\delta t = \ln \frac{\gamma i + 1 + \sqrt{1 + \beta} \frac{1 - \sqrt{1 + \beta}}{1 + \sqrt{1 + \beta}}}{\gamma i + 1 - \sqrt{1 + \beta} \frac{1 - \sqrt{1 + \beta}}{1 + \sqrt{1 + \beta}}}$$

où  $\gamma = 2\alpha/R_0$ ,  $\beta = 4\alpha\mathcal{E}/R_0^2$  et  $\delta = (R_0/L)\sqrt{1 + \beta}$ . Résolvant pour  $i$  nous trouvons

$$i = \frac{\beta}{\gamma} \frac{e^{2\delta t} - 1}{e^{2\delta t} - 1 + (e^{2\delta t} + 1)\sqrt{1 + \beta}} = \frac{2\mathcal{E}}{R_0} \frac{\text{th}(\delta t)}{\text{th}(\delta t) + \sqrt{1 + \beta}}$$

La tension aux bornes de cette résistance non ohmique est

$$V_s = R_0 i + \alpha i^2 = 2\mathcal{E} \frac{\text{th}(\delta t)}{\text{th}(\delta t) + \sqrt{1 + \beta}} + \frac{4\alpha\mathcal{E}^2}{R_0^2} \left( \frac{\text{th}(\delta t)}{\text{th}(\delta t) + \sqrt{1 + \beta}} \right)^2$$

La réponse indicielle correspond à  $\mathcal{E} = 1$ , donc

$$V_{s,\text{ind}}(t) = 2 \frac{\text{th}(\delta t)}{\text{th}(\delta t) + \sqrt{1 + \beta}} + \frac{4\alpha}{R_0^2} \left( \frac{\text{th}(\delta t)}{\text{th}(\delta t) + \sqrt{1 + \beta}} \right)^2$$

Dans le régime permanent ( $t \rightarrow \infty$ ),  $\text{th}(\delta t) \rightarrow 1$  et, par conséquent,

$$i \rightarrow \frac{2\mathcal{E}}{R_0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \beta}}.$$

Dans le cas d'une résistance ohmique ( $\alpha = 0$ ),  $\beta = 0$  et  $\delta = R_0/2L$ ; nous retrouvons le résultat prévu pour un circuit  $RL$

$$i = (\mathcal{E}/R_0)(1 - e^{-(R_0/L)t})$$

avec la valeur limite  $i = \mathcal{E}/R_0$ .

Si  $R_0 \rightarrow 0$ ,  $\beta = 4\alpha\mathcal{E}/R_0^2 \gg 1$  et  $\delta \rightarrow \sqrt{\alpha\mathcal{E}}/L$ . Nous trouvons la solution

$$i = \frac{2\mathcal{E}}{R_0} \frac{\text{th}(\delta t)}{\text{th}(\delta t) + \sqrt{\beta}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\alpha}} \text{th} \left( \frac{\sqrt{\alpha\mathcal{E}}}{L} t \right)$$

$i$  tend rapidement vers  $\sqrt{\mathcal{E}/\alpha}$ .

# Indications pour les questions de réflexion

## CHAPITRE 1

1. Pensez à la loi de conservation de l'énergie et à la relation du potentiel à l'énergie potentielle (section 1.3), au travail du champ et au travail à effectuer pour déplacer la charge. Vous devez trouver un travail de  $10^{-4}$  J indépendamment du chemin.
2. Dans quelles conditions un mouvement est-il rectiligne et uniforme et dans quelles conditions est-il seulement rectiligne ? Cela est-il possible dans le cas d'un champ électrique uniforme ? Est-il possible dans le cas d'un champ magnétique uniforme ? Vérifiez que les forces d'un champ électrique et un champ magnétique uniformes se compensent si les champs sont perpendiculaires l'un à l'autre et à la trajectoire et que  $E = vB$ . Comment la particule chargée doit elle être lancée ?
3. Analysez la superposition des champs entre les deux plans chargés et à l'extérieur. Choisissez des axes de coordonnées convenables. Vous pouvez utiliser les équations différentielles (1.10) pour déterminer  $V$  à chaque point ou la relation intégrale (1.13) avec  $A$  et  $B$  sur les armatures. Vérifiez que le résultat des deux méthodes est le même.
4. Quelle est la seule source d'énergie possible dans ce système ? Il n'y a pas de forces de contact pour transférer l'énergie ; elle ne peut donc être transférée que par le champ. Si le champ  $B$  varie il y a un champ électrique induit et, par conséquent une onde électromagnétique qui transmet l'énergie !
5. Pensez à la loi d'induction (1.29) et la relation (1.30).  $\mathcal{E}$  est égale à 100 V si, par exemple,  $I$  diminue uniformément à 0 en 1,5 s. L'effet est-il le même lorsqu'on coupe le courant ?
6. Que devient la d.d.p. (1.31) induite dans la bobine, si l'intensité est constante ? Vous devez ajouter l'énergie dissipée par effet Joule et l'énergie emmagasinée (voir la section 1.6). Dans le cas d'un conden-

sateur vous devez considérer le cas où il se charge et le cas où il se décharge. Déterminez le sens du courant dans chaque cas. Un courant constant peut-il passer dans un condensateur ? Considérez la variation de l'énergie emmagasinée dans le cas d'un courant variable (section 1.4).

## CHAPITRE 2

1. Supposez que  $\mathbf{E}$  est uniforme. Utilisez l'une des relations (1.10) ou (1.13) et montrez que  $V = EL$ . Un conducteur en équilibre peut-il avoir des points à des potentiels différents ? Les charges positives se déplacent-elles ?
2. Pensez à l'effet Joule et la possibilité d'évacuer la chaleur dans un fil fin et dans un fil épais.
3. Si le courant est alternatif, il en est de même pour le mouvement des charges. L'énergie ne peut pas donc être transportée par les charges (comme énergie cinétique, par exemple). Pensez à un transfert de l'énergie au moyen de l'onde électromagnétique (exactement comme dans le cas de la lumière).
4. La densité de charge totale dans un conducteur est nulle et la densité de courant est la somme des densités de courant des charges de divers types.
5. Est-il nécessaire que les champs s'établissent à la vitesse du mouvement des charges ? Si c'est le cas l'appel téléphonique mettrait quelques  $10^9\text{s} \approx 32$  ans pour arriver ! En fait il met 3,3 ms. Des voitures, arrêtées à un feu rouge à 5 m l'une de l'autre, peuvent-elles se mettre à rouler presque en même temps lorsque les automobilistes voient la lumière du feu tourner au vert ?
6. Les charges peuvent-elles être produites ou détruites ? Est-il nécessaire que le même électron sorte de la borne négative et entre par la borne positive pour que le courant s'établisse ? Comparez avec le mouvement des enfants formant une ronde. Dans le cas d'un courant alternatif, un électron oscille près de sa position d'équilibre sans parcourir le circuit.
7. En réduisant la longueur, comment varie la résistance ? Comment varie la chaleur dégagée si le réchaud est branché sur la même tension ?

**8.** Faites l'analogie charge  $\longleftrightarrow$  quantité de chaleur,  $\sigma \longleftrightarrow k_T$  et  $\Delta V \longleftrightarrow \Delta T$ . Cela veut dire que les électrons peuvent jouer des rôles semblables dans les deux effets.

**9.** Intégrer la densité de puissance  $\rho \mathbf{j}^2$  sur le volume du conducteur.

**10.** Pensez aux expressions  $P = V^2/R$  et  $P = VI$ . Si on divise  $V$  par 2, on divise  $P$  par 4 ; l'intensité lumineuse est alors très faible et plutôt rouge. Si on multiplie  $V$  par 2, on multiplie  $P$  par 4 ; la lumière est alors intense et probablement le filament fond car la chaleur ne peut pas être évacuée. Si on branche les deux lampes en série sous 220 V les résistances s'ajoutent et la puissance devient  $P = V^2/(R_1 + R_2)$ , qui est toujours inférieure à  $V^2/R_1 + V^2/R_2$ . On obtient donc moins de lumière.

**11.** Comment la résistance varie-t-elle avec la température ? La puissance de la lampe, branchée sur la même tension, est-elle plus grande ou plus faible lorsque le filament est encore froid ?

**12.** Pensez à la loi d'Ohm  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ . Si les porteurs de charge sont initialement mis en mouvement par une perturbation quelconque, y a-t-il une force pour les freiner ? Si  $\mathbf{E} = 0$ , que pouvez-vous dire du potentiel  $V$  ? Si  $V = 0$  et  $R = 0$  quelle serait la valeur de  $I$  ?

**13.** Supposons que  $V$  augmente, que pouvez-vous dire des variations de  $I$ , de la température  $T$ , de la résistance  $R$  et de la pente  $1/R$  de la tangente à la caractéristique ?

**14.** Si  $V$  augmente, comment la pente de la courbe varie-t-elle ? Que pouvez-vous dire de la variation de  $R$ . Pouvez-vous expliquer cette variation par l'échauffement de la lampe ? Lorsqu'on ferme l'interrupteur,  $R$  est faible (car la lampe est encore froide), est-ce que la puissance est plus grande ou plus faible ? Avec l'échauffement, la résistance devient grande et le courant passe dans la branche du condensateur. Lorsque celui-ci est chargé, le courant repasse dans la lampe (qui s'est refroidie) et ainsi de suite.

**15.** On avertit de la haute tension car l'intensité peut être grande si la résistance du conducteur est faible. On peut tendre la main à une personne électrocutée ou toucher un câble haute tension, si on est isolé du sol (en portant des chaussures bien isolantes, par exemple). Si un oiseau se pose sur une ligne haute tension, la d.d.p. entre ses pattes est faible et le courant dans son corps est très faible.

## CHAPITRE 3

1.  $A_1 \approx 2,5$  mV,  $A_2 \approx 1,5$  mV et  $T \approx 6 \times 10^{-2}$  s, donc  $\nu \approx 17$  Hz.  $V_1$  est en avance de phase sur  $V_2$ , car le maximum  $V_1$  précède celui de  $V_2$  de  $\Delta t \approx 1 \times 10^{-2}$  s. Son avance de phase est donc  $\phi = 2\pi(\Delta t/T)$  soit  $\approx 1$  rad.

2. On augmente ou on diminue sa phase de  $\pi$ . On utilise la relation  $\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$ .

3. Il faut que  $I$  soit dirigé vers l'armature qui porte la charge  $Q$ . L'amplitude est  $Q_m = A/\omega$  et la phase est  $\phi_Q = \phi - \pi/2$ .

4.  $x = A \cos(\omega t + \phi)$  avec  $A = (5^2 + 10^2 + 2 \times 5 \times 10 \times \cos(\pi/6))^{1/2}$   
 $= 14,5$  et  $\phi = \text{Arctan } 0,174 = 0,173$  rad.

5.

	2j	-3j	-5	1/(2j)	$\sqrt{2}j$	3-4j	(3-j)/(1-3j)
$\rho$	2	3	5	1/2	$\sqrt{2}$	5	1
$\phi$ (rad)	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi$	$-\pi/2$	$\pi/2$	-0,927	$\pi/2$

6. Voir la section 3.4. Si  $u = A \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \phi)$  on trouve  $u_{\text{eff}} = (\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + AB \cos \phi)^{1/2}$ . Si on supprime l'alternance négative, la valeur efficace est divisée par  $\sqrt{2}$ . Si on redresse un courant sinusoïdal, la valeur efficace ne change pas.

7. Voir la note (3) du chapitre 2. Les équations linéaires sont :

$$\dot{u} - 3u = 0, \quad \ddot{u} - 4u = 0, \quad \ddot{u} - 4tu = 0, \quad \ddot{u} + 2\dot{u} - 4u = 0$$

L'équation  $\ddot{u} - 4u = 5$  n'est pas linéaire au sens strict, mais l'équation sans second membre  $\ddot{u} - 4u = 0$  l'est.

8. Analyser l'homogénéité des équations  $V = L\dot{I}$  et  $Q/V = C$ . En déduire les équations aux dimensions  $[Q] = [LC\dot{I}] = [LCQ/T^2]$ , donc  $[LC] = [T^2]$ . Si  $Q = Q_0 \cos(\omega t)$ , l'intensité est  $I = -\omega Q_0 \sin(\omega t)$ . Les énergies sont donc  $U_{(E)} = (Q_0^2/2C) \cos^2(\omega t)$  et  $U_{(M)} = (Q_0^2/2C) \sin^2(\omega t)$ . Voir la section 3.5.

9. Voir la section 3.5.

10. Voir l'équation (3.75) et la discussion qui la suit. Le nombre d'oscillations que le circuit subit est  $\approx f_q = 6$ .

11. Voir la section 3.6.

### CHAPITRE 4

1. Voir la section 4.2.

2. Nous trouvons respectivement pour le premier et le second dipôles  $V_A - V_B = RI + LI - Q/C$  et  $V_A - V_B = -RI - LI + Q/C$ . L'impédance ne dépend ni de l'ordre des éléments ni du sens du courant.

3. Il est équivalent à une résistance  $R$  si  $L\omega = 1/C\omega$ .

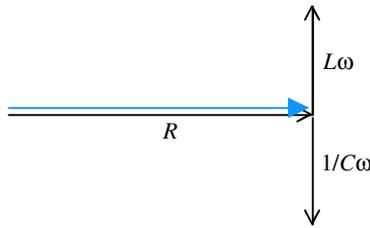


Figure QR-1

4. Utiliser le champ  $E = V/d$ , la loi d'ohm  $j = \sigma E$  puis le courant de fuite  $I = Sj$ . Utiliser les expressions de  $R$  et  $C$  et vérifier que  $RC = \epsilon/\sigma$ .

5. Voir la section 4.5. L'équation 4.45 donne

$$\langle P \rangle = (V_{\text{eff}}^2/Z) \cos \phi_z = (V_m^2/2Z)(R/Z) = \frac{1}{2} R V_m^2 / (R^2 + X^2)$$

$\langle P \rangle$  ne peut pas être négative. Elle est nulle si  $R = 0$ .

6. Voir la section 4.7 :  $\mathcal{E} = r\mathcal{I}$ . Les puissances non électriques nécessaires pour faire fonctionner une source de tension et une source de courant sont respectivement

$$P_{\text{ST}} = \mathcal{E}I = VI + rI^2 \quad \text{et} \quad P_{\text{SC}} = VI + r(\mathcal{I} - I)^2$$

Leurs effets Joule internes sont respectivement

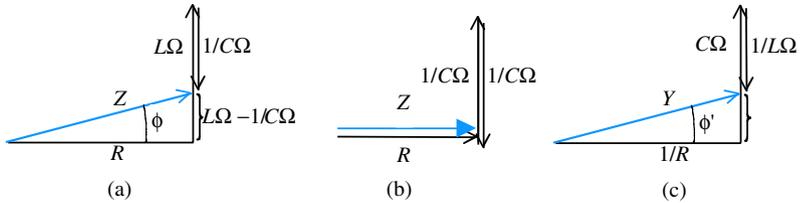
$$U_{(J),\text{ST}} = rI^2 \quad \text{et} \quad U_{(J),\text{SC}} = r(\mathcal{I} - I)^2$$

La puissance qu'elles fournissent au circuit extérieur est  $VI$  (voir la section 4.7).

## CHAPITRE 5

1. Voir la section 5.2 :

$$\phi_z = \text{Arctan}[(L\Omega - 1/C\Omega)/R] \quad \text{et} \quad Z = [R^2 + (L\Omega - 1/C\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

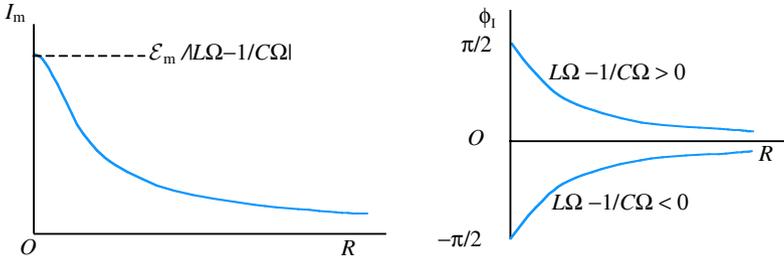


**Figure QR-2** a) Diagramme de Fresnel pour l'impédance d'un circuit RLC série  
 b) même diagramme à la résonance  
 c) Diagramme des admittances d'un circuit RLC parallèle.

Dans le cas d'une résistance  $R$ , une self-inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$  montés en parallèle, ce sont les intensités qui s'ajoutent  $\underline{I} = \underline{V}(1/R - j/L\Omega + jC\Omega)$ . On trace alors le diagramme de Fresnel pour les admittances (Fig. QR-2c). Connaissant  $\underline{Y}$ , on détermine  $I$  en utilisant la relation  $\underline{I} = \underline{V}\underline{Y}$ .

2. En multipliant les vecteurs de la figure QR-2a par  $I_m$ , on obtient le diagramme de Fresnel pour les tensions.  $\mathcal{E}$  est en phase avec la d.d.p. aux bornes de la résistance  $V_R = RI$  si  $\phi = 0$ , c'est-à-dire  $L\Omega - 1/C\Omega = 0$  (donc à la résonance  $\Omega = 1/\sqrt{LC}$ ) (voir la Fig. QR-2b). Le maximum de  $V_R = \mathcal{E}_m \cos \phi$  est égal à  $\mathcal{E}_m$  à la résonance.  $V_L$  peut avoir un module plus grand que  $\mathcal{E}_m$  si  $2L > CR^2$  et  $\Omega^2 > 1/(2LC - C^2R^2)$ .  $V_C$  peut avoir un module plus grand que  $\mathcal{E}_m$  si  $2L > CR^2$  et  $\Omega^2 < 2/LC - R^2/L^2$ .

3. Voir la section 5.2.  $I = I_m \cos(\Omega t - \phi_1)$  où  $I_m = \mathcal{E}/\sqrt{R^2 + (1/C\Omega - L\Omega)^2}$  et  $\phi_1 = \text{Arctan}[(L\Omega - 1/C\Omega)/R]$ . Les variations de  $I_m$  et  $\phi_1$  sont illustrées dans la Fig. QR-3.



**Figure QR-3**  $I_m$  et  $\phi$  en fonction de  $R$  dans un circuit RLC forcé.

4. Voir la section 5.3. Pour  $\delta \ll \omega_0$ ,  $Q_{\max} \approx \mathcal{E}_m / 2L\delta\omega_0$  et  $Q_{\text{st}} = C\mathcal{E}_m$ .
5. Voir la section 5.3. La sélection d'une émission radio est une application de ce résultat. Pour être très sélectif, la résistance  $R$  du circuit doit être faible.
6. Voir la section 5.4.  $\langle U_{(\text{EM})} \rangle$  reste constante car le circuit revient périodiquement au même état. Ce n'est pas le cas pendant le régime transitoire.
7. Si le nœud  $N$  est situé entre les points  $A_1$  et  $A_2$ , vérifiez que le théorème de Millman se réduit à  $(V_1 - V_N)/Z_1 + (V_2 - V_N)/Z_2$ , c'est-à-dire  $I_1 + I_2 = 0$ . Si les points  $A_1, A_2, \dots$  sont confondus en  $A$ , on trouve que  $V_N - V_A$  est la même sur toutes les branches.
8. Voir la section 5.7. En appliquant ces théorèmes à des générateurs montés en série et des générateurs montés en parallèle, vous trouvez les résultats exprimés par les équations (4.67) et (4.72).

## CHAPITRE 6

1. Voir la section 6.1 pour les définitions. Un générateur ne peut pas débiter une intensité et une puissance illimitées et un récepteur ne peut pas consommer l'énergie finie du circuit en un temps infiniment court. Le régime permanent ne dépend pas des conditions initiales ?
2. Utilisant l'homogénéité des équations  $V = RI$  et  $V = Q/C$ , vérifiez que  $RC$  est homogène à  $Q/I$ , c'est-à-dire un temps. Dans le cas de l'établissement du courant, par exemple,  $I$  est donnée par (6.20), alors  $\dot{I}(0) = (E/\tau R)$ . Écrivez l'équation de la tangente à l'origine et vérifiez qu'elle rencontre l'asymptote  $I = (\mathcal{E}/R)$  au point  $t = \tau$ .

3. Utiliser l'homogénéité des équations  $V = L\dot{I}$  et  $V = IR$ .
4. Le circuit n'a pas une source d'énergie mais il a une énergie emmagasinée.
5. Penser au fait que la puissance d'un générateur est toujours finie

## CHAPITRE 7

1. Voir la section 7.1 pour les notions de systèmes de transmission linéaires et stationnaires et la section 7.2 pour les notions de fonction de transfert, gain etc.
2. Pensez à la définition de la valeur efficace par  $u_{\text{eff}}^2 = \langle u^2 \rangle$  et à la définition de la bande passante.
3. Utilisez l'équation (7.21) pour montrer que, si  $V_e$  est réelle, sa fonction spectrale  $\underline{A}_e(\nu)$  vérifie la condition  $\underline{A}_e(\nu)^* = \underline{A}_e(-\nu)$  et de même pour  $\underline{V}_s(t)$ . Utilisez ensuite la relation (7.23) pour établir que  $\underline{G}(\omega) = \underline{G}(-\omega)^*$ . Écrivez que  $\underline{G}(\omega) = G(\omega)e^{j\phi(\omega)}$  et en déduisez que  $G(\omega) = G(-\omega)$  et  $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$ .
4. Pour sélectionner l'émission désirée, le système doit être un filtre passe-bande de bande passante étroite.
5. Il n'y a aucun courant dans  $\underline{Z}_3$  ; la tension de sortie ne dépend pas donc de  $\underline{Z}_3$ . Si  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  sont de même nature,  $\underline{G}(\Omega)$  est réelle et indépendante de  $\omega$ , si  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  sont des éléments simples.
6. Si le filtre est linéaire, le signal de sortie qui correspond à  $\underline{V}_{e,1} + \underline{V}_{e,2}$  est
 
$$\underline{V}_{s,1} + \underline{V}_{s,2} = A\underline{G}(\omega)e^{j(\omega t + \phi)} + B\underline{G}(\omega')e^{j(\omega' t + \phi')}$$
 Il n'est pas proportionnel au signal d'entrée ; il y a donc déformation.

# Annexes

## ANNEXE A : QUELQUES RELATIONS MATHÉMATIQUES

### A.1 Fonctions exponentielles et hyperboliques

Les fonctions exponentielles et hyperboliques ont les propriétés suivantes

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{1}{1}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 \dots,$$

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

### A.2 Logarithme népérien et logarithme décimal

Le logarithme népérien de  $x$  et le logarithme décimal de  $x$  sont respectivement les fonctions inverses de  $x = e^y$  et  $x = 10^y$

$$y = \ln x \quad \text{et} \quad y = \log x \quad \text{où} \quad e = 2,71828 \dots \text{ (constante d'Euler)}$$

Ils sont liés par les relations :

$$\log x = \log e \times \ln x \approx 0,43429 \ln x$$

$$\ln x = \ln 10 \times \log x \approx 2,3026 \log x$$

Leurs principales propriétés sont :

$$\ln(x^\alpha y^\beta) = \alpha \ln x + \beta \ln y, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

### A.3 Nombres complexes

Un *nombre complexe* (désigné par un symbole souligné) est de la forme :

$$\underline{z} = x + jy = \quad \text{où} \quad j^2 = -1 \quad x = \operatorname{Re} \underline{z} \quad \text{et} \quad y = \operatorname{Im} \underline{z}.$$

$$\text{Relation d'Euler : } e^{j\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

Représentation exponentielle :

$$\underline{z} = x + jy = \rho \cos \phi + j\rho \sin \phi = \rho e^{j\phi}$$

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}, \quad \rho = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\rho$  est le *module* de  $\underline{z}$  et  $\phi$  est son *argument* (défini à  $2\pi$  près) ou sa *phase*.

### A.4 Fonctions trigonométriques

$$\sin x = \frac{(e^{jx} - e^{-jx})}{2j} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots,$$

$$\cos x = \frac{(e^{jx} + e^{-jx})}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \dots + (|x| < \pi/2),$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(\pi - x)$$

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2} \quad \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

## ANNEXE B : UNITÉS ET CONSTANTES PHYSIQUES

### B-1 Préfixes des unités

$10^n$	$10^{18}$	$10^{15}$	$10^{12}$	$10^9$	$10^6$	$10^3$	$10^2$	$10^1$
Préfixe	exa- (E)	péta- (P)	téra- (T)	giga- (G)	méga- (M)	kilo- (k)	hecto- (h)	déca- (da)

$10^n$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$	$10^{-15}$	$10^{-18}$
Préfixe	deci- (d)	centi- (c)	milli- (m)	micro- ( $\mu$ )	nano- (n)	pico- (p)	femto- (f)	atto- (atto)

### B-2 Quelques unités fondamentales

Grandeur	Longueur	Temps	Masse	Intensité	Température
Unité fondamentale	mètre (m)	seconde (s)	kilogramme (kg)	ampère (A)	kelvin (K)

### B-3 Quelques unités dérivées

Quantité	Dimensions	Unité (Abréviation)
Fréquence	$[v] = [T^{-1}]$	hertz (H)
Vitesse	$[V] = [LT^{-1}]$	m/s
Accélération	$[a] = [T^{-2}]$	m/s <sup>2</sup>
Vitesse angulaire	$[\omega] = [T^{-1}]$	rad/s
Force	$[F] = [MLT^{-2}]$	Newton (N)
Masse volumique	$[m_v] = [L^{-3}]$	kg/m <sup>3</sup>
Travail, énergie	$[U] = [ML^2T^{-2}]$	joule (J)
Puissance	$[P] = [ML^2T^{-3}]$	watt (W)
Masse molaire	$[\text{mole}^{-1}]$	kg/k mole
Quantité d'électricité	$[Q] = [TI]$	coulomb (C) = 1 A.s
Différence de potentiel ou fém	$[V] = [L^2MT^{-3}I^{-1}]$	volt (V)

Quantité	Dimensions	Unité (Abréviation)
Champ électrique	$[E] = [LMT^{-3}I^{-1}]$	V/m
Capacité	$[C] = [L^{-2}M^{-1}T^4I^2]$	farad (F)
Permittivité électrique	$[\varepsilon] = [L^{-3}M^{-1}T^4I^2]$	F/m
Résistance	$[R] = [L^2MT^{-3}I^{-2}]$	ohm ( $\Omega$ )
Résistivité	$[\rho] = [L^3MT^{-3}I^{-2}]$	$\Omega \cdot m$
Conductivité électrique	$[\sigma] = [L^{-3}M^{-1}T^3I^2]$	$\Omega^{-1}m^{-1}$
Flux magnétique	$[\Phi_B] = [L^2MT^{-2}I^{-1}]$	weber (Wb)
Champ d'induction magnétique	$[B] = [MT^{-2}I^{-1}]$	tesla (T) = Wb/m <sup>2</sup>
Inductance	$[L] = [L^2MT^{-2}I^{-2}]$	henry (H)
Perméabilité magnétique	$[\mu] = [LMT^{-2}I^{-2}]$	H/m

## B-4 Quelques constantes physiques

Vitesse de la lumière (valeur exacte)  $c = 2,997\,924\,58 \times 10^8$  m/s

Constante de gravitation universelle  $G = 6,672\,59 \times 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Accélération de gravité (standard)  $g = 9,806\,65$  m/s<sup>2</sup>

Une année sidérale = 365,256 jours

Température normale  $T_0 = 273,16$  K

Equivalent mécanique de la calorie  $J = 4,1855(4)$  J/Cal

Nombre d'Avogadro  $N_0 = 6,0221367(36) \times 10^{23}$  mole<sup>-1</sup>

Constante de Boltzmann  $k = 1,380\,658(12) \times 10^{-23}$  J/K

Charge élémentaire  $e = 1,602\,177\,33(49) \times 10^{-19}$  C

Electron-volt eV = 1,6021892(46)  $\times 10^{-19}$  J

Constante de Planck  $h = 6,626\,075(40) \times 10^{-34}$  J.s

Masse de l'électron  $m_e = 9,109\,389\,7(54) \times 10^{-31}$  kg

Permittivité électrique du vide  $\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817 \times 10^{-12}$  A<sup>2</sup>s<sup>4</sup>/kg m<sup>3</sup>

$$1/4\pi\varepsilon_0 = 8,987\,551\,787 \times 10^{-9} \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$$

Perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  kg m/A<sup>2</sup>s<sup>2</sup>

# Index

## A

admittance, 94  
amplitude complexe, 55  
association  
  de récepteur, 113  
  des générateurs, 108

## B

bande passante 138, 191  
Bode  
  diagrammes de, 192

## C

caractéristique, 37  
champ  
  d'induction magnétique, 12  
  électromoteur, 103  
  électrique, 5  
  conservation, 3  
  quantification, 3  
charge, 3  
  électrique, 1  
chargement d'un condensateur, 171  
circuit  
  LC, 60  
  LCR, 63  
  RC, 170  
  RL, 173  
  RLC forcé, 133  
  RLC, 175  
condensateur, 11  
conducteur  
  ohmique, 31  
  non ohmique, 37  
conductivité, 29

constante d'atténuation, 65  
Coulomb, 2  
courant sinusoïdal, 49  
critique, 65

## D

décharge d'un condensateur, 172  
décrément logarithmique  
  coefficient de, 68  
densité de courant, 26  
diode  
  à effet tunnel, 115  
  à jonction, 114  
  régulatrice de tension, 114  
dipôle  
  électrique, 87  
  linéaire, 90  
  non linéaire, 114  
  association(s), 95  
diviseur de tension 98  
Drude  
  formule de, 32  
dualité, 150

## E

effet thermoionique, 39  
énergie  
  électromagnétique, 62, 69  
  électrostatique, 10  
  magnétique, 15  
équation caractéristique, 64, 89

## F

filtre, 187, 194, 195  
  coupe-bande, 192  
  fonction de transfert, 189

- linéaire, 189
- passe-bande, 192, 195
- passe-bas, 192, 194
- passe-haut, 191, 194
- stationnaire, 188
- actif, 188
- fonction de transfert, 193
- fonctionnement
  - point de, 89
- force
  - contre-électromotrice, 112
  - électromotrice, 104
- G**
- gain, 190, 192
  - en décibels, 192
- générateur
  - convention, 88
  - autonome, 143
- H**
- Hertz, 49
- I**
- impédance
  - réelle, 92
- induction, 13
- intensité de courant, 26
- J**
- Joule
  - effet, 33, 59
- K**
- Kirchhoff
  - règle de, 140
- Kirchhoff
  - règles de, 90
- L**
- linéaire, 52
- M**
- maille(s), 132
  - courant de, 148
  - équation de, 140
  - règle des, 91
- Millman
  - théorème de, 142
  - module, 54
- N**
- nœud, 132
  - équation de, 142
  - règle de, 91
- Norton
  - théorème de, 146
- O**
- Ohm
  - loi d', 31
- oscillateur, 65
- P**
- parallèle
  - montage en, 97
- phase, 50, 54
- potentiel, 6
  - électrostatique, 6
- pseudo-pulsation, 67
- puissance
  - apparente, 102
  - d'un générateur, 105
  - d'un récepteur, 112
  - électrique, 99
- puissance
  - facteur de 101
- pulsation, 50
  - propre, 64
- Q**
- quadripôle, 188
  - en  $T$ , 193
- qualité
  - facteur de, 69
- R**
- réactance, 94
- récepteur(s), 111
  - convention, 88
- réciprocité, 148
- régime
  - permanent, 168
  - transitoire, 168

quasi stationnaire, 28  
rendement, 105  
d'un récepteur, 112  
réponse 197, 198, 199  
à un signal, 197  
impulsionnelle, 198  
indicielle, 199  
représentation  
complexe, 53, 134  
de Fresnel, 51, 133  
trigonométrique, 51  
résidus  
théorème des, 201  
résistance, 28, 30, 94  
dynamique, 89  
statique, 89  
résistivité, 29  
résonance, 135  
largeur de, 137

**S**

self-inductance, 14  
série  
montage en, 95

source  
de courant, 107  
de tension, 103  
superposition  
principe 53, 90  
supraconductivité 35  
système, 199  
intégration complexe, 200  
non linéaire, 199

**T**

température  
coefficient, 34  
thermistances, 35  
thermométrie, 39  
Thévenin  
représentation, 106  
théorème, 145

**V**

valeurs efficaces, 59  
varistance, 115



# MINI MANUEL

Tamer BÉCHERRAWY

## Mini Manuel d'Électrocinétique

**Comment aller à l'essentiel, comprendre les méthodes et les démarches avant de les mettre en application ?**

Conçus pour faciliter aussi bien l'apprentissage que la révision, les Mini Manuels proposent **un cours concis et richement illustré** pour vous accompagner jusqu'à l'examen. Des **exemples sous forme d'encarts, des mises en garde et des méthodes** pour éviter les pièges et connaître les astuces, enfin **des exercices tous corrigés** complètent le cours.

Ce Mini Manuel d'Electrocinétique présente l'essentiel à comprendre et à savoir en Electrocinétique pour tout étudiant en L1/L2 de Sciences de la Matière.

### Contenu :

- Notions de base
- Conductance et résistance
- Courant alternatif
- Dipôles
- Analyse des circuits
- Régimes transitoires
- Filtres

### Tamer Bécherrawy

Maître de conférences à l'université de Nancy et formateur à l'UFM de Lorraine.

### Public :

- ◆ **L1/L2 Sciences de la Matière**