PHYSIQUE

Étienne GUYON - Jean-Pierre HULIN
Luc PETIT

Hydrodynamique physique

Nouvelle édition
revue et augmentée

SAVOIRS ACTUELS

CNRS EDITIONS

EDP SCIENCES

Hydrodynamique physique

Étienne Guyon
Jean-Pierre Hulin
Luc Petit

Hydrodynamique physique

NOUVELLE ÉDITION
REVUE ET AUGMENTÉE

Préface de
Pierre-Gilles de Gennes

SAVOIRS ACTUELS
EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture :
« Saute-mouton » entre deux anneaux tourbillons.
Avec l'aimable autorisation de H. Yamada et T. Matsui
(M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, 1982).

© **2001, EDP Sciences**, 7, avenue du Hoggar, BP112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A
et
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contre-façon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. 01.43.26.95.35.

ISBN EDP Sciences 2-86883-502-3
ISBN CNRS ÉDITIONS 2-271-05635-7

Table des matières

Préface **13**

Introduction. Une seconde édition **15**

Chapitre 1. Physique des fluides **21**
1.1 L'état liquide 21
1.1.1 Les différents états de la matière : systèmes modèles et milieux réels 22
1.1.2 La limite solide–liquide : une frontière parfois floue 28
1.2 Coefficients macroscopiques de transport 29
1.2.1 Conductivité thermique 30
1.2.2 Diffusion de masse 38
1.3 Modèles microscopiques des coefficients de transport 41
1.3.1 Une approche de la diffusion massique : la marche au hasard 41
1.3.2 Coefficients de transport des gaz parfaits 44
1.3.3 Phénomènes de transport diffusif dans les liquides 49
1.4 Effets de surface et tension superficielle 52
1.4.1 La tension superficielle 52
1.4.2 Forces de pression associées aux phénomènes de tension superficielle 55
1.4.3 Étalement de gouttes sur une surface – notion de mouillage . 64
1.4.4 Instabilité de Rayleigh–Taylor 68
1.5 Spectroscopie des liquides 70
1.5.1 Quelques sondes usuelles de la structure microscopique des liquides 70
1.5.2 Facteur de structure et diffusion élastique de rayons X : un exemple d'utilisation de la diffusion à l'échelle atomique . . . 72
1.5.3 La diffusion élastique et quasi élastique de la lumière : un outil d'étude de la structure et du transport diffusif dans les liquides 76
1.5.4 Diffusion inélastique de la lumière dans les liquides 82

Chapitre 2. Diffusion de la quantité de mouvement ... **87**
2.1 Transports diffusif et convectif 88
2.1.1 Diffusion et convection de la quantité de mouvement : deux expériences illustratives 88

2.1.2 Transport de quantité de mouvement dans un écoulement de cisaillement – introduction de la viscosité 90
2.2 Modèles microscopiques de la viscosité 94
2.2.1 Viscosité des gaz 95
2.2.2 Viscosité des liquides 97
2.2.3 Simulation numérique des trajectoires de particules dans l'écoulement d'un liquide ou d'un gaz 99
2.3 Comparaison entre les mécanismes de diffusion et de convection . . . 100
2.3.1 Le nombre de Reynolds 100
2.3.2 Transports convectif et diffusif de masse ou de chaleur 102
2.4 Description de différents régimes d'écoulement 104
2.4.1 Les différents régimes d'écoulement derrière un cylindre . . . 106
2.4.2 Modèle de Landau des instabilités hydrodynamiques 108

Chapitre 3. Cinématique des fluides 119
3.1 Description du mouvement d'un fluide 119
3.1.1 Échelles de longueur et hypothèse de continuité 119
3.1.2 Descriptions eulérienne et lagrangienne du mouvement d'un fluide 120
3.1.3 Accélération d'une particule de fluide 121
3.1.4 Lignes et tubes de courant, trajectoires, lignes d'émission . . 123
3.2 Déformations dans les écoulements 125
3.2.1 Décomposition du champ de gradient de vitesse au voisinage d'un point 125
3.2.2 Analyse des termes symétriques : déformation pure 127
3.2.3 Analyse des termes antisymétriques : rotation pure 133
3.2.4 Application 135
3.3 Conservation de la masse dans un fluide en écoulement 137
3.3.1 Équation de conservation de la masse 138
3.3.2 Condition d'incompressibilité d'un fluide 139
3.3.3 Analogies avec l'électromagnétisme 142
3.4 Fonction de courant 143
3.4.1 Introduction et signification de la fonction de courant 143
3.4.2 Exemples d'écoulements plans et de leurs fonctions de courant 145
3.4.3 Cas des écoulements axisymétriques 148
3.5 Visualisations et mesures de vitesse 149
3.5.1 Visualisation des écoulements 149
3.5.2 Mesure de la vitesse locale d'un fluide : la vélocimétrie laser Doppler 153
3.5.3 Mesures à partir du marquage des écoulements : vélocimétrie par images de particules 156
3.5.4 Détermination de gradients de vitesse locaux 156

Chapitre 4. Dynamique des fluides visqueux ... 159
4.1 Forces de surface 160
4.1.1 Expression générale des forces de surface 160
4.1.2 Caractéristiques du tenseur des contraintes de viscosité . . . 163
4.1.3 Tenseur des contraintes de viscosité pour un fluide newtonien 165

4.2 Équation du mouvement d'un fluide 167
4.2.1 Équation de la dynamique d'un fluide dans le cas général . . 167
4.2.2 Équation de Navier–Stokes du mouvement d'un fluide newtonien 169
4.2.3 Équation d'Euler pour le mouvement d'un fluide parfait . . . 170
4.2.4 Forme adimensionnelle de l'équation de Navier–Stokes 171
4.3 Conditions aux limites dans les écoulements fluides 171
4.3.1 Conditions aux limites à la surface d'un corps solide 172
4.3.2 Conditions aux limites entre deux fluides – effet de la tension superficielle 173
4.4 Les fluides non newtoniens 174
4.4.1 Fluides non newtoniens et rhéologie 174
4.4.2 Mesures des caractéristiques rhéologiques des fluides 175
4.4.3 Fluides indépendants du temps soumis à un cisaillement . . . 177
4.4.4 Fluides non newtoniens dépendant du temps 183
4.5 Quelques exemples d'écoulements parallèles 194
4.5.1 Équation de Navier–Stokes pour les écoulements unidirectionnels 194
4.5.2 Écoulement de Couette entre deux plans parallèles en mouvement relatif 195
4.5.3 Écoulements de Poiseuille 197
4.5.4 Écoulements oscillants dans un fluide visqueux 204
4.5.5 Écoulement de Couette cylindrique 210
4.6 Écoulements parallèles simples de fluides non newtoniens 213
4.6.1 Écoulement stationnaire d'un fluide non newtonien entre deux plans parallèles en mouvement relatif 213
4.6.2 Calcul du champ de vitesse et de la chute de pression pour un fluide non newtonien dans un écoulement entre deux plans parallèles 214
4.6.3 Quelques profils de vitesse pour des lois rhéologiques simples 217
4.6.4 Écoulement d'un fluide viscoélastique près d'un plan oscillant 221
4.7 Écoulements quasi parallèles – approximation de lubrification 222
4.7.1 Approximation de lubrification 223
4.7.2 Effets d'instationnarité 227
4.7.3 Équations de mouvement dans l'approximation de lubrification 227
4.7.4 Écoulement stationnaire entre deux plans mobiles formant un angle faible 228
4.7.5 Écoulements d'un film fluide de profil d'épaisseur quelconque 232
4.7.6 Quelques problèmes de lubrification 236
4.8 Écoulements de couches liquides avec surfaces libres 238
4.8.1 Angle de contact dynamique en situation de mouillage total – loi de Tanner 238
4.8.2 Dynamique de l'étalement de gouttes sur une surface plane . 242
4.8.3 Écoulements induits par des gradients de la tension superficielle – effet Marangoni 247
Annexe A-1 Tenseur des contraintes, conservation de la masse et équation de Navier–Stokes en coordonnées cylindriques 252

Annexe A-2 Tenseur des contraintes, conservation de la masse et équation de Navier–Stokes en coordonnées sphériques 254

Chapitre 5. Équations de bilan **257**
5.1 Équation de bilan de masse 257
5.2 Bilan de quantité de mouvement 258
5.2.1 Expression locale 258
5.2.2 Forme intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement 259
5.3 Bilan d'énergie cinétique – équation de Bernoulli 264
5.3.1 Équation de bilan d'énergie cinétique dans un fluide incompressible en écoulement avec ou sans viscosité 264
5.3.2 Relation de Bernoulli – applications 268
5.4 Applications des équations de bilan 277
5.4.1 Jet incident sur un plan 277
5.4.2 Jet sortant d'un réservoir par un orifice 280
5.4.3 Force sur les parois d'une conduite de révolution de section variable 282
5.4.4 Ressaut hydraulique 285
5.4.5 Vanne de décharge dans un canal 292

Chapitre 6. Écoulements potentiels **295**
6.1 Introduction 295
6.2 Définitions, propriétés et exemples d'écoulements potentiels 297
6.2.1 Caractéristiques et exemples de potentiels de vitesse 297
6.2.2 Unicité du potentiel des vitesses 297
6.2.3 Potentiels des vitesses des écoulements élémentaires et combinaison des fonctions potentiel 301
6.2.4 Exemple d'écoulements potentiels simples 308
6.3 Forces exercées sur un obstacle dans un écoulement potentiel 318
6.3.1 Cas bidimensionnel 318
6.3.2 Cas d'un obstacle tridimensionnel 324
6.4 Ondes linéaires à la surface d'un fluide parfait 328
6.4.1 Houle, risée et déferlantes 328
6.4.2 Trajectoires des particules de fluide lors du passage de l'onde 332
6.4.3 Ondes solitaires 334
6.5 Analogie électrique des écoulements potentiels bidimensionnels . . . 336
6.5.1 Analogie directe 337
6.5.2 Analogie inverse 337
6.6 Potentiel complexe des vitesses 339
6.6.1 Définition du potentiel complexe 339
6.6.2 Potentiel complexe de quelques écoulements 340
6.6.3 La transformation conforme 343
Annexe A-1 Potentiels des vitesses et fonctions de courant d'écoulements plans 351
Annexe A-2 Relations fonction de courant et potentiel des vitesses 353
Annexe A-3 Un fluide presque parfait : l'hélium superfluide 353

Chapitre 7. Vorticité, dynamique du tourbillon ... 357
7.1 La vorticité et son analogue en électromagnétisme 358
7.1.1 Le vecteur vorticité 358
7.1.2 Analogie avec l'électromagnétisme 360
7.1.3 Tubes de vorticité rectiligne et analogie avec le champ magnétique produit par un fil conducteur 361
7.1.4 Utilisation de l'analogie avec l'électromagnétisme, pour des distributions de vorticité quelconques 366
7.2 Dynamique de la circulation 368
7.2.1 Le théorème de Kelvin : conservation de la circulation 369
7.2.2 Sources de circulation dans les écoulements de fluides visqueux ou compressibles, ou en présence de forces non conservatives . 373
7.3 Dynamique de la vorticité 378
7.3.1 Équation de transport de la vorticité et conséquences 378
7.3.2 Équilibre étirement-diffusion dans la dynamique de la vorticité 384
7.4 Quelques exemples de répartition de vorticité 386
7.4.1 Quelques cas de répartition de vorticité concentrée sur des lignes 386
7.4.2 Dynamique d'un ensemble de lignes de vorticité rectilignes parallèles 387
7.4.3 Anneaux tourbillons 393
7.5 Fluides en rotation 397
7.5.1 Mouvement d'un fluide dans un repère en rotation 399
7.5.2 Écoulements à bas nombre de Rossby 405
7.5.3 Ondes dans les fluides en rotation 410
7.5.4 Effet de la viscosité au voisinage de parois : couche d'Ekman 421
7.6 Vorticité, rotation et écoulements secondaires 425
7.6.1 Écoulements secondaires dus à la courbure de canalisations ou de canaux à surface libre 426
7.6.2 Écoulements secondaires dans des mouvements transitoires . 429
7.6.3 Écoulements secondaires associés à des effets de couches d'Ekman 431
Annexe : Les tourbillons dans l'hélium superfluide 433

Chapitre 8. Écoulements à petit nombre de Reynolds 439
8.1 Exemples d'écoulements à petit nombre de Reynolds 440
8.2 Équation du mouvement à petit nombre de Reynolds 441
8.2.1 Équation de Stokes 441
8.2.2 Quelques formes équivalentes de l'équation de Stokes 443
8.2.3 Propriétés des solutions de l'équation de Stokes 443
8.2.4 Prédictions dimensionnelles sur les écoulements à petit nombre de Reynolds 452
8.3 Forces et couples s'exerçant sur un solide en mouvement 453
8.3.1 Linéarité des relations entre la vitesse d'un solide et les forces exercées 454
8.3.2 Influence des propriétés de symétrie des solides sur les forces et les couples appliqués 455

8.4 Mouvement d'une sphère à vitesse constante dans un fluide visqueux 460
8.4.1 Champ de vitesse autour d'une sphère en mouvement 460
8.4.2 Force exercée sur une sphère en mouvement dans un fluide – Coefficient de traînée 466
8.4.3 Extensions de la résolution de l'équation de Stokes à d'autres problèmes 469
8.4.4 Limites de la description de Stokes des écoulements à faible nombre de Reynolds – Equation d'Oseen 474
8.5 Dynamique des suspensions 478
8.5.1 Rhéologie des suspensions 479
8.5.2 Sédimentation d'une suspension de particules 482
8.6 Écoulements dans les milieux poreux 485
8.6.1 Quelques exemples 485
8.6.2 Paramètres caractérisant un milieu poreux 486
8.6.3 Écoulements dans les milieux poreux saturés – Loi de Darcy . 489
8.6.4 Modèles simples de la perméabilité des matériaux poreux . . 494
8.6.5 Relations conductivité électrique – perméabilité des poreux . 497
8.6.6 Écoulement de fluides non miscibles dans les milieux poreux . 501

Chapitre 9. Couches limites laminaires 507
9.1 Introduction 508
9.2 Structure de la couche limite près d'une plaque plane 509
9.3 Équations de mouvement dans la couche limite – théorie de Prandtl 512
9.3.1 Équations de mouvement près d'une plaque plane 512
9.3.2 Transport de vorticité dans la couche limite 515
9.3.3 Autosimilitude des profils de vitesse dans la couche limite, dans le cas d'une vitesse extérieure uniforme et constante . . 515
9.4 Profils de vitesse dans les couches limites 518
9.4.1 Équation de Blasius pour un écoulement extérieur uniforme le long d'une plaque plane 518
9.4.2 Résolution approchée de l'équation de Blasius 520
9.4.3 Force de frottement sur une plaque plane dans un écoulement uniforme 522
9.4.4 Épaisseurs de couche limite 523
9.4.5 Stabilité hydrodynamique d'une couche limite laminaire – Couches limites turbulentes 524
9.5 Couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression externe 525
9.5.1 Analyse physique simplifiée du problème 525
9.5.2 Profils de vitesse autosimilaires – écoulements de la forme $U(x) = Cx^m$ 526
9.5.3 Couches limites d'épaisseur constante 530
9.5.4 Écoulements non autosimilaires – décollement de la couche limite 532
9.5.5 Conséquences pratiques du décollement des couches limites . 533
9.6 Quelques applications des problèmes de décollement des couches limites 534
9.6.1 Aérodynamique des ailes d'avion 534

9.6.2 Contrôle du décollement des couches limites par aspiration . 540
9.6.3 Contrôle du décollement des couches limites par action sur le profil du corps solide 540
9.7 Couches limites massiques et couches limites thermiques 544
9.7.1 Couches limites thermiques 544
9.7.2 Couches limites de concentration, polarographie 551
9.8 Sillage laminaire 555
9.8.1 Approche qualitative du problème 555
9.8.2 Équation du mouvement dans le sillage 557
9.8.3 Force de traînée sur un corps – relation avec le profil de vitesse dans le sillage 559

Chapitre 10. Instabilités hydrodynamiques 563
10.1 Convection thermique 564
10.1.1 Équations de transport convectif de la chaleur 564
10.1.2 Convection thermique créée par un gradient horizontal de température 565
10.2 Instabilité de Rayleigh–Bénard 567
10.2.1 Description de l'instabilité de Rayleigh–Bénard 568
10.2.2 Mécanisme de l'instabilité de Rayleigh–Bénard et ordres de grandeur 570
10.2.3 Solution bidimensionnelle du problème de Rayleigh–Bénard . 573
10.3 Autres exemples d'instabilité avec seuil 580
10.3.1 Instabilité de Taylor–Couette 580
10.3.2 Instabilité thermocapillaire de Bénard–Marangoni 584
10.4 Quelques autres classes d'instabilités 588
10.4.1 Instabilité de Kelvin–Helmholtz 588
10.4.2 Écoulement de Poiseuille dans un tube et entre deux plans parallèles 596
10.4.3 Rôle de la forme du profil de vitesse et de la vorticité 596
10.5 Transition vers le chaos 598
10.5.1 Comportement de l'instabilité de Rayleigh–Bénard au-delà du seuil 598
10.5.2 Scénarios de transition vers le chaos 599

Chapitre 11. Turbulence 603
11.1 Une longue histoire 604
11.2 Les équations de base 606
11.2.1 Description statistique des écoulements turbulents 606
11.2.2 Dérivation des valeurs moyennes 607
11.2.3 Équations du mouvement turbulent 608
11.2.4 Expressions empiriques du tenseur de Reynolds 612
11.2.5 Conservation de l'énergie dans un écoulement turbulent . . . 615
11.2.6 Transport de la vorticité dans un écoulement turbulent . . . 616
11.3 Turbulence homogène – théorie de Kolmogorov 618
11.3.1 Décomposition spectrale d'un champ de vitesse turbulent . . 619
11.3.2 « Cascade d'énergie » dans un écoulement turbulent homogène 621
11.3.3 Lois de similitude de Kolmogorov 626
11.3.4 Vérification expérimentale de la théorie de Kolmogorov . . . 628

11.3.5 Intermittence de la turbulence et théorie de Kolmogorov modifiée (K61) 629
11.4 Écoulements près d'une paroi solide 629
11.4.1 Introduction 629
11.4.2 Écoulement turbulent stationnaire à une dimension parallèle à une paroi plane 631
11.4.3 Écoulement turbulent entre deux plaques parallèles 633
11.4.4 Perte de charge pour des écoulements entre plans parallèles et dans des tubes 640
11.4.5 Couches limites turbulentes 644
11.5 Autres aspects de la turbulence 650
11.5.1 Structures cohérentes et écoulements bidimensionnels turbulents 650
11.5.2 Structures filamentaires en turbulence 3 D 653

Références bibliographiques **654**

Index **669**

Préface de la nouvelle édition

La mécanique des fluides est une auberge espagnole où chacun trouve ce qu'il y apporte : la poésie d'un Lucrèce, l'analyse d'un Von Karman, la physique inspirée d'un Feynman. De nos jours, cette mécanique s'enseigne dans les départements spécialisés, riches d'une forte culture en mathématiques appliquées, et bien couplés au monde industriel. Mais la profonde compréhension physique que possédait un G.I. Taylor est devenue difficile à maintenir, et les ouvrages d'enseignement en hydrodynamique sont souvent de ce fait un peu formels. Ils ne préparent pas tout-à-fait les inventeurs du futur, qui auront à maîtriser des phénomènes ou des matériaux nouveaux. Ainsi le curriculum actuel des mécaniciens ignore pratiquement les superfluides, les polymères, les colloïdes, les cristaux liquides, les phénomènes interfaciaux, les milieux aléatoires, ... tous sujets dans lesquels des développements considérables ont lieu depuis trente ans.

Le présent livre est écrit avec le souci de remédier à cet état de choses. Son ordre de présentation est en lui-même révolutionnaire (les logiciens sourcilleux s'inquiéteront par exemple de voir apparaître le mot « pression » d'abord à propos des subtils effets capillaires !) Mais il faut comprendre que ce texte, écrit après une longue expérience d'enseignement, ne s'adresse pas à des étudiants totalement débutants. L'assimilation de ce livre demande du travail, mais il fournit un panorama extraordinairement riche de la matière — fluide ou presque fluide — et des écoulements. De plus il ne s'égare jamais dans des calculs avant d'avoir dégagé des principes.

Cette nouvelle édition n'est pas un simple fignolage du texte initial. Des thèmes importants ont été ajoutés :

a) certaines facettes superbes de la mécanique des fluides et notamment la science des fluides tournants ;

b) certains secteurs imparfaitement résolus comme la turbulence. Ici (sagement) l'accent est mis sur la vision de Kolmogorov pour la turbulence développée, et sur la turbulence de paroi. Le côté " naissance du chaos " est seulement mentionné à la fin du chapitre sur les instabilités : il impliquerait un niveau mathématique qui dépasse le cadre du présent livre ;

c) une section importante sur les milieux poreux - sujet auquel les auteurs du livre ont eux-mêmes contribué de façon significative ;

d) un aperçu sur la dynamique du mouillage - sujet qui m'est cher, mais qui est surtout important par ses applications au génie chimique, à l'aquaplaning des voitures etc. ;

e) quelques notions sur les fluides non newtoniens qui sont les constituants de base de nombreux procédés industriels.

J'espère profondément que le message culturel qui est présent ici passera, à la fois vers les étudiants et vers les enseignants, et je souhaite longue vie à cet ouvrage.

Pierre-Gilles DE GENNES

Introduction
Une seconde édition

La première édition de *Hydrodynamique physique*, fruit des enseignements de trois physiciens et de leurs recherches, date de 1991. Cet ouvrage a connu diverses réimpressions qui nous ont permis de prendre en compte des corrections mineures, mais sans nous donner la possibilité d'aménagements plus importants que les suggestions et questions de nos collègues et étudiants et notre propre enseignement rendaient souhaitables. Cette seconde édition prend en compte l'ensemble de ces remarques.

Mais avant tout, elle élargit de façon substantielle le propos grâce à de nouveaux chapitres adaptés à l'enseignement de base en mécanique des fluides. Ainsi, nous avons amplifié l'étude des phénomènes de mouillage (chapitres 1 et 4). Le chapitre 4 contient une description détaillée des écoulements des fluides non newtoniens (la rhéologie). Le chapitre 7 sur la vorticité s'est enrichi d'une partie importante sur les écoulements en rotation, et d'une introduction sur leurs applications en océanographie et météorologie. L'étude des suspensions et milieux poreux, qui sont des exemples d'application des écoulements aux petits nombres de Reynolds étudiés au chapitre 8, a été développée. Enfin, nous avons introduit un nouveau chapitre 11 qui porte sur l'étude des écoulements turbulents, le grand problème encore ouvert de la mécanique des fluides.

Nous avons conservé l'esprit dans lequel nous avons travaillé précédemment et que nous avions exprimé dans l'introduction de la première édition. Nous nous sommes cependant efforcés de clarifier certaines présentations, d'alléger les démonstrations toutes les fois que c'était possible et d'introduire de nouveaux exemples.

La mécanique des fluides a un statut mal défini et, souvent, elle est considérée comme une branche des mathématiques appliquées. Cette vision a été renforcée par le développement considérable des calculs d'écoulements par ordinateur (de fait, il existe bien peu de solutions exactes aux problèmes de mécanique des fluides). Il en est résulté, pendant de nombreuses années, une ignorance de cette discipline par les physiciens et les chimistes, alors même que des problèmes d'écoulements interviennent en permanence dans ces deux domaines.

Une autre raison de cette ignorance a été la forte polarisation de la recherche de pointe en physique vers les problèmes des systèmes quantiques ou

vers la relativité, alors même que les pères de ces disciplines (Bohr, Einstein, Heisenberg) ne négligeaient nullement la mécanique des fluides. De fait, les physiciens n'ont pas suivi les développements importants de cette discipline, tels que la couche limite, les écoulements atmosphériques et océaniques, la turbulence développée, les structures cohérentes des écoulements turbulents à très grande échelle (dont l'écoulement derrière la tache rouge de Jupiter nous offre une image très saisissante). Cette situation est heureusement en train de changer : de nombreux progrès récents sont dus à des scientifiques qui n'avaient pas nécessairement de culture de base dans ce domaine. Ils ont apporté leur connaissance de divers matériaux fluides (hélium superfluide, cristaux liquides, solutions de polymères) et de techniques expérimentales de pointe (issues en particulier de l'optique cohérente). Ils ont également appliqué aux instabilités hydrodynamiques des approches théoriques générales développées pour l'analyse des transitions de phase ; citons l'exemple particulièrement édifiant de l'étude des mécanismes de transition vers le chaos. De fait, les différences (plus que les différends) s'atténuent, et l'enrichissement mutuel que peuvent apporter les approches diverses d'un même problème est indispensable.

C'est en physiciens que nous avons écrit ce livre. L'approche que nous avons choisie vise en particulier à relier, toutes les fois que cela est possible, les comportements d'ensemble des fluides à leurs propriétés locales. Elle s'appuie plus sur des raisonnements à partir d'ordres de grandeur que sur des traitements formels. Ainsi, nous introduisons les nombres sans dimension (tels que le nombre de Reynolds) à partir du rapport (en grec, *analogia*) d'ordres de grandeur de quantités de même nature (temps, énergie), et non par une manipulation algébrique des équations aux dimensions. On y perd une recette de fabrication, mais on y gagne une meilleure compréhension physique, particulièrement importante pour cette science très largement expérimentale. Le mot « hydrodynamique » est un peu restrictif, car de nombreuses notions que nous présentons s'appliquent aussi à des gaz, tant que les écoulements sont suffisamment lents. Par ce mot, nous avons voulu exclure les problèmes spécifiques des gaz à grande vitesse, pour lesquels les effets de compressibilité doivent être pris en compte : dans ce cas, la mécanique se couple à un problème de thermodynamique, ce couplage se faisant à travers l'équation d'état des gaz.

L'organisation de l'ouvrage est la suivante :

* Le chapitre **1** part d'une approche microscopique des fluides pour décrire leurs propriétés de transport lorsqu'on les écarte légèrement de leur état d'équilibre (diffusion de la masse et de la chaleur). Nous montrons aussi comment des techniques de spectroscopie optique permettent de caractériser ces paramètres. Nous introduisons les phénomènes de mouillage statique.

* Le chapitre **2** est une introduction aux principaux régimes d'écoulement des fluides. Nous soulignons l'analogie entre la viscosité et les coefficients de diffusion et introduisons le nombre de Reynolds, qui constitue le critère fondamental de l'état d'écoulement d'un fluide. Enfin, nous décrivons l'émission de tourbillons derrière un obstacle cylindrique (tourbillons de Bénard-von Karman) et nous analysons son seuil d'apparition dans l'esprit des mécanismes de transition de phase « à la Landau ».

* Les chapitres **3** et **4** s'intéressent à la description des champs de vitesse d'écoulement (étude cinématique), et des contraintes (étude dynamique) qui leur sont associées : la relation entre ces deux paramètres est la base de la mécanique des fluides. Une large part des notions que nous introduisons peut être appliquée à d'autres problèmes de mécanique des milieux continus : il suffit de remplacer la notion de gradient de vitesse d'écoulement, qui est le paramètre important pour un fluide, par celle de gradient de déplacement entre deux points voisins. Notre étude de la cinématique met en particulier l'accent sur la visualisation des écoulements et, plus généralement, sur leur caractérisation expérimentale. Le chapitre 4 sur la dynamique conduit à l'écriture de l'équation de Navier-Stokes, qui est l'équation maîtresse du mouvement d'un fluide newtonien.

La rédaction de la première version a été largement revue pour permettre d'introduire les écoulements de fluides non newtoniens autrement que comme de simples définitions de relations déformation–contrainte. Nous nous sommes toutefois limités à des situtations simples. Nous avons, dans le même temps, souligné la correspondance avec les effets de structure aux petites échelles qui déterminent les caractéristiques macroscopiques de ces écoulements. Ils s'agit là d'un vaste thème, rendu populaire sous le nom de « matière molle », qui est intermédiaire entre l'étude des solides élastiques et celle des fluides visqueux. Un autre exemple que nous abordons également dans ce même cadre est celui de l'hydrodynamique du mouillage.

* Le chapitre **5** discute les équations de bilan des fluides, qui sont en fait une forme intégrale des lois locales exprimées dans le chapitre précédent. Ces équations de bilan pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie d'un fluide permettent de résoudre de nombreux problèmes, en particulier de déterminer les relations entre les forces sur les obstacles et le débit de fluide, sans avoir à connaître les champs de vitesse : il est cependant nécessaire de faire des hypothèses sévères sur les écoulements, que seule la notion de couche limite, étudiée au chapitre 9, permettra de justifier.

* Le chapitre **6** traite de l'écoulement des fluides parfaits pour lesquels le rotationnel de la vitesse est souvent nul en tous points, et suit naturellement l'étude des équations de bilan. Cette étude fait apparaître de fortes analogies avec les problèmes d'électrostatique (pour lesquels le rotationnel du champ électrique est nul). Une annexe sur l'hélium superfluide, fluide sans viscosité et pourtant bien réel, conclut ce chapitre.

* Dans le chapitre **7**, la notion de vorticité est davantage développée qu'elle ne l'est habituellement dans les ouvrages de mécanique des fluides. Les tourbillons sont en effet présents dans de nombreux écoulements, et l'étude de leur dynamique donne une première idée des mécanismes de la turbulence. La loi d'évolution du tourbillon, elle-même, correspond à la loi de conservation du moment cinétique en mécanique du point. L'étude des propriétés extraordinaires des tourbillons quantifiés de l'hélium superfluide, présentée en annexe de ce chapitre, ainsi que celle, plus lointaine, des défauts en physique des solides ont été, pour de nombreux physiciens, une introduction à la vorticité.

Nous avons ajouté, à la fin de ce chapitre, une partie importante sur les écoulements en rotation, qui jouent un rôle clé en météorologie et océanographie. Aux grandes échelles des écoulements en rotation, les termes non linéaires de convection deviennent négligeables devant les forces de Coriolis. L'équation du mouvement est linéaire, ce qui fournit des solutions simples, même si les résultats ne sont pas toujours si intuitifs, aux problèmes liés à des situations importantes de géophysique externe (l'enveloppe fluide de la terre).

* Le chapitre **8** revient sur le problème des écoulements aux petits nombres de Reynolds (aussi appelés écoulements rampants) qui sont contrôlés par la viscosité. Bien que l'équation de mouvement (ou équation de Stokes) soit, dans ce cas, linéaire, les solutions exactes sont, une fois encore, peu nombreuses et difficiles à obtenir, à commencer par le simple problème de Stokes du mouvement uniforme d'une sphère dans un fluide. L'utilisation de solutions approchées est, pour les autres problèmes, une règle générale. Une présentation des suspensions et des milieux poreux, plus détaillée que dans la première édition, nous a semblé justifiée en raison des très nombreux exemples d'applications qu'ils proposent.

* L'étude de la couche limite laminaire menée au chapitre **9** permet la description d'une large classe d'écoulements rapides autour d'obstacles solides, et a des applications pratiques considérables. Elle justifie l'étude des écoulements des fluides parfaits réalisée au chapitre 6 : ceux-ci fournissent en effet une bonne approximation des écoulements à l'extérieur des couches limites.

Les chapitres précédents (6 à 9) sont au cœur de la mécanique des fluides : aussi, nous les avons structurés pour qu'ils puissent être lus indépendamment les uns des autres.

* Le chapitre **10** traite des instabilités hydrodynamiques et peut être considéré comme un ensemble d'applications des notions établies au cours des neuf chapitres précédents. Il se justifie aussi, en ce qui concerne les instabilités convectives (du type de celle de Rayleigh–Bénard), par le développement

récent très important du sujet, et par l'impact de méthodes mathématiques et physiques d'études des instabilités et bifurcations qui débordent d'ailleurs du cadre de la mécanique des fluides. Les développements de ces études constituent une approche fructueuse du problème, encore mal maîtrisé, de la turbulence aux grands nombres de Reynolds (l'étude de l'instabilité de Kelvin–Helmholtz que nous traitons en est un exemple).

* Enfin, nous avons introduit un nouveau chapitre **11** sur l'étude de la turbulence. Il s'agit d'un sujet complexe, mais dont l'importance considérable dans de nombreux écoulements industriels et naturels, et les liens avec les autres chapitres du livre (vorticité, couches limites, instabilités) rendait la présentation souhaitable. Nous avons utilisé une présentation classique, basée sur une approche statistique, à partir de l'étude des fluctuations de la vitesse en régime turbulent et des corrélations spatiotemporelles de ces fluctuations, et qui s'appuie sur les études déjà anciennes du sujet. Nous présentons successivement la turbulence dans un écoulement homogène en moyenne et celle, hétérogène, qui se développe le long d'un obstacle, en montrant les correspondances possibles entre ces deux situtations. L'étude des grandes structures dans les écoulements turbulents et celle des propriétés particulières des écoulements bidimensionnels, concluent ce dernier chapitre.

Si nous nous sommes présentés comme physiciens, ce n'est pas pour méconnaître l'importance de la culture que nous avons acquise au contact de la communauté des mécaniciens, tels que P. Germain et R. Moreau en France. Comment ne pas avoir été influencés également par l'école britannique de la mécanique des fluides avec G.K. Batchelor, récemment disparu qui a su maintenir si active la tradition du grand G.I. Taylor, et H.K. Moffatt ; par celle du génie chimique américain (autour de A. Acrivos). Les cours de P.-G. de Gennes au Collège de France en 1974 et 1975 (restés inédits), les deux chapitres très physiques du cours de physique de Feymann sur « l'eau sèche » et « l'eau mouillée » et le livre de mécanique des fluides de L. Landau ont été également des éléments importants de notre apprentissage.

Peut-être plus encore, ce sont les idées et les enseignements donnés par nos collègues et amis, J. Brady, B. Castaing, E. J. Hinch, G. Homsy et D. Lhuillier, que nous avons exploités « sans vergogne » et qui nous ont permis d'écrire ce livre. Nous remercions enfin R. Blanc, A.-M. Cazabat, Y. Couder, J.-F. Joanny, D. Lhuillier et B. Perrin, ainsi que Pierre Bergé et Michel Hulin, aujourd'hui disparus, pour leurs lectures amicales et critiques à différents stades de la rédaction de cet ouvrage, et Emmanuel Guyon pour son aide dans la partie « aéronautique » du chapitre 9 et la préparation des figures.

La seconde édition a tenu compte de nombreuses remarques faites par tous les collègues qui ont travaillé à partir de ce livre, et a fait l'objet de relectures attentives de plusieurs d'entre eux, que nous tenons à remercier tout particulièrement : Anne-Marie Cazabat, sur le mouillage ; Catherine Allain, sur la rhéologie ; Lien Hua, sur les écoulements en rotation ; Christophe

Baudet, Marie Farge, Uriel Frisch, Frédéric Moisy et Caroline Nore sur la turbulence. De nombreux collègues universitaires et industriels nous ont fourni des données et des documents originaux qui permettent d'illustrer l'exposé des différents sujets de l'ouvrage avec des résultats expérimentaux ; nous leur en sommes très reconnaissants.

Enfin, nous n'oublions pas les étudiants de DEUG, de licence, de maîtrise et de DEA, ainsi que ceux de l'ESPCI, et tous ceux et celles, physiciens, chimistes qui, de Paris à Los Angeles, Buenos Aires et Montréal, ont utilisé la première édition de cet ouvrage, et dont les encouragements, et surtout les suggestions, nous ont conduits à écrire cette nouvelle édition fortement remodelée.

C'est à ces communautés d'étudiants que s'adresse ce livre, afin de leur offrir un premier contact avec l'étude des fluides en écoulement, en espérant qu'ils partageront avec nous la curiosité et le plaisir que nous avons eu nous-mêmes à travailler sur différents sujets de ce livre, objets de nos propres recherches ou fruit de nos lectures d'une science savante et pourtant bien concrète, et si présente autour de nous.

Paris, mai 2001

É. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit

Chapitre 1

Physique des fluides

SOUS SON ASPECT *microscopique, la physique des fluides peut être considérée comme une branche de la thermodynamique. L'approche physique classique s'intéresse aux états d'équilibre des corps purs – solides, liquides et gaz – et aux changements d'état entre ces phases. Un premier élargissement de cette approche est l'étude des fluctuations au voisinage immédiat d'un état d'équilibre ; ces fluctuations sont caractéristiques de cet état, mais renseignent aussi sur les propriétés de retour à l'équilibre. Ainsi, pour un système physique contenant un grand nombre de particules et qui a subi un « léger écart » par rapport à son état d'équilibre thermodynamique, il existe des relations simples de proportionnalité entre les flux qui ramènent le système à l'équilibre et l'importance de l'écart par rapport à cet équilibre.*

L'étude de ces relations et la définition des coefficients de transport qui les caractérisent constituent le noyau de ce premier chapitre ; cette étude sera d'abord macroscopique (section 1.2), puis microscopique (section 1.3). Nous analyserons ensuite (section 1.4) quelques phénomènes de surface qui apparaissent lorsque deux fluides ont une surface de séparation commune (interface). Nous discuterons enfin brièvement l'application aux liquides des techniques de spectroscopie optique, de rayons X ou de neutrons (section 1.5) : ces méthodes permettent d'étudier les fluctuations autour de l'équilibre et d'en déduire les valeurs des coefficients de transport. Mais, auparavant (section 1.1), nous allons donner une description simple de l'état microscopique d'un fluide en nous attachant à analyser l'influence de ses caractéristiques microscopiques sur ses propriétés macroscopiques.

1.1 L'état liquide

On connaît bien, à partir de l'étude des structures microscopiques (rayons X) ou par l'observation de la forme extérieure d'un cristal, l'organisation périodique de ses atomes. Dans cet état de la matière, les atomes restent fixes les uns par rapport aux autres à l'exception de

vibrations de faible amplitude, d'origine thermique. À l'opposé, les gaz sous faible pression constituent un ensemble dilué de particules se déplaçant rapidement, avec de faibles interactions entre elles, excepté lors de leurs collisions ; les modèles de théorie cinétique des gaz permettent de comprendre de façon microscopique l'évolution de leurs variables d'équilibre, telles que la température ou la pression. En revanche, la description d'un liquide – de caractéristiques intermédiaires entre celle d'un gaz et celle d'un solide – est plus délicate : faut-il le considérer comme un gaz très dense ou comme un solide désordonné ? De fait, les modèles microscopiques des liquides associent souvent ces deux approches extrêmes. En particulier, les systèmes modèles microscopiques et macroscopiques à deux dimensions fournissent un outil très puissant pour analyser la structure et les propriétés statiques des différents états de la matière.

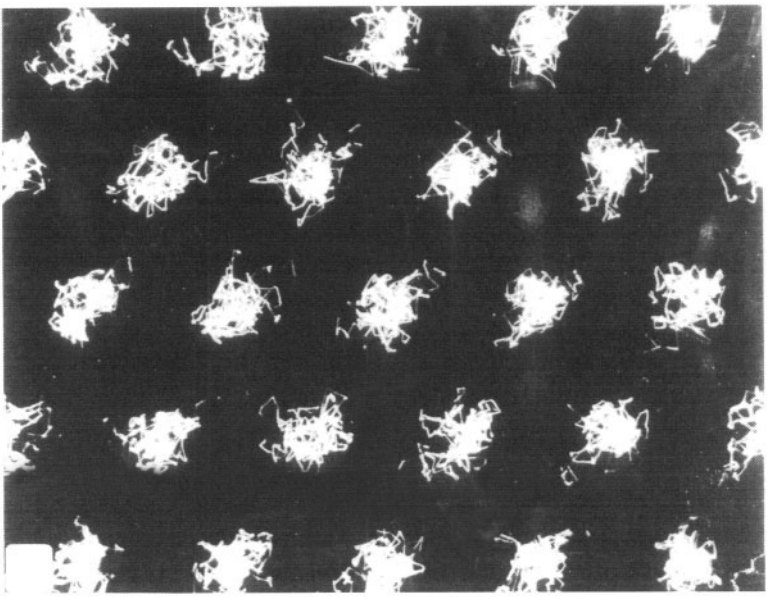
1.1.1 Les différents états de la matière : systèmes modèles et milieux réels

Représentation visuelle des états de la matière par une table soufflante

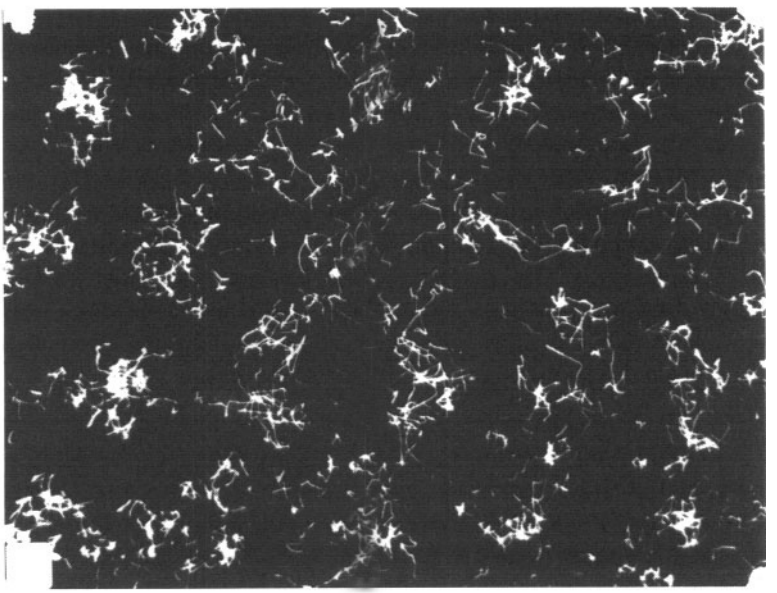
Les modèles de tables soufflantes utilisent un écoulement d'air dirigé vers le haut à travers une plaque horizontale percée de trous identiques de petit diamètre et répartis uniformément sur sa surface. On y place des palets de rayon R qui se déplacent ainsi sans friction appréciable ; « l'agitation thermique » des palets peut être simulée par la vibration de la plaque ou de ses parois latérales. Suivant la concentration moyenne des palets, on peut observer les caractéristiques des différents états de la matière. Les figures 1.1a & b ont été obtenues en fixant une petite source lumineuse sur chacun des palets et en enregistrant les trajectoires correspondantes sur une photo exposée pendant un temps de pose plus long que le temps moyen entre chocs. Les trajectoires des palets apparaissent en blanc sur les figures. On caractérise la concentration de palets par la *compacité* C (ou facteur de remplissage), qui est le rapport de la surface occupée par les palets à la surface totale.

♦ **Compacité maximale :** $C = C_M$

La valeur maximum C_M pour des systèmes à deux dimensions est obtenue pour un empilement triangulaire compact de disques. Les palets forment alors un réseau cristallin parfait bidimensionnel (Fig. 1.2) : cet état représenterait celui d'un cristal parfait sans agitation thermique. Dans cette configuration, un motif unité (la maille élémentaire) qui, répété périodiquement, conduit au réseau triangulaire, est un losange (L) de surface $S_0 = (2R)(2R)\frac{\sqrt{3}}{2}$. À l'intérieur de cette surface, il y a exactement les éléments d'un disque de



(a)



(b)

FIG. 1.1 – *Configurations observées lors du mouvement de palets sur une table soufflante pour différentes valeurs de la compacité C ; (a) état solide $C = 0,815$; (b) état fluide $C = 0,741$ (photographies Piotr Pieranski).*

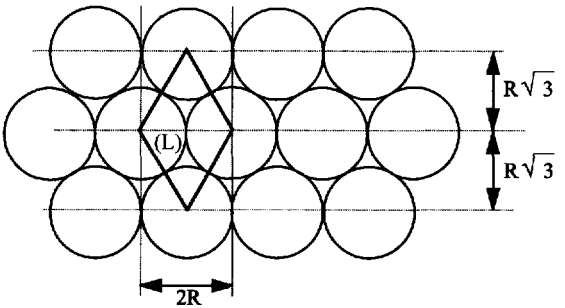


FIG. 1.2 – *Configuration de compacité maximale d'un empilement de palets circulaires de même diamètre et dont les centres forment un réseau cristallin plan.*

surface $S_p = \pi R_2$, d'où une compacité :

$$C_M = \frac{S_p}{S_0} = \frac{\pi R^2}{2R^2\sqrt{3}} = 0,901. \tag{1.1}$$

Remarque On parle quelquefois par abus de language, de réseau hexagonal. Ce dernier correspondrait à la présence d'un élément seulement au sommet de chaque hexagone, et non au centre de l'hexagone.

♦ Compacités élevées

Tant que la compacité reste voisine de C_M, les palets se déplacent autour de leur position d'équilibre, comme le révèlent les trajectoires des points lumineux (Fig. 1.1a). En revanche, leur position moyenne reste fixe et l'arrangement correspondant est périodique : on a ainsi l'image des vibrations des atomes d'un solide, responsables de la propagation du son. Dans un solide, les déplacements des particules se transmettent en effet de proche en proche en réponse à une oscillation imposée à une extrémité. Ces modes de propagation sont appelés *phonons*. Mais, deux rangées voisines de l'empilement ne peuvent pas glisser l'une par rapport à l'autre de plus d'une distance de l'ordre de R : chaque particule garde toujours les mêmes voisines. L'amplitude des déformations correspondant à ce glissement est donc limitée, et des forces de rappel élastique apparaissent.

♦ Compacités moyennes

Pour des valeurs de la compacité inférieure à $C_0 \approx 0,8$, on passe à un régime différent dans lequel les particules peuvent sortir de la cage constituée par leurs voisines. Dans ce cas, les particules ne restent plus en position moyenne fixe les unes par rapport aux autres et constituent un « liquide » bidimensionnel (Fig. 1.1b). Dans le même temps, la périodicité du cristal est

perdue. La fluidité de l'état liquide entraîne la possibilité d'un mouvement d'ensemble des palets l'un par rapport à l'autre si on impose un mouvement relatif à des parois latérales qui délimitent le système.

♦ **Faibles compacités** $C \ll C_0$

Dans ce cas, on a un « gaz » de palets. La distance moyenne entre les centres de deux particules plus proches voisines peut être alors très grande (de l'ordre de $R/\sqrt{C}$), alors qu'elle était de l'ordre de $2R$ à l'état liquide.

Simulations numériques par modèles de disques durs

On peut obtenir des résultats analogues à ceux de la section 1.1.1, à partir de simulations numériques où l'interaction entre particules est de type *disque dur* ; dans ce cas, le potentiel d'interaction entre deux particules est nul lorsque la distance r entre leurs centres est supérieure à $2R$, et infiniment répulsif lorsque r est inférieur ou égal à $2R$. Ces études confirment et étendent les résultats du modèle analogique que nous avons présenté plus haut. Mais ces simulations permettent surtout d'introduire des potentiels d'interaction plus réalistes, tel celui de Lennard-Jones qui, pour un problème à trois dimensions, est de la forme :

$$V(r) = V_0 \left[\left(\frac{2R}{r} \right)^{12} - \left(\frac{2R}{r} \right)^{6} \right] \cdot \tag{1.2}$$

Cette forme de potentiel permet de rendre compte d'une très légère interpénétration des particules, fortement limitée par le principe d'exclusion de Pauli, lorsque r est inférieur ou égal à $2R$; ce potentiel introduit aussi une faible attraction entre particules, due aux forces de Van der Waals, qui devient dominante aux « grandes » distances ($r \gg R$). L'équation (1.2) prédit l'existence d'un minimum de $V(r)$ pour une valeur, r_0 de l'ordre de $2R$; cela correspond à un équilibre stable qui n'existe pas dans le modèle de disques ou de sphères durs. En introduisant ce potentiel, on modifie l'équation d'état du gaz parfait bidimensionnel et on obtient une forme similaire à l'équation de Van der Waals pour un corps pur. En particulier, on voit apparaître un domaine où un équilibre liquide–gaz est possible.

Modèles à trois dimensions

À la section 1.1.1, nous avons modélisé la structure des solides et la transition solide–liquide à partir d'un arrangement de palets circulaires. Il est également possible de représenter la structure de certains états d'organisation de la matière à l'aide d'empilements périodiques de sphères : c'est le cas par exemple pour le réseau cubique à faces centrées (Fig. 1.3a).

Cherchons la compacité d'une telle structure ; le motif de base de l'empilement est constitué par un cube de rayon $a = (4R/\sqrt{2})$ (Fig. 1.3b) qui contient l'équivalent du volume de quatre sphères de rayon R (la diagonale des côtés du cube est en effet égale à $4R$). La compacité C (fraction de volume

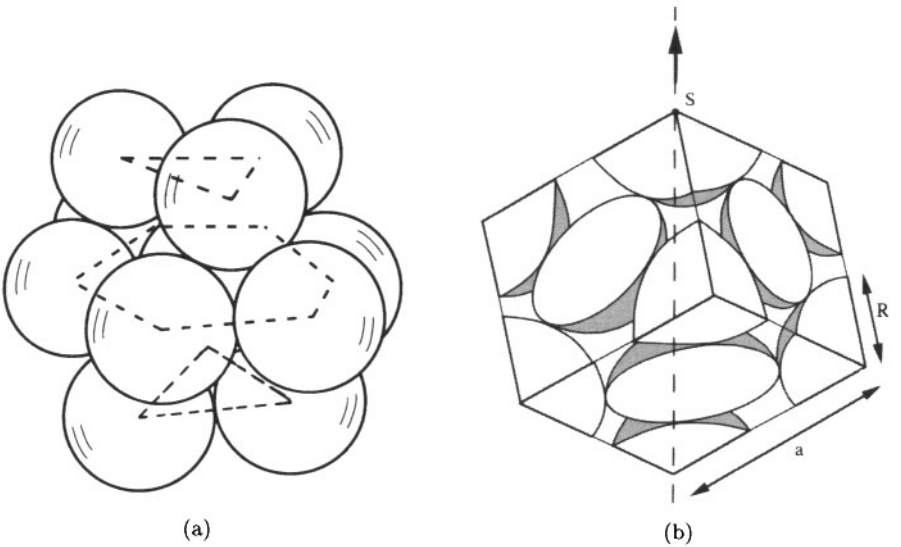


FIG. 1.3 – *(a) Empilement à faces cubiques centrées (CFC) compact d'un ensemble de sphères de rayon uniforme R ; (b) le réseau CFC de sphères en contact a été coupé par le cube qui forme la maille élémentaire du réseau. Il y a en tout 4 sphères à l'intérieur de ce cube. La correspondance avec la figure (a) peut être mieux comprise si l'on réalise que la sphère S à l'extrémité de l'axe 111 formant la diagonale principale du cube joue le rôle de la sphère (cachée) au centre de l'empilement de (a).*

occupée par des sphères en contact) vérifie donc :

$$C = \frac{4\,\frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{4\,\frac{4}{3}\pi R^3}{\left(\frac{4R}{\sqrt{2}}\right)^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0,74. \tag{1.3}$$

La valeur 0,74 de la compacité de la structure cubique à faces centrées est la plus élevée qui existe pour des empilements de sphères de même rayon R : une fois réalisé, cet empilement assure une organisation périodique à grande distance, tout comme pour un réseau triangulaire à deux dimensions.

Remarque La conjecture de Kepler, qui proposait que l'on ne puisse dépasser cette limite pour des empilements de sphères de même diamètre, a reçu une démonstration mathématique en... 1998.

La différence avec le cas à deux dimensions vient de ce que cet empilement périodique ne se forme pas spontanément quand on remplit un récipient de billes identiques, même en les faisant vibrer. En effet, il existe une infinité de

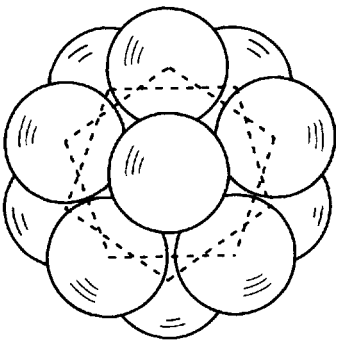


FIG. 1.4 – *Cet empilement icosaédrique est construit, comme celui de la figure 1.3a, à partir de 12 sphères de même diamètre placées régulièrement autour d'une sphère centrale cachée : il a une probabilité plus grande de se produire que l'empilement cubique à faces centrées. À cause de sa symétrie d'ordre 5, il ne peut pas être l'amorce d'un réseau cristallin.*

façons de placer autour d'une seule sphère le même nombre (12) de sphères voisines : l'icosaèdre de la figure 1.4 en est un exemple particulier. Il n'est pas possible de construire un cristal à partir de tels remplissages locaux. Cela est différent du cas bidimensionnel où la seule façon de disposer six disques en contact avec un disque central est de les placer aux sommets d'un hexagone ; ce dernier constitue alors l'amorce du cristal triangulaire bidimensionnel de la figure 1.2.

En pratique, lorsqu'on remplit un récipient avec des billes de même rayon, on construit un empilement désordonné de compacité comprise entre 0,59 et 0,64, quel que soit le mode de remplissage. La structure ainsi obtenue représente assez bien celle d'un métal amorphe que l'on peut obtenir en déposant rapidement un film de métal à l'état liquide ou vapeur sur un support très froid. Elle représente assez bien aussi la position instantanée des atomes d'un liquide simple (Fig. 1.1b). Enfin, ces empilements fournissent une bonne représentation des milieux poreux (sable, grès) dont nous parlerons à la section 8.6 du chapitre 8.

Il est également possible d'obtenir des modèles de cristaux tridimensionnels à partir de particules sphériques de latex de diamètre bien défini, mises en solution dans un milieu ionique. Tant que les répulsions coulombiennes entre les sphères sont suffisamment fortes, ces interactions conduisent à la formation d'un arrangement périodique des particules (cristal colloïdal). En augmentant la concentration ionique de la solution, on diminue les répulsions car les charges de la solution réalisent un écran contre les interactions entre particules ; la structure périodique disparaît, et il se forme des agrégats de particules.

1.1.2 La limite solide–liquide : une frontière parfois floue

La limite entre le comportement mécanique d'un solide et celui d'un liquide n'est pas toujours aussi franche qu'il apparaît dans la description thermodynamique ; elle dépend étroitement de l'amplitude et de la durée des contraintes appliquées. La science qui étudie l'évolution de la déformation des matériaux sous contrainte est la *rhéologie*. À la section 4.4 du chapitre 4, nous discuterons les différents types de comportement observés dans des fluides variés. Nous nous limiterons ici à deux exemples.

Modélisation de la plasticité à deux dimensions

La déformation de solides tels que des barres ou des ressorts métalliques soumis à des forces cesse d'être réversible au-delà d'une contrainte seuil qui représente leur *limite élastique*. Aussi, de nombreux corps, en apparence solides, « s'écoulent » lorsqu'ils sont soumis à de très fortes contraintes (glaciers, matériaux de la croûte terrestre, feuilles métalliques dans un pressage à froid). Ce processus est appelé plastification. Les modèles à deux dimensions permettent d'illustrer l'influence capitale, sur ce phénomène, des défauts qui existent dans des empilements cristallins. Ces défauts pourront par exemple être l'apparition d'une nouvelle rangée de particules à partir d'un point du réseau (*dislocation*), ou bien une ligne de contact entre deux réseaux d'orientation légèrement différentes (*joints de grain*). Il suffit de regarder un plateau sur lequel on a déposé une monocouche de billes ; en inclinant légèrement le plateau, on constate que les déformations d'ensemble de cette couche sont rendues possibles par le mouvement des billes voisines des défauts. Ainsi, les défauts permettent à la matière solide de s'écouler. Cette observation est à la base de la métallurgie moderne.

Dépendance de la déformation d'un matériau par rapport à la vitesse de variation des contraintes

La rapidité de la variation des contraintes joue un rôle tout aussi important que leur amplitude pour déterminer le comportement d'un matériau : ainsi, nous verrons du chapitre 4 (section 4.4.4) que la réponse d'un corps à une perturbation de fréquence variable permet de faire apparaître un passage de l'état solide (à haute fréquence) à l'état liquide (à basse fréquence). La limite entre ces deux régimes est obtenue autour d'une fréquence $1/\tau$, caractéristique du corps. Le sable mouillé est un exemple classique de changement de comportement avec la fréquence. Il suffit de comparer l'enfoncement très faible d'un pied dans le sable lors d'une course, à celui, plus marqué, en position immobile. On peut réaliser très simplement chez soi une expérience du même type avec une solution concentrée de maïzena ou d'amidon dans laquelle on enfonce une petite cuillère à différentes vitesses : la cuillère ne s'enfonce que si on la pousse lentement ; en revanche, on arrache la maïzena comme un éclat de solide si on la tire rapidement. Un autre

exemple classique de ce comportement est le cas d'un polymère dont les chaînes ont la forme d'une « pelote » : les monomères sont enchevêtrés les uns dans les autres. Le temps τ est associé à un temps de « débobinage » des macromolécules. Si le temps caractéristique de l'excitation est plus court que le temps τ, le polymère se comporte comme un corps solide ; en revanche, à plus basse fréquence (aux temps plus grands que le temps τ), il utilise ses degrés de liberté internes pour se déformer irréversiblement comme un liquide. Le nombre de Deborah sera défini au chapitre 4 comme le rapport de ces deux temps.

1.2 Coefficients macroscopiques de transport

Analysons maintenant le transport induit dans les fluides par de légers déséquilibres tels que la réponse du système puisse continuer à être décrite par une approximation linéaire. Trois types de problèmes peuvent ainsi être abordés :

- le transport de *chaleur (d'énergie)* en présence de variations spatiales de température ;
- le transport de *matière* dû à des variations de concentrationé ;
- le transport de *quantité de mouvement* dans un fluide en mouvement. C'est surtout cette dernière propriété de transport qui sera étudiée dans cet ouvrage. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux deux premières citées.

En physique des fluides, ces différents modes de transport coexistent souvent. Voici deux exemples de cette coexistence :

- un objet chaud (température T_+) placé dans un fluide au repos à une température plus faible T_-, induit souvent un mouvement dit *convectif* dans la partie supérieure du fluide (Fig. 1.5a). En retour, les mouvements du liquide augmentent le transport de chaleur entre l'objet et le fluide ;
- en soufflant sur un morceau de bois incandescent, on modifie à la fois les transports de masse, de matière et de chaleur (Q), et la cinétique de la réaction exothermique de combustion est accélérée (Fig. 1.5b).

On a, dans ces exemples, une juxtaposition de mécanismes d'échange convectif (entraînement par le fluide en écoulement), radiatif, chimique (associé aux réactions) et diffusif (ou conductif). Ces derniers mécanismes dépendent uniquement des propriétés microscopiques du fluide et sont analysés comme des faibles déviations par rapport à l'état d'équilibre. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement à ce cas.

Nous discuterons d'abord d'un point de vue macroscopique l'exemple familier de la diffusion de la chaleur, pour aborder ensuite la diffusion de masse

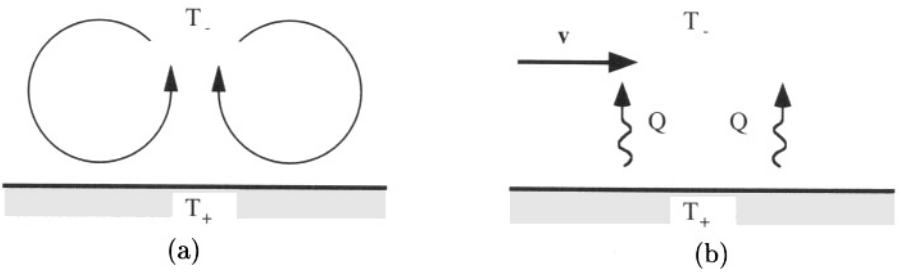


FIG. 1.5 – *Échange de chaleur entre un fluide et une plaque chauffée : (a) en présence d'un écoulement de convection spontané induit par la différence de température (et étudié en détail au chapitre 10) ; (b) entre un courant d'air et un corps chaud, avec la formation d'une couche limite (voir chapitre 9).*

(section 1.3) ; puis à la section 1.4, nous donnerons une image microscopique de ces effets dans les gaz et les liquides. Au chapitre 2, nous verrons comment la viscosité d'un fluide traduit le phénomène de diffusion de la quantité de mouvement. La présentation simultanée du transport diffusif de ces trois grandeurs provient de ce que les équations décrivant les processus et les caractéristiques observées sont analogues. Les résultats obtenus pour le transport de la chaleur sont facilement transposables au transport de la masse ou de la quantité de mouvement (moyennant un changement des coefficients et une transposition scalaire–vecteur).

1.2.1 Conductivité thermique

Définition de la conductivité thermique, équation de transport de la chaleur en régime stationnaire

Un corps homogène (solide, liquide ou gaz) infiniment étendu dans les trois directions est soumis à un gradient de température $\partial T/\partial x$ le long de l'axe Ox. Ce gradient est obtenu en appliquant une différence de température $T_1 - T_2$ entre les deux plans P_1 et P_2 distants de L (Fig. 1.6). On s'intéresse au transport de chaleur à travers une section de surface S perpendiculaire à l'axe Ox.

Le flux de chaleur J_Q par unité de section et de temps varie linéairement avec $T_1 - T_2$, ce que l'on peut exprimer par la relation de proportionnalité :

$$J_Q = \frac{\delta Q}{S\delta t} = k\frac{T_1 - T_2}{L} = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \tag{1.4}$$

le signe négatif indique que le flux de chaleur est dirigé en sens opposé du gradient thermique. La dernière égalité vient de ce que, à l'équilibre, la température varie linéairement entre les valeurs extrêmes T_1 et T_2, ce que nous justifierons ultérieurement (section 1.2.1). Le coefficient k (appelé *conductivité thermique*) est fonction uniquement des propriétés du matériau. Il vérifie

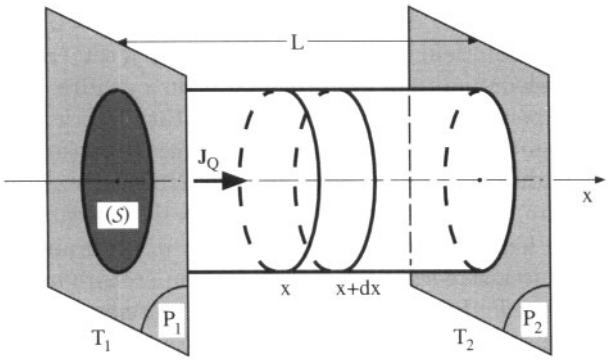


FIG. 1.6 – *Transport de chaleur le long de l'axe d'un cylindre induit par une différence de température* $T_1 - T_2$.

l'équation aux dimensions :

$$[k] = \frac{[M][L]^2[T]^{-3}}{[L]^2 \cdot \dfrac{[\Theta]}{[L]}} = [M][L][T]^{-3}[\Theta]^{-1} \tag{1.5}$$

($[L]$ correspond à la longueur, $[M]$ à la masse, $[T]$ au temps, $[[\Theta]$ à la température). Des valeurs typiques de ce coefficient sont données dans le tableau 2 à la fin de ce chapitre. La relation (1.4) peut être généralisée au cas où la température T varie dans les trois directions de l'espace avec :

$$\mathbf{J_Q}(\mathbf{r}) = -k\,\mathbf{grad}\,T(\mathbf{r}). \tag{1.6}$$

Cette relation a la même forme que la loi d'Ohm locale $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\sigma\mathbf{grad}\,V(\mathbf{r})$ qui relie la densité de courant électrique $\mathbf{j}$ au potentiel $V(\mathbf{r})$ en électrocinétique (σ est la conductivité électrique du milieu). Nous comprenons maintenant pourquoi, en régime stationnaire, la température varie linéairement avec la distance dans la géométrie de la figure 1.6, tout comme le potentiel électrique varie linéairement entre deux électrodes parallèles portées à des potentiels différents et plongées dans un fluide conducteur. La relation linéaire (1.6) exprime une proportionnalité entre *un flux* (de chaleur) et une *force thermodynamique* (le gradient thermique) ; on retrouvera des relations similaires dans les autres phénomènes de transport au voisinage de l'équilibre.

Application de l'équation de conductivité thermique à une géométrie cylindrique

L'expérience que nous allons décrire permet de mesurer la conductivité thermique du matériau constituant le cylindre creux de rayon a, représenté sur la figure 1.7. Initialement, le cylindre est plongé dans un bain isotherme à

la température uniforme T_1 de telle façon que $T(r = a) = T_1$ quel que soit t. La zone creuse à l'intérieur du cylindre ($r < b$) n'est en communication avec le bain extérieur que par l'intermédiaire du cylindre. On y place un thermomètre qui permet de mesurer la température intérieure $T_i(t)$, et une résistance chauffante R qui délivre une puissance P constante et uniforme sur la hauteur H du cylindre. Si cette hauteur H est assez grande devant le rayon a du cylindre, on peut supposer que le flux de chaleur $\mathbf{J_Q}(r)$ est radial et ne varie pas le long de l'axe. À l'instant $t = 0$, on branche la résistance chauffante et on enregistre les variations de la température intérieure $T_i(t)$ du cylindre mesurée par le thermomètre. Au bout d'un temps suffisamment long, cette température se stabilise à une valeur T_2. La mesure de $T_2 - T_1$ donne accès à la valeur de la conductivité thermique k du cylindre. En effet, évaluons le flux de chaleur radial $\mathbf{q}(r)$ par unité de surface ($b < r < a$) circulant entre deux cylindres de rayons infiniment voisins r et $r + \mathrm{d}r$. Son module $q(r)$ vérifie :

$$P = 2\pi\, r\, H J_Q(r) \tag{1.7}$$

avec :

$$J_Q(r) = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\cdot \tag{1.8}$$

En régime stationnaire, la puissance de chauffe P est une constante. En combinant ces deux relations, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{2\pi H k}{P}\mathrm{d}T. \tag{1.9}$$

En intégrant cette équation, compte tenu des conditions aux limites sur la température, on obtient :

$$k = \frac{P}{2\pi H(T_2 - T_1)}\log\frac{a}{b}\cdot \tag{1.10}$$

Remarque Ce calcul, valable en régime permanent, est identique à celui de la conductivité électrique d'un conducteur formé de deux cylindres coaxiaux entre lesquels est appliquée une différence de potentiel $(V_2 - V_1)$ (analogue à la différence de température $T_2 - T_1$) et parcourus par un courant d'intensité I (analogue à la puissance de chauffe P).

Échange thermique en régime non stationnaire – Équation de Fourier

Nous avons traité l'exemple précédent en supposant qu'on avait atteint un régime stationnaire où la température en chaque point est indépendante du temps. On mesure alors un effet de diffusion sous gradient imposé.

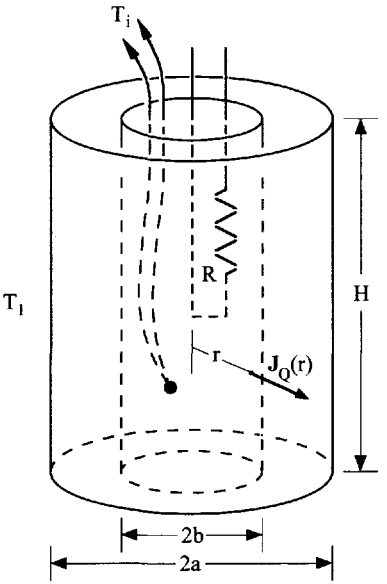


FIG. 1.7 – *Principe de l'expérience de la mesure de conductivité thermique à l'aide d'un cylindre creux.*

Considérons maintenant le cas plus général où la température T est à la fois fonction de la position et du temps ; dans le paragraphe précédent, cela correspondait à la variation transitoire représentée par la courbe de la figure 1.7 b. Nous traiterons ici, tout d'abord, le cas plus simple de la variation de température avec la géométrie unidimensionnelle de la figure 1.6 : l'évolution de la température $T(x, t)$ peut être décrite en exprimant un bilan thermique pour un élément de volume de corps limité par les plans voisins x et $x + \mathrm{d}x$ (Fig. 1.6).

Le flux de chaleur entrant pendant le temps $\mathrm{d}t$ par la surface S est, d'après l'équation (1.6) :

$$q_x(x)\, S\, \mathrm{d}t = -k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\, S\, \mathrm{d}t. \tag{1.11}$$

Le flux sortant est de même :

$$q_x(x + \mathrm{d}x) S\, \mathrm{d}t = -k \frac{\partial T(x + \mathrm{d}x, t)}{\partial x}\, S\, \mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

La différence de ces deux flux est la quantité de chaleur algébrique accumulée dans le volume limité par les deux plans soit :

$$q_x(x)\, S\, \mathrm{d}t - q_x(x+\mathrm{d}x)\, S\, \mathrm{d}t = k\, S\, \mathrm{d}t \left[-\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial T(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} \right] = k\, S\, \mathrm{d}t \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.13}$$

en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $\partial T(x,t)/\partial x$. Cette quantité de chaleur accumulée entraîne une variation de température $\partial T(x,t)/\partial t$ donnée par l'égalité :

$$\rho\, C\, S\, \mathrm{d}x \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \mathrm{d}t = k\, S\, \mathrm{d}t \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\, \mathrm{d}x \tag{1.14}$$

où ρ est la masse volumique du corps et C sa capacité calorifique par unité de masse. En simplifiant l'équation (1.14), on obtient l'équation de la chaleur, dite *équation de Fourier*, à une dimension, qui relie les dérivées partielles de la température T par rapport au temps et à la coordonnée d'espace x :

$$\rho C \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.15a}$$

ou :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.15b}$$

avec :

$$\kappa = \frac{k}{\rho C} \tag{1.16}$$

le coefficient κ est la *diffusivité thermique* (une grande diffusivité thermique correspond à une grande conductivité thermique et à une faible inertie au transfert de la chaleur, mesurée par ρC). Dimensionnellement, l'équation (1.15b) implique que le rapport de κ au carré d'une distance est homogène à l'inverse d'un temps ; on a donc $[\kappa] = [L]^2[T]^{-1}$ avec pour unité le mètre carré par seconde. On trouvera les valeurs des coefficients k, κ et C pour plusieurs fluides usuels en fin du présent chapitre.

La forme de l'équation (1.15b) est très générale et caractéristique de tous les phénomènes de diffusion : on la retrouve sous une forme identique, mais avec des variables différentes, dans les problèmes de transport de masse ou de quantité de mouvement. Il est souvent utile d'exploiter cette correspondance où les coefficients de diffusivité gardent la même dimension mais prennent des valeurs différentes. Notons que, en régime stationnaire et dans une géométrie unidimensionnelle, l'équation (1.15b) se ramène à :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Dans ce cas, on a donc un gradient de température constant le long de la coordonnée x et, par suite, une variation linéaire de la température avec la distance, ainsi que nous l'avons supposé dans l'établissement de la relation (1.4).

Plus généralement, dans un problème où la température varie dans les trois directions de l'espace, il convient de remplacer le terme $\partial^2 T(x,t)/\partial x^2$ dans l'équation (1.15) par le Laplacien :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}$$

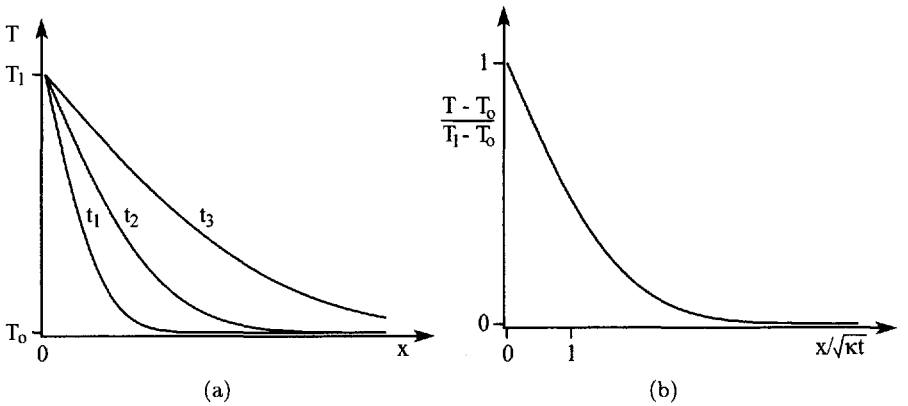


FIG. 1.8 – *Profils de variations de la température avec la distance le long d'une barre de longueur infinie : (a) profils à des instants différents $t_1 < t_2 < t_3$ après une variation initiale en échelon sur le plan origine $x = 0$; (b) profils à des instants différents en fonction de la distance normalisée $u = x/\sqrt{\kappa t}$. La courbe normalisée unique est donnée par la formule (1.18).*

d'où :

$$\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho C}\,\Delta T(\mathbf{r},t) = \kappa\,\Delta T(\mathbf{r},t) \tag{1.17}$$

qui est l'équation de diffusion de la chaleur, ou *équation de Fourier* à trois dimensions.

Application au transport d'une variation de température dans une direction

Nous considérons à nouveau la géométrie de la section 1.2.1 (Fig. 1.6). Le corps est initialement à une température uniforme $T = T_0$ aux temps $t \leq 0$. À l'instant $t = 0$, on impose une variation de température sur le plan limite $x = 0$, en le mettant en contact avec un réservoir de chaleur à la température uniforme : $T_1 = T(x = 0, t > 0)$. Le profil de température en fonction de la distance au plan origine est montré sur la figure 1.8a, à différents instants ; on observe l'étalement progressif de la perturbation introduite dans le plan origine sous l'effet de la diffusion de la chaleur.

La solution de ce problème nous éclairera sur de nombreux autres exemples de diffusion. Remarquons d'abord que, à partir de la diffusivité thermique κ et du temps t, on peut construire la variable $\sqrt{\kappa t}$ qui a la dimension d'une longueur. Il est donc raisonnable de normaliser les abscisses x par cette longueur en formant le rapport sans dimensions $u = x/\sqrt{\kappa t}$; de même, au lieu de calculer $T(x,t)$, nous déterminons la fonction normalisée $(T-T_0)/(T_1-T_0)$,

qui varie entre 1 (pour $x = 0$) et 0 (pour $x \to \infty$). On trouve alors, comme nous le démontrerons plus bas, la solution :

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{u}{2}\right)\right] \tag{1.18}$$

où erf (z) est la fonction définie par $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-\zeta^2} \mathrm{d}\zeta$; erf (u) est égale à zéro pour $u = 0$ et à l'unité lorsque u tend vers l'infini. Ainsi, *pour les conditions aux limites particulières* que nous avons considérées, nous avons obtenu une solution qui ne dépend pas séparément de x et t, mais seulement de la variable réduite $x/\sqrt{\kappa t}$. La figure 1.8b montre que les profils spatiaux de la température normalisée correspondant à différents instants coïcident lorsqu'ils sont tracés en fonction de cette variable. Pour des ocnditions aux limites différentes, il aurait pu être nécessaire de rechercher des solutions plus complexes dépendant séparement de x et t.

On voit que, à un instant t donné, l'effet de la perturbation de la température s'est propagée sur une distance de l'ordre de $\sqrt{\kappa t}$ (à un préfacteur de l'ordre de l'unité près) ce qui est bien en accord avec la forme dimensionnelle de κ. Nous rencontrons ici la caractéristique essentielle des phénomènes diffusifs, à savoir la proportionnalité entre la distance moyenne de diffusion et la racine carrée du temps. Ce résultat explique, en particulier, l'inefficacité des mécanismes diffusifs à grande distance ; s'il faut un temps t_L pour qu'une perturbation de température diffuse sur une distance L, il faut un temps $t_{10L} = 100\, t_L$ pour qu'elle diffuse sur une distance dix fois plus grande. Pour l'air, par exemple, $\sqrt{\kappa t} = 1$ cm, pour $t = 10\,\mathrm{s}$; $\sqrt{\kappa t} = 10$ cm, pour $t = 10^3\,\mathrm{s} \simeq 20$ mn.

Démonstration de l'équation (1.18)

À titre d'essai, nous recherchons des solutions de la forme :

$$T(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{\kappa t}}\right) = f(u). \tag{1.19}$$

En reportant la fonction (1.19) dans l'équation (1.17) et en exprimant les dérivées de T par rapport à t et à x sous la forme :

$$\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right)_x = -\frac{1}{2}\, t^{-3/2} \frac{x}{\sqrt{\kappa}} f'(u)$$

et :

$$\left(\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right)_t = \frac{1}{\kappa t}\, f''(u)$$

on obtient l'équation :

$$f''(u) + \frac{1}{2} u f'(u) = 0. \tag{1.20}$$

En posant $F(u) = f'(u)$, cette équation différentielle de la variable réduite u devient :

$$F'(u) + \frac{u\, F(u)}{2} = 0 \tag{1.21}$$

dont la solution s'écrit :

$$F = F_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}} . \tag{1.22}$$

On en déduit alors :

$$f(u) = A \, \mathrm{erf}\left(\frac{u}{2}\right) + B \qquad (\text{avec} \quad u = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}) \cdot \tag{1.23}$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des valeurs de la température pour $x = 0$ ($T = T_1 = A$) et pour $x \to \infty$ ($T = T_0 = A + B$).

Diffusion de la chaleur en géométrie cylindrique

Nous avons discuté précédemment le transport radial de la chaleur en régime stationnaire dans un cylindre creusé d'une cavité cylindrique. Analysons maintenant les variations transitoires de température dans le cas limite où la cavité cylindrique intérieure, dans laquelle on mesure la variation de température, a un rayon et une capacité calorifique négligeables : nous supposons que le cylindre de rayon a, initialement à une température T_0, est plongé brusquement à l'instant $t = 0$ dans un fluide de température $T_0 + \delta T_0$. Sans faire le calcul qui fait appel à un développement en série de fonctions, montrons simplement les résultats obtenus. La figure 1.9 représente les profils de la température réduite $\delta T(r/a)/\delta T_0$ à différentes valeurs de t (r est la distance à l'axe du cylindre, et $\delta T(r/a)$ est l'écart de la température locale par rapport à la température initiale T_0). Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs du rapport t/τ_D où $\tau_D = a^2/\kappa$ représente, comme nous l'avons vu plus haut, l'ordre de grandeur du temps de diffusion sur la distance a. On constate que, pour les temps faibles, la variation de température est limitée à une couche proche de la surface

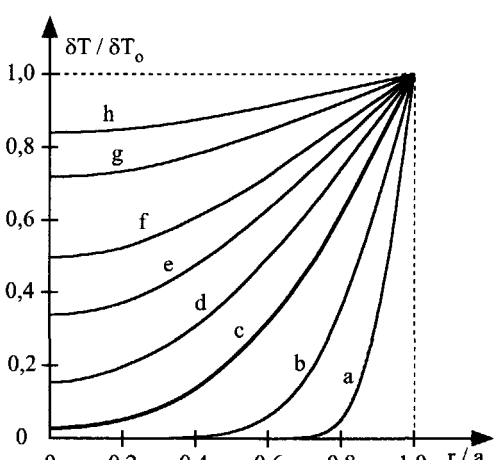


FIG. 1.9 – *Diffusion de la chaleur dans un cylindre dont la surface extérieure est soumise, à l'instant t, à une brusque variation de température de T_0 à $T_0 + \delta T_0$. La distribution de la température réduite $\delta T/\delta T_0$ est portée en fonction de la distance réduite r/a à l'axe du cylindre. Les différentes courbes sont obtenues à différents instants, caractérisés par le temps réduit $(\kappa t/a^2) = 0,005$ (a) ; 0,02 (b) ; 0,06 (c) ; 0,1 (d) ; 0,15 (e) ; 0,2 (f) ; 0,3 (g) ; 0,4 (h).*

($r = a$) d'épaisseur de l'ordre de $\sqrt{\kappa t}$. Les profils sont similaires à ceux que nous avons montrés sur la figure 1.8 pour une surface limite plane, donc de rayon de courbure infiniment grand. Pour des temps plus longs, de l'ordre de $0,1\tau_D$, la perturbation de température se fait sentir sur l'axe du cylindre. Elle devient partout égale à $T_0 + \delta T_0$ lorsque $t \approx \tau_D$. Nous verrons au chapitre 2 (section 2.1.2) que ces profils décrivent tout aussi bien les variations temporelle et spatiale de la vitesse dans un cylindre rempli de fluide auquel on impose un mouvement de rotation.

Propagation par diffusion et par ondes

Pour évaluer l'efficacité des différents processus, comparons l'équation de Fourier (1.17) à l'équation classique de propagation d'une onde d'amplitude A dans la direction Ox :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \tag{1.24}$$

c est la célérité de l'onde. Pour l'équation (1.24), on peut trouver des solutions de la forme : $A(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Elles décrivent la propagation d'une onde dans les directions $+x$ et $-x$ à une vitesse c constante ; la distance parcourue augmente proportionnellement au temps. L'équation (1.17) admet des solutions pour lesquelles la distance de propagation x varie comme la racine carrée du temps t : la « vitesse effective » de propagation (x/t) décroît avec la distance. Physiquement, ce résultat est dû au fait que le flux de la variable qui diffuse (température, concentration, ...) est proportionnel au gradient de celle-ci : plus le front de variation s'étale, plus la propagation se fait lentement.

Ainsi, le simple changement de l'ordre de dérivation par rapport au temps donne des comportements tout à fait différents pour les phénomènes de propagation des ondes et pour ceux de diffusion. Les phénomènes de diffusion sont efficaces à des temps courts ou sur des très petites distances ; la propagation par ondes ainsi que la convection par le fluide en mouvement (qui donne elle aussi un déplacement linéaire avec le temps) sont dominants dans les autres cas.

1.2.2 Diffusion de masse

Équation de conservation de la masse d'une espèce diffusante

Dans l'exemple à une dimension de la figure 1.6, remplaçons la température T par la concentration d'un élément dilué dans le fluide principal : ce traceur peut être un autre gaz ou une fumée dans le gaz, des ions, des molécules de colorant ou des isotopes radioactifs dans un liquide. Dans ce phénomène de *diffusion sous gradient*, on s'intéresse au flux de traceur induit par son gradient de concentration. On peut aussi s'intéresser à *l'autodiffusion* décrivant la redistribution de molécules marquées évoluant, en l'absence de

gradient, parmi d'autres molécules de même espèce mais non marquées. Dans une solution diluée, la diffusion sous gradient et l'autodiffusion ont des valeurs identiques. Dans le cas où les particules diffusantes interagissent entre elles, ces deux coefficients peuvent devenir différents.

La concentration peut être mesurée par le nombre $n(x, t)$ de particules de traceur par unité de volume ou par la masse ρ_A de traceur par unité de volume de mélange. L'équivalent de la relation (1.6) est *l'équation de Fick* :

$$\mathbf{J}_m = -D\,\mathbf{grad}\,\rho_A \tag{1.25}$$

où $\mathbf{J}_m$ est la densité de courant de traceur (masse par unité de surface et de temps), et D est le coefficient de *diffusion moléculaire* du traceur. Sa valeur est fonction à la fois des propriétés du traceur et de l'espèce diffusante. D vérifie l'équation aux dimensions :

$$[D] = \frac{[M][L]^{-2}[T]^{-1}[L]}{[M][L]^{-3}} = [L]^2[T]^{-1}$$

et a donc la même dimensionnalité que le coefficient de diffusion thermique. En annexe à ce chapitre, nous donnons quelques valeurs de ce coefficient.

On peut établir l'équation aux dérivées partielles qui relie les variations de la densité avec la position et le temps, en suivant pas à pas la procédure utilisée pour le problème thermique, c'est-à-dire en exprimant de deux façons différentes la conservation de la masse de traceur dans un volume élémentaire fixe ; on obtient ainsi, dans le cas unidimensionnel, l'équation équivalente à (1.15b) :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho_A}{\partial x^2}\,. \tag{1.26}$$

À la section 1.2.1, nous avons discuté des exemples de conduction thermique où sont fixées des conditions aux limites de température sur une paroi. Ils correspondent à des problèmes où sont imposées des valeurs aux limites de concentration d'espèces chimiques. Dans ce cas, les solutions mathématiques se transposent directement en changeant la variable T en ρ, et en remplaçant κ par D.

En pratique, il est plus simple de créer une répartition de concentration initiale donnée de traceur et de regarder comment elle évolue. L'équivalent thermique consisterait à injecter une certaine quantité de chaleur en un point pendant un temps court, et à la laisser diffuser ensuite.

Étalement d'un traceur initialement localisé dans un plan

On suppose qu'à l'intérieur du fluide, on introduit de façon uniforme une masse M_A de traceur, initialement localisée sur une très faible épaisseur autour du plan $x = 0$. Mathématiquement, cette distribution initiale est du type distribution de Dirac δ avec $\rho_A = M_A\delta(x)$. Par ailleurs, si le traceur ne réagit

pas avec le fluide, la conservation de la masse de traceur s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_A(x)\mathrm{d}x = M_A = \text{constante}. \tag{1.27}$$

Pour vérifier ces conditions, on utilise la dérivée $g(x,t)$ par rapport à la variable x de la solution (1.23) de l'équation de diffusion de la chaleur que nous avons déterminée à la section 1.2.1 :

$$g(x,t) = \frac{A}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}} \tag{1.28}$$

avec : $u = x/\sqrt{\kappa t}$. La fonction $g(x,t)$ est bien solution de l'équation (1.15b) : en effet, en dérivant cette équation par rapport à x, on trouve que si une fonction est solution de l'équation, sa dérivée par rapport à x l'est aussi. En remplaçant κ par D, on obtient donc :

$$\rho_A(x,t) = \frac{M_A}{2\sqrt{\pi D t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \tag{1.29}$$

La solution de ce problème est donc une courbe Gaussienne (Fig. 1.10). Sa largeur augmente comme la racine carrée du temps : cela correspond bien à la variation de la distance de propagation comme $\sqrt{t}$, caractéristique des phénomènes diffusifs. Dans le même temps, l'amplitude décroît comme $1/\sqrt{t}$

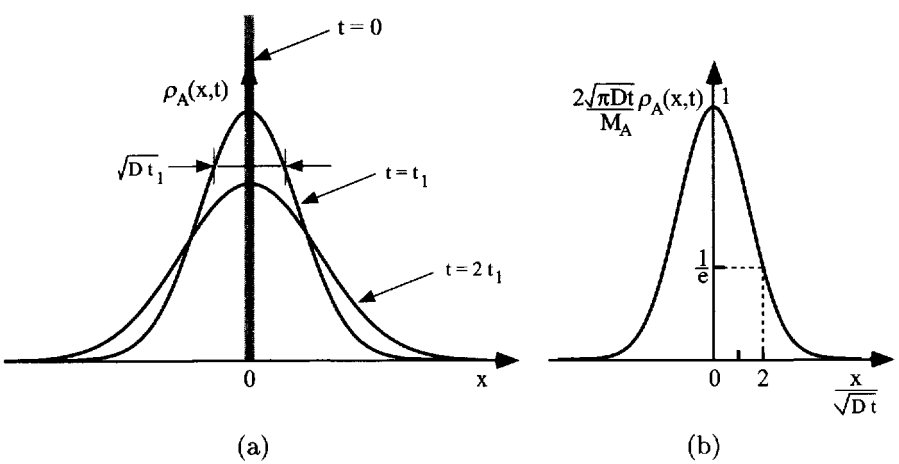


FIG. 1.10 – *Étalement par diffusion moléculaire d'une tache de traceur initialement localisée dans le plan $x = 0$; (a) profils de concentration à différents instants $t = 0$, $t = t_1$, et $t = 2t_1$, après l'instant d'injection du traceur ; (b) profil obtenu en utilisant la variable normalisée $x/\sqrt{Dt}$ en abscisse et l'amplitude $2\sqrt{\pi Dt}\rho_A(x,t)/M_A$ en ordonnée. La courbe correspond à la fonction gaussienne de la formule (1.29).*

de façon à conserver l'aire sous la courbe (cette aire représente la masse totale de colorant injecté). Comme nous l'avons fait pour la courbe de la figure 1.8b, nous pourrons superposer les différentes variations en utilisant la coordonnée $u = x/\sqrt{\kappa t}$ comme abscisse et le produit $2\sqrt{\pi D t}\rho_A(x,t)/M_A$ comme ordonnée.

Remarque Notons que la solution (1.23), obtenue pour la diffusion de chaleur, correspond à la réponse à une variation spatiale en échelon de la température initiale (ou de la concentration de traceur dans le fluide). Ici, nous avons considéré une injection de traceur très localisée, ce qui conduit à la solution (1.28) différente de la solution (1.23) (qui représente sa dérivée spatiale).

1.3 Modèles microscopiques des coefficients de transport

Les lois macroscopiques que nous avons écrites pour la chaleur et la masse s'appliquent de façon générale aux fluides et aux solides. Jusqu'à présent, nous n'avons ni envisagé la nature microscopique de ces processus de transport, ni la liaison entre les coefficients de diffusion et la structure du milieu. Nous allons maintenant donner une description simplifiée des mécanismes microscopiques du transport. Nous analyserons tout d'abord la diffusion massique en termes de marche au hasard, puis nous appliquerons la théorie cinétique au transport dans les gaz ; nous discuterons enfin le cas des liquides.

1.3.1 Une approche de la diffusion massique : la marche au hasard

Nous nous intéressons ici à l'étalement d'une tache de traceur initialement localisée en un point. Analysons le mouvement des particules de traceur qui peuvent être des molécules ou des particules très petites, dites browniennes, de taille inférieure à un micromètre : en raison de l'agitation thermique, celles-ci ne sont pas immobiles mais ont des trajectoires complexes comportant une suite de changements de direction aléatoires (mouvement brownien).

Pour analyser ce processus, nous utiliserons le modèle de la *marche au hasard*, la marche de l'homme ivre ! Partant d'un point origine O au temps initial $t = 0$, il effectue des pas de même longueur ℓ et de même durée τ. Après chaque pas, il repart immédiatement dans une nouvelle direction indépendante de celle du pas précédent. Nous cherchons de quelle distance moyenne le marcheur (qui représente l'une des molécules du traceur) s'est éloigné du point O au bout d'un nombre de pas $N = t/\tau$. En physique statistique, on s'intéresse à des effets de moyenne ; nous allons donc calculer la moyenne $< R(t)^2 >$ prise sur tout un ensemble de marches aléatoires indépendantes (la moyenne de l'écart vectoriel $\mathbf{R}(t)$ ne présente pas d'intérêt car elle est nulle du fait que toutes les directions sont équivalentes). Physiquement,

ℓ correspond au libre parcours moyen des molécules, τ au temps $\ell/\bar{u}$ de trajet entre deux chocs ($\bar{u}$, défini plus loin, représente la vitesse moyenne des molécules de traceur). $< R(t)^2 >$ est l'étalement carré moyen de la tache de traceur (le temps τ ne doit pas être confondu avec les temps de relaxation internes des particules, qui interviennent souvent dans l'étude de l'écoulement de fluides complexes). Cette représentation physique est très naturelle ; ainsi par exemple dans les gaz parfaits, les molécules se déplacent en ligne droite entre chaque choc avec les autres molécules.

Au bout du premier pas, $< R(\tau)^2 >= R(\tau)^2 = \ell^2$. Nous allons montrer par récurrence que, après N pas, on a :

$$< R^2(N\tau) >= N\ell^2. \tag{1.30}$$

Supposons que, après $(N-1)$ pas, $< R^2((N-1)\tau) >= (N-1)\ell^2$. Pour une marche donnée telle que celle de la figure 1.11, appelons M_{N-1} le point d'arrivée du pas $N-1$ et M_N celui du pas suivant. On obtient donc l'égalité

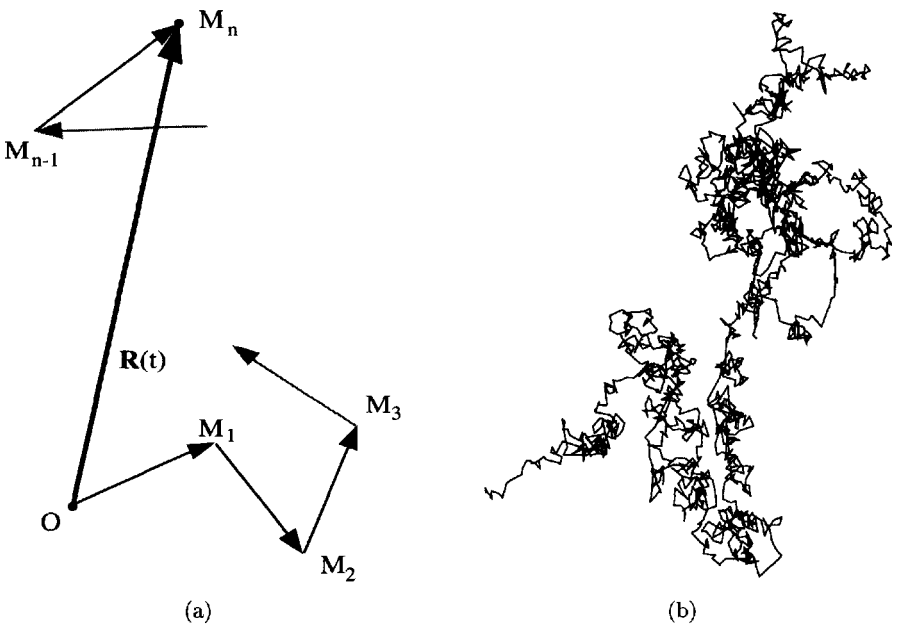


FIG. 1.11 – *(a) Déplacement d'une particule de traceur au cours d'une marche au hasard brownienne ; la longueur de tous les pas est supposée la même. (b) Trajectoire brownienne réelle, obtenue par l'analyse de l'image d'une sphère de polystyrène suivie dans son mouvement pendant 2 000 s. Un déplacement élémentaire dure une seconde en moyenne ; 1 cm sur la figure représente environ 3,5 μm (document G. Bossis).*

vectorielle :

$$(\mathbf{OM}_N)^2 = (\mathbf{OM}_{N-1} + \mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N)^2 = (\mathbf{OM}_{N-1})^2 + (\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N)^2 + 2\Big(\mathbf{OM}_{N-1}\Big) \cdot \Big(\mathbf{M}_{N-1}\,\mathbf{M}_N\Big). \tag{1.31}$$

Prenons la moyenne de cette égalité sur tout un ensemble de marches indépendantes partant de O au temps $t = 0$. Par suite de l'indépendance de la direction d'un pas et de celle du pas précédent, la moyenne du produit scalaire $(\mathbf{OM}_{N-1}) \cdot (\mathbf{M}_{N-1}\,\mathbf{M}_N)$ est nulle : il peut en effet prendre avec la même probabilité des valeurs positives et négatives. On trouve donc bien le résultat final :

$$(\mathbf{OM}_N)^2 = (N-1)\ell^2 + \ell^2 + 0 = N\ell^2 \tag{1.32}$$

qu'on peut encore écrire sous la forme :

$$< R(t)^2 > = \frac{t}{\tau}\ell^2 = \frac{\ell^2}{\tau}t = Dt. \tag{1.33}$$

On retrouve bien une loi de diffusion où l'écart moyen $\sqrt{< R(t)^2 >}$ par rapport à la position initiale augmente avec la racine carrée du temps. En utilisant la relation $\ell = \bar{u}\,\tau$ où $\bar{u}$ est la vitesse caractéristique du marcheur pendant un pas, on trouve :

$$D = \frac{\ell^2}{\tau} = \bar{u}\ell. \tag{1.34}$$

Pour compléter cette présentation qualitative, notons les points importants suivants :

- La démonstration de la formule (1.33) ne demande pas de connaître la dimension de l'espace dans lequel se fait la marche au hasard ou la diffusion. Dans le cas particulier où cette marche se fait le long d'une ligne, il est assez facile de montrer que la loi donnant la probabilité d'étalement à partir d'un point situé sur cette ligne est une courbe de Gauss. On retrouve ainsi indépendamment le résultat de l'équation (1.29) obtenu par une approche purement macroscopique. La démonstration part de la formule du binôme appliquée à :

  $$(p+q)^N = p^N + Np^{N-1}q + \cdots + C_r^N p^r q^{N-r} + \cdots + q^N. \tag{1.35}$$

  Si p (respectivement q) (avec $p+q=1$) représente la probabilité de faire *un pas* à droite (respectivement à gauche), le terme général $C_r^N\, p^r\, q^{N-r}$ donne la probabilité qu'on ait eu r pas à droite et $N-r$ pas à gauche. Dans la limite d'un très grand nombre de pas (N tend vers l'infini), on montre que la distribution des termes du binôme tend vers une distribution gaussienne, qui est centrée à l'origine si $p = q = \frac{1}{2}$.

- Si la marche de l'homme ivre se fait sur une voie légèrement inclinée, chaque pas est légèrement biaisé dans le sens de la descente. Au bout d'un nombre de pas N, la distribution de marcheurs n'est plus centrée autour de l'origine O comme dans la distribution de Gauss précédente ; on a centrage autour d'un point O' tel que $\mathbf{OO'}$ est orienté vers la descente. Nous avons alors la manifestation d'un phénomène convectif qui se superpose au phénomène diffusif de la marche au hasard : ce phénomène sera prépondérant aux temps longs car le déplacement OO' varie linéairement avec le temps, alors que la distance de transport diffusif ne croît que comme $\sqrt{t}$. Il est possible d'étudier ce problème dans le modèle à une dimension précédent, en prenant des probabilités p et q différentes d'aller vers la droite et vers la gauche. On trouve alors que le déplacement du centre de gravité de la tache varie comme $OO' = N(p-q)\ell$, mais que l'étalement reste gaussien. Ce résultat représente par exemple la diffusion d'un traceur en présence d'un champ de forces permanent en volume, tel que la gravité sur des particules pesantes (sédimentation) ou un champ électrique sur des ions.

Remarque Dans l'analyse précédente, nous avons envisagé le cas où tous les pas de la marche au hasard étaient de longueur identique. On peut montrer que le modèle gaussien obtenu dans ces conditions reste valable si la distribution de la taille des pas de la marche au hasard n'est pas trop large (plus précisément, il suffit que la probabilité d'avoir un pas de taille ℓ décroisse plus vite que $1/\ell^2$). Si tel n'est pas le cas, alors l'écart quadratique moyen du déplacement dans la marche au hasard varie avec le temps plus vite qu'en $\sqrt{t}$, ce qui est dû au fait que les pas rares et très longs dominent le comportement diffusif. On parle dans ce cas de *diffusion anormale* (ici, il s'agit *d'hyperdiffusion*).

1.3.2 Coefficients de transport des gaz parfaits

Volume élémentaire représentatif

Avant d'aborder l'interprétation microscopique des coefficients de transport, nous donnons ici la définition du *volume élémentaire représentatif*.

En mécanique des milieux continus, on est amené à définir des grandeurs macroscopiques : pression, température, vitesse, masse volumique. Ces quantités sont des moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes, sur une taille grande devant l'échelle de leurs fluctuations microscopiques (m), mais petite devant celle des variations à l'échelle macroscopique ($\mathcal{M}$), provenant de l'hétérogénéité du milieu. Le volume sur lequel est réalisée la moyenne et qui vérifie ces conditions, est appelé volume élémentaire représentatif ($\mathcal{VER}$) (Fig. 1.12). Ce volume élémentaire représentatif n'existe pas dans tous les cas, en particulier dans les milieux très inhomogènes, pour lesquels les variations macroscopiques se font sur de très courtes distances.

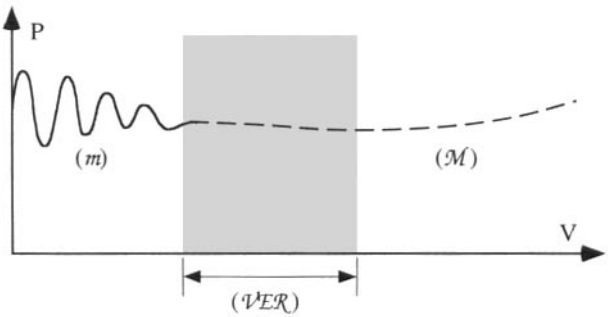


FIG. 1.12 – *Le paramètre P est obtenu par moyennage de la grandeur microscopique correspondante sur un volume V.*

Calcul du coefficient de diffusion moléculaire pour un gaz parfait

Nous nous plaçons dans le cas de la géométrie unidimensionnelle de la section 1.2.1 (Fig. 1.6) et nous étudions un gaz dilué de molécules de traceur, dont le nombre $n(x)$ par unité de volume varie régulièrement dans la direction Ox (Fig. 1.13). Les molécules de traceur sont accompagnées d'autres molécules qui se redistribuent pour compenser les variations de pression associées à celles de la densité $n(x)$. Les molécules sont animées d'une vitesse moyenne d'agitation thermique. Nous cherchons à évaluer le flux total de particules de traceur à travers une section plane d'abscisse x_0 et d'aire unité.

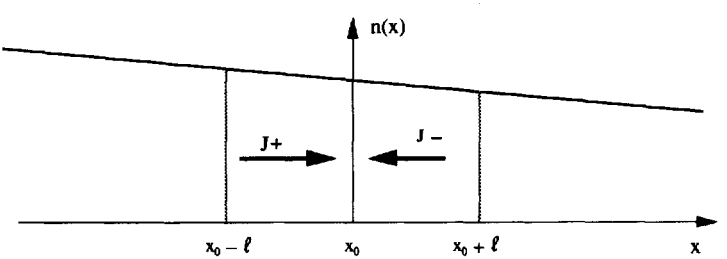


FIG. 1.13 – *Schéma du modèle de transport de particules par diffusion unidimensionnelle en théorie cinétique des gaz.*

Nous notons J_+ (respectivement J_-) le flux de particules de traceur venant de la gauche (respectivement de la droite) de ce plan (le flux représente le nombre de particules qui traversent l'unité de surface par unité de temps). Par suite de l'effet du gradient de la concentration de particules $n(x)$, ces deux flux sont différents. Le rapport entre la différence $(J_+ - J_-)$ et $(-\partial n/\partial x)$ nous donne le coefficient de diffusion moléculaire D. Le calcul exact utilise

la distribution en module et en direction des vitesses d'agitation thermique. Nous ferons ici plusieurs hypothèses simplificatrices :

- Nous considérons qu'un tiers seulement des molécules se déplacent suivant la direction $\pm x$ avec la vitesse d'agitation thermique $\bar{u}$; les deux tiers restants se déplacent dans les directions y et z, et ne contribuent pas, de ce fait, au transport dans la direction considérée.

- Pour évaluer les flux venant de la gauche ou de la droite, nous divisons l'espace par des cellules de taille égale au libre parcours moyen ℓ des particules de traceur. C'est à cette échelle microscopique, mais grande cependant devant la taille des particules, que se font les échanges. Le libre parcours moyen sera considéré dans la suite comme l'échelle minimale de variation des propriétés moyennes : concentration, température, vitesse. Avec ces hypothèses, le flux J_+ s'écrit :

$$J_+ = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\, n\,(x_0 - \ell)\,.\,\bar{u}. \tag{1.36}$$

Le facteur supplémentaire 1/2 donne la fraction de particules qui se dirigent dans la direction des x positifs; $n\,(x_0 - \ell)$ est le nombre de molécules de traceur par unité de volume dans le plan d'abscisse $x_0 - \ell$. La formule (1.36) représente simplement la définition classique du flux où le facteur 1/6 permet de tenir compte des différentes orientations des vitesses. L'hypothèse principale est l'introduction de l'abscisse $x_0 - \ell$ ce qui revient à supposer que toutes les particules ont fait, pour arriver en x_0, un saut d'une longueur juste égale à ℓ. On écrit de même le flux J_- des particules venant de la droite :

$$J_- = \frac{1}{6}\, n\,(x_0 + \ell)\,.\,\bar{u}. \tag{1.37}$$

Le flux global $J = J_+ - J_-$ résultant du gradient de concentration $\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ est donc :

$$J = \frac{1}{6}\bar{u}[n(x_0 - \ell) - n(x_0 + \ell)] = -\frac{1}{3}\bar{u}\,\ell\frac{\mathrm{d}n(x)}{\mathrm{d}x} = -D\frac{\mathrm{d}n(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.38}$$

avec :

$$D = \frac{1}{3}\bar{u}\ell. \tag{1.39}$$

La formule (1.39) (y compris le coefficient 1/3) est d'ailleurs le résultat que donnerait un calcul exact dans l'approximation des gaz parfaits.

Nous constatons que l'équation (1.39) coïncide (au facteur 1/3 près) avec le résultat obtenu par le modèle de marche au hasard de la section 1.3.1, en utilisant comme vitesse entre les chocs la vitesse d'agitation thermique des molécules, et en prenant la longueur des pas égale au libre parcours moyen. Dans ce cas particulier, cela montre l'équivalence des deux phénomènes

d'étalement d'une tache de traceur et de flux induit par un gradient de concentration : les deux approches de la théorie cinétique des gaz et de la marche au hasard sont en fait équivalentes.

Application numérique à l'hélium gazeux

On applique la formule (1.39) à l'hélium dans les conditions normales de température et de pression. La masse d'un atome d'hélium est $m = \mathcal{M}/\mathcal{N}$ où $\mathcal{N} = 6,02 \times 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro et $\mathcal{M} = 4 \times 10^{-3}$ kg est la masse molaire de l'hélium. La vitesse thermique moyenne $\bar{u}$ de l'atome l'hélium est donnée par :

$$\frac{1}{2}m\bar{u}^2 = \frac{2}{3}k_B T$$

où $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann. On en déduit :

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 1\,370 \text{ m/s}.$$

Le libre parcours moyen ℓ est donné par le résultat classique de la théorie cinétique des gaz :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma_c}$$

où $\sigma_c = 1 \times 510^{-19}\ m^2$ est la section efficace de l'atome d'hélium. Ce résultat signifie que dans un cylindre de section σ et de longueur ℓ, il y a en moyenne une particule : ce cylindre représente en effet le volume « balayé » par la molécule lorsqu'elle se déplace d'une distance ℓ. À l'intérieur de ce volume devra se trouver une autre particule pour qu'il puisse y avoir choc. Le nombre n d'atomes par unité de volume est $n = \mathcal{N}/\mathcal{V}$ où le volume molaire $\mathcal{V}$ vaut $22,7 \times 10^{-3}\ m^3$. On en déduit :

$$\ell = 1,8 \times 10^{-7} \text{ m} \qquad \text{et :} \quad D = \frac{1}{3}\bar{u}\ell = 8 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}.$$

Notons que, dans ce modèle valable pour un gaz parfait (particules sans interactions), la diffusivité D croît comme $\sqrt{T}$ avec la température, à densité n constante (puisque $\bar{u}$ varie de même).

Remarque Dans une approche plus rigoureuse de la « théorie cinétique », on distingue la vitesse quadratique moyenne $u_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{u}^2} = \sqrt{3k_B T/m}$ et la vitesse moyenne $|\bar{u}| = \bar{u} = \sqrt{8k_B T/m}$. La première ($u_{\text{rms}}$) apparaît dans la dérivation microscopique de la pression dans un gaz parfait de particules sans interaction. La seconde, ($\bar{u}$), est la quantité qui intervient dans la détermination des propriétés de transport. Cependant, ces deux expressions ne diffèrent que de 60 %. Cette distinction n'est donc pas nécessaire dans le cas présent, puisque nous sommes surtout intéressés par des ordres de grandeur.

Calcul de la diffusivité thermique pour un gaz parfait

Dans ce cas, on suppose qu'on a, d'une part, une seule sorte de particules et que leur nombre n par unité de volume est constant. On fait, d'autre part, l'hypothèse que le gradient de température suivant Ox est constant et que la

relation locale entre température et vitesse d'agitation thermique moyenne $\bar{u}$ reste conservée (on a donc également un gradient de la vitesse $\bar{u}$). Par ailleurs, les relations comme (1.36) ou (1.37), qui évaluaient des flux de particules, vont représenter maintenant des flux de chaleur notés J_Q avec :

$$J_{Q}+ = \frac{1}{6}\rho\, C_v\, T(x_0 - \ell)\, \bar{u}\,(x_0 - \ell) \tag{1.40a}$$

et :

$$J_{Q-} = \frac{1}{6}\rho\, C_v T(x_0 + \ell)\, \bar{u}\,(x_0 + \ell). \tag{1.40b}$$

Dans ces deux relations, ρ est la masse volumique du gaz, C_v sa chaleur massique à volume constant. La quantité $\rho\, C_v\, T$ représente l'énergie par unité de volume associée au mouvement d'agitation thermique des molécules. En outre, on a :

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3k_B}{m}}\sqrt{T}. \tag{1.41}$$

Remarquons que, à la différence du cas précédent de la diffusion de masse, il intervient dans les flux de chaleur J_{Q+} et J_{Q-} à la fois les variations spatiales de température, et les variations spatiales de la vitesse moyenne $\bar{u}$ d'agitation thermique, dues au gradient de température. Le flux de chaleur global J_Q s'écrit à l'aide des relations (1.40) et (1.41) :

$$J_Q = J_{Q+} - J_{Q-} = -\frac{1}{2}\,\rho\, C_v\, \bar{u}\,(x_0)\,\ell\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = -k\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.42}$$

avec :

$$k = \frac{1}{2}\rho\, C_v\, \bar{u}\,(x_0)\,\ell \tag{1.43a}$$

et :

$$\kappa = \frac{k}{\rho C_v} = \frac{\bar{u}(x_0)\ell}{2}\,. \tag{1.43b}$$

On constate que la diffusivité thermique κ a une valeur très proche de D. Le mécanisme qui contrôle le transport – la diffusion par agitation thermique – est en effet le même dans les deux cas.

Notons que la conductivité thermique k est indépendante du nombre n de molécules par unité de volume tant que l'approximation de gaz parfait reste valable. En effet, $\rho\, C_v$ est proportionnel à la densité n, et la relation (1.43a) contient donc le produit $\ell n = n/(\sqrt{2}n\,\sigma)$ qui est indépendant de n. Ce résultat, *a priori* surprenant, se comprend si on réalise que, en augmentant le nombre n de particules par unité de volume, on augmente la fréquence des chocs entre particules, mais on diminue d'autant le libre parcours moyen et, par suite, l'efficacité du transport.

Validité des modèles de type gaz parfait

Les résultats obtenus aux sections 1.3.2.2 et 1.3.2.3 ne s'appliquent ni aux gaz à très faibles pressions, ni aux gaz denses qui ont des propriétés proches de celles des liquides.

- Dans le premier cas, si le libre parcours moyen devient supérieur à la taille L du récipient qui le contient, il y a essentiellement des chocs avec la paroi et peu de collisions entre particules. Or, ces collisions sont nécessaires pour établir l'état d'équilibre statistique décrit par la théorie cinétique des gaz. Ce régime, dit de *Knudsen*, est obtenu dans des cavités sous vide : en effet, pour une pression de l'ordre de 0,1 Pascal, le libre parcours moyen des molécules de gaz devient de l'ordre de la dizaine de centimètres. On peut donc atteindre le régime de Knudsen dans des tubes de tailles macroscopiques.

- L'autre limite est celle où la distance moyenne entre particules (de l'ordre de $n^{-1/3}$) est comparable au libre parcours moyen. C'est le cas des liquides que nous allons traiter maintenant.

1.3.3 Phénomènes de transport diffusif dans les liquides

À la différence des gaz, on ne peut pas comprendre les différents coefficients de transport dans les liquides à partir d'un modèle simple et unique comme celui de la théorie cinétique. Nous discutons ici brièvement les cas de la diffusion de masse et de chaleur.

Coefficient de diffusion moléculaire dans les liquides

Lorsque nous avons étudié le transport dans les gaz, nous avons supposé les interactions entre molécules négligeables dans l'intervalle de temps entre deux chocs. Dans les liquides, les interactions restent toujours très importantes. Aussi, nous allons commencer par étudier la diffusion de particules sphériques de rayon R utilisées comme traceurs : dans ce cas, si la particule se déplace par rapport au liquide avec une vitesse $\mathbf{v}$, la force d'interaction avec celui-ci est égale à la force de Stokes :

$$\mathbf{F}_1 = -6\,\pi\,\eta R\,\mathbf{v} \tag{1.44}$$

où η est un coefficient appelé coefficient de viscosité qui est caractéristique du fluide ; il sera défini au chapitre 2. Cette expression de la force d'interaction sera établie au chapitre 8 (section 8.4). Si la particule est assez petite (typiquement pour R inférieur à un micromètre), les effets d'agitation thermique sont suffisamment importants pour qu'on puisse calculer le coefficient de diffusion moléculaire correspondant. Il suffit alors d'extrapoler vers les petites tailles pour *estimer* la diffusion d'un traceur moléculaire. On

peut mettre la relation (1.44) sous la forme :

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\mathbf{v}}{\mu} \tag{1.45}$$

où μ est appelé *coefficient de mobilité* avec :

$$\mu = \frac{1}{6\,\pi\eta\,R}\,. \tag{1.46}$$

Dans un célèbre article sur le mouvement brownien publié en 1905, Einstein a établi la relation générale suivante entre le coefficient de diffusion D et la mobilité μ :

$$D = \mu k_B T. \tag{1.47}$$

Notons que le coefficient D représente un étalement en l'absence de force extérieure mais en présence d'agitation thermique ; la mobilité μ est liée à l'existence d'un champ de force extérieure $\mathbf{F}_1$. En utilisant la relation (1.47), on obtient :

$$D = \frac{k_B T}{6\,\pi\,\eta\,R}\,. \tag{1.48}$$

Cette relation s'applique assez bien jusqu'à des rayons de particules de l'ordre des tailles moléculaires et donne donc un ordre de grandeur de coefficients de diffusion de liquides. Ainsi, pour une molécule de 1 nm de diamètre avec une viscosité $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, on trouve : $D = 2,2 \times 10^{-10}$ m^2/s. Cette valeur est très inférieure à celle obtenue dans les gaz.

Démonstration de la relation d'Einstein

Pour démontrer la relation d'Einstein, nous allons écrire, dans un cas particulier, l'équilibre entre les effets de l'agitation thermique et d'une force extérieure. Supposons un ensemble de particules d'un traceur quelconque (moléculaire ou non), de mobilité μ et de coefficient de diffusion D placé dans un champ de force $\mathbf{f}$ constant parallèle à l'axe Ox. En pratique, ce modèle peut par exemple correspondre au comportement d'un ensemble de particules browniennes sédimentant sous l'effet de la gravité. Elles sont supposées en équilibre thermique avec un thermostat à température T. Le champ de force $\mathbf{f}$ crée un potentiel $U = -fx$. La présence de ce potentiel crée un gradient $(\mathrm{d}n/\mathrm{d}x)$ du nombre n de particules par unité de volume ; localement $n(x)$ vérifie la loi de distribution de Boltzmann :

$$n(x) = n_0\,\mathrm{e}^{-\frac{U}{k_B T}} = n_0\,\mathrm{e}^{\frac{fx}{k_B T}} \tag{1.49}$$

d'où :

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \frac{f}{k_B T}\,. \tag{1.50}$$

Le gradient $\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ induit un flux diffusif J_m de particules avec :

$$J_m = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = -Dn\frac{f}{k_B T}\,. \tag{1.51}$$

La force f induit une vitesse de dérive moyenne des particules $v_d = \mu f$. Notons que v_d est une vitesse moyenne de l'ensemble des particules ; elle peut être très inférieure à la vitesse d'agitation thermique des particules prises individuellement dont l'orientation est aléatoire. À v_d correspond un flux J_d de particules avec :

$$J_d = n\, v_d = n\mu f. \tag{1.52}$$

À l'équilibre statistique, les deux flux doivent se compenser avec $J_m + J_d = 0$. En reportant les équations (1.51) et (1.52) dans cette égalité, on retrouve bien la relation d'Einstein (1.47).

Conductivité thermique des liquides

Dans un liquide, il existe deux mécanismes de transfert de la chaleur. Le premier est dû à la propagation de proche en proche des vibrations des particules individuelles du liquide telle qu'on peut se la représenter approximativement dans l'expérience modèle qui utilise un ensemble dense de palets mis en vibration (Fig. 1.1). Le second existe pour les métaux à l'état liquide (Hg, Na ...) et se fait par l'intermédiaire des électrons responsables de la conduction électrique. Ces deux mécanismes sont similaires à ceux qui assurent la conduction de la chaleur dans un solide cristallin ; nous ne les étudierons pas ici. Notons toutefois la grande efficacité du mécanisme par transport électronique qui fait que les métaux liquides sont de bons conducteurs de la chaleur tout en ayant une capacité calorifique élevée. Le sodium liquide est par exemple utilisé comme fluide caloporteur dans les échangeurs thermiques des réacteurs nucléaires surrégénérateurs.

Comparaison des valeurs des coefficients de transport diffusif dans différents liquides et gaz

Dans le tableau 1.2, on trouvera des valeurs des coefficients de transport diffusif pour quelques corps purs. Aux coefficients D et κ analysés au cours de ce chapitre, nous avons ajouté le coefficient de *viscosité cinématique* ν. Il représente la diffusivité de la quantité de mouvement, et sa signification physique sera discutée en détail au chapitre 2 (ν est relié à la viscosité dynamique η que nous avons vue apparaître plus haut (relation (1.44)) et à la masse volumique ρ par $\nu = \eta / \rho$). Les coefficients D, κ et ν ont tous trois la même dimension $[L]^2[T]^{-1}$. Dans de nombreux processus, deux phénomènes de diffusion pourront intervenir simultanément ; leur efficacité relative sera alors un paramètre très important. On la caractérise par un nombre sans dimension qui est le rapport des constantes de temps de diffusion des quantités considérées sur une distance de l'ordre de la taille caractéristique L de l'écoulement. Nous verrons plusieurs exemples de tels nombres sans dimension au chapitre suivant (section 2.3). Ils jouent un rôle important dans de nombreux phénomènes de transfert de chaleur et de matière.

1.4 Effets de surface et tension superficielle

Nous discutons à présent quelques propriétés des interfaces entre un liquide et un gaz, ou entre deux liquides. Ces interfaces jouent un rôle très important dans l'équilibre et l'écoulement des fluides, dès lors qu'ils ont des surfaces libres et ne sont plus simplement en contact avec des parois solides.

Nous allons d'abord donner quelques éléments sur les effets d'énergie de surface, afin d'introduire la signification du coefficient de tension superficielle.

1.4.1 La tension superficielle

Mise en évidence des effets de la tension superficielle

Pour introduire les effets de tension de surface, considérons l'expérience représentée par la figure 1.14 : un film de liquide (de l'eau savonneuse par exemple) est supporté par un cadre rectangulaire dont l'un des côtés est mobile.

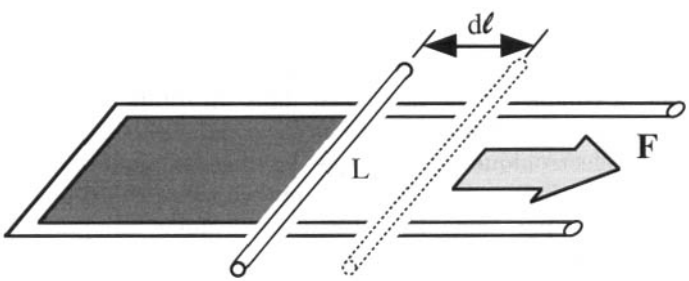


FIG. 1.14 – *Une expérience mettant en évidence le phénomène de tension de surface.*

Si nous lâchons le côté mobile, il se déplace de façon à diminuer la surface du film. Pour le maintenir en place, il est nécessaire d'exercer une force F qui est proportionnelle à la largeur L du cadre. Donc, pour accroître la surface du film d'une quantité $\mathrm{d}S = L\,\mathrm{d}l$, il faut fournir une énergie $\mathrm{d}W$ qui correspond simplement au travail de la force F et s'exprime par :

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}l = 2\gamma L\,\mathrm{d}l = 2\gamma\,\mathrm{d}S. \tag{1.53}$$

Le coefficient γ est appelé coefficient de tension superficielle entre le liquide considéré et l'air, et le facteur 2 traduit le fait que le film de liquide est constitué de deux interfaces liquide–air. La relation (1.53) montre que le coefficient γ correspond à une énergie par unité de surface de l'interface. Son unité est donc le newton par mètre ($\mathrm{N.m^{-1}}$). La valeur de γ pour l'eau pure à la température ambiante est environ $70 \cdot 10^{-3}$ $\mathrm{N.m^{-1}}$; pour le mercure, c'est une des plus élevées de tous les liquides, elle est de $480 \cdot 10^{-3}$ $\mathrm{N.m^{-1}}$ mais d'autres métaux liquides, comme le titane fondu ont une tension superficielle

TAB. 1.1 – *Ordre de grandeur de quelques paramètres physiques caractérisant les propriétés interfaciales de liquides usuels.*

	Tension superficielle γ (N.m^{-1})	Variation de γ avec la température $-\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dT}$ (K^{-1})	Longueur capillaire $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ (m)
Métaux liquides	10^{-2} à 1,5	$10^{-2} - 10^{-1}$	2 à $5 \cdot 10^{-3}$
Liquides organiques	$50 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2} - 10^{-1}$	1 à $3 \cdot 10^{-3}$
Sels fondus	10^{-1}	10^{-2}	2 à $3 \cdot 10^{-3}$
Huiles silicones	$20 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	10^{-3}
Eau	$70 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	$3 \cdot 10^{-3}$
Verre fondu	10^{-1}	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$

encore plus élevée. Dans le tableau 1.1 sont reportées les valeurs numériques de la tension superficielle et de sa dépendance avec la température pour quelques liquides usuels (les valeurs données correspondent à la tension superficielle entre les liquides et l'air ; elles sont différentes dans le cas d'interfaces entre deux liquides, ou entre un liquide et un solide, comme nous le verrons à la section suivante).

Les phénomènes de tension superficielle ont pour effet de minimiser l'aire de l'interface, compte tenu des contraintes imposées par ailleurs au système (gravité, pression ...). En particulier, la forme sphérique d'une goutte assure une surface minimale pour un volume donné (en l'absence de gravité).

Origine physique des forces de tension superficielle

Physiquement, la tension superficielle est associée aux forces de cohésion internes qui s'exercent entre les molécules d'un fluide : forces de van der Waals, liaisons hydrogène (dans l'eau par exemple), liaisons ioniques, liaisons métalliques (dans les métaux comme le mercure). Dans un fluide en volume, les forces exercées par chaque molécule sont équilibrées par celles exercées par les molécules voisines. Si on introduit une interface, par exemple avec le vide, les forces exercées dans sa direction ne sont plus équilibrées ; c'est là l'origine des forces de tension superficielle et de l'énergie correspondante. La valeur du coefficient de tension superficielle sera très variable suivant la nature des forces qui s'exercent entre les atomes ou les molécules ; la forte tension superficielle des métaux liquides (comme le mercure par exemple) s'explique par la forte valeur des énergies associées aux liaisons métalliques (valeurs typiques de tension superficielle de $0,5$ à 1 N.m^{-1}) alors que les forces de van der Waals, qui jouent un rôle prépondérant dans de nombreux corps

moléculaires, ne donnent des valeurs que de l'ordre de 2 à $2,5 \cdot 10^{-2}$ N.m^{-1}. Les contributions à la tension superficielle de différents types de forces se composent additivement. Par ailleurs, la tension superficielle d'une interface entre deux composés A et B de tensions superficielles γ_A et γ_B peut être estimée à partir de l'expression approchée :

$$\gamma_{AB} = \gamma_A + \gamma_B - 2\sqrt{\gamma_A \gamma_B}. \tag{1.54}$$

Variation de la tension superficielle en présence d'un surfactant

Nous discutons à présent l'effet de variation de tension superficielle due à la présence d'un composé tiers (ou surfactant) au niveau de l'interface entre deux fluides. La présence de ce surfactant abaisse la tension superficielle entre les fluides. Sans entrer dans les détails des interactions réciproques entre les trois composés en présence, nous pouvons expliquer qualitativement le mécanisme d'abaissement de la tension superficielle de la manière suivante : prenons l'exemple d'un surfactant tel qu'un acide gras (l'acide stéarique qui est le principal constituant des bougies, en est un exemple). Il s'agit d'un composé formé d'une tête acide polaire partiellement ionisée, et d'une longue queue constituée de radicaux CH_2. En présence d'eau, la molécule se dispose de façon à placer sa tête polaire du côté de l'eau (on dit que la tête est hydrophile) et sa queue aliphatique vers le milieu extérieur (queue hydrophobe). Pour cette raison, on parle de composés amphiphiles. Cette interposition des molécules de surfactant entre les deux fluides diminue les interactions directes entre leurs molécules et, de ce fait, diminue la tension interfaciale par suite de l'affinité du surfactant pour chacun des deux fluides. Il devient alors énergétiquement moins défavorable pour le système d'accroître l'aire de l'interface entre les deux fluides.

Les surfactants jouent un rôle clé dans de nombreux problèmes de physicochimie, en particulier dans le domaine des détergents : la partie hydrophobe de leurs molécules enrobe les corps gras, permettant ainsi leur solubilisation dans l'eau.

Influence de la température sur la tension superficielle

La diminution de la cohésion d'un liquide lorsque la température augmente se traduit par une diminution de la tension superficielle avec la température. Pour des variations modérées de température, on peut traduire cette dépendance par l'expression suivante :

$$\gamma(T) = \gamma(T_0)[1 - b(T - T_0)]. \tag{1.55}$$

Le coefficient b, de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} K^{-1}, est positif, ce qui traduit la diminution de l'énergie de surface liée à la diminution de cohésion du liquide lorsque la température augmente. Ainsi, le coefficient de tension superficielle s'annule au point critique. Nous verrons au chapitre 4 (section 4.8.3) que ces variations peuvent induire des écoulements (effet Marangoni).

1.4.2 Forces de pression associées aux phénomènes de tension superficielle

Différence de pression entre les deux côtés d'une interface courbe et loi de Laplace

Considérons à présent une goutte sphérique de rayon R d'un fluide (1), immergée dans un autre fluide (2) (Fig. 1.15a). Pour qu'une telle goutte puisse être en équilibre, il est nécessaire que l'intérieur de la goutte soit en surpression par rapport à l'extérieur d'une quantité :

$$p_1 - p_2 = 2\frac{\gamma}{R} \cdot \tag{1.56}$$

D'autre part, la mesure de la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur d'une bulle de savon donne le double de cette valeur. Il y a en effet deux interfaces eau savonneuse–air et chacune donne une contribution égale à $2\gamma/R$ (Fig. 1.15b).

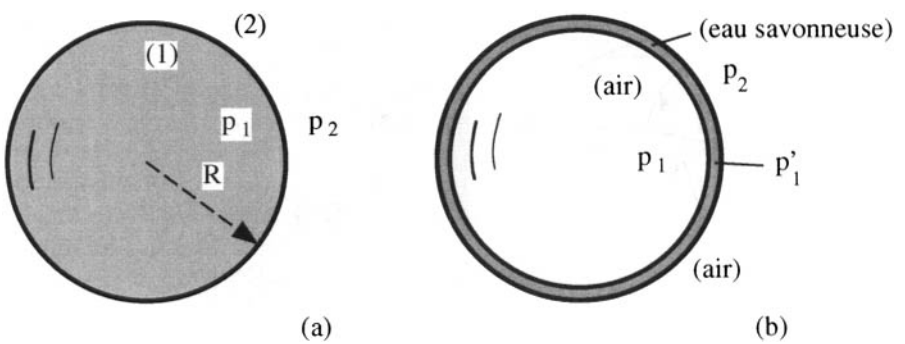


FIG. 1.15 – *(a) Différence de pression capillaire ($p_1 - p_2$) entre l'intérieur et l'extérieur d'une goutte sphérique d'un fluide (1) dans un fluide (2) ; (b) cas d'une bulle d'air dans l'air pour laquelle il existe deux interfaces eau savonneuse–air.*

Démonstration Le rayon de la goutte correspond à l'équilibre entre les effets de tension de surface (minimisation de l'aire de l'interface) et de surpression de l'intérieur de la goutte par rapport à l'extérieur (cette surpression peut par exemple être assurée en reliant la goutte à un réservoir qui maintienne la pression p_1).

Pour justifier la relation (1.56), appliquons le principe des travaux virtuels pour un accroissement de rayon $\mathrm{d}R$ de la bulle sous une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ constante. La valeur de Δp correspondant à l'équilibre mécanique sera telle que la variation d'énergie totale $\mathrm{d}W_t$ correspondante soit nulle. $\mathrm{d}W_t$ est la somme de deux termes :

– l'un, $\mathrm{d}W_s$, dû à la variation d'énergie de surface de la sphère :

$$\mathrm{d}W_s = \mathrm{d}(4\pi\gamma R^2) = 8\pi\gamma R\,\mathrm{d}R \tag{1.57a}$$

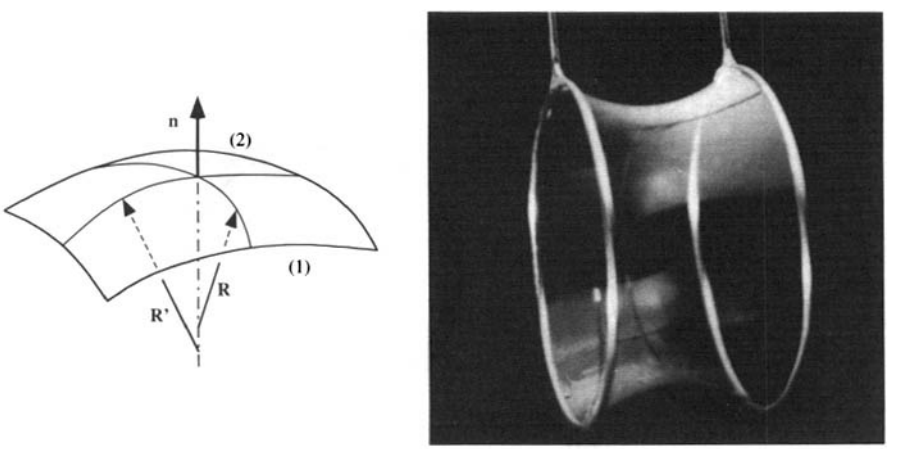
– l'autre $\mathrm{d}W_p$ dû au travail des forces de pression :

$$\mathrm{d}W_p = -\Delta p\,\mathrm{d}V = -(p_1 - p_2)\mathrm{d}[(4/3)\pi R^3] = -(p_1 - p_2)4\pi R^2\,\mathrm{d}R. \quad (1.57b)$$

En écrivant que $\mathrm{d}W_s + \mathrm{d}W_p = 0$, on obtient la formule (1.56), aussi appelée loi de Laplace.

Dans le cas où la surface de séparation entre les deux fluides est quelconque, la loi de Laplace prend la forme plus générale :

$$p_1 - p_2 = \gamma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \gamma C \quad (1.58)$$



(a) (b)

FIG. 1.16 – *(a) Géométrie de la surface de séparation entre deux fluides (1) et (2) permettant de définir les rayons de courbure principaux R et R'. (b) La surface du film de liquide tendu entre deux anneaux circulaires est ouverte, et la pression de part et d'autre du film est donc la même. La courbure moyenne locale* $C = [(1/R) + (1/R')]$ *est donc nulle en chaque point. La surface ainsi engendrée – la caténoïde – réalise l'aire minimale du film, compte tenu des conditions imposées par les anneaux (photographie Palais de la Découverte).*

où R et R' sont les rayons de courbure principaux de la surface au point considéré (rayons de courbure extremum des courbes, sections de la surface par deux plans perpendiculaires contenant la normale n (Fig. 1.16a). La somme $C = (1/R) + (1/R')$ est la *courbure moyenne* locale de l'interface. Les rayons de courbure R et R' sont algébriques et comptés positivement lorsque le centre de courbure correspondant est situé du côté du fluide (1). Sur la figure 1.16b, on peut voir un film de liquide tendu sur un cadre, dans une

configuration où la courbure C en chaque point est nulle, alors que R et R' sont tous deux différents de zéro, mais opposés. Cela permet de satisfaire la loi de Laplace (Éq. (1.58)) dans le cas où la pression de part et d'autre de l'interface est la même.

La loi de Laplace intervient dans de très nombreux phénomènes physiques. Citons en particulier la nucléation des bulles dans les phénomènes d'ébullition : il est impossible de faire apparaître des bulles de vapeur à la température normale d'ébullition d'un liquide, car cela demanderait un excédent de pression très élevé entre l'intérieur de la bulle et le fluide, au moment de la formation de la bulle ($\Delta p \propto 1/R$) ; il en résulte un retard à l'ébullition. Cette dernière s'effectue en général par croissance de bulles microscopiques préexistantes. Pour limiter ces phénomènes de retard, on place dans le liquide des objets générateurs de bulles (billes de verre) ; ils donnent l'échelle de taille minimale à partir de laquelle les bulles de vapeur vont nucléer et grossir. Plus cette échelle est grande, plus la surchauffe est réduite.

Influence de la gravité

Les effets de capillarité, qui sont directement liés à la courbure des interfaces, sont importants lorsqu'on s'intéresse à des phénomènes aux petites échelles de longueur. Pour des objets de grande taille, ils sont masqués par l'influence des forces en volume, comme la gravité. La figure 1.17 illustre ce point : des gouttes de mercure de taille différentes sont posées sur une surface horizontale. Les plus petites ont une forme de calotte sphérique, tandis que les plus grosses sont aplaties sous l'effet de la gravité.

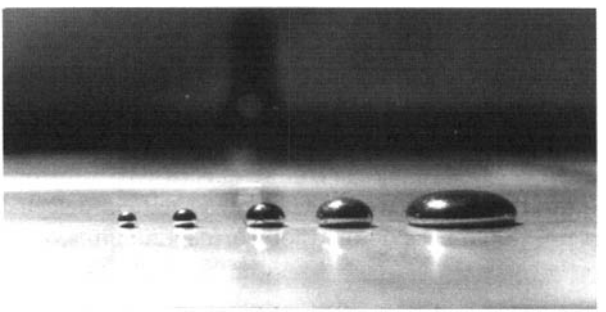


FIG. 1.17 – *Déformation de gouttes de mercure de taille variable posées sur un plan solide en verre, sous l'effet des forces de pesanteur. La plus petite goutte, formant sensiblement une calotte sphérique, a un diamètre voisin de 2 mm. On peut remarquer que le mercure ne mouille pas le verre, c'est-à-dire qu'au voisinage du verre l'interface est convexe (la notion de mouillage sera abordée à la section 1.4.3) (photographie des auteurs).*

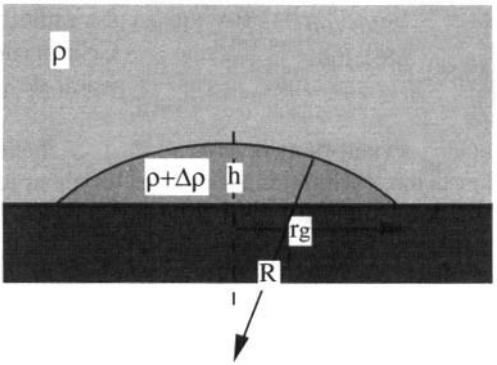


FIG. 1.18 – *Géométrie d'une goutte partiellement mouillante posée sur une surface plane.*

Estimons l'ordre de grandeur relatif des différences de pression capillaires et hydrostatiques intervenant sur une goutte en forme de calotte sphérique posée sur une surface plane (Fig. 1.18). Pour plus de généralité, on considère une goutte d'un fluide de densité $\rho + \Delta\rho$ entourée d'un fluide de densité ρ. La différence de pression capillaire et la différence de pression hydrostatique sur la hauteur h de la goutte sont respectivement :

$$\Delta p_{\text{cap}} = 2\frac{\gamma}{R} \tag{1.59a}$$

et :

$$\Delta p_{\text{grav}} = \Delta\rho\, g\, h. \tag{1.59b}$$

Par ailleurs, si la goutte n'est pas trop déformée par rapport à une calotte sphérique, le rayon r_g de la ligne de contact s'écrit : $r_g^2 = 2Rh$. On peut donc caractériser l'importance relative des effets de gravité et de ceux de capillarité par le rapport des différences de pression correspondantes, soit :

$$Bo = \frac{\Delta\rho\, g\, h}{\dfrac{2\gamma}{R}} \approx \frac{\Delta\rho\, g\, r_g^2}{\gamma}\,. \tag{1.60}$$

Ce rapport est appelé *nombre de Bond*. Une grande valeur du nombre de Bond correspond à des effets de gravité dominants ceux de tension superficielle. Dans le cas du mercure, la valeur $Bo = 1$ correspond à une taille « critique » de l'ordre de $l_c \approx 2$ mm ; pour l'eau, l_c est de l'ordre de 3 mm. Des petites valeurs du nombre de Bond (pour lesquelles les effets capillaires dominent) sont également obtenues dans des expériences hydrodynamiques en microgravité. On peut aussi diminuer la masse volumique effective en utilisant deux fluides

non miscibles présentant une faible différence $\Delta\rho$ de masse volumique; on parle alors de gravité compensée (par l'effet de la poussée d'Archimède). La longueur l_c est appelée *longueur capillaire* et s'écrit :

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\Delta\rho\, g}}\,. \tag{1.61}$$

Pour déterminer l'importance relative de la tension superficielle pour un écoulement donné, on compare l_c à ses dimensions caractéristiques. Des valeurs typiques de l_c sont données dans le tableau 1.1.

♦ **Phénomènes d'ascension capillaire près d'une paroi**

La longueur capillaire l_c intervient dans de nombreux phénomènes. Elle représente par exemple l'ordre de grandeur de la hauteur d'ascension capillaire d'un fluide le long d'une paroi verticale dans le cas où le fluide mouille celle-ci (à la différence de la figure 1.17), c'est-à-dire lorsque le centre de courbure de l'interface est à l'extérieur du liquide (Fig. 1.19).

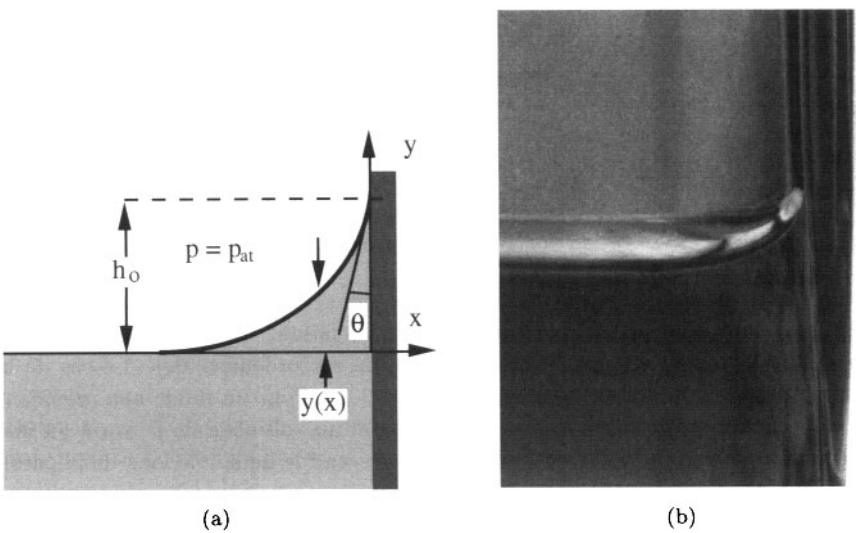


FIG. 1.19 – *Ascension d'un fluide mouillant sur une paroi verticale : (a) schéma ; (b) expérience réalisée avec de l'eau dans un récipient en verre. La hauteur d'ascension est de l'ordre du millimètre (photographie C. Rousselin, Palais de la Découverte).*

Nous allons déterminer la hauteur d'ascension du liquide au voisinage de la paroi. Signalons qu'il peut exister un film microscopique très mince (quelques centaines d'angströms d'épaisseur) au-dessus de la ligne de contact du ménisque avec la paroi solide. Nous négligeons ce film dans la présente étude.

La pression à l'intérieur du liquide à une ordonnée $y(x)$ au-dessous de l'interface s'écrit : $p_s(x) = p_{at} - (\gamma/R(x)) + \rho\, g\, y(x)$ où $R(x)$ représente le rayon de courbure local de l'interface (il est positif dans le cas présent où le centre de courbure est au-dessus de la surface), p_{at} est la pression de l'air au-dessus de l'interface, le terme en γ/R représente les effets de la tension superficielle et le terme $\rho\, g\, y(x)$ ceux de pression hydrostatique. D'autre part, juste au-dessous de l'interface dans sa partie plane, la pression dans le liquide est p_{at}. On en déduit l'égalité :

$$\rho\, g\, y(x) = \frac{\gamma}{R(x)} \cdot \tag{1.62}$$

En utilisant la relation géométrique $R(x) = [(1 + y'(x)^2)^{3/2}]/y''(x)$, on obtient l'équation différentielle :

$$\rho\, g\, y = \gamma \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \tag{1.63}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathrm{d}(y^2) = -2\frac{\gamma}{\rho\, g}\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) \cdot \tag{1.64}$$

On voit apparaître l'échelle de longueur du problème qui est la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/\rho\, g}$. Par intégration, en utilisant les conditions asymptotiques pour x très grand (en valeur absolue), $y \to 0$ et $y' \to 0$, et en remarquant que $y'(x = 0) = -\mathrm{cotan}\,\theta_0$, on obtient pour la hauteur d'ascension capillaire le long de la paroi :

$$h_0^2 = 2l_c^2(1 - \sin\theta_0). \tag{1.65}$$

La hauteur d'ascension le long de la paroi est donc bien de l'ordre de grandeur de la longueur capillaire, corrigée par un facteur faisant intervenir les propriétés de mouillage de la paroi par le liquide (angle de raccordement θ_0). Le cas de la figure 1.19 est celui d'un fluide mouillant ($\theta_0 < 90°$). Pour un fluide non mouillant comme le mercure ($\theta_0 > 90°$), l'interface descend au voisinage de la paroi au lieu de remonter, et h_0 représente la hauteur dont descend le liquide le long de la paroi, au-dessous de sa surface libre loin de cette paroi.

♦ Ascension capillaire dans un tube ; loi de Jurin

Lorsqu'un tube capillaire est plongé dans un liquide (Fig. 1.20), on observe, comme précédemment, une déformation de l'interface près des parois, mais également, une ascension du ménisque dans le tube par rapport à l'extérieur si celui-ci est de petit diamètre et si le fluide est mouillant pour la paroi du tube (angle de raccordement θ avec la paroi solide inférieur à 90°) ; si le fluide est non mouillant – cas du mercure par exemple – le niveau de l'interface dans le tube est plus bas qu'à l'extérieur. Nous allons calculer l'ordre de grandeur de la différence de niveau entre l'intérieur et l'extérieur du tube capillaire. Nous écrivons l'équilibre de la colonne de liquide située dans le tube capillaire (colonne de rayon r et de hauteur h) sous l'effet de son poids ($\pi\, r^2\, h\, \rho\, g$) et

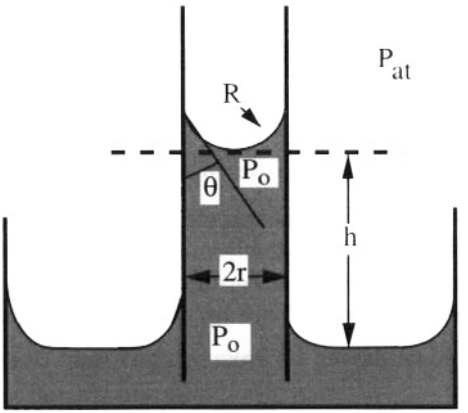


FIG. 1.20 – *Ascension capillaire d'un ménisque d'interface dans un tube de rayon r.*

de la différence de pression au niveau de l'interface. Supposons que l'interface entre le liquide et l'air à l'intérieur du capillaire soit sphérique et notons R son rayon. La pression P_1 juste au-dessous de l'interface est égale à $(P_{at} - 2\gamma/R)$. Par ailleurs, le rayon de courbure R de l'interface est lié au rayon r du tube et à l'angle de raccordement θ par la relation $r = R\cos\theta$. Pour la différence de pression de part et d'autre de l'interface, on a donc :

$$\Delta p = P_{at} - P_1 = \frac{2\gamma\cos\theta}{r} = \frac{4\gamma\cos\theta}{d} \tag{1.66a}$$

où d est le diamètre du tube capillaire. La pression P_1 vaut également $P_{at} - \rho\, g\, h$. En substituant cette expression de P_1 dans la relation (1.66a), on obtient :

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho\, g\, r} = 2\frac{l_c^2}{r}\cos\theta. \tag{1.66b}$$

C'est la *loi de Jurin.* Elle est d'autant mieux vérifiée qu'on peut négliger l'ascension capillaire sur les parois donnée par la formule (1.65) par rapport à h. Cela implique que r soit très petit devant h. Pour une valeur de la tension superficielle $\gamma = 7 \cdot 10^{-2}$ N.m^{-1} (eau), $\cos\theta = 0,6$ et $r = 0,5$ mm, on trouve une valeur $h \approx 20$ mm largement supérieure à l_c ($l_c = 3$ mm pour l'eau). Pour un fluide non mouillant (angle de contact $\theta > 90°$), la formule (1.66b) reste valable en donnant une valeur de h négative correspondant à un abaissement du niveau de l'interface dans le tube.

Remarque On peut aussi se représenter l'équilibre de la colonne de liquide dans le tube comme étant dû à la composante verticale de la force de tension superficielle qui s'exerce sur la ligne de contact à l'interface solide–liquide à la partie supérieure

de la colonne. Cette dernière force s'écrit $(2\pi\, r\, \gamma \cos\theta)$. L'égalité du poids de la colonne de liquide dans le tube capillaire $(\rho\, \pi\, r^2\, h\, g)$ et de cette force conduit à la loi de Jurin.

Quelques méthodes de mesure de la tension superficielle

Plusieurs de ces méthodes sont basées sur les phénomènes décrits dans la section précédente. Dans la première catégorie que nous décrivons plus haut, la tension superficielle est déterminée directement sans nécessiter la connaissance de l'angle de contact des liquides avec les surfaces solides.

♦ Mesures de géométries et caractéristiques des gouttes

– Méthode de la goutte pendante : une goutte est émise au bout d'un tube capillaire, sa forme influencée par la gravité, est analysée par traitement d'image et comparée aux profils théoriques en ajustant la valeur de la tension superficielle pour avoir un accord satisfaisant. La précision peut être de l'ordre du pourcent, ou mieux dans les cas favorables.

– Poids des gouttes formées au bout d'un tube capillaire (compte-gouttes). Le poids des gouttes produites par un tube capillaire est approximativement proportionnel à la tension superficielle et il dépend du rayon du tube. En moyennant un nombre suffisant de mesures et en appliquant des corrections adaptées, on peut avoir une précision de l'ordre de quelques pourcents sur la mesure.

Nous décrivons maintenant des méthodes qui font intervenir l'angle de contact des liquides avec les parois solides. Associées aux méthodes présentées plus haut, elles permettent de déterminer à la fois la tension superficielle et l'angle de contact.

♦ Mesures de forces sur des surfaces solides

Ces méthodes posent souvent des problèmes de reproductibilité, de préparation des surfaces et de dépendance par rapport à la façon dont les surfaces sont mises en contact avec les fluides.

– *Mesures de hauteur d'ascension capillaire*

Cette méthode consiste à mesurer la hauteur d'ascension d'un liquide dans un tube capillaire. On en déduit la tension superficielle en utilisant la loi de Jurin établie par la relation (1.66b)

–*Méthode d'arrachement*

On tire verticalement sur un cylindre creux plongé dans le liquide, et on mesure la force exercée par le liquide sur le cylindre au moment où celui-ci se détache de l'interface. La force F vérifie :

$$F = P_{\text{Arch.}} + 2(2\pi R)\gamma \cos\theta$$

où $P_{\text{Arch.}}$ représente la poussée d'Archimède exercée sur le cylindre (le facteur 2 provient de la présence de deux lignes de contact liquide–solide–air au niveau du cylindre). Au moment où il y a détachement (situation de la

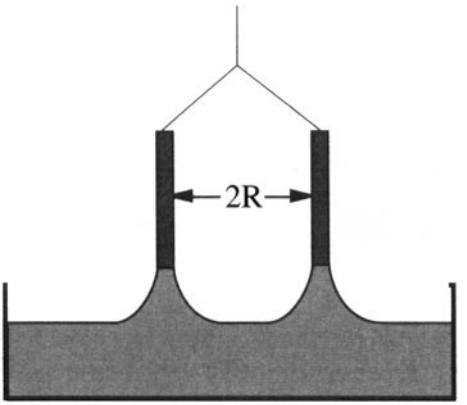


FIG. 1.21 – *Principe de mesure de tension superficielle par la méthode d'arrachement d'un anneau.*

figure 1.21), la poussée d'Archimède n'intervient plus et l'interface liquide–air est verticale au contact du cylindre. On a alors $\cos\theta = 1$ et :

$$F = 4\pi\, R\gamma. \tag{1.67}$$

Notons que pour avoir des mesures fiables, il est nécessaire de travailler avec des surfaces très propres.

Remarque Cette méthode de détermination de la tension superficielle par la mesure d'une force est connue aussi sous le nom de *méthode de Wilhelmy.*

♦ Mesures d'angle de contact d'interfaces sur une paroi

Les angles peuvent tout d'abord être déterminés en combinant des mesures de force ou d'ascension capillaire sur des interfaces et des mesures directes de tension superficielle. Ils peuvent également être déterminés directement par des observations au microscope dans les cas favorables. D'autres techniques donnent des mesures plus rapides et précises dans des cas particuliers :

- des mesures interférométriques par franges d'égale épaisseur près d'une ligne de contact dans le cas d'un angle de mouillage faible ($< 2°$) ;
- des mesures par réflexion (Fig. 1.22) sur la surface supérieure d'une goutte posée (angles de contact inférieur à 20°).

La limite de la partie illuminée de l'écran vient des rayons issus de la ligne de contact et son rayon R vérifie :

$$tg\, 2\theta = \frac{R - r_g}{h}\,. \tag{1.68}$$

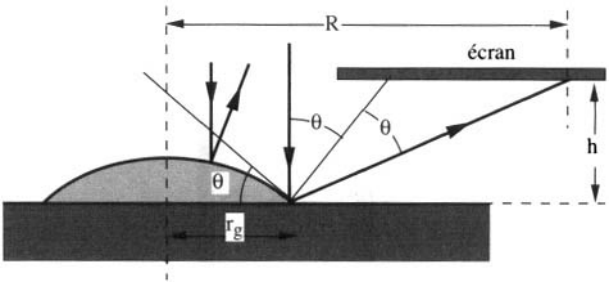


FIG. 1.22 – *Principe de la mesure de l'angle de contact d'une goutte avec une surface, par réflexion sur la surface supérieure de la goutte.*

1.4.3 Étalement de gouttes sur une surface – notion de mouillage

Dans ce paragraphe, nous étudions les conditions dans lesquelles une goutte d'un liquide « mouille » une surface solide, c'est-à-dire s'étale sur cette surface.

Paramètre d'étalement

Afin de voir si l'étalement d'une goutte d'un liquide (l) sur un plan solide (s) est énergétiquement favorable, on compare l'énergie d'une interface solide-vide recouverte ou non d'une couche de liquide (Fig. 1.23). On appelle γ_{sl} l'énergie de cette surface par unité de surface en présence de liquide, γ_{so} son énergie dans le vide, et $\gamma = \gamma_{lo}$ l'énergie interfaciale entre le liquide et le vide. Les énergies par unité de surface totales dans les deux situations sont respectivement $F_{\sigma f} = \gamma_{lo} + \gamma_{sl}$ et $F_\sigma = \gamma_{so}$. Nous supposons ici que l'épaisseur du film est suffisamment grande par rapport à la portée des forces entre atomes ou molécules pour qu'on puisse négliger l'interaction entre les deux interfaces (films qualifiés de macroscopiques). Il existe des films

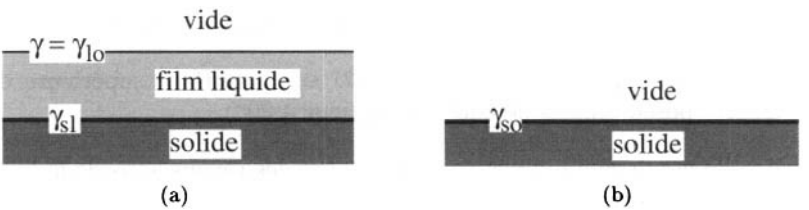


FIG. 1.23 – *Calcul des énergies interfaciales pour une surface recouverte (a) ou non (b) d'un film de liquide.*

microscopiques d'épaisseur submicronique pour lesquels cette condition ne sera plus vérifiée.

La présence d'un film sera donc énergétiquement favorable si la différence :

$$S_0 = F_\sigma - F_{\sigma f} = \gamma_{so} - \gamma_{sl} - \gamma \tag{1.69}$$

est positive. On appelle S_0 *le paramètre d'étalement.* Dans la plupart des cas, l'environnement extérieur des surfaces est constitué par un gaz et on doit remplacer les énergies de surface γ_{lo} et γ_{so} par rapport au vide par des énergies γ_{lg} et γ_{sg} par rapport au gaz environnant. Les différences peuvent être significatives, en particulier entre γ_{sg} et γ_{so} compte tenu des phénomènes d'adsorption, et tout particulièrement si la phase gazeuse contient la vapeur du liquide (situation d'équilibre dans le cas d'une vapeur saturante). On utilise alors pratiquement le paramètre d'étalement S :

$$S = F_\sigma - F_{\sigma f} = \gamma_{sg} - \gamma_{sl} - \gamma \tag{1.70}$$

où γ représente cette fois-ci la tension interfaciale, γ_{lg}, entre le liquide et le gaz.

Mouillage partiel et total

Lorsque le paramètre d'étalement S est négatif, on est dans des conditions de mouillage partiel ; pour S positif, on a mouillage total et il peut exister un film liquide sur la surface solide. D'un point de vue moléculaire, les solides « durs », à liaisons fortes (ioniques, covalentes ou métalliques), ont de fortes énergies de surface ($\gamma_{so} = 0,5$–1 N.m^{-1}). Ce sont par exemple le verre, la silice, les oxydes métalliques : ils sont généralement mouillés par la plupart des liquides moléculaires. Ils seront également facilement contaminés par des impuretés présentes dans l'environnement, ce qui peut faire disparaître les propriétés de mouillage.

Par ailleurs, les solides à liaisons de plus basse énergie (Van der Waals, liaison hydrogène) auront des énergies de surface plus faibles ($\gamma_{sg} = 5 \cdot 10^{-2}$ N.m^{-1}). Ce sera le cas des polymères, du téflon, ou de la paraffine : de telles surfaces seront plus difficilement contaminées. Le mouillage sera total ou partiel, suivant le liquide utilisé.

Équilibre d'une goutte sur une paroi

Analysons tout d'abord le cas des gouttes de petite taille pour lesquelles la gravité est négligeable (Fig 1.24a). On peut écrire les conditions d'équilibre de force pour la ligne triple de contact de l'interface liquide avec la paroi. La composante verticale est équilibrée par la réaction élastique de la paroi solide (pour un étalement sur un substrat liquide, on observerait une déformation de ce dernier). L'écriture de l'équilibre des composantes horizontales de la force donne :

$$\gamma_{sl} + \gamma \cos\theta = \gamma_{sg}. \tag{1.71}$$

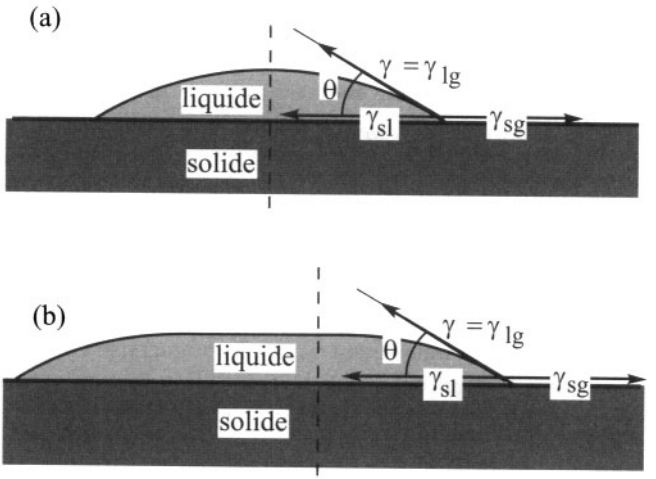


FIG. 1.24 – *(a) Équilibre d'une goutte posée sur un plan solide lorsque la goutte est assez petite pour que la gravité soit négligeable ; (b) cas d'une goutte aplatie sous l'effet de la gravité.*

En combinant ce résultat avec l'expression (1.70) du paramètre d'étalement, on obtient (loi de Young–Dupré) :

$$\gamma(\cos\theta - 1) = S. \tag{1.72}$$

On vérifie bien que, pour $S = 0$, on a $\theta = 1$. Pour des gouttes de plus grande taille (Fig. 1.24b), la goutte est aplatie, mais l'angle de contact de l'interface avec la paroi garde la même valeur (Fig. 1.17).

Déplacement d'une interface

Abordons maintenant le cas de lignes de contact en déplacement. Il s'agit ici de déplacements à vitesses infiniment petites pour lesquelles on reste dans le domaine quasi statique. Le cas du déplacement d'interfaces à vitesse finie sera traité au chapitre 4 (section 4.8). Même lorsque le déplacement est très lent, on constate qu'il y a une différence entre les angles de contact d'un liquide avec une paroi suivant le sens de déplacement des interfaces. On observe cet effet aussi bien lors de l'étalement (ou de la rétraction) de gouttes sur un plan (Figs. 1.25a & b), que lors du déplacement spontané d'une goutte sur un plan incliné (Fig. 1.25c) ou lors du mouvement d'une goutte pendulaire à l'intérieur d'un tube (Fig. 1.25d).

Aux très faibles vitesses de déplacement (ce qui correspond à notre étude), cet effet est dû à la présence de rugosités ou d'hétérogénéités chimiques sur la surface solide. On définit un angle d'avancée θ_a et un angle de reculée θ_r

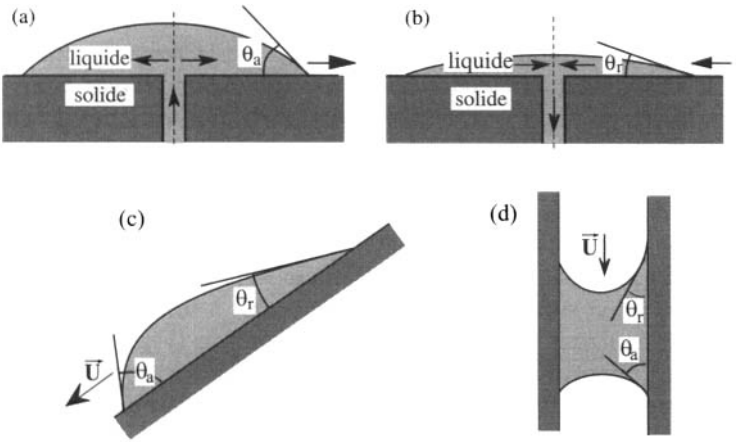


FIG. 1.25 – *Différence entre les angles d'avancée (a) et de reculée (b) pour des gouttes posées en situation de mouillage partiel lorsqu'on augmente (a) ou diminue (b) leur volume. (c) Angles d'avancée et de reculée en avant et en arrière d'une goutte se déplaçant à vitesse très faible le long d'un plan incliné. (d) Angle de contact d'avancée et de reculée pour un bouchon liquide se déplaçant très lentement à l'intérieur d'un tube capillaire.*

comme la limite des angles de contact dans chacune de ces situations, dans la limite où la vitesse de l'interface tend vers zéro (Fig. 1.26). Sur cette figure, nous pouvons voir une augmentation de l'angle de contact macroscopique avec la vitesse d'avancée de la ligne de contact. Nous étudierons ce phénomène, au chapitre 4 (section 4.8.1), dans le cas où il est dû à des causes purement hydrodynamiques.

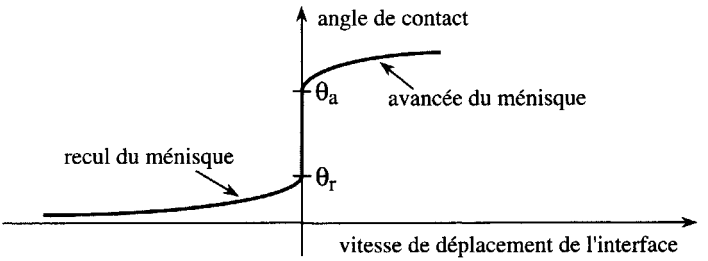


FIG. 1.26 – *Définition des angles d'avancée (θ_a) et de recul (θ_r) dans le cas d'une interface en mouvement.*

1.4.4 Instabilité de Rayleigh–Taylor

Un exemple de compétition entre les effets de la tension superficielle et ceux de la gravité est *l'instabilité de Rayleigh–Taylor*. Nous avons vu que l'effet des forces de tension superficielle est de minimiser l'aire de l'interface entre deux fluides (on peut se le représenter en considérant l'interface comme une membrane élastique). Analysons le cas où une interface horizontale sépare deux fluides de densités différentes, le plus léger étant situé au-dessous. Une telle situation est gravitationnellement instable ; en effet, toute déformation de l'interface crée un déséquilibre de pression qui tend à l'amplifier. Cependant, les effets de tension superficielle qui, eux, tendent à limiter les déformations de l'interface pourront ramener celle-ci à l'équilibre (Fig. 1.27). Ils seront d'autant plus importants que l'étendue de l'interface sera petite. Nous pouvons prévoir le paramètre qui va gouverner cette instabilité, en analysant ces deux effets antagonistes.

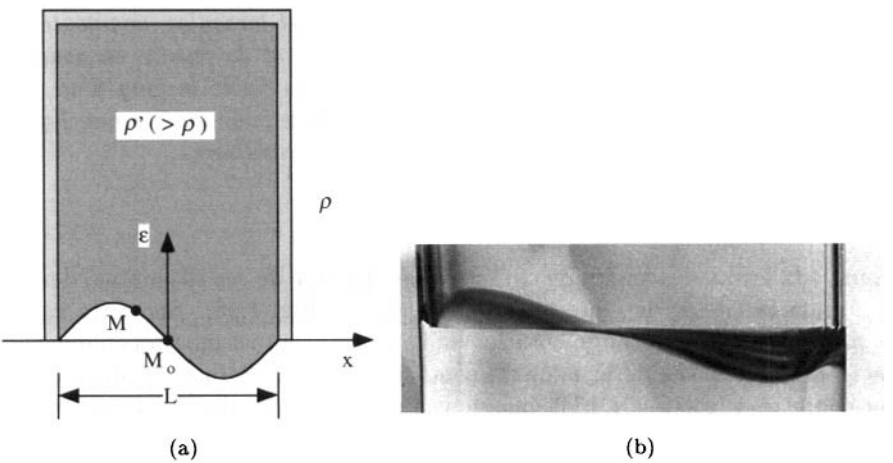


FIG. 1.27 – *Instabilité de Rayleigh–Taylor ; (a) géométrie de l'expérience ; (b) photographie prise plusieurs secondes après avoir retourné un récipient contenant une huile très visqueuse (5 000 fois la viscosité de l'eau) (photographie C. Rousselin, Palais de la Découverte).*

Le moteur de l'instabilité est la gravité, à qui est associée une différence de pression hydrostatique δp_1 de part et d'autre de l'interface, de l'ordre de :

$$\delta p_1 \approx (\rho' - \rho)\, g\, \varepsilon \tag{1.73}$$

où ε est le déplacement vertical infinitésimal de l'interface, et ρ et ρ' représentent les masses volumiques des deux fluides.

L'ordre de grandeur des différences de pression « stabilisantes » créées par les effets de tension de surface est :

$$\delta p_2 \approx \frac{\gamma}{R} \tag{1.74}$$

où R est le rayon de courbure de l'interface ; dans le cas de la figure 1.27a, ce rayon R est relié au déplacement vertical ε par la relation $\varepsilon R \approx L^2$. L'importance relative des deux effets sera donc mesurée par le rapport :

$$\frac{\delta p_1}{\delta p_2} \approx \frac{\Delta\rho\, g\, \varepsilon}{\frac{\gamma}{R}} \approx \frac{\Delta\rho\, g\, L^2}{\gamma}\,. \tag{1.75}$$

C'est la valeur de ce rapport qui détermine la stabilité de l'interface. Pour ce paramètre, il n'est pas surprenant de retrouver la forme du nombre de Bond équation (1.60), puisqu'il s'agit, dans ces deux cas, d'évaluer l'importance respective de la gravité et de la tension superficielle.

Cette instabilité peut être aisément observée en prenant un fluide suffisamment visqueux pour ralentir la croissance de la déformation de l'interface et faciliter son observation (Fig. 1.27b). En retournant rapidement un pot de miel assez visqueux par exemple, on peut voir l'apparition d'un renflement de l'interface d'un côté de l'ouverture du pot et d'un creusement de l'autre côté.

Traitement détaillé de l'instabilité de Rayleigh–Taylor

Considérons un récipient contenant le fluide de masse volumique ρ' et présentant en sa partie inférieure une ouverture de taille L dans la direction x (Fig. 1.27a), et très allongée dans la direction perpendiculaire z, afin que l'on puisse négliger les effets de la courbure dans cette direction. Cet ensemble est placé au-dessus d'un second fluide de masse volumique plus faible ρ. Supposons une déformation de l'interface dans le plan de la figure et désignons par $\varepsilon(x,t)$ le déplacement vertical de cette interface, repéré par rapport à sa position initiale plane. En un point M où l'interface est déviée, l'application du principe fondamental de l'hydrostatique par rapport à un point M_0 resté immobile donne une différence de pression entre les deux fluides.

$$\delta p = p_{\text{fluide inférieur}} - p_{\text{fluide supérieur}} = \Delta\rho\, g\, \varepsilon(x,t). \tag{1.76}$$

À la limite de stabilité, $\delta\rho$ doit être juste compensée, en tout point de l'interface, par la différence de pression $-\gamma(\mathrm{d}^2\varepsilon/\mathrm{d}x^2)$ due à la tension superficielle pour une interface de rayon de courbure $R = (\mathrm{d}^2\varepsilon/\mathrm{d}x^2)^{-1}$ (on suppose $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}x \ll 1$). On obtient alors l'égalité :

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\Delta\rho\, g}{\gamma}\varepsilon(x,t). \tag{1.77}$$

Cette équation a pour solution générale :

$$\varepsilon(x,t) = A\cos kx + B\sin kx$$

avec :

$$k = \sqrt{\frac{\Delta\rho\, g}{\gamma}}\,. \tag{1.78}$$

Si on suppose que l'interface est fixe au niveau des parois latérales, $\varepsilon(x,t)$ vérifie les conditions aux limites : $\varepsilon(x=0)=\varepsilon(x=L)=0$. Par ailleurs, le déplacement moyen de l'interface $\int_0^L \varepsilon(x,t)\mathrm{d}x$ doit être nul pour assurer la conservation de la quantité de fluide dans le récipient. L'ensemble de ces conditions impose la solution :

$$\varepsilon(x,t) = B\sin kx \tag{1.79}$$

avec $k=(2n\pi\,/\,L)$ où n est entier. Le seuil est obtenu pour la plus petite valeur de k satisfaisant cette condition ($n=1$), soit :

$$\frac{2\pi}{L} = \sqrt{\frac{\Delta\rho\, g}{\gamma}} \tag{1.80}$$

ou encore :

$$\frac{\Delta\rho\, g\, L^2}{\gamma} = 4\pi^2. \tag{1.81}$$

Dans cette expression, on retrouve bien la forme du paramètre obtenu dans l'équation (1.75). Un calcul d'ordre de grandeur avec une interface eau–air ($\Delta\rho = 10^3$ kg/m^3 et $\gamma \approx 70\cdot 10^{-3}$ N.m^{-1}) donne une valeur seuil :

$$L_c = \sqrt{\frac{4\pi^2\gamma}{\Delta\rho\, g}} \approx 1,7\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \tag{1.82}$$

On se trouvera donc pratiquement toujours dans une situation où l'interface est instable ($L > L_c$).

L'approche utilisée ici est très générale dans l'étude des instabilités hydrodynamiques. Nous avons supposé un type de déformation, ou *mode d'instabilité* (Éq. (1.78)), et cherché dans quelles conditions il est à la limite de la stabilité (c'est-à-dire qu'il représente une solution des équations de mouvement, indépendante du temps). C'est celui des modes instables qui correspond au seuil le plus faible qui détermine l'apparition de l'instabilité globale.

Une situation stable de l'instabilité de Rayleigh–Taylor peut être rendue instable en diminuant localement le coefficient de tension superficielle. Cela peut être réalisé en ajoutant, au niveau de l'interface, un surfactant qui abaisse la tension superficielle (voir section 1.4.1).

Soulignons enfin l'importance pratique considérable des problèmes liés aux interfaces en physico-chimie : étalement de films, mouillage, hydrodynamique polyphasique, où coexistent des phases liquide, solide et vapeur, avec ou sans miscibilité ou changement de phase.

1.5 Spectroscopie des liquides

1.5.1 Quelques sondes usuelles de la structure microscopique des liquides

Propriétés macroscopiques et sondes microscopiques

Nous avons montré précédemment (section 1.3), la relation étroite entre les propriétés de transport des fluides et leur structure microscopique.

Cette dernière, ainsi que les mouvements à petite échelle, peuvent être étudiés à partir de la diffraction d'une onde incidente sur le matériau. La longueur d'onde utilisée doit être comparable ou supérieure de quelques ordres de grandeur aux distances interatomiques. On peut utiliser des ondes électromagnétiques (rayons X ou lumière), mais aussi des faisceaux d'électrons ou de neutrons. Dans ces dernier cas, la longueur d'onde correspondant aux particules sondes vérifie la formule de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{1.83}$$

(h est la constante de Planck, p, m et v sont respectivement la quantité de mouvement, la masse et la vitesse de la particule supposée non relativiste).

Ces trois types de spectroscopies sont couramment utilisés pour l'étude des liquides. Les techniques de neutrons utilisent des réacteurs souvent mis en place exclusivement à cet effet (institut Laue–Langevin à Grenoble, laboratoire Léon Brillouin au CEN Saclay). Elles ont récemment pris une place très importante : la spectroscopie neutronique est particulièrement sensible aux éléments légers, H, O, C, N que l'on rencontre dans un grand nombre de liquides organiques. Cela vient du fait que les neutrons n'interagissent pas avec le nuage électronique des atomes, et leur section efficace de diffusion varie comme le carré du rayon des noyaux c'est-à-dire comme $Z^{2/3}$ (où Z est le numéro atomique). Les deux autres types de spectroscopies « voient » les électrons des atomes et ont une sensibilité qui augmente beaucoup plus vite avec le numéro atomique : ces autres techniques sont donc surtout sensibles aux éléments lourds.

Une caractéristique capitale de ces techniques est de permettre, suivant la longueur d'onde ou les techniques utilisées, d'analyser la structure du liquide, ou ses *excitations élémentaires*. Ces dernières peuvent être par exemple, des ondes de pression ou des modes diffusifs élémentaires excités thermiquement. Quand les longueurs d'onde utilisées sont de l'ordre de l'angström, on obtient des informations sur la structure à l'échelle de quelques longueurs atomiques. En utilisant de plus grandes longueurs d'onde, on peut analyser des fluctuations de densité ou de composition du fluide à grande échelle.

Quelques ordres de grandeur caractéristiques pour des sondes usuelles

Nous allons donner quelques ordres de grandeur de paramètres courants pour les trois techniques principales ; nous cherchons à obtenir dans chaque cas une longueur d'onde de l'ordre des distances interatomiques c'est-à-dire de l'ordre de l'angström.

- **Rayons X** : ils sont produits classiquement par bombardement d'une anode métallique par des électrons accélérés sous un champ électrique. Les longueurs d'onde correspondantes sont de l'ordre de quelques

angströms (1,39 Å pour la raie K du cuivre). De nombreuses études sont également réalisées à l'aide du *rayonnement synchrotron* très puissant obtenu à partir de l'accélération d'électrons dans des *anneaux de stockage* (LURE, ESRF ...)

- **Électrons** : la longueur d'onde associée à des électrons accélérés, sous une différence de potentiel de 200 V, est de 0,87 Å. Il s'agit donc *d'électrons lents* de faible énergie.

- **Neutrons** : on utilise très fréquemment des neutrons, dits *neutrons thermiques.* Ils sont obtenus dans des réacteurs nucléaires par ralentissement de neutrons rapides dans un liquide à température ordinaire ; après un nombre de chocs suffisant avec les noyaux du liquide, la distribution de vitesse des neutrons correspond à un équilibre thermique avec le liquide. À 300 K, la longueur d'onde correspondante est de 1,48 Å.

Dans les deux sections suivantes, nous limiterons notre étude à deux exemples d'utilisation des techniques de diffusion :

- la *diffusion élastique* de rayons X, pour l'étude de la répartition des distances entre molécules à l'échelle de l'angström (étude de structure) ;

- la diffusion de la lumière, qui représente un incomparable outil d'étude des phénomènes de transport dans les liquides à des échelles supérieures au micromètre (étude d'excitations élémentaires).

1.5.2 Facteur de structure et diffusion élastique de rayons X : un exemple d'utilisation de la diffusion à l'échelle atomique

Fonction de distribution radiale d'un liquide

L'information essentielle sur la répartition des distances des atomes dans un liquide est fournie par la fonction de distribution radiale $\rho(r)$ d'un liquide (Fig. 1.28).

$\rho(r)$ est définie ainsi : si on considère un atome de centre O, le nombre $n(r)$ d'atomes dont les centres se trouvent à une distance de O variant entre r et $r + \mathrm{d}r$ est donné par :

$$n(r)\mathrm{d}r = 4\pi r^2 \rho(r)\mathrm{d}r. \tag{1.84}$$

Si $\mathrm{d}V$ est un élément de volume centré en un point O' situé à une distance r de O, $\rho(r)\,\mathrm{d}V$ est le nombre d'atomes situés dans ce volume, moyenné sur toutes les orientations possibles de OO'. La quantité $\rho(r)$ est pratiquement nulle à l'intérieur d'une sphère de rayon $r = 2r_0$, où r_0 est le rayon atomique, à cause de l'impénétrabilité des sphères. Elle présente un premier pic pour une valeur légèrement supérieure à $2r_0$, correspondant à la présence des atomes premiers

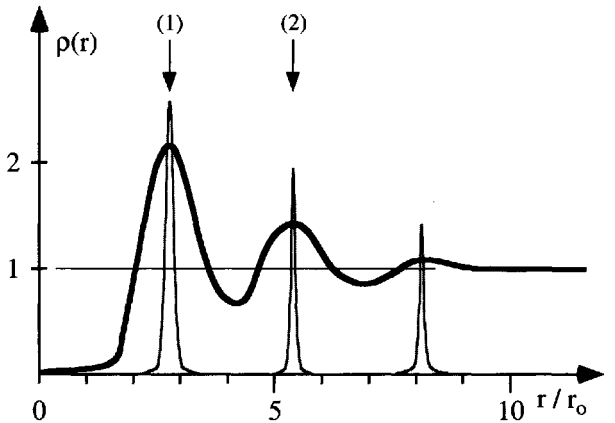


FIG. 1.28 – *Comparaison des variations de la fonction de distribution radiale avec la distance au centre d'un atome origine, pour un métal juste au-dessus (traits pleins) et juste au-dessous (traits pointillés) de son point de fusion. Les signes (1) et (2) donnent les distances des premiers et seconds voisins d'un atome central.*

voisins (Fig. 1.28). Lorsque r augmente, la fonction $\rho(r)$ présente plusieurs oscillations amorties, qui traduisent les effets des seconds voisins, troisièmes, etc. Ces oscillations amorties correspondent aux pics de probabilité observés à l'état solide. Au-delà d'une distance de l'ordre de quelques rayons d'atomes, la fonction $\rho(r)$ est constante et égale à la densité moyenne d'atomes par unité de volume : cela traduit l'absence d'ordre à grande distance. Pour un solide ayant une structure cristalline, on observerait au contraire des pics bien définis correspondant à la périodicité spatiale du réseau et à l'ordre à grande distance.

La fonction de distribution $\rho(r)$ est une moyenne sur toutes les configurations possibles des atomes d'un liquide ; nous allons montrer qu'elle peut être déduite d'expériences de diffraction d'ondes, par exemple des rayons X, dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de l'angström.

Relation entre fonction de distribution radiale et variation de l'amplitude avec l'angle de diffusion

La figure 1.29 montre schématiquement une expérience de diffraction à partir des vecteurs d'onde $\mathbf{k}_i$ et $\mathbf{k}_d$ de l'onde incidente, de l'onde diffusée et du vecteur d'onde de transfert $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i \tag{1.85}$$

$\mathbf{q}$ représente le transfert d'impulsion entre l'onde et le milieu. Nous supposons ici la *diffusion élastique*, c'est-à-dire sans échange d'énergie : les modules de

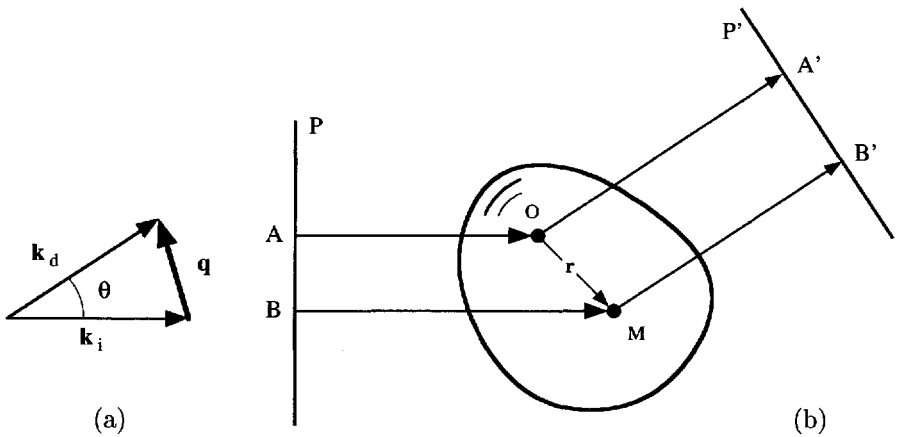


FIG. 1.29 – *Schéma de la diffusion élastique de rayons X par un liquide ; (a) représentation en termes de vecteurs d'onde dans l'espace de Fourier ; (b) représentation dans l'espace réel (les plans P et P' sont en réalité à très grande distance de l'objet).*

$\mathbf{k}_d$ et $\mathbf{k}_i$ sont donc égaux.

Calculons l'amplitude diffusée dans la direction $\mathbf{k}_d$ d'après le schéma de la figure 1.29. Supposons que l'amplitude complexe de l'onde diffusée par une molécule soit g $(\mathbf{q})$ (on suppose des molécules à symétrie sphérique, de manière à ce que l'angle des vecteurs d'onde avec les directions caractéristiques de la molécule n'interviennent pas). Prenons une molécule O comme origine et supposons qu'il y ait une deuxième molécule en un point M tel que $OM = \mathbf{r}$. Calculons le déphasage $\Delta\varphi$ entre les ondes diffusées par O et M à partir de la différence des chemins optiques AOA' et BMB' (AB et $A'B'$ sont respectivement perpendiculaires aux vecteurs d'onde incident et diffusé). En projetant **OM** sur **OA** et **OA'**, on trouve $\Delta\varphi = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d)\mathbf{r} = -\mathbf{q}\mathbf{r}$.

L'amplitude des deux ondes résultantes vaut donc :

$$A_{O+M} = g(\mathbf{q})(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}) = g(\mathbf{q})(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\mathbf{r}}). \tag{1.86}$$

Pour avoir une valeur significative, il faut moyenner cette expression sur l'ensemble des vecteurs $\mathbf{r}$ correspondant à la position de la deuxième molécule en pondérant par la probabilité $\rho(r)$. On a alors une amplitude $A(\mathbf{q})$:

$$A(\mathbf{q}) = Cg(\mathbf{q})\left(1 + \iiint_{(V)} \rho(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\mathbf{r}}\mathrm{d}^3\mathbf{r}\right). \tag{1.87}$$

L'amplitude totale diffusée dans la direction $\mathbf{k}_i + \mathbf{q}$ fait donc intervenir deux facteurs :

– l'un $g(\mathbf{q})$, qui est lié à la structure des molécules individuelles ;

- l'autre $S(\mathbf{q}) = (1 + \iiint_{(V)} \rho(r) e^{i\mathbf{qr}} d^3\mathbf{r})$, appelé *facteur de structure*, est déterminé par la distribution des positions relatives des molécules. Remarquons qu'il utilise la transformée de Fourier de $\rho(r)$ pour passer dans l'espace des vecteurs d'onde $\mathbf{q}$. La transformée inverse permettra de remonter de la mesure de $S(\mathbf{q})$ à celle de $\rho(r)$, ce qui fait tout l'intérêt de la méthode. Comme c'est le produit $\mathbf{qr}$ qui intervient dans l'intégrale, les informations sur la structure à grande distance seront obtenues avec des vecteurs $\mathbf{q}$ petits (on parle de diffusion aux petits angles) ; pour une valeur de $\mathbf{k}_i$ donnée, cela signifie que la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}_d$, où se fait la mesure, devra faire un angle faible avec l'onde incidente. Lorsque la fonction $\rho(r)$ est périodique, comme c'est le cas pour un solide cristallin, $S(\mathbf{q})$ sera lui aussi périodique en $\mathbf{q}$: on observera des pics d'intensité diffractée aux angles auxquels les conditions de Bragg sont remplies pour la réflexion sur les plans cristallins.

Ce passage de l'espace réel à l'espace de Fourier des vecteurs d'onde et les propriétés qui en découlent sont une caractéristique commune à toutes les techniques de diffraction que nous rencontrerons aussi dans l'étude de la diffusion de la lumière.

La diffusion élastique de rayons X apparaît ainsi comme un moyen privilégié d'analyse des corrélations entre les positions des molécules dans un liquide (quand celles-ci sont toutes identiques et de symétrie sphérique). La longueur d'onde des rayons X utilisés est bien adaptée à l'analyse des phénomènes à l'échelle de quelques distances atomiques ou moins.

La diffusion inélastique

Dans de nombreux cas, il y a transfert d'énergie lors de la diffusion et la longueur d'onde diffusée est différente de la longueur d'onde incidente : $|\mathbf{k}_i| \neq |\mathbf{k}_d|$. L'importance de cette différence dépend de la nature et de l'énergie des rayonnements utilisés. L'énergie d'un photon X de longueur d'onde de 1 Å est de l'ordre de 10^3 eV ; elle est très grande devant celle d'un neutron thermique de même longueur d'onde ($kT \approx 1/40$ eV à 300 K). Pour les rayons X, les variations relatives d'énergie dues à la création d'excitations dans le fluide seront relativement faibles ; c'est ce qui nous a permis de les négliger. Pour les neutrons, la *diffusion inélastique* sera beaucoup plus importante. On peut se représenter facilement les expériences de diffusion inélastique en termes corpusculaires à l'aide du tableau qui suit : il décrit le choc du photon incident i avec une particule A, conduisant au photon diffusé d (la particule A est éventuellement fictive et représente l'effet complexe de l'interaction de l'onde avec le fluide).

	Photon i	Particule A	Photon d
Énergie	$\hbar\,\omega_i$	$\hbar\,\Omega$	$\hbar\,\omega_d$
Impulsion	$\hbar\,\mathbf{k}_i$	$\hbar\,\mathbf{q}$	$\hbar\,\mathbf{k}_d$

Entre ces différentes variables, on a les relations suivantes qui traduisent la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$$\omega_d = \omega_i \pm \Omega \tag{1.88}$$

$$\mathbf{q} = \pm \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i. \tag{1.89}$$

La diffusion inélastique est un outil précieux d'analyse des modes d'excitation interne d'un fluide. La lumière permet, elle aussi, d'observer des phénomènes de diffusion élastique et inélastique que nous analyserons dans le paragraphe suivant. La longueur d'onde est dans ce cas beaucoup plus élevée que dans le cas des rayons X, et l'échelle caractéristique de taille des phénomènes étudiés beaucoup plus grande.

La figure 1.30 montre les domaines de transfert d'énergie et de vecteur d'onde pour les différentes sondes classiques d'analyse des liquides.

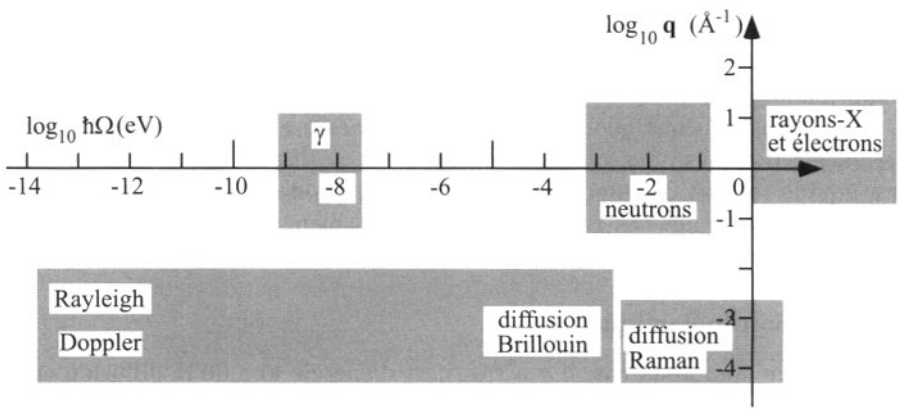


FIG. 1.30 – *Domaines de transfert d'énergie et de vecteur d'onde pour les diverses sondes d'analyse spectroscopique des liquides.*

1.5.3 La diffusion élastique et quasi élastique de la lumière : un outil d'étude de la structure et du transport diffusif dans les liquides

Un exemple simple de diffusion élastique de la lumière : la diffusion Rayleigh par une émulsion diluée

Regardons un long tube contenant une solution diluée de particules de petite taille (telle que de l'eau dans laquelle a été ajouté un tout petit peu de lait) (Fig. 1.31).

Si on éclaire le tube par l'une de ces extrémités, on verra une lumière rougeâtre en regardant par l'autre extrémité ; en revanche, à angle droit

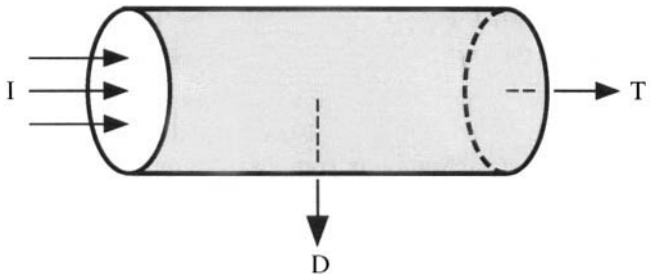


FIG. 1.31 – *Schéma d'une expérience illustrant la diffusion Rayleigh d'un faisceau incident (I) de lumière blanche par une petite quantité de lait dans de l'eau. La lumière diffusée (D) à angle droit est bleutée alors que celle (T) qui est transmise est rougeâtre.*

du faisceau, on observe une lumière diffusée qui est bleutée. Ce résultat est analogue aux couleurs du ciel, qui apparaît rouge au couchant lorsqu'on regarde dans la direction des rayons du soleil (lumière transmise après absorption), et bleu dans la direction perpendiculaire (lumière diffusée par les molécules de l'air). Dans l'expérience de la figure 1.31, la diffusion résulte des fluctuations de densité, donc d'indice, dues à la présence des gouttelettes de lait. Le principe du calcul de l'intensité diffusée est analogue à celui effectué à la section 1.5.2 pour la diffusion élastique des rayons X. Si la solution est diluée, ce sont simplement les intensités diffusées par les gouttelettes qui s'ajoutent, car $\rho(r)$ est pratiquement constant : la variation de l'intensité diffusée avec le vecteur d'onde correspond donc à celle de $g(\mathbf{q})$.

Notons que le changement de couleur observé résulte d'une absorption et d'une diffusion différentes pour les différentes composantes du spectre de la lumière blanche. Une lumière monochromatique d'une longueur d'onde donnée garde la même longueur d'onde : ce phénomène, appelé *diffusion Rayleigh*, apparaît à ce niveau comme élastique.

Dans l'exemple précédent, la diffusion Rayleigh est induite par les fluctuations de concentration dues à la présence de l'émulsion diluée de lait ; dans un liquide pur, son amplitude est beaucoup plus faible, et est associée aux variations d'indice dues à des variations de température locale. Ces variations diffusent, comme nous l'avons vu à la section 1.2 de ce chapitre, et ne se propagent pas comme des ondes.

Nous allons maintenant analyser une expérience modèle : la *diffusion Rayleigh forcée*, où des variations de température de grande amplitude sont induites artificiellement. Cette expérience nous permettra de mettre en évidence les informations qu'on peut attendre de la mesure.

La diffusion Rayleigh forcée : un modèle de diffusion due à des fluctuations de température ou de concentration

Dans un liquide au repos, on forme une figure de franges d'interférence par une impulsion laser puissante, mais de très courte durée ; le faisceau monochromatique est séparé en deux composantes qui viennent converger en un même point à l'intérieur du liquide à étudier (Fig. 1.32). La période

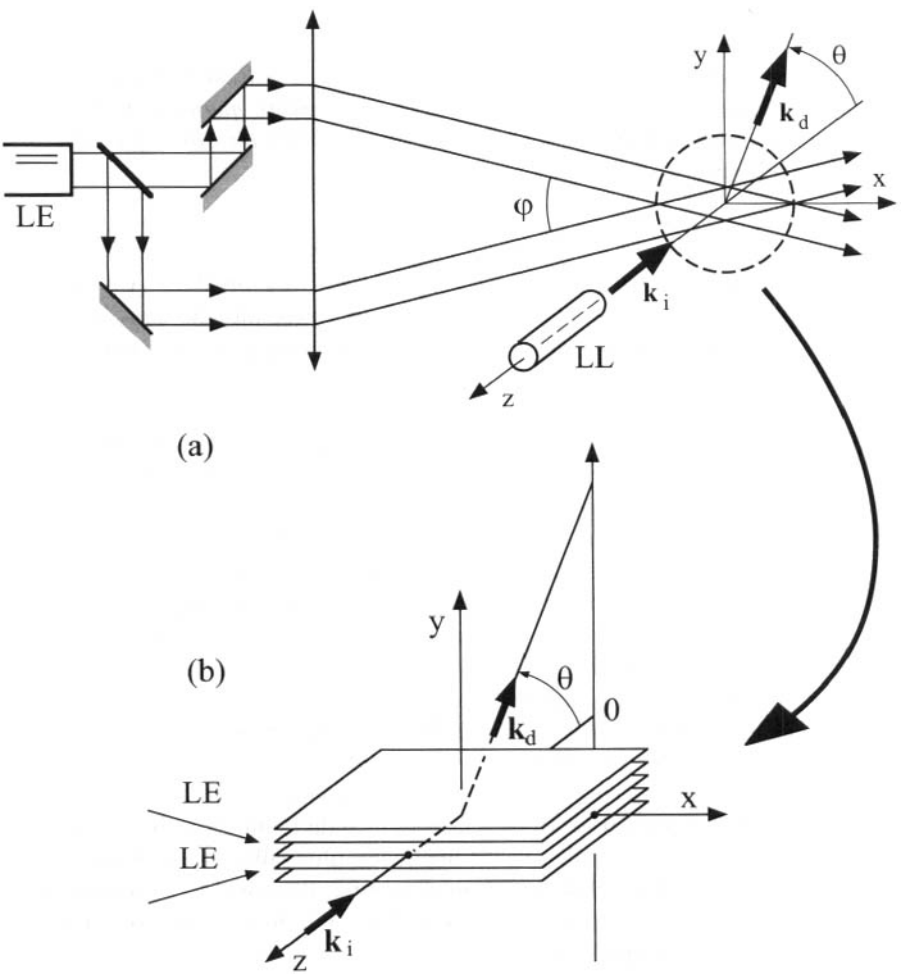


FIG. 1.32 – *Schéma de l'expérience de diffusion Rayleigh forcée ; (a) vue d'ensemble ; (b) détail de la grille d'interférences formée dans le liquide par une impulsion très courte d'un laser pulsé LE. La grille d'interférence est « lue » en formant la figure de diffraction de la grille par un laser continu LL de faible puissance.*

spatiale Λ du réseau de franges d'interférence (l'interfrange) est liée à l'angle φ entre les deux faisceaux par :

$$\Lambda = \frac{\lambda}{(2\sin\frac{\varphi}{2})} = \frac{\lambda_0}{(2n\sin\frac{\varphi}{2})} \tag{1.90}$$

(λ désigne la longueur d'onde dans le milieu d'indice de réfraction n, et λ_0 sa valeur dans le vide).

Nous allons établir maintenant la relation entre les variations de température et la période spatiale Λ du réseau de franges.

Compte tenu de la forte puissance du laser LE qui forme le réseau de température (faisceau *d'écriture*), une modulation spatiale $\Delta T(z)$ de la température est associée à cette figure d'interférence avec :

$$\Delta T(y) = \Delta T_0 \cos\frac{2\pi y}{\Lambda}.$$

L'amplitude $\Delta T_0(t)$ de cette variation de température s'atténue avec le temps en raison de la diffusion thermique ; la longueur d'onde Λ de la modulation reste néanmoins pratiquement constante avec le temps. La modulation $\Delta T(y,t)$ vérifie l'équation de diffusion de la chaleur (1.17) ; en reportant une solution du type :

$$\Delta T(y,t) = \Delta T_0(t)\cos\frac{2\pi y}{\Lambda}.$$

Dans cette équation, on trouve :

$$\frac{\partial \Delta T_0(t)}{\partial t} = -\frac{4\pi^2\kappa}{\Lambda^2}\Delta T_0(t)$$

d'où :

$$\Delta T_0(t) = \Delta T_0\, \mathrm{e}^{-\kappa(2\pi/\Lambda)^2 t}. \tag{1.91}$$

Pour mesurer l'amplitude de ces variations de température, on éclaire le système de franges dans la direction Oz, perpendiculaire au plan des rayons qui interfèrent, avec le faisceau d'un second laser LL continu de faible puissance et de longueur d'onde λ. Ce faisceau de *lecture* est diffracté par les modulations d'indice dues aux variations de température. Comme le réseau est périodique, on observe des maximum de diffraction pour certains vecteurs d'onde. Le phénomène est l'équivalent, pour la lumière, de la diffusion élastique de rayons X avec transfert de quantité de mouvement décrit par la figure 1.29. Le vecteur d'onde de transfert $\mathbf{q} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i$ correspondant au maximum le plus intense a un module $q = 2\pi/\Lambda$. En effet, le vecteur d'onde incident $\mathbf{k}_i$ et le vecteur d'onde diffusé $\mathbf{k}_d$ font entre eux un angle θ tel que :

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{q}{2k} \approx \frac{\lambda}{2\Lambda} \tag{1.92}$$

où $\mathbf{k}$ est le module des vecteurs $\mathbf{k}_d$ et $\mathbf{k}_i$, ce qui caractérise une diffusion élastique. À la section 1.5.2, nous avons vu que l'amplitude diffractée

est proportionnelle à l'amplitude des variations de densité. L'intensité diffractée $I_d(t)$ varie comme le carré de l'amplitude $\Delta T_0(t)$ des modulations de température. D'après l'équation (1.91), elle décroît donc avec le temps comme :

$$I_d(t) \propto \mathrm{e}^{-\kappa q^2 t} = \mathrm{e}^{-2(t/\tau_Q)}. \tag{1.93}$$

Cette décroissance permet donc de mesurer κ, puisque q est connu ($q = 2\pi/\Lambda$). Remarquons que, d'après la section 1.2.1, τ_Q est de l'ordre du temps de diffusion de la chaleur sur une distance égale à la longueur d'onde Λ du réseau.

Dans la même expérience, on peut avoir superposition des relaxations de variations d'indice (réseau de phase associé aux variations de température) et de variations de concentration de composés chimiques (réseau d'amplitude associé aux variations d'absorption). La figure 1.33 montre le résultat d'une telle expérience utilisant une solution liquide contenant des *molécules photochromes* susceptibles de changer réversiblement d'état chimique sous l'effet de la lumière. À la décroissance exponentielle de courte constante de temps due à la diffusion thermique, se superpose une exponentielle de constante de temps beaucoup plus longue qui subsiste seule aux temps élevés. Elle est due à la relaxation de la modulation de composition chimique créée dans le même temps que la modulation de température. Le rapport des constantes de temps pour le même réseau est $(D/\kappa)^{-1}$. Il est très supérieur

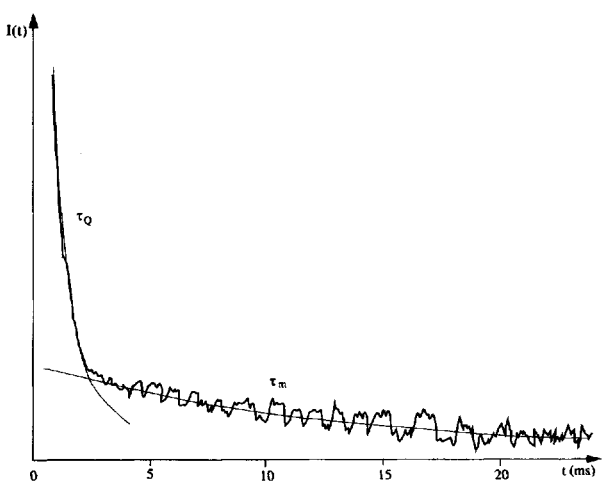


FIG. 1.33 – *Variation temporelle de l'intensité diffusée dans l'expérience de diffusion Rayleigh forcée dans un liquide contenant des molécules photochromes. On distingue deux zones de variation exponentielle : l'une correspond à la diffusion thermique et l'autre, plus lente, représente la diffusion massique (document Marc Fermigier).*

à l'unité pour un liquide, car la diffusion massique est peu efficace, comparée à celle de la chaleur.

En principe, la diffusion Rayleigh se fait sans changement de longueur d'onde de la lumière : il n'y a pas d'effet Doppler puisque le réseau de franges est immobile par rapport au fluide et au laboratoire. Écrivons cependant l'amplitude *instantanée* de l'onde électromagnétique du faisceau optique diffusé ; en utilisant l'équation (1.91), on a une variation du type :

$$E(t) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{e}^{-\kappa q^2 t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{e}^{-(t/\tau_Q)} \tag{1.94}$$

où ω est la pulsation de l'onde lumineuse et a une valeur très élevée (plus de 10^{15} s^{-1}) ; on aurait bien entendu une relation similaire en présence d'une diffusion de concentration. À cause de la durée de vie finie du réseau induit (temps τ_Q ou τ_m), la fréquence de l'onde diffusée (1.94) ne peut être définie au mieux qu'avec une précision $\Delta\omega$, qui est donnée par l'application du principe d'incertitude :

$$\Delta\omega\,\Delta t \approx 1 \tag{1.95}$$

d'où :

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau_\kappa}\cdot \tag{1.96}$$

Le terme $\Delta\omega$ définit la largeur de raie de la lumière diffusée, c'est-à-dire l'incertitude $(\Delta\lambda/\lambda) = (\Delta\omega/\omega)$ sur la longueur d'onde diffusée. En prenant la transformée de Fourier de l'amplitude (1.94), puis le carré du module de celle-ci, on vérifie que la largeur du spectre de puissance ainsi obtenu est bien $\Delta\omega$. Si l'on se reporte à l'analogie corpusculaire développée à la section 1.5.2, on voit que l'énergie n'est *qu'à peu près* conservée : la diffusion Rayleigh forcée est seulement *quasi élastique*. L'analyse de ce spectre de diffusion, pour une excitation monochromatique, permet de déterminer les coefficients des différents processus diffusifs présents dans le liquide.

La diffusion Rayleigh spontanée de la lumière

La diffusion Rayleigh spontanée correspond à la diffusion de la lumière par des fluctuations de température ou de concentration dues à l'agitation thermique, présentes naturellement au sein d'un liquide. La technique de diffusion Rayleigh forcée que nous avons étudiée plus haut représente un excellent modèle de la diffusion par de telles fluctuations spontanées. Ces dernières peuvent être décomposées en perturbations élémentaires, comme celles que nous avons discutées ; leur vecteur d'onde peut prendre tous les modules et toutes les directions possibles. L'amplitude diffusée est une combinaison des amplitudes diffusées correspondantes. L'intensité lumineuse détectée est en général très faible : pour un laser d'une puissance de 0,1 watt, elle varie de quelques photons à 10^7 photons par seconde.

Remarque En sélectionnant une direction d'observation de l'onde diffusée, on choisit en même temps la direction et la longueur d'onde de la grille fictive qui diffuse

l'onde. On réalise ainsi un filtrage des fluctuations spontanées, sur l'ensemble des longueurs d'onde en ne retenant que les composantes qui donnent un maximum de lumière dans la direction choisie.

L'élargissement $\Delta\omega$ du spectre autour de la fréquence ω_0 de l'onde incidente permet de déterminer le coefficient des processus diffusifs présents dans le fluide, comme nous l'avons vu dans le cas de la diffusion Rayleigh forcée (Éq. (1.96)). Cet élargissement est très variable : il peut descendre jusqu'à une fraction de hertz si on observe la diffusion (très lente) par des grosses particules, mais il peut aller jusqu'à quelques dizaines de mégahertz pour des processus rapides.

Les spectres les plus larges peuvent être mesurés par des méthodes spectroscopiques classiques (interféromètre de Michelson, Pérot–Fabry). Quand une meilleure résolution est nécessaire, on mélange au faisceau diffusé de fréquence ω_d une partie de l'intensité incidente de fréquence ω_0 ; on obtient alors un phénomène de battements de photons pour lequel l'intensité totale s'écrit :

$$I(t) = E_0^2 + E_1^2 + 2E_0\, E_1 \cos(\omega_0 - \omega_d)t \tag{1.97}$$

On observe donc une modulation de l'intensité $I(t)$ à une fréquence $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_d$ ($\ll \omega_0$) et d'amplitude proportionnelle au champ E_1. Cette technique (dite *d'hétérodynage*) permet de ramener le signal à analyser dans une gamme de fréquences suffisamment basses pour pouvoir être étudié à l'aide d'analyseurs de spectres ou de corrélateurs.

1.5.4 Diffusion inélastique de la lumière dans les liquides

En analysant un spectre d'intensité de diffusion de la lumière dans un liquide avec une résolution suffisante, on observe de part et d'autre de la raie centrale Rayleigh, non décalée en fréquence, des pics satellites. Ces pics de *diffusion Brillouin*, visibles sur la figure 1.34, correspondent à la diffusion de

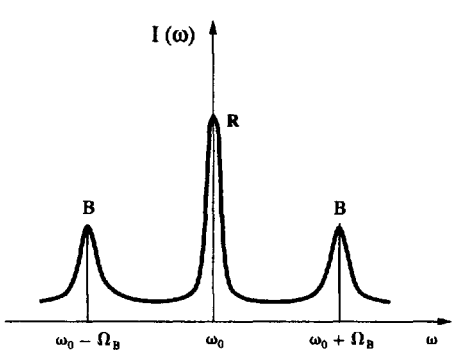


FIG. 1.34 – *Vue agrandie d'un spectre de diffusion de la lumière avec deux raies de diffusion Brillouin (B) qui encadrent symétriquement la raie centrale de diffusion Rayleigh (R). L'élargissement des raies donne une mesure des constantes de temps de relaxation des fluctuations de masse et de concentration. L'ordre de grandeur du décalage entre les raies Rayleigh et Brillouin est de quelques gigahertz.*

la lumière par les fluctuations spontanées de pression qui se propagent dans le fluide comme une onde acoustique. Pour éclairer la physique du processus, nous allons, comme pour la diffusion Rayleigh, décrire une expérience modèle où les fluctuations de densité sont imposées.

Un modèle de diffusion inélastique par effet Doppler : la diffusion Brillouin forcée

À l'intérieur d'un liquide, on crée une onde acoustique progressive de haute fréquence f_s à l'aide d'un transducteur à quartz (Fig. 1.35). Cette onde correspond à une modulation de pression de période spatiale Λ qui se propage dans le liquide. Un faisceau de lumière de longueur d'onde λ dans le vide et de pulsation ω_0 est dirigé vers les plans d'onde en formant avec eux un angle $\theta/2$. Le faisceau est diffracté par les plans d'onde acoustique avec un angle de diffraction opposé, et il y a des interférences entre les rayons réfléchis sur les différents plans. La variation de chemin optique d'un plan à un autre est égale à $2\Lambda \sin(\theta/2)$. On obtient donc des interférences constructives si la condition :

$$2\Lambda \sin\frac{\theta}{2} = p\frac{\lambda}{n} \tag{1.98}$$

est vérifiée ; p est entier et sera ensuite pris égal à 1, et n représente l'indice du milieu. Notons que cette relation est identique à la *condition de Bragg* pour la réflexion de rayons X sur des plans cristallins, qui peut être obtenue à partir de l'analyse réalisée à la section 1.5.3 (formule (1.92)). Dans le même temps, la pulsation ω_d de l'onde diffusée est modifiée par effet Doppler d'une quantité Ω_B telle que :

$$\frac{\Omega_B}{\omega_0} = \frac{\omega_d - \omega_0}{\omega_0} = 2\frac{v_s}{\frac{c}{n}}\sin\frac{\theta}{2} = 2n\frac{v_s}{c}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{v_s}{c}\frac{\lambda}{\Lambda}\cdot \tag{1.99}$$

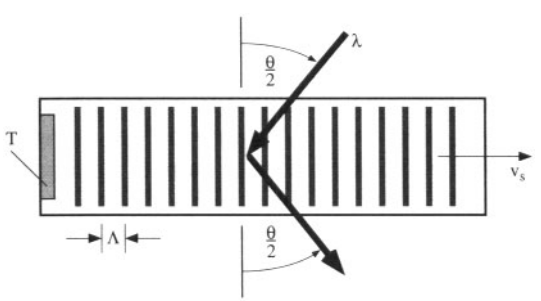


FIG. 1.35 – *Diffusion Brillouin forcée d'une onde lumineuse de longueur d'onde λ par une onde acoustique de longueur d'onde Λ produite dans un fluide par un transducteur acoustique (T).*

En remarquant que v_s/Λ représente la fréquence f_s de l'onde acoustique et que $c/\lambda = \omega_0/2\pi$, on voit que le décalage de pulsation Brillouin Ω_B de ω_0 est égal à la pulsation $\omega_s = 2\pi f_s$ de l'onde acoustique. La mesure de cette pulsation Ω_B à partir du spectre de la lumière diffusée (Fig. 1.34) et la détermination expérimentale de l'angle de diffusion θ, pour lequel on a le maximum d'intensité diffusée permettent de déterminer la vitesse v_s de l'onde acoustique dans le fluide par la relation : $v_s = (\Omega_B/2\pi)(\lambda/[2n\sin(\theta/2)])$. Le sens du décalage dépend du sens de propagation de l'onde progressive par rapport à la direction d'incidence. Si on utilise une onde stationnaire au lieu d'une onde progressive, on obtient deux raies décalées symétriquement.

Ordres de grandeur

On considère une onde acoustique de vitesse $v_s = 1500$ m/s et fréquence $f_s = 150$ MHz. La longueur d'onde de la lumière d'un laser helium-néon est de 6 328 Å dans le vide et l'indice n du liquide est 1,5. La longueur d'onde sonore vaut : $\Lambda = v_s/f_s = 10^{-5}$ m. En appliquant la formule (1.98), on trouve un angle de Bragg $\theta = 6{,}3\cdot 10^{-2}$ radians. La pulsation ω_0 de la lumière vérifie $\omega_0 = 2\pi c/\lambda = 3\cdot 10^{15}$ s^{-1}. En appliquant l'équation (1.99), on trouve $\Omega_B = 9{,}4 \cdot 10^8$ s^{-1}. Ce décalage de fréquence est suffisamment grand pour être facilement mesuré, même en utilisant de la lumière incohérente.

La diffusion Brillouin spontanée

Comme dans la cas de la diffusion Brillouin forcée, dans le spectre de diffusion de la lumière par un liquide, on observe des raies de diffusion Brillouin situées de chaque côté de la raie centrale de diffusion Rayleigh. Dans le cas présent, ces raies Brillouin sont dues aux fluctuations thermodynamiques de pression qui existent et se propagent *spontanément* dans le liquide (au lieu d'être imposées extérieurement comme dans le cas précédent).

Expérimentalement, on utilise un émetteur et un détecteur de lumière collimatés pour que l'angle θ entre le faisceau incident et le faisceau diffusé soit déterminé. Cela revient à sélectionner les composantes des fluctuations de pression qui vérifient la condition de Bragg (relation (1.98)) et telles que les angles d'incidence et de diffusion sur les plans d'onde soient les mêmes. La relation (1.99) donne alors immédiatement la vitesse v_s de propagation de ces fluctuations. D'après (1.98), fixer θ équivaut à fixer le vecteur d'onde $\mathbf{q}$ des fluctuations analysées ; en faisant varier θ, on peut donc mesurer la variation de v_s avec $\mathbf{q}$, c'est-à-dire l'effet de la dispersion de l'onde acoustique. Notons toutefois que cette mesure concerne des fréquences qui ne sont pas accessibles par des mesures classiques en acoustique des ultrasons.

Par extension, la diffusion Brillouin peut être appliquée directement à la caractérisation de la distribution de vitesses d'un ensemble d'objets en suspension dans un fluide ; on utilise alors la variation de fréquence lors de la diffusion sur les objets en mouvement. Elle a été appliquée en particulier à la réalisation d'un « spermovélocimètre laser » (un outil de diagnostic de la stérilité masculine à partir de l'étude de la mobilité des spermatozoïdes).

Une technique de mesure similaire est *l'anémométrie laser Doppler*, que nous discuterons en détail au chapitre 3 (section 3.5.2) ; cette technique consiste à utiliser des particules légères en suspension pour suivre le mouvement d'un fluide. En éclairant les particules par un faisceau laser et en mesurant le décalage en fréquence de la lumière diffusée, on obtient la vitesse des particules.

Remarque Dans le spectre de diffusion, on observe d'autres pics plus éloignés du pic de diffusion Rayleigh que les raies Brillouin ; ils sont dus à l'excitation de modes internes des molécules (rotation et vibration) et correspondent au phénomène de diffusion Raman que nous ne discutons pas ici.

En résumé, les techniques de diffusion Brillouin et Rayleigh apparaissent bien complémentaires pour l'étude des phénomènes de transport dans les liquides :

- la diffusion Rayleigh permet d'analyser les phénomènes de transport diffusif et de mesurer les coefficients de diffusion correspondants ;
- la diffusion Brillouin permet d'analyser les modes de transport convectifs et par ondes.

Coefficients de transport de fluides

TAB. 1.2 – *Coefficients de transport de chaleur, de masse et de quantité de mouvement de quelques fluides usuels. Pour les coefficients D de diffusion moléculaire, il s'agit d'ordres de grandeur du coefficient d'autodiffusion (c'est-à-dire du composé dans lui-même), destinés à montrer la forte différence de valeur entre le cas des gaz et celui des liquides.*

	Conductivité thermique k (kg.m)/(s^3.K)	Capacité calorifique Cv m^2/(s^2.K)	Masse volumique ρ (kg/m^3)	Diffusivité thermique $\kappa = k/\rho C_v$ (m^2/s)	Diffusivité moléculaire D (m^2/s)	Viscosité cinématique ν (m^2/s)	Nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$	Viscosité dynamique $\eta = \rho\nu$ (Pa.s)
Métaux liquides	$1 - 10^2$	$\approx 10^3$	$2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4$	$10^{-6} - 10^{-4}$	$10^{-9} - 10^{-8}$	$10^{-8} - 10^{-6}$	$10^{-3} - 10^{-1}$	$10^{-4} - 10^{-3}$
Liquides organiques	$\approx 0,15$	$10^3 - 3 \cdot 10^3$	10^3	$10^{-8} - 10^{-7}$	$10^{-10} - 10^{-7}$	$10^{-7} - 10^{-6}$	$1 - 10$	$10^{-4} - 10^{-3}$
Sels fondus	$10^{-7} - 10^{-6}$	$10^3 - 4 \cdot 10^3$	$\approx 2 \cdot 10^3$	10^{-7}	$\approx 10^{-10}$	10^{-6}	10	10^{-3}
Huiles silicones	$\simeq 0,1$	$\simeq 2.10^3$	$\approx 10^3$	$\simeq 10^{-7}$	$10^{-13} - 10^{-9}$	$10^{-5} - 10^{-1}$	$10 - 10^7$	$10^{-2} - 10^3$
Eau	0,6	4.10^3	10^3	10^{-7}	$10^{-10} - 10^{-8}$	10^{-6}	10	10^{-3}
Verre fondu(800 K)	10^{-2}	$\approx 10^3$	$\approx 3 \cdot 10^3$	10^{-6}	$\approx 10^{-12}$	10^{-2}	$10^3 - 10^4$	10
Air (gaz à $p = 1$ atm et T = 300 K)	$2,6 \cdot 10^{-2}$	10^3	1,29	$2,24 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5} - 10^{-4}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$	0,71	$1,85 \cdot 10^{-5}$

Chapitre 2

Diffusion de la quantité de mouvement et régimes d'écoulement

AU CHAPITRE *précédent, nous avons vu comment la chaleur, ou des traceurs miscibles, se transportaient par diffusion. Les flux de chaleur, ou de masse de traceur, sont alors proportionnels et dans la direction des gradients de la quantité transportée (température ou concentration de traceur) ; le sens des flux est tel qu'il tend à atténuer ces gradients. Une autre manière (souvent plus efficace) de transporter la chaleur ou les polluants est la convection par un écoulement : ainsi, dans une zone d'écoulement rapide, une tache de colorant se déplacera en moyenne à la vitesse du fluide (tout en s'étalant en plus sous l'effet de la diffusion moléculaire ou des gradients de vitesse).*

Au début de ce chapitre (section 2.1), nous allons montrer que, de même que la masse (concentration d'un traceur) ou la chaleur, la quantité de mouvement d'un fluide en écoulement peut être transportée à la fois par diffusion et par convection. Une différence importante par rapport aux deux autres exemples vient de ce que la quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, alors que la température et la concentration sont des scalaires. À la section 2.2, nous présenterons de façon simplifiée les modèles microscopiques de la viscosité, comme nous l'avions fait pour les autres coefficients de transport au chapitre 1. Nous comparerons ensuite (section 2.3) l'efficacité des mécanismes de convection et de diffusion, ce qui nous conduira à définir le nombre de Reynolds. Enfin (section 2.4), nous illustrerons les changements de régime d'écoulement obtenus lorsque le nombre de Reynolds croît sur l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre.

2.1 Transports diffusif et convectif de quantité de mouvement dans les écoulements

2.1.1 Diffusion et convection de la quantité de mouvement : deux expériences illustratives

Le transport de quantité de mouvement par convection est simple à comprendre sur l'exemple d'un liquide en écoulement parallèle avec un vecteur vitesse **U** constant. Chaque élément de fluide transporte (convecte) avec lui sa quantité de mouvement pendant son déplacement à sa vitesse propre, qui est la vitesse locale **U** de l'écoulement. Le flux de la quantité de mouvement par unité de temps et de surface d'un tube est égal dans ce cas au produit de **U** par la quantité transportée $\rho\mathbf{U}$. Ce terme ρU^2 a la dimension d'une pression qui, à un facteur 1/2 près, est la pression dynamique du fluide ; nous verrons apparaître naturellement ce terme lorsque nous nous intéresserons au bilan de quantité de mouvement d'un fluide (section 5.2.2 du chapitre 5).

Nous allons voir que le transport de quantité de mouvement par diffusion est également un mécanisme efficace, mais il est souvent masqué par le transport par convection. Comme celui-ci s'opère dans la direction de l'écoulement, on identifiera plus facilement la diffusion dans la direction perpendiculaire, telle que nous l'observons dans l'expérience décrite par la figure 2.1. Un long cylindre d'axe vertical et de rayon R est rempli d'un liquide dont le mouvement peut être visualisé grâce à des particules déposées sur sa surface. Le système est initialement au repos. À L'instant initial, on met en mouvement le cylindre avec une vitesse angulaire fixe Ω_0. Tout d'abord, seules les couches fluides immédiatement voisines du cylindre se mettent en mouvement avec la vitesse angulaire du cylindre (Fig. 2.1a). Cet écoulement de fluide est caractérisé par la vitesse angulaire $\Omega(r,t) = v(r,t)/r$, où la vitesse locale v de l'écoulement est ici dirigée selon la perpendiculaire au rayon r. L'écoulement se propage de proche en proche vers les couches internes et, aux temps longs, le fluide tourne avec une vitesse angulaire uniforme égale à celle du cylindre (Fig. 2.1b). Ce phénomène ressemble de façon saisissante au problème de diffusion de la chaleur que nous avons discuté au chapitre 1 (section 1.2.1) : on y considérait un cylindre plein formé d'un matériau de diffusivité thermique κ à une température uniforme T_0 ; à un instant initial, on portait la paroi extérieure de ce cylindre à une température $T_0 + \Delta T_0$. La perturbation de température se propageait par diffusion vers les couches internes, et l'épaisseur de la zone affectée croissait avec le temps comme $\sqrt{\kappa t}$; la même loi de propagation en $\sqrt{t}$ est observée dans l'expérience hydrodynamique. De plus, nous verrons que, dans cette expérience d'écoulement dans un cylindre tournant, nous pouvons également définir un coefficient de diffusion de la quantité de mouvement : cela permet de faire correspondre rigoureusement les profils de la vitesse angulaire $\Omega(r)$ à différents temps, aux profils de diffusion thermique $\delta T(r)$ de la figure 1.9.

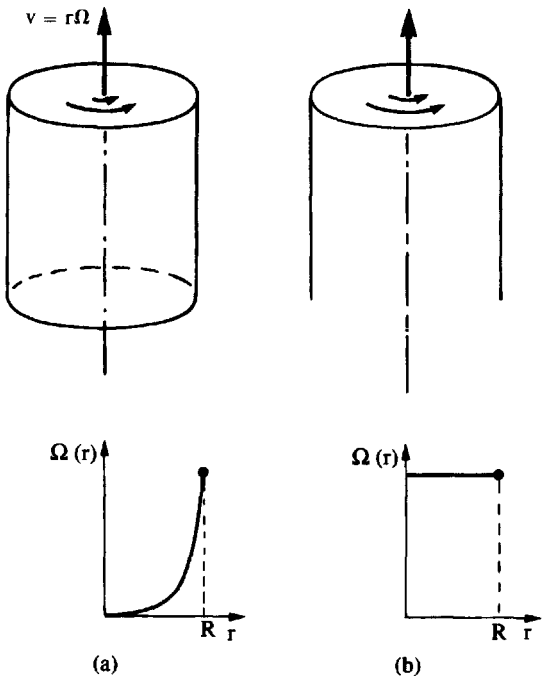


FIG. 2.1 – *(a) Phase de mise en mouvement d'un liquide visqueux contenu dans un cylindre mis en rotation à une vitesse angulaire constante ; (b) régime stationnaire de rotation. Les courbes inférieures montrent les variations correspondantes de la vitesse angulaire à la surface supérieure avec la distance à l'axe de rotation.*

On a transfert de proche en proche, par diffusion radiale, de l'information « quantité de mouvement » ; la convection due aux écoulements hydrodynamiques ne peut en effet contribuer à cette propagation puisque le fluide se déplace dans une direction « tangentielle », perpendiculaire au rayon. Un second point important de cette expérience est l'égalité de vitesse de la paroi solide et du fluide près d'elle. Cette caractéristique est observée pour tous les fluides visqueux usuels. Il existe une force de friction entre les couches fluides en contact avec le solide qui cause l'entraînement du fluide à partir de la paroi. Le transport diffusif de la quantité de mouvement est assuré par une propriété dépendant du fluide, *la viscosité*, que nous allons maintenant discuter d'un point de vue macroscopique.

Remarque La description que nous avons présentée est valable pour un cylindre infiniment long. En pratique, le fond du récipient joue un rôle essentiel dans la façon dont la vitesse évolue aux temps élevés, par suite de la création d'un *écoulement secondaire* dû à sa présence, comme nous le verrons au chapitre 7 (section 7.6).

2.1.2 Transport de quantité de mouvement dans un écoulement de cisaillement – introduction de la viscosité

Définition macroscopique de la viscosité

L'exemple que nous venons de présenter correspondait à un problème non stationnaire, dans lequel la vitesse en un point donné dépendait du temps. Analysons maintenant le cas de l'écoulement stationnaire d'un fluide situé entre deux plaques infinies, parallèles entre elles et distantes de a dans la direction perpendiculaire y (Fig. 2.2). Une plaque est maintenue fixe, l'autre

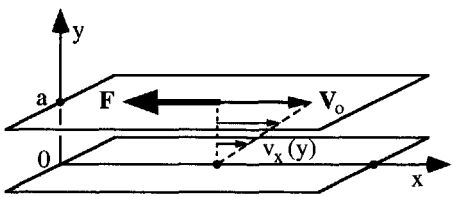


FIG. 2.2 – *Géométrie d'un écoulement de cisaillement simple.*

se déplace parallèlement à elle-même à une vitesse constante V_0 suivant une direction Ox. Le fluide est entraîné par le mouvement. En régime stationnaire (c'est-à-dire assez longtemps après que la plaque ait été mise en mouvement), on observe que la vitesse du fluide varie linéairement de 0 à V_0 d'une plaque à l'autre :

$$v_x(y) = V_0 \frac{y}{a} \cdot \tag{2.1}$$

L'écoulement ainsi réalisé est appelé *écoulement de cisaillement simple* ou *écoulement de Couette plan.* Ce type d'écoulement peut être comparé au cas de la conduction de la chaleur entre deux plaques parallèles, portées à des températures différentes (chapitre 1, section 1.2.1) : en régime stationnaire, la température variait linéairement entre les valeurs limites sur les plaques. Ici, le champ de vecteur $\mathbf{v}(y)$ remplace le champ de température $T(x)$. À la relation (1.6) entre le flux de chaleur et le gradient de température, correspond une relation de proportionnalité entre la force de friction $\mathbf{F}$ (pour une surface S de plaque), opposée au mouvement relatif des plaques, et la variation de vitesse d'un plan à un autre ($\mathbf{F}$ est opposée à la direction Ox) :

$$\frac{F_x}{S} = \frac{\eta V_0}{L} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \tag{2.2}$$

Le rapport F_x/S est appelé contrainte de cisaillement et a la dimension d'une pression (S est la surface de la paroi sur laquelle s'exerce la force). Le parallèle avec la formule (1.6) relative au transport de la chaleur est clair.

La correspondance entre le terme de contrainte F_x/S et celui de flux de chaleur se précisera dans l'étude du mécanisme au niveau moléculaire.

La constante de matériau η est appelée *viscosité dynamique* (car associée à une force), ou simplement viscosité. Son équation aux dimensions est ;

$$[\eta] = ([M][L][T]^{-2}/[L]^2)/([L][T]^{-1}/[L]) = [M][L]^{-1}[T]^{-1}$$

L'unité dans le système international est le Pascal.seconde (Pa.s) (1 Pa.s = 1 kg/(m.s)) (on rencontre parfois dans la littérature d'autres unités historiques comme le Poiseuille (symbole Pl) qui est l'ancienne dénomination de l'unité SI, et l'unité CGS qui est le Poise (symbole Po) et vaut 10^{-1} Pa.s. Dans le tableau 1.2 à la fin du chapitre 1, sont reportées les valeurs de la viscosité pour quelques fluides.

Équation de diffusion de la quantité de mouvement

Revenons au problème non stationnaire de départ évoqué à la section 2.1.1, et plaçons-nous dans la situation simple d'une géométrie plane (Fig. 2.3) : on suppose un écoulement dans une direction Ox, où la composante $v_x(y,t)$ de la vitesse est seulement fonction de la coordonnée y dans une direction perpendiculaire. Nous recherchons la forme de l'équation aux dérivées partielles, qui relie les variations du champ de vitesse $v_x(y,t)$ avec la position y et le temps t.

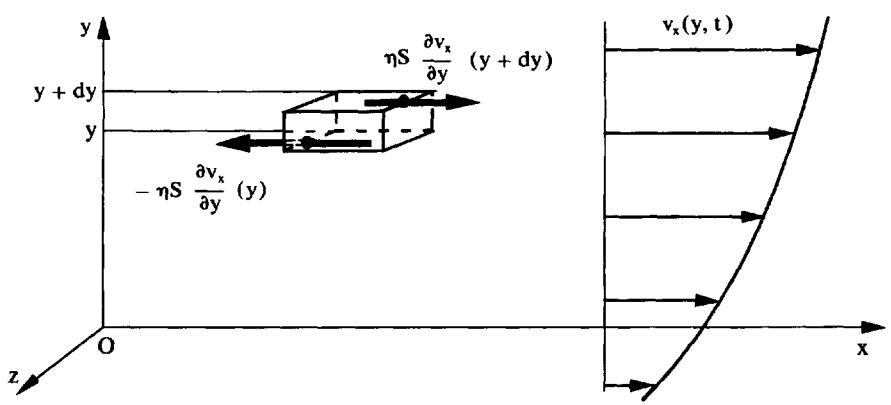


FIG. 2.3 – *Équilibre des forces de cisaillement sur un élément de volume situé entre deux plans animés d'un mouvement de cisaillement.*

Écrivons le bilan des forces exercées sur un élément de volume limité par deux surfaces en regard, planes et parallèles, de section S et de cotes y et y+dy. La paroi à la cote y est soumise à une force de cisaillement $-\eta S[\partial v_x/\partial y](y)$ exercée par le fluide situé au-dessous, et dirigée vers les x négatifs dans le cas de la figure 2.3. De même, la paroi à la cote $y + \mathrm{d}y$ est soumise à une force

$+\eta S[\partial v_x/\partial y](y+\mathrm{d}y)$ exercée par le fluide situé au-dessus et dirigée vers les x positifs. Il existe donc une force résultante sur le volume $S\mathrm{d}y$:

$$-\eta S\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)(y)+\eta S\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)(y+\mathrm{d}y)=\eta S\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}y\cdot$$

Cette force communique au volume une accélération donnée par la loi de Newton :

$$\rho S\mathrm{d}y\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)=\eta S\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}y$$

où ρ est la la masse volumique du fluide. Cette équation peut donc être mise sous la forme :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\cdot \tag{2.3}$$

Elle représente l'équivalent pour la vitesse (ou la quantité de mouvement si on multiplie par ρ ses deux membres) des équations de diffusion de la chaleur (1.15b) et de la masse (1.26). La température et la concentration de traceur sont remplacées par les composantes de la vitesse (ici v_x), ou de la quantité de mouvement par unité de volume (ρv_x). L'équation fait intervenir le coefficient ν dépendant des propriétés du matériau et appelé *viscosité cinématique* ; il vérifie :

$$\nu=\frac{\eta}{\rho}\cdot \tag{2.4}$$

Ce coefficient a pour dimension $[L]^2[T]^{-1}$; il représente un coefficient de diffusion pour la quantité de mouvement, analogue aux coefficients de diffusion thermique κ et de masse D introduits au chapitre précédent. La différence principale vient de ce que la quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, alors que la concentration et la température sont des scalaires. Cette correspondance permet de mieux comprendre l'analogie, développée au début de ce chapitre, entre la diffusion de la chaleur et la pénétration d'une perturbation de vitesse à l'intérieur d'un cylindre (deuxième exemple de la section 2.1.1).

L'équation (2.3) peut être généralisée au cas de géométries à deux et trois dimensions tant que n'interviennent pas des termes convectifs (notion que nous aborderons au chapitre 3, section 3.1.3) ; pour cela, il suffit de remplacer la dérivée par rapport à la coordonnée spatiale par un Laplacien. Par ailleurs, à cause du caractère vectoriel de la vitesse, l'expression générale de cette équation pourra être plus compliquée lorsqu'interviennent plusieurs composantes du champ de vitesse. Chaque composante v_x, v_y ou v_z du vecteur vitesse vérifiera alors une relation du type de l'équation (2.3) ; on pourra condenser les trois équations sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\nu\Delta\mathbf{v} \tag{2.5}$$

(le Laplacien vectoriel $\Delta \mathbf{v}$ est un vecteur tel que sa composante suivant x par exemple est égale à Δv_x). Nous justifierons et nous étudierons cette forme tridimensionnelle au chapitre 4, où nous écrirons une forme complète de cette équation en incluant les termes de pression.

Exemple d'application : écoulement près d'un plan solide mis brusquement en mouvement parallèlement à lui-même

Le problème suivant représente l'application de l'équation (2.5) à une version plane de l'expérience de la mise en mouvement d'un fluide au voisinage de la paroi d'un cylindre, discutée à la section 2.1.1. On suppose qu'au temps $t = 0$, un plan solide infini d'équation $y = 0$, est mis brusquement en mouvement parallèlement à lui-même à une vitesse constante V_0 parallèle à la direction Ox (Fig. 2.4). On s'intéresse au mouvement du fluide avec un champ de vitesse $v_x(y,t)$, dans l'espace semi-infini situé au-dessus du plan $y = 0$. La figure 2.4a montre l'évolution temporelle du profil de vitesse. La solution de l'équation (2.3) pour ce problème est rigoureusement identique à celle du problème de la diffusion de la chaleur dans un demi-espace à partir d'un plan dont la température reste fixe (chapitre 1, section 1.2.1). Il suffit de remplacer κ par ν et la température réduite par $v_x(y,t)/V_0$. La viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ représente donc le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement. Par le changement de variable $u = y/\sqrt{\nu t}$, analogue à celui utilisé pour la diffusion thermique, on trouve pour l'équation (2.3) la solution correspondant à (1.18) :

$$v_x\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = V_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}}\int_0^y \mathrm{e}^{-\left(\frac{\xi^2}{4\nu t}\right)}\mathrm{d}\xi\right) = V_0\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{u}{2}\right)\right) \qquad (2.6)$$

où la fonction erf (u) est, comme nous l'avons déjà vu au chapitre 1, l'intégrale $(2/\sqrt{\pi})\int_0^u \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z$. Le rapport v_x/V_0 dépend donc uniquement de la variable u. Tous les profils se déduisent donc les uns des autres par dilatation de l'échelle des longueurs suivant Oy, d'un facteur proportionnel à $\sqrt{t}$: on dit qu'ils sont *autosimilaires*. La variation de v_x/V_0 en fonction de y et de t, donnée par l'équation (2.6), est identique à la variation de la température trouvée au chapitre 1 pour le problème de diffusion thermique équivalent (Éq. (1.18)). La figure 2.4b est l'analogue de la figure 1.8b et montre la variation du rapport v_x/V_0 en fonction de u : la zone où l'influence de la perturbation se fait sentir a une épaisseur de l'ordre de $\delta \approx 2\sqrt{\nu t}$ (longueur de diffusion) , mais la vitesse v_x n'est pas tout à fait nulle à des distances plus grandes.

La mise en mouvement d'un fluide par couplage visqueux est d'autant plus rapide que sa viscosité η est grande et que sa masse volumique ρ (et donc son inertie) est petite. Pour l'eau, par exemple, la longueur de diffusion d'une perturbation de vitesse est de l'ordre de 3 mm pour $t = 10$ s,

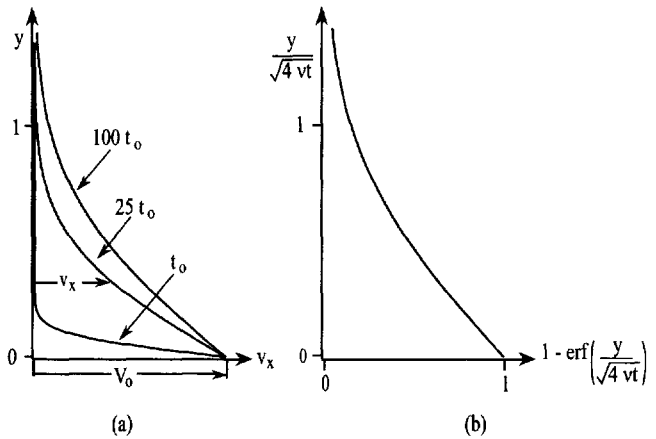


FIG. 2.4 – *(a) Évolution avec le temps du profil de vitesse $v_x(y,t)$ induit par la mise en mouvement brusque d'un plan solide parallèlement à lui-même (problème de Rayleigh). (b) Tracé en coordonnées réduites de la fonction* $1 - \mathrm{erf}\,(u/2)$ $(u = y/\sqrt{\nu t})$ *qui permet de construire la variation précédente. Ces deux figures correspondent aux figures 1.8a et b du chapitre 1 (après rotation des axes de 90°).*

et 10 cm pour $t = 10^4$ s, soit environ trois heures ; cela montre la faible efficacité de la diffusion aux temps longs, comme nous l'avons déjà souligné au chapitre 1 dans le cas de la diffusion thermique. La variation en $\sqrt{t}$ de la distance de diffusion (commune à tous les mécanismes de diffusion) rend le mécanisme de diffusion visqueuse peu efficace à grande distance. Aussi, des mécanismes convectifs souvent complexes prennent le relais dès que l'on a des écoulements dans des récipients de taille suffisamment grande ; de tels mécanismes ont, comme dans le cas des ondes, des distances de propagation croissant linéairement avec le temps. Le terme « suffisamment grande » est très imprécis : une analyse en termes de nombres sans dimension nous permettra, plus bas, une évaluation plus quantitative.

2.2 Modèles microscopiques de la viscosité

Comme pour le transport de la masse et de la chaleur, la connaissance des mécanismes microscopiques responsables de la viscosité nous permettra par la suite de mieux en cerner les effets. Ici encore, ces mécanismes sont très différents dans le cas des gaz (où notre analyse suivra alors de près celle utilisée pour les autres coefficients de transport), et dans celui des liquides.

2.2.1 Viscosité des gaz

Dans cette section, nous allons appliquer les raisonnements de théorie cinétique des gaz utilisés au chapitre 1 à l'analyse du transport de quantité de mouvement dans un écoulement de cisaillement : nous pouvons ainsi évaluer le coefficient de viscosité défini précédemment. Nous partons d'un écoulement de cisaillement d'un gaz en régime stationnaire avec la géométrie plane de la figure 2.5. Les lignes de courant sont parallèles à l'axe x et le gradient de vitesse est dirigé suivant la direction y perpendiculaire à l'écoulement.

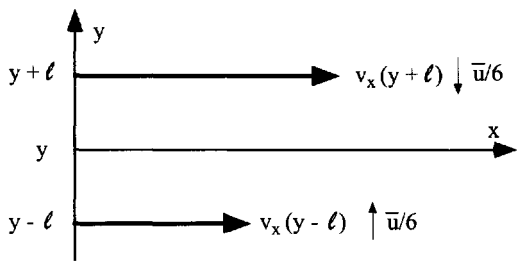


FIG. 2.5 – *Schéma de principe du calcul simplifié conduisant à la détermination de la viscosité d'un gaz.*

Nous évaluons cette fois le transfert, par les composantes perpendiculaires du mouvement d'agitation thermique, de l'impulsion moyenne $mv_x(y)$ parallèle à Ox (m représente la masse des molécules). Il apparaît deux échelles de vitesse très différentes : $\bar{u}$ est le module moyen de la vitesse d'agitation thermique des molécules individuelles ; cette vitesse est très supérieure à la vitesse de déplacement d'ensemble v_x, qui représente le léger excédent de mouvement d'agitation thermique dans la direction des coordonnées x positives. Cet excédent est dû au mouvement relatif des plaques.

Calculons le flux d'impulsion moyen traversant, par unité de temps, l'unité de surface du plan à la cote y en venant du « haut » (sur la figure). Ce flux est égal à :

$$\frac{1}{6} m\, v_x(y+\ell)\, n\bar{u}$$

où ℓ représente, comme au chapitre 1, le libre parcours moyen des molécules, n leur nombre par unité de volume ; le facteur géométrique $1/6$ vient de la prise en compte des différentes directions des vitesses des molécules, en supposant leur répartition isotrope.

Le flux d'impulsion correspondant aux molécules venant de « dessous » s'écrit de même :

$$\frac{1}{6} m\, v_x(y-\ell)\, n\bar{u}$$

(si la température est uniforme, $\bar{u}$ est indépendant de y). Ainsi, en présence d'un gradient de vitesse de cisaillement $\partial v_x/\partial y$ non nul, on a un bilan non nul des transferts à travers le plan de coordonnée y de la composante de l'impulsion suivant Ox. Le flux d'impulsion résultant par unité de surface et de temps (en comptant positivement les contributions venant de la zone inférieure au plan y) vaut donc :

$$-\frac{1}{6}mn\bar{u}[v_x(y+\ell)-v_x(y-\ell)]\cdot$$

L'existence de ce flux d'impulsion fini peut être interprétée comme une force de frottement F qui s'exerce entre les deux couches liquides situées de part et d'autre du plan y. Le sens de cette force parallèle à Ox correspond à l'entraînement des couches de plus faible vitesse par celles de vitesse plus grande. En appliquant la relation de conservation de l'impulsion $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ à la composante par unité de surface F_x/S, on trouve :

$$\frac{F_x}{S} = -\frac{1}{6}mn\bar{u}(v_x(y+\ell)-v_x(y-\ell)) = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{2.7a}$$

avec

$$\eta = \frac{1}{3}mn\bar{u}\ell. \tag{2.7b}$$

La relation force–gradient de vitesse ainsi obtenue est donc identique à la formule (2.2), et le coefficient de viscosité dynamique η est donné par la formule (2.7b). On obtient alors immédiatement le coefficient de viscosité cinématique ν à partir de la formule (2.4) :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{3}\bar{u}\ell. \tag{2.8}$$

ν prend, pour les gaz parfaits, la même valeur que les coefficients de diffusion de chaleur et de masse, κ et D, discutés au chapitre 1 (section 1.3.2). Ceci souligne encore plus fortement la correspondance avec ces deux autres mécanismes de transport diffusifs que l'analyse macroscopique nous avait déjà suggérée. Pour les gaz parfaits, la théorie cinétique donne, en combinant l'équation (2.7b) avec les résultats de la section 1.3.2 du chapitre 1 :

$$\eta \propto \frac{\sqrt{mT}}{\sigma_c}$$

où m est la masse des molécules, σ_c leur section efficace de collision et T la température du gaz.

Notons alors que, tout comme la conductivité thermique k, la viscosité η est indépendante de la densité du gaz (ou de la pression), puisque le produit $n\ell \approx 1/\sigma_c$ n'en dépend pas. Ce résultat ne s'applique pas aux gaz à très basse ou à très haute pression, ainsi que nous l'avons déjà signalé au chapitre 1 (section 1.3.2).

2.2.2 Viscosité des liquides

Au chapitre 1, nous avons étudié la diffusion de particules dans un liquide : nous avions alors supposé qu'elle était contrôlée par des forces de type « frottement visqueux », exercées par le fluide sur les particules.

Les forces de viscosité à l'intérieur d'un liquide peuvent être analysées par une extension de cette première étude, mais nous utiliserons ici un modèle différent. Nous considèrerons que les molécules du liquide sont toutes de même taille et se déplacent comme les grains d'une poudre. Les mouvements relatifs des grains associés à un écoulement de cisaillement s'opèrent par passage des grains individuels de la cage constituée par leurs plus proches voisins (supposés en contact avec eux) à une cage voisine et sont illustrés par le schéma de la figure 2.6.

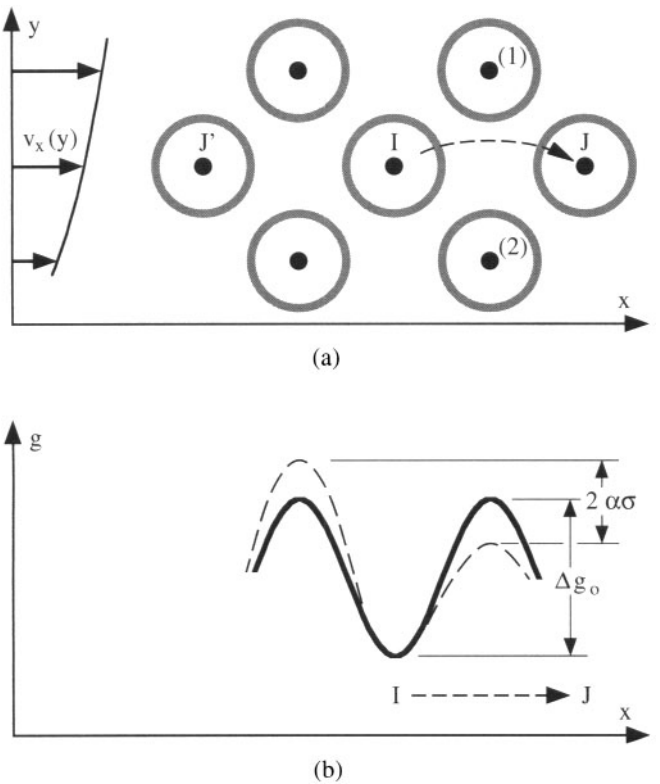


FIG. 2.6 – *Principe du calcul de la viscosité d'un liquide. La barrière d'énergie g que doit franchir la particule I pour tomber dans les puits voisins J et J' (a) est symétrique en l'absence d'écoulement (courbe grasse en (b)). Elle devient dissymétrique (courbe en tirets) lorsqu'une contrainte de cisaillement est appliquée ; cette dissymétrie favorise alors l'écoulement de cisaillement.*

Soit un écoulement de cisaillement simple de vitesse $v_x(y)$; la contrainte de cisaillement σ due au gradient de vitesse $\partial v_x/\partial y$ favorise le saut de la particule I vers la cage voisine J à sa droite (pour $\sigma > 0$) plutôt que vers la cage de gauche J'. Cet effet de cage peut être représenté par un diagramme $g(x)$ représentant la variation d'énergie potentielle de la particule, avec la distance x dans la direction de la vitesse. Dans un fluide au repos, I est dans un puits de potentiel dont la profondeur Δg_0 est l'énergie d'activation à fournir pour passer entre les particules voisines 1 et 2. Ce passage peut être effectué grâce à l'énergie k_BT d'activation thermique ; ainsi, la fréquence f des sauts d'un site I à la cage voisine J vérifie l'équation de Maxwell-Boltzmann (h est la constante de Planck) :

$$f \approx \frac{k_BT}{h}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Delta g_0}{k_BT}}. \tag{2.9}$$

La présence de la contrainte de cisaillement σ introduit une dissymétrie entre la hauteur des barrières d'énergie pour aller vers les sites J et J'. Les variations de hauteur des maxima sont proportionnelles à la contrainte σ c'est-à-dire à la force de frottement par unité de surface entre couches :

$$-\Delta g = -\Delta g_0 \pm \alpha\sigma. \tag{2.10}$$

On remarque que la variation est du premier ordre par rapport à σ ; la variation $\alpha\sigma$ est une mesure de l'énergie fournie par le cisaillement pour abaisser (ou élever) la barrière d'énergie dans la direction de l'écoulement (ou dans le sens opposé), et α est un coefficient qui a la dimension d'un volume. Il en résulte une différence entre les fréquences f_+ et f_- des sauts de I à J et de I à J' et, par suite, une mobilité globale des grains. En effet :

$$I \to J \quad f_+ \approx \frac{k_BT}{h}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Delta g_0-\alpha\sigma}{k_BT}} \qquad \text{et :} \qquad I \to J' \quad f_- \approx \frac{k_BT}{h}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Delta g_0+\alpha\sigma}{k_BT}}.$$

Prenons la couche inférieure comme référence de vitesse nulle ; la vitesse moyenne v_I des atomes I de la couche intermédiaire est de l'ordre du produit de la distance a parcourue par saut et de la fréquence globale $(f_+ - f_-)$ de ces sauts :

$$v_I = a(f_+ - f_-) \approx a\frac{k_BT}{h}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Delta g_0}{k_BT}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha\sigma}{k_BT}} - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\sigma}{k_BT}}\right).$$

Le gradient de vitesse à partir de la couche inférieure au repos vaut donc :

$$G = \frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{v_I}{a} \approx 2\frac{k_BT}{h}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Delta g_0}{k_BT}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha\sigma}{k_BT}\right). \tag{2.11}$$

Dans la limite d'une faible contrainte, $\mathrm{sh}(\alpha\sigma/k_BT) \simeq (\alpha\sigma/k_BT)$. L'expression précédente s'identifie à l'équation de définition de la viscosité η avec, d'après l'équation (2.2), ($\sigma = \eta G$) :

$$\eta \simeq \frac{h}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\frac{\Delta g_0}{k_BT}}. \tag{2.12}$$

Cette formule montre que la viscosité diminue lorsque la température croît, suivant une loi d'Arrhénius qui décrit le processus d'activation de saut à travers la barrière. Cette situation est opposée au cas des gaz, où la viscosité augmente avec la température comme $\sqrt{T}$.

Une forme empirique d'écriture de (2.12) permet d'estimer la viscosité d'un liquide à partir de la donnée de son volume molaire V et de la température d'ébullition T_e :

$$\eta = \frac{h}{\frac{V}{\mathcal{N}}} \, e^{3,8 \frac{T_e}{T}} . \tag{2.13}$$

Le remplacement de Δg par un terme d'énergie proportionnel à $k_B T_e$ est compréhensible. La vaporisation se produit en effet lorsque la température est assez élevée pour que deux particules voisines aient une probabilité appréciable de se séparer. Nous avons exprimé une condition du même type pour le passage par activation thermique de la particule I entre les particules (1) et (2). Par ailleurs, pour obtenir l'équation (2.13), nous avons pris le volume α égal au volume moyen $V/\mathcal{N}$ occupé par chaque molécule ($\mathcal{N}$ est le nombre d'Avogadro).

Application Évaluons la viscosité du benzène à la température ordinaire. $V = 89 \cdot 10^{-6}$ m^3/mole, $T_e = 353$ K, $\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s. L'application de la relation (2.13) conduit à une valeur $\eta = 4,5 \cdot 10^{-4}$ Pa.s, résultat comparable à la valeur expérimentale de $6,5 \cdot 10^{-4}$ Pa.s.

2.2.3 Simulation numérique des trajectoires de particules dans l'écoulement d'un liquide ou d'un gaz

On peut se représenter les mécanismes microscopiques de la viscosité à l'aide d'une technique de simulation numérique, dite de dynamique moléculaire, qui analyse les trajectoires de particules individuelles (pour des questions de temps de calcul, ces simulations sont généralement réalisées à deux dimensions et avec un nombre réduit de particules). Dans ces calculs, on tient compte des interactions locales entre particules qui se déplacent, de l'effet des parois qui sont elles-mêmes représentées par un ensemble de particules, et des forces imposées sur le fluide. La figure 2.7a montre la trajectoire d'une particule contenue entre deux plans parallèles solides fixes et soumise à un champ de force de type gravité, parallèle à l'axe horizontal. La densité de particules est assez élevée pour que ce modèle bidimensionnel simule un liquide, ce qui explique les nombreuses collisions. On remarque aussi la réduction de l'effet de l'accélération longitudinale par la gravité à proximité des parois solides. Les particules adjacentes à la paroi sont au repos, comme il est normal pour l'écoulement d'un fluide visqueux. La figure 2.7b montre le profil de vitesse à dix positions différentes entre les parois ; il a été obtenu en moyennant sur un grand nombre de particules et d'instants différents. Ce profil de vitesse parabolique constitue une caractéristique essentielle de l'écoulement des fluides visqueux et sera étudié en détail au chapitre 4.

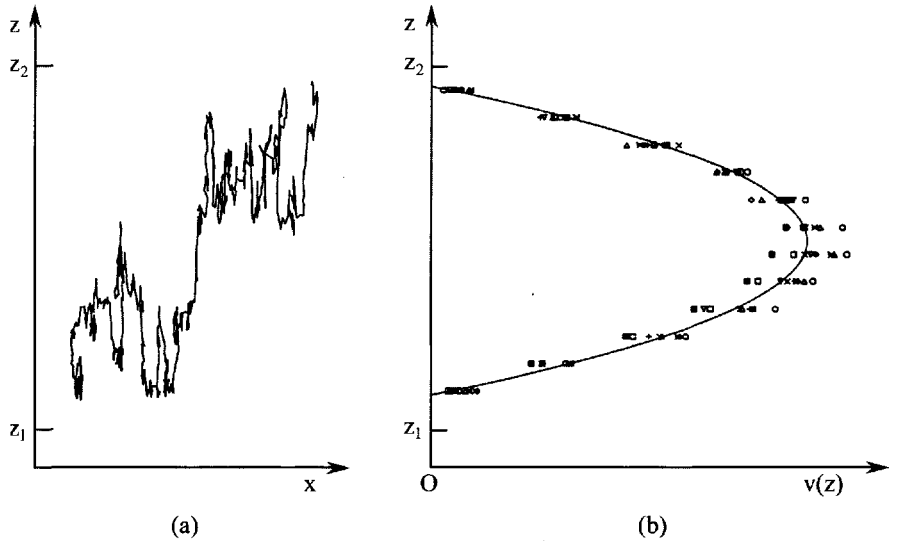


FIG. 2.7 – *(a) Trajectoire d'une particule individuelle dans un liquide à deux dimensions contenu entre deux droites fixes de cotes z_1 et z_2 et soumis à une force horizantale longitudinale (de type gravité). (b) Profil parabolique moyen de vitesse dans le liquide (écoulement de Poiseuille plan). Ces documents ont été obtenus par un calcul de dynamique moléculaire (documents J. Koplik).*

2.3 Comparaison entre les mécanismes de diffusion et de convection

2.3.1 Le nombre de Reynolds

Dans un écoulement quelconque de fluide, les deux mécanismes (convectif et diffusif) de transport de quantité de mouvement sont simultanément actifs mais, suivant la vitesse et la géométrie de l'écoulement, ils n'auront pas le même ordre de grandeur. Analysons par exemple le cas d'un écoulement fluide dans un canal de géométrie quelconque et évaluons des ordres de grandeur pour les processus de transport.

♦ Convection : le flux de quantité de mouvement associé à la convection est de l'ordre de ρU^2 où ρ est la densité du fluide et U une vitesse caractéristique de l'écoulement (par exemple la vitesse moyenne dans la section). La quantité de mouvement par unité de volume est en effet de l'ordre de ρU (même si des facteurs géométriques interviennent) et on obtient un ordre de grandeur du flux correspondant en la multipliant par U.

♦ Diffusion : dans le cas des écoulements parallèles analysés précédemment, le flux transverse de quantité de mouvement associé à la viscosité était

$\eta \partial v_x / \partial y$. Dans le cas général, il reste égal au produit de η par des combinaisons de dérivées premières des composantes de la vitesse et sera de l'ordre de $\eta U/L$. On peut alors former un rapport sans dimension :

$$\frac{\text{flux convectif de la quantité de mouvement}}{\text{flux diffusif de la quantité de mouvement}} \approx \frac{\rho U^2}{\dfrac{\eta U}{L}} = \frac{UL}{\nu} = Re. \qquad (2.14)$$

Ce rapport définit le *nombre de Reynolds* qui caractérise l'importance relative du transport de quantité de mouvement par convection et par diffusion visqueuse.

Il est également utile de considérer le nombre de Reynolds comme le rapport entre les temps caractéristiques de transport par diffusion et convection sur des distances de l'ordre de L. Comme ν représente la diffusivité de la quantité de mouvement, le temps caractéristique de diffusion sur une distance de l'ordre de L est, comme pour les autres processus diffusifs, de l'ordre de L^2/ν. Le temps caractéristique de convection est de l'ordre de L/U (temps de parcours de la distance L à la vitesse U de l'écoulement). D'où un rapport des deux temps caractéristiques :

$$\frac{\text{temps caractéristique de diffusion}}{\text{temps caractéristique de convection}} = \frac{UL}{\nu} = Re. \qquad (2.15)$$

C'est le mécanisme le plus rapide de propagation des perturbations qui sera dominant et imposera l'organisation du champ de vitesse.

♦ Dans un écoulement à *petit nombre de Reynolds*, les forces visqueuses et le transport diffusif associé sont dominants. Le profil d'écoulement résulte d'un équilibre entre les forces de frottement visqueux et les gradients de pression ou forces en volume imposées extérieurement. Conformément à l'expression de Re, ces écoulements seront observés aux basses vitesses, et/ou dans des systèmes de très petite taille (bactéries ou micro-organismes par exemple), ou encore pour des fluides très visqueux dans lesquels les forces de frottement entre couches sont importantes. Il s'agit en général d'écoulements très stables, aux profils bien définis, appelés *écoulements rampants*. Nous consacrerons le chapitre 8 à leur étude.

♦ Au contraire, dans les écoulements à *grand nombre de Reynolds*, le transport de quantité de mouvement par convection est dominant, et il apparaît sous forme de termes non linéaires contenant des produits de composantes de la vitesse et de leurs gradients : nous les étudierons au chapitre 3. Les écoulements correspondants sont beaucoup moins stables : ce sont par exemple les écoulements turbulents qui correspondent à une infinité de solutions possibles des équations de mouvement. Ils sont observés aux fortes vitesses, dans des fluides peu visqueux ou dans des systèmes de grande taille ; de tels écoulements apparaissent comme la superposition aléatoire de tourbillons de taille très variable. Notons cependant que, sur des échelles de distance de l'ordre de la dimension des plus petits tourbillons, le transport de quantité de mouvement par diffusion redevient important.

♦ Dans certains cas, même à des nombres de Reynolds élevés, les termes de transport par convection peuvent rester négligeables par suite de la géométrie du système ; la configuration de l'écoulement peut alors rester la même qu'à faible vitesse. L'exemple le plus simple est celui des *écoulements parallèles* (où seule une composante de la vitesse est non nulle), tels que l'écoulement dans un cylindre en rotation discuté à la section 2.1.1. Dans ce cas, on ne peut avoir transport de quantité de mouvement dans la direction perpendiculaire aux lignes de courant que par diffusion visqueuse ; les écoulements restent alors contrôlés par la viscosité, indépendamment du nombre de Reynolds, tant que le profil de vitesse reste parallèle. De tels écoulements, qualifiés de *laminaires*, seront étudiés dans le chapitre 4 (section 4.5). Néanmoins, si des composantes transverses locales de la vitesse sont créées accidentellement, le transport de quantité de mouvement par convection cesse d'être nul et de nouvelles solutions peuvent apparaître. L'écoulement devient alors généralement instable et turbulent. Nous étudierons les écoulements de ce type au chapitre 11.

À la section 2.4 du présent chapitre, nous décrirons, à partir de l'exemple de l'écoulement derrière un cylindre, une séquence de transitions entre différents régimes d'écoulement lorsque le nombre de Reynolds augmente progressivement.

2.3.2 Transports convectif et diffusif de masse ou de chaleur

Les mécanismes de transport convectif et diffusif peuvent agir simultanément dans les problèmes de propagation de la chaleur ou la dispersion de polluants, tout comme dans le cas de la quantité de mouvement que nous venons de traiter. L'analyse de l'effet convectif est d'ailleurs plus simple dans ces deux cas, car la vitesse n'intervient que pour le transport convectif et la quantité convectée (température, concentration) est un scalaire.

Transport de matière, nombre de Péclet

Analysons par exemple le transport d'un traceur A de concentration locale $\rho_A(x,t)$ par un écoulement de vitesse caractéristique U. Si on peut négliger les effets de différence de densité introduits par la présence du traceur, ce dernier est, d'une part, entraîné par la vitesse locale de l'écoulement et, d'autre part, il s'étale par diffusion moléculaire. Appelons L une échelle de longueur caractéristique des variations de la concentration du traceur ; le flux diffusif de traceur vérifie :

$$\mathbf{J}_m = -D\,\mathbf{grad}\rho_A \approx D\frac{\rho_A}{L}$$

où D est le coefficient de diffusion moléculaire du traceur (voir formule (1.25) du chapitre 1). Pour le flux convectif on a, en raisonnant comme pour la

quantité de mouvement au paragraphe précédent :

$$\mathbf{J}_{\text{conv.}} \approx \rho_A U.$$

Le rapport des flux associés aux deux mécanismes s'exprime par :

$$\frac{\mathbf{J}_{\text{conv.}}}{\mathbf{J}_m} = \frac{\rho_A U}{D\frac{\rho_A}{L}} = \frac{UL}{D} = Pe. \tag{2.16}$$

Le rapport Pe, appelé *nombre de Péclet*, représente, pour les phénomènes de dispersion de masse, l'équivalent du nombre de Reynolds pour la quantité de mouvement. On peut d'ailleurs, tout comme pour le nombre de Reynolds, définir le nombre Pe comme le rapport des temps caractéristiques de transport de matière par diffusion et convection sur une distance de l'ordre de L.

Transport de la chaleur, nombre de Prandtl

Pour la diffusion de la chaleur, les mêmes comparaisons peuvent être effectuées entre transport convectif et transport diffusif, ce qui conduit à définir comme qu'au paragraphe précédent, un nombre de Péclet thermique par :

$$Pe_\theta = \frac{UL}{\kappa}$$

où κ est la diffusivité thermique introduite au chapitre 1. Par ailleurs, pour évaluer l'efficacité relative du transport diffusif de chaleur et de quantité de mouvement, on est souvent conduits à comparer les effets de la diffusion de la chaleur et de la quantité de mouvement. On définit alors le *nombre de Prandtl* comme le rapport entre les coefficients de viscosité cinématique et de diffusivité thermique :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{Pe_\theta}{Re}\cdot \tag{2.17}$$

En d'autres termes, le nombre Pr représente le rapport des temps caractéristiques L^2/κ et L^2/ν de diffusion des fluctuations de température et de vitesse sur une même distance L. Des valeurs typiques de ce nombre sont données au tableau 1.2 de la fin du chapitre 1. De manière similaire, le *nombre de Lewis*, $Le = D/\kappa$, représente le rapport entre les temps de diffusion thermique et massique et intervient dans les phénomènes de combustion. Le tableau 2.1 à la fin de cette section résume les définitions des différents nombres sans dimension qui font intervenir les coefficients de diffusion.

Pour les gaz, les coefficients de diffusivité thermique κ, de diffusion massique D et de viscosité cinématique ν sont du même ordre, comme nous l'avons vu à la section 2.2.1 du présent chapitre. Le nombre de Prandtl et le nombre de Lewis sont donc de l'ordre de l'unité. Dans un problème de dynamique des gaz, où interviennent simultanément le transport de masse

et de quantité de mouvement, les nombres de Péclet et de Reynolds sont également du même ordre. En revanche, dans les liquides, le nombre de Prandtl peut prendre des valeurs très différentes suivant les mécanismes de conduction de la chaleur qui interviennent. Ainsi, pour les métaux liquides, c'est le transport de chaleur par les électrons de conduction qui domine ; il conduit à une forte diffusivité thermique et à une faible valeur du nombre de Prandtl. Au contraire, dans les liquides isolants électriques de forte viscosité (comme les huiles organiques), la diffusivité thermique varie peu d'une huile à l'autre, alors que la viscosité et, par suite, le nombre de Prandtl, peuvent prendre des valeurs très grandes.

On définit de même un *nombre de Prandtl massique* $Sc = \nu/D$, appelé *nombre de Schmidt*. Si on se reporte à l'évaluation du coefficient D pour les liquides réalisée au chapitre 1 (section 1.3.3), on voit que, lorsqu'on augmente la viscosité ν du milieu, on diminue D dans le même temps. Il est donc facile d'obtenir des grandes valeurs de Sc dans des liquides très visqueux (pour l'eau, pourtant peu visqueuse, le nombre de Schmidt Sc est de l'ordre de 10^3). Dans ces conditions, même à des nombres de Reynolds très petits, le transport convectif des traceurs sera plus efficace que le transport diffusif. Sauf à des vitesses très faibles, l'étalement d'une tache de traceur (un colorant par exemple) sous l'effet des gradients de vitesse dans l'écoulement sera beaucoup plus important que sous l'effet de la diffusion moléculaire.

Un exemple de cette différence est la dispersion des traceurs dans les milieux poreux qui seront étudiés au chapitre 8 (section 8.6). Dans ces milieux, les tailles des canaux d'écoulement sont très petites et le nombre de Reynolds Re est en général petit. En raison des fortes variations de la vitesse d'un point à un autre, associées à la géométrie aléatoire du milieu, l'étalement des traceurs, sous l'effet de ces gradients de vitesse, induira un coefficient de dispersion qui jouera le rôle d'une diffusivité pour le problème : ce coefficient est généralement bien supérieur au coefficient de diffusion moléculaire D. *A fortiori*, pour les écoulements turbulents dans lesquels la vitesse en un point donné varie au cours du temps, le transport convectif est toujours dominant, sauf sur les toutes petites distances, pour lesquelles le mélange par diffusion moléculaire s'effectue plus rapidement que le mélange par convection.

Quelques exemples de ces problèmes seront analysés au chapitre 8, qui traite des écoulements rampants, et au chapitre 9, qui concerne l'étude des couches limites.

2.4 Description de différents régimes d'écoulement

Au cours de ce chapitre nous avons montré que, suivant les vitesses et les géométries des écoulements, le transport de la quantité de mouvement d'un fluide peut être dominé par des phénomènes diffusifs ou convectifs ; l'ordre de grandeur relatif de ces termes de transport est le nombre de Reynolds

TAB. 2.1 – *Nombres sans dimension caractérisant l'importance relative des différents mécanismes de diffusion et de convection.*

nombre de Reynolds	$Re = \dfrac{UL}{\nu}$	$\dfrac{\text{temps de diffusion de la quantité de mouvement}}{\text{temps de convection de la quantité de mouvement}}$
nombre de Péclet	$Pe = \dfrac{UL}{D}$	$\dfrac{\text{temps de diffusion de la masse}}{\text{temps de convection de la masse}}$
nombre de Péclet thermique	$Pe_\theta = \dfrac{UL}{\kappa}$	$\dfrac{\text{temps de diffusion thermique}}{\text{temps de convection thermique}}$
nombre de Prandtl	$Pr = \dfrac{\nu}{\kappa}$	$\dfrac{\text{temps de diffusion thermique}}{\text{temps de diffusion de la quantité de mouvement}}$
nombre de Schmidt	$Sc = \dfrac{\nu}{D}$	$\dfrac{\text{temps de diffusion de la masse}}{\text{temps de diffusion de la quantité de mouvement}}$
nombre de Lewis	$Le = \dfrac{D}{\kappa}$	$\dfrac{\text{temps de diffusion thermique}}{\text{temps de diffusion de la masse}}$

Re. Nous allons maintenant analyser, à partir d'observations expérimentales, comment les variations des processus de transport associées aux variations du nombre de Reynolds influencent les écoulements, et comment s'opère la transition entre les différents régimes.

La vie courante donne de nombreux exemples de la diversité de ces régimes : il y a de très grandes différences entre l'écoulement perpétuellement changeant d'une rivière dans un rapide (écoulement « turbulent ») et celui très stable d'une huile visqueuse (écoulement « laminaire »). Il existe aussi des cas intermédiaires, où l'écoulement n'est turbulent que par intermittence, ou bien encore varie en fonction du temps mais de façon périodique et bien visible. Ainsi en est-il de l'écoulement de l'air derrière un fil téléphonique (« le fil qui chante ») ou derrière un pont suspendu ; s'il a été mal conçu, il peut entrer en résonance avec les oscillations de la vitesse de l'écoulement et se briser, comme ce fut le cas pour le pont de Tacoma aux États-Unis.

Un simple robinet d'évier peut permettre d'observer tous ces phénomènes : à des débits faibles mais cependant continus, l'écoulement est très stable ; les lignes de courant sont disposées régulièrement les unes par rapport aux autres et on qualifie ces écoulements de *laminaires*. En augmentant le débit, on obtient un écoulement instable dans lequel, à une certaine distance du robinet, des gouttes sont émises de façon périodique. En augmentant encore le débit, on peut obtenir un régime où il existe une alternance régulière de grosses et de petites gouttes. On a alors division de la fréquence d'émission par deux. Une expérience soigneuse a permis de suivre cette division de fréquence par quatre, huit,... jusqu'à un débit seuil au-dessus duquel l'écoulement devient *chaotique*. La turbulence peut aussi se manifester par apparition de zones où l'écoulement est irrégulier : elles sont facilement visibles car elles perturbent le

contour du jet, et leur taille augmente au fur et à mesure qu'elles se déplacent vers l'aval. Cette notion d'intermittence est cruciale dans l'analyse de la turbulence. La fraction du temps où ces bouffées sont présentes augmente avec le débit. Pour finir, l'*écoulement* devient complètement turbulent et sa vitesse fluctue en permanence. La notion de sera examinée au chapitre 10 et celle de turbulence au chapitre 11.

La nature du fluide joue également un rôle important. Ainsi, à débit équivalent, la vidange d'un moteur d'automobile par le trou inférieur du carter donne un jet vertical d'huile parfaitement stable et cylindrique ; la vidange d'une cuve d'eau donnerait au contraire un jet turbulent d'où se détacheraient de nombreuses gouttelettes. On voit apparaître l'influence de la viscosité ou, plus précisément, du nombre de Reynolds : ainsi, l'apparition de la turbulence est retardée pour l'huile qui est plus visqueuse que l'eau.

Nous allons maintenant discuter le champ de vitesse induit par un cylindre placé dans un écoulement ; ce cas présente l'avantage de correspondre à une géométrie très bien définie, et de permettre l'observation d'une large variété de structures d'écoulement lorsqu'on fait varier le nombre de Reynolds.

2.4.1 Les différents régimes d'écoulement derrière un cylindre

Un cylindre de diamètre d, aligné le long de l'axe z, est placé dans un écoulement de vitesse U suivant la direction Ox, perpendiculaire à son axe. Un ensemble de structures observées à des nombres de Reynolds croissants est représenté sur les photos de la figure 2.8 (elles ont été obtenues en éclairant le cylindre par une nappe de lumière perpendiculaire à son axe, lui-même perpendiculaire au plan des photos). On peut aussi réaliser l'expérience en utilisant un bac rempli d'une couche de quelques centimètres d'eau, contenant de fines particules allongées en suspension ; ces particules s'alignent dans l'écoulement et réfléchissent la lumière de manière anisotrope. En déplaçant dans le liquide une baguette cylindrique verticale de quelques millimètres de diamètre, on observe les différents régimes de la figure 2.8.

En fonction de la valeur du nombre de Reynolds $Re = Ud/\nu$, on distingue les régimes d'écoulement suivants :

♦ Aux faibles vitesses ($Re \ll 1$) (Fig. 2.8a), l'écoulement est laminaire et parfaitement symétrique entre l'amont et l'aval du cylindre. Cette caractéristique découle de la réversibilité des écoulements aux faibles nombre de Reynolds qui seront étudiés au chapitre 8 ; lorsqu'on inverse le sens de la vitesse, les lignes de courant restent inchangées.

♦ À partir d'un nombre de Reynolds de quelques unités (Fig. 2.8b), on observe deux tourbillons contrarotatifs fixes en aval du cylindre (écoulement de recirculation). La longueur L de la zone de recirculation croît comme le nombre de Reynolds, ce qu'on peut justifier à partir des considérations de couche limite (chapitre 9, section 9.2).

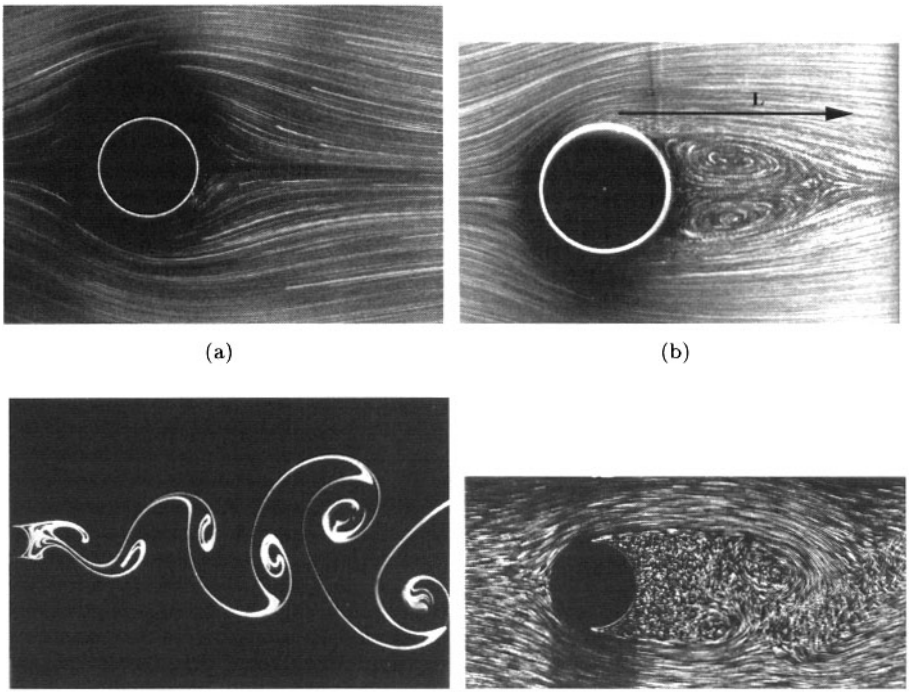


FIG. 2.8 – *Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds ; (a) écoulement symétrique entre amont et aval à petit nombre de Reynolds* ($Re = 1,54$) *; (b) apparition de deux zones de recirculation fixes en arrière du cylindre* ($Re = 26$) *; (c) émission périodique de tourbillons formant une allée de Karman* ($Re = 200$) *; (d) sillage turbulent* ($Re = 0,8.10^4$) *(photos a, b et c : S. Taneda, photo d : H. Werlé).*

♦ Pour une valeur critique Re_c de l'ordre de 47, l'écoulement cesse d'être stationnaire et la vitesse du fluide dépend du temps : des tourbillons sont émis périodiquement en aval de l'écoulement (Fig. 2.8c). Ils forment une double rangée de tourbillons, appelée *allée de Bénard-von Karman.* Elle peut être observée jusqu'à de très grands nombres de Reynolds dans des écoulements océanographiques ou atmosphériques, derrière des îles ou des obstacles de grande taille (Fig. 2.13). La fréquence d'émission est caractérisée par le nombre sans dimension, appelé *nombre de Strouhal* :

$$Sr = f\frac{d}{U} \tag{2.18}$$

qui est approximativement constant et de l'ordre de l'unité. La fréquence f est donc proportionnelle à la vitesse U. Dans « le fil qui chante » ou dans la

harpe éolienne du roi David, un fil tendu dans un écoulement d'air entre en résonance avec l'émission périodique de tourbillons.

Le nombre de Strouhal évalue l'importance des effets instationnaires, caractérisés par la fréquence f par rapport au terme convectif dans l'équation du mouvement du fluide. Pour les écoulements alternatifs en régime visqueux tels qu'on les rencontrera par exemple au chapitre 4 (section 4.5.4), on peut introduire un second rapport de fréquences $N = 2\pi f d^2/\nu$, où f est la fréquence caractéristique de l'écoulement, ν la viscosité du fluide et d^2/ν est le temps caractéristique de diffusion visqueuse sur la distance d.

Pour les écoulements aux très grands nombres de Reynolds (Fig. 2.8d), il se superpose à ces grandes structures cohérentes des mouvements turbulents incohérents, à des échelles spatiales plus faibles, d'autant plus petites que Re est grand (en pratique leur taille minimale décroît comme $1/\sqrt{Re}$). Les approches actuelles de la turbulence prennent en compte simultanément les grandes structures qui dépendent de la nature de l'écoulement, les mouvements désordonnés aux petites échelles qui en sont indépendants, ainsi que le transfert de l'énergie cinétique de l'écoulement d'une échelle de mouvement à l'autre. Ce concept important de la *turbulence statistique* sera illustré au cours du chapitre 7, à partir d'exemples discutant la dynamique des tourbillons et sera étudié en détail au chapitre 11.

2.4.2 Modèle de Landau des instabilités hydrodynamiques

Une approche fructueuse pour analyser le passage d'un mode d'écoulement à un autre (comme dans l'exemple du 1.4.1) est l'utilisation de modèles initialement développés pour décrire des systèmes proches d'une transition de phase. Dans ces approches, on utilise un développement limité d'une variable caractéristique du degré d'évolution de la transition (*paramètre d'ordre*) en fonction d'un *paramètre de contrôle* représentant la distance au seuil. Le modèle développé par le physicien Landau illustre cette méthode. Pour le point critique liquide-gaz, le paramètre de contrôle est l'écart relatif $(T - T_c)/T_c$ de la température par rapport à la valeur critique T_c, et le paramètre d'ordre est la différence de densité entre le liquide et le gaz ; ce dernier n'est non nul qu'aux températures inférieures à T_c où liquide et gaz peuvent coexister. Dans cette perspective, avant d'analyser les écoulements derrière un cylindre, nous présentons un modèle analogique mécanique simple d'instabilité auquel ces approches s'appliquent et qui permet de dégager les résultats essentiels.

Un modèle expérimental simple d'instabilité mécanique

On considère une bille de masse m qui est libre de glisser sans frottement le long d'un anneau circulaire vertical de rayon R, tournant à une vitesse

angulaire Ω autour d'un axe vertical (Fig. 2.9). Nous analysons l'évolution de la position d'équilibre de la bille en fonction de la vitesse angulaire Ω : cette position est caractérisée par l'angle θ avec la verticale. L'équilibre des forces tangentielles à l'anneau est donné par la relation :

$$mg \sin\theta = m\Omega^2 R \sin\theta \cos\theta. \tag{2.19}$$

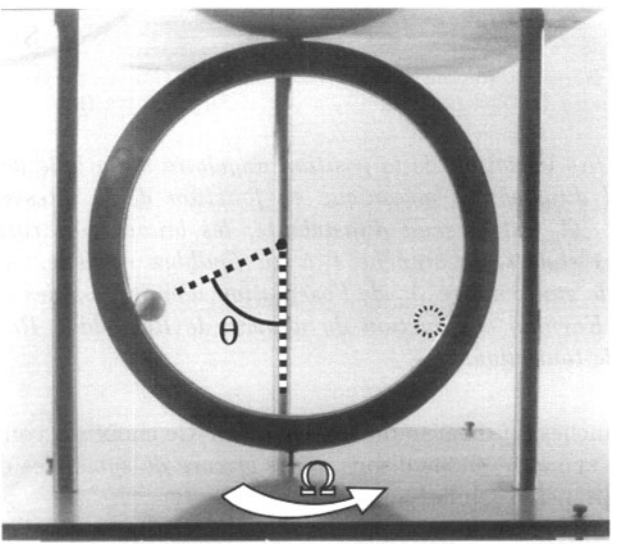


FIG. 2.9 – *Modèle expérimental d'instabilité mécanique d'une bille dans un cerceau en rotation à une vitesse angulaire Ω = 1,66 tours/s (cliché C. Rousselin, Palais de la Découverte).*

- Tant que $\Omega < \Omega_c = \sqrt{g/R}$, la seule solution possible correspond à $\theta \equiv 0$.
- Pour $\Omega > \Omega_c$, il existe deux positions d'équilibre stable $\pm\theta_e$, telles que $\cos\theta_e = g/(\Omega^2 R)$; la position $\theta = 0$ correspond à un équilibre instable.
- Au voisinage du seuil (Ω légèrement supérieur à Ω_c), cette formule se ramène à :

$$\theta(\epsilon) = \pm 2\epsilon^\beta \quad \text{avec} \quad \epsilon = \frac{\Omega - \Omega_c}{\Omega_c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2}\cdot \tag{2.20}$$

La variation de θ en fonction de Ω est représentée sur la figure 2.10a qui montre le *diagramme de stabilité* du système. Dans cette transition mécanique, l'angle d'équilibre θ est le paramètre d'ordre, et Ω le paramètre de contrôle. Au-dessus du seuil Ω_c, le système « choisit » l'une des solutions $+\theta$ ou $-\theta$ (l'une

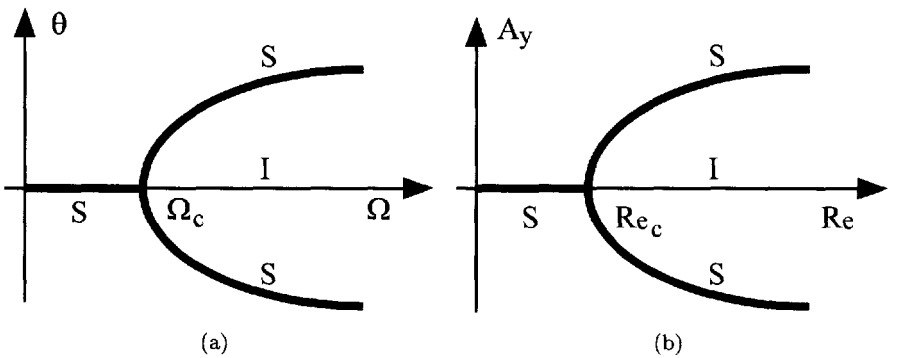


FIG. 2.10 - *(a) Variation de la position angulaire de la bille dans le modèle expérimental d'instabilité mécanique en fonction de la vitesse de rotation angulaire Ω. Ω_c est le seuil d'instabilité, les branches S correspondent à des équilibres stables, la branche I à un équilibre instable. (b) Variation de l'amplitude stationnaire A_y de l'oscillation d'émissions des tourbillons de Bénard-von Karman en fonction du nombre de Reynolds. Re_c est le seuil d'émission de tourbillons.*

des deux branches du diagramme de stabilité). Ce choix s'accompagne d'une réduction de symétrie –nous disons d'une *brisure de symétrie*– de l'ensemble du système {anneau + bille}.

Ce simple exemple dégage plusieurs caractéristiques que l'on retrouvera dans de nombreuses transitions du second ordre :

- Au-dessous du seuil ($\Omega < \Omega_c$), il existe une seule solution stable : le paramètre d'ordre θ est nul (Fig. 2.10a).

- Au-dessous du seuil pour $\Omega \geq \Omega_c$, il devient non nul de façon continue et réversible. Seule la solution $\pm\theta(\epsilon)$ est stable ; la branche $\theta = 0$ (également solution de l'équation (2.19)) est instable comme on le vérifie en déplaçant la bille de manière infinitésimale à partir de cette position.

- L'exposant critique β caractérise la vitesse avec laquelle l'angle θ (paramètre d'ordre) augmente avec la vitesse de rotation (paramètre de contrôle) au-dessus du seuil ; dans cet exemple, l'exposant β vaut 1/2. On obtient des résultats similaires pour la transition liquide-gaz quand on utilise le modèle de Van der Waals des fluides : ce modèle représente de façon simplifiée les interactions entre molécules (des mesures effectuées sur des gaz réels donnent cependant un exposant critique différent). Plus généralement, la valeur $\beta = 1/2$ caractérise les transitions de phase du deuxième ordre, auxquelles on peut appliquer le modèle de Landau que nous allons décrire plus bas. Ce modèle s'adapte bien à des systèmes physiques, où les interactions entre particules

peuvent être représentées par un champ moyen, sans avoir à faire intervenir de façon détaillée les interactions locales.

Écoulement autour d'un cylindre au voisinage du seuil d'émission de tourbillons

Pour l'apparition de tourbillons derrière un cylindre, on choisit comme paramètre de contrôle le rapport $(Re - Re_c)/Re_c = \epsilon$, qui caractérise la distance relative par rapport au seuil de transition entre les régimes d'écoulement stationnaire et de décrochement périodique des tourbillons. L'amplitude des oscillations de la composante de la vitesse transverse, induites par l'émission de tourbillons, peut être utilisée comme paramètre d'ordre de la transition. Celui-ci sera différent de zéro lorsque le nombre de Reynolds sera supérieur à la valeur critique Re_c.

Analysons tout d'abord l'évolution de l'écoulement en aval du cylindre pour des nombres de Reynolds Re proches du seuil Re_c qui correspond à l'apparition de tourbillons. L'ensemble des photographies de la figure 2.11 présente de façon qualitative les écoulements au voisinage immédiat du seuil.

L'amplitude A_y des oscillations transverses de vitesse est utilisée comme paramètre d'ordre ; elle peut être mesurée par la technique d'anémométrie laser qui sera décrite au chapitre 3 (section 3.5). On trouve que :

$$A_y = 0 \qquad \text{pour} \quad \epsilon < 0 \tag{2.21a}$$

$$|A_y|^2 \propto \frac{Re - Re_c}{Re_c} \qquad \text{pour} \quad \epsilon > 0. \tag{2.21b}$$

Cette variation est tracée sur la figure 2.10b et est très similaire à celle obtenue pour le système mécanique décrit plus haut. Comme paramètre d'ordre, nous avons utilisé ici l'amplitude des oscillations de vitesse qui est toujours positive ; la brisure de symétrie apparaît lors du choix du côté du cylindre où s'effectue l'émission du premier tourbillon. Enfin, la valeur de l'exposant β est également la même.

En toute rigueur, il convient de ne pas restreindre l'étude de l'analyse de la variation de l'amplitude $A_y(Re)$ à un point donné en aval de l'obstacle, mais il faudrait aussi analyser l'évolution temporelle de l'ensemble du profil. La forme du profil varie d'ailleurs avec le paramètre $(Re - Re_c)$, ce qui n'est pas inclus dans le simple modèle de Landau. En fait ce modèle est applicable de façon générale dans le cas d'instabilités telles que celle de Rayleigh-Bénard, que nous rencontrerons au chapitre 10, où la structure spatiale varie peu avec la distance au seuil d'instabilité ; de telles instabilités sont dites *absolues*. En revanche, dans le cas de jets tels que celui de la figure 3.18, les structures instables proches de l'ouverture sont convectées avec l'écoulement. On parle alors d'instabilités *convectives*. (Attention : dans ce contexe, le terme convectif est utilisé de façon différente du cadre de l'instabilité de Rayleigh-Bénard associée à un transport convectif de la chaleur.)

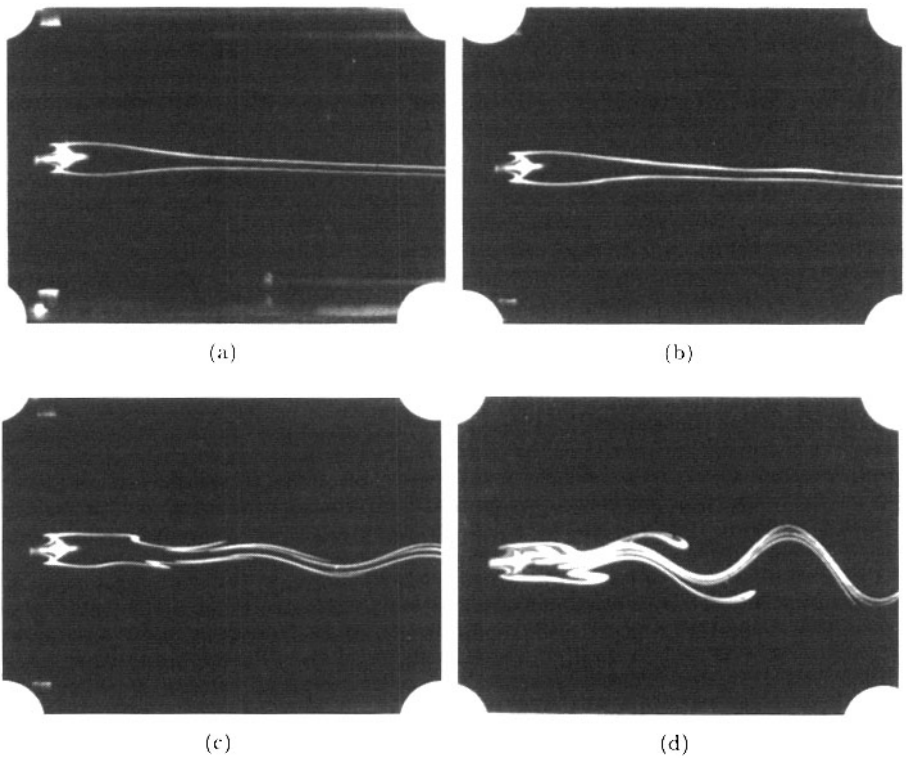


FIG. 2.11 – *Écoulement derrière un cylindre pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, voisines du seuil Re_c d'émission de tourbillons ; (a) $(Re-Re_c) = -0,4$, absence de tourbillons ; (b) $(Re-Re_c) = 0,3$, ondulation légère ; (c) $(Re-Re_c) = 1$, oscillation amplifiée ; (d) $(Re-Re_c) = 5,2$, formation de tourbillons en aval du cylindre (documents C. Mathis et M. Provensal).*

Description du modèle de Landau

Nous allons maintenant établir plus complètement ce modèle en l'appliquant, à chaque étape, au cas particulier de l'émission des tourbillons dans l'écoulement autour d'un cylindre. On considère que, à l'écoulement laminaire (stable pour $Re < Re_c$), se superposent tout un ensemble de modes d'instabilité caractérisés par un indice j. Leur amplitude $A_j(t)$ est, pour un mode donné, supposée être de la forme $e^{\sigma_j t}$ où $\sigma_j = \sigma_j^r + i\sigma_j^i$ est le taux complexe de croissance de l'instabilité. Le terme imaginaire caractérise la fréquence des oscillations observées au-dessus du seuil. La partie réelle traduit la croissance ($\sigma_j^r > 0$) ou la décroissance ($\sigma_j^r < 0$) de ces modes :

- pour $Re < Re_c$, toutes les perturbations décroissent exponentiellement, et σ_j^r est négatif quel que soit j ;

- pour $Re = Re_c$, σ_j^r est négatif pour tous les modes sauf pour un mode m marginalement stable tel que $\sigma_m^r = 0$;
- pour $Re \geq Re_c$, σ_j^r est négatif pour la plupart des modes, mais il existera un ensemble de modes pour lesquels $\sigma_j^r > 0$. Nous nous intéresserons par la suite au mode dominant, c'est-à-dire à celui pour lequel σ_j^r sera le plus élevé et nous noterons simplement σ^r la valeur correspondante.

Ce dernier régime représente le développement de l'instabilité d'émission des tourbillons immédiatement après que Re ait été porté à une valeur supérieure à Re_c. Aux temps courts, l'amplitude de la vitesse croît alors exponentiellement selon $A_y(t) \propto \mathrm{e}^{\sigma^r t}$. Le carré du module de l'amplitude est donc solution de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A(t)|^2 = 2\sigma^r|A(t)|^2. \tag{2.22}$$

L'expression du second membre est en fait le premier terme non nul d'un développement en puissances de $A(t)$ et de $A^\star(t)$ (complexe conjugué de $A(t)$). Ce n'est pas exactement la valeur de la dérivée $\mathrm{d}(|A|^2)/\mathrm{d}t$ qui nous intéresse, mais sa moyenne temporelle. Celle-ci doit être effectuée sur des temps longs devant la période $T = 2\pi/\sigma^i$ de l'oscillation, mais suffisamment courts pour pouvoir traiter $A(t)$ comme une perturbation (donc suffisamment courts devant le temps caractéristique $\tau \approx 1/\sigma^r$ de croissance ou de décroissance de l'amplitude $A_j(t)$). Ces deux contraintes définissent le domaine de validité de l'équation de Landau ; elles ne peuvent être simultanément vérifiées que si $\sigma^i \gg \sigma^r$, ce qui est vrai près du seuil où σ^r s'annule.

L'expression de l'amplitude résultant de la relation (2.22) n'est pas valable aux temps longs car l'amplitude de la perturbation $A(t)$ doit rester bornée. Pour assurer cette saturation, Landau a proposé de compléter l'équation (2.22) en considérant les termes suivants du développement limité en puissances de $|A(t)|$. Le terme du troisième ordre contient un facteur périodique dont la valeur moyenne est nulle, de sorte que le second terme non nul est d'ordre 4. On obtient donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A|^2 = 2\sigma^r|A|^2 - 2B|A|^4 \tag{2.23}$$

$|A|^2$ représente ici la moyenne temporelle $\langle|A(t)|^2\rangle$. Le coefficient du terme d'ordre 4 doit être négatif pour compenser la divergence exponentielle de $|A|$. L'équation (2.23) peut être transformée en :

$$\frac{\mathrm{d}|A|}{\mathrm{d}t} = \sigma^r|A| - B|A|^3. \tag{2.24}$$

Une forme plus générale utilisant l'amplitude complexe $A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, est :

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \sigma A - B|A|^2 A = (\sigma^r + \mathrm{i}\sigma^i)A - B|A|^2 A. \tag{2.25}$$

Elle donne l'équation (2.24) pour le module ainsi qu'une nouvelle équation pour l'évolution de la phase :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sigma^i \tag{2.26}$$

$\sigma^i = \omega$ est donc la pulsation d'émission des tourbillons. L'équation (2.25) rend compte des différentes caractéristiques de l'apparition d'une émission de tourbillons derrière un cylindre :

- la solution stationnaire en amplitude, a un module $|A_{eq}| = \sqrt{\sigma^r/B}$. Si on développe σ^r en puissances du nombre de Reynolds, on obtient :

  $$\sigma^r = k'(Re - Re_c) + o(Re - Re_c)$$

  où k' est une fréquence caractéristique positive du problème. L'amplitude stationnaire de l'oscillation vérifie donc (Éq. (2.24)) :

  $$|A_{eq}| = \sqrt{\frac{\sigma^r}{B}} \propto \sqrt{Re - Re_c}. \tag{2.27}$$

  La variation du module $|A_{eq}|$ du paramètre d'ordre avec le paramètre de contrôle ϵ de l'instabilité est bien du même type que celles illustrées par la figure 2.10 ; elle est en accord avec les données de mesures de vitesse par anémométrie laser autour du seuil Re_c.

- la constante de temps $1/\sigma^r$ caractéristique de la dynamique de l'instabilité vérifie :

  $$\frac{|A|}{\frac{\mathrm{d}|A|}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sigma^r} \propto \frac{Re_c}{Re - Re_c}\cdot \tag{2.28}$$

Ce résultat est en accord avec les observations expérimentales, aussi bien au-dessus qu'au-dessous du seuil d'instabilité, où la valeur négative de σ^r traduit l'amortissement d'une perturbation associée à l'émission transitoire de tourbillons. L'équation de Landau permet ainsi de décrire des effets précurseurs observés juste au-dessous du seuil ; une faible perturbation de l'écoulement suffit dans ce domaine à déclencher une oscillation, qui s'amortit ensuite exponentiellement au cours du temps.

La figure 2.12 montre l'évolution de l'oscillation de la composante transverse de la vitesse induite par une petite perturbation en amont de l'obstacle pour diverses valeurs négatives du paramètre ϵ. Des tourbillons apparaissent dans le sillage pendant un temps limité, de part et d'autre du cylindre. De plus, la fréquence des oscillations ainsi déclenchées est très proche de la fréquence σ^i des oscillations naturelles qui apparaissent au seuil, puisque σ^i n'a pas de comportement singulier pour la valeur Re_c.

Expérimentalement, on trouve que le temps caractéristique de la relaxation exponentielle de l'oscillation varie comme $|Re - Re_c|^{-1}$ ainsi que le prédit

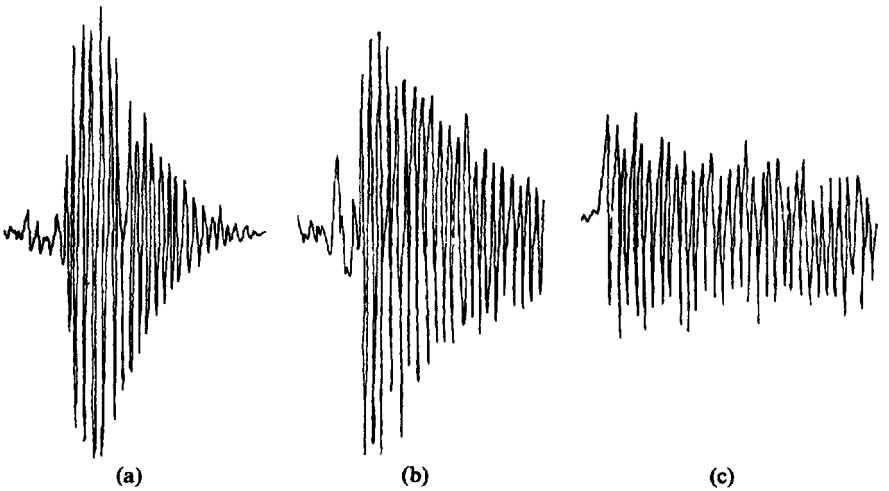


FIG. 2.12 – *Variation de l'amplitude de l'oscillation de la vitesse en réponse à une impulsion initiale à différentes distances du seuil Re_c. On remarque que la fréquence est peu sensible à la valeur de ϵ, mais que le temps de relaxation τ devient long (il diverge) près du seuil Re_c. Les trois courbes correspondent à des valeurs de $Re_c - Re$ respectivement égales à 9,44 (a), 2,70 (b) et 1,25 (c).*

l'équation (2.28). La divergence de ce temps, lorsque le nombre de Reynolds devient égal à Re_c est appelée *ralentissement critique* : on le retrouve dans toutes les transitions de phase continues. Le nombre de Reynolds critique dans cette expression, a la même valeur que celui déterminé par la loi de croissance de l'amplitude. Plus précisément, on trouve expérimentalement que le temps de relaxation τ, peut être exprimé en fonction du temps de diffusion visqueuse d^2/ν (d est le diamètre de l'obstacle et ν la viscosité cinématique de liquide), sous la forme :

$$\tau = \frac{1}{\sigma^r} = 5\frac{d^2}{\nu(Re - Re_c)} \cdot \tag{2.29}$$

Remarquons que nous avons pu développer cette première approche d'une instabilité hydrodynamique sans avoir à connaître les équations sous-jacentes de la mécanique des fluides. Nous retrouverons des comportements analogues au chapitre 10, dans l'étude des instabilités de convection thermique (Rayleigh–Bénard). Dans ces cas particuliers, il est de plus possible de déterminer les coefficients du modèle de Landau à partir des variables hydrodynamiques.

Régimes d'oscillation à plus grand nombre de Reynolds et transition vers la turbulence – structures à grande échelle de la turbulence

Juste au-dessus du nombre de Reynolds critique Re_c, le signal de vitesse transverse, mesuré en un point fixe, $A_y(t)$ est sinusoïdal : le spectre de Fourier de $A_y(t)$ ne montre qu'une fréquence d'oscillation et ses harmoniques. À des valeurs plus grandes du nombre de Reynolds Re, apparaissent d'autres modes d'oscillation. En particulier, pour les cylindres de faible diamètre, lorsque Re est de l'ordre de 100, le spectre de $A_y(t)$ comprend deux fréquences incommensurables et leurs combinaisons linéaires.

Pour des valeurs supérieures à 200, l'écoulement devient turbulent. La distribution spectrale des fluctuations devient continue (avec cependant des pics pour certaines fréquences). En annexe du chapitre 10, nous verrons que ce spectre continu résulte de l'interaction d'un petit nombre de modes de perturbations instables. Le sillage turbulent en aval du cylindre présente des fluctuations de vitesse locales erratiques, variant rapidement sur des distances souvent très faibles ; cependant, on continue fréquemment d'observer, en plus de ces fluctuations turbulentes, la structure périodique des tourbillons

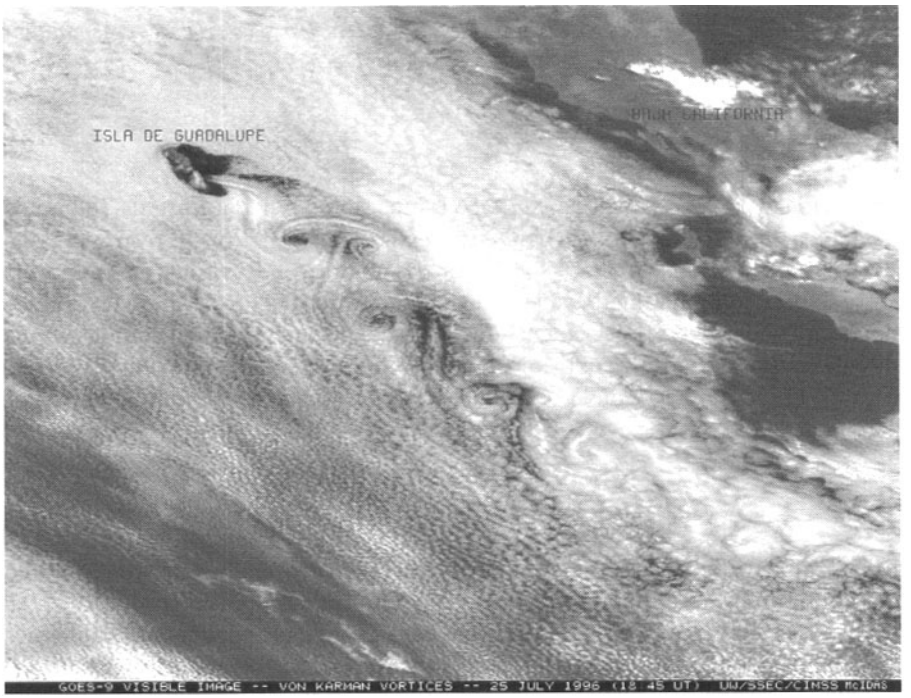


FIG. 2.13 – *Vue satellite d'une allée de tourbillon derrière l'île de Guadalupe, proche de la péninsule de Basse Californie (Document GOES - CIMSS).*

de grande taille. C'est en particulier le cas à très grande vitesse derrière des obstacles cylindriques circulaires, et à toutes les vitesses pour des barreaux dont la section possède des angles vifs. Expérimentalement, on met en évidence ces grands tourbillons sans ambiguïté à partir des grandes oscillations de pression qu'ils induisent sur les parois des cylindres : ces oscillations peuvent être si fortes qu'elles ont causé la chute des vitres de certains gratte-ciels. Des structures ordonnées similaires ont été mises en évidence à des échelles plus grandes dans de nombreux écoulements atmosphériques. Ainsi, la figure 2.13 montre une « allée de tourbillon » créée derrière l'île de Guadalupe par un vent dominant : les tourbillons sont visualisés par la perturbation qu'ils induisent dans la couche nuageuse. De telles structures, appelées *structures cohérentes*, qui persistent à des grands nombres de Reynolds, seront discutées au chapitre 11 consacré à la turbulence (section 11.5.1).

Chapitre 3

Cinématique des fluides

CE CHAPITRE *est consacré à l'étude des mouvements d'un fluide, en particulier à l'analyse de ses déformations, sans en considérer les causes qui seront examinées au chapitre suivant. Nous commençons par indiquer les méthodes d'analyse du mouvement d'un fluide (section 3.1) (définition de la vitesse d'une particule de fluide, descriptions eulérienne et lagrangienne, accélération, lignes caractéristiques d'un écoulement), puis nous analysons les déformations dans un fluide (section 3.2) ; cette analyse présente de nombreuses analogies avec les problèmes de déformation en mécanique des solides. La section 3.3 est consacrée à l'établissement de la relation de conservation de la masse et de l'hypothèse d'incompressibilité d'un fluide (cette condition sera vérifiée tout au long de ce livre) ; nous y mentionnons également différents types d'analogies qui peuvent être faites avec l'électromagnétisme et qui seront précisées dans les chapitres suivants. Nous introduisons ensuite la fonction de courant pour les écoulements plans ou axisymétriques (section 3.4) et donnons quelques exemples d'écoulements plans et de réseaux de lignes de courant correspondants. Nous terminons (section 3.5) par la description de quelques méthodes expérimentales de visualisation d'écoulements et de détermination du champ de vitesse d'un fluide.*

3.1 Description du mouvement d'un fluide

3.1.1 Échelles de longueur et hypothèse de continuité

On définit une particule de fluide comme un élément de fluide de volume V tel que sa taille $a \approx V^{1/3}$ soit :

- très petite devant les échelles de longueur caractéristiques L de l'écoulement (largeur d'un canal, rayon d'un tube, taille d'un obstacle) ;
- très grande devant le libre parcours moyen ℓ des molécules. Dans le cas contraire, les molécules pourraient traverser le volume de la particule sans variation d'énergie et de quantité de mouvement ; une répartition

moyenne significative de la vitesse ne pourrait donc être définie sur une telle échelle de longueur.

L'échelle supérieure L peut descendre jusqu'à une fraction de millimètre pour un capillaire sanguin, ou un micromètre dans le cas des canaux d'un milieu poreux. Le libre parcours moyen ℓ (échelle inférieure) est de l'ordre d'un micromètre pour un gaz aux pressions usuelles et se trouve très inférieur à L dans la plupart des applications. En revanche, dans le cas d'un gaz sous très faible pression (pression inférieure à 10^{-6} torr) ou encore pour des échelles supérieures L assez faibles, le libre parcours moyen devient du même ordre de grandeur que les dimensions macroscopiques du récipient. Dans ce régime moléculaire, dit *régime de Knudsen*, l'étude des écoulements se ramène à un problème de mécanique d'objets discrets que l'on peut décrire en termes de chocs entre objets et parois. Ce régime a été évoqué au chapitre 1 (section 1.3.2) en relation avec la définition des coefficients de diffusion dans les gaz.

Remarque Il faut se garder de confondre la particule de fluide avec les molécules (ou atomes) constituant le fluide ; une particule de fluide contiendra toujours, d'après ce qui précède, un très grand nombre de molécules.

Lorsque le modèle de particules de fluide est utilisable, il est possible de décrire le fluide comme un *milieu continu*. On définit alors la vitesse locale du fluide, ou vitesse d'une particule de fluide, comme la moyenne des vitesses des molécules situées à l'intérieur de cette particule de fluide. Cette moyenne ne dépend pas de la taille a de la particule dès lors que l'hypothèse $a \gg \ell$ est vérifiée.

Nous avons vu au chapitre 2 (section 2.2.3) comment des simulations sur ordinateur permettent d'analyser le mouvement d'un faible nombre de « molécules individuelles » ; en particulier, la figure 2.7 montrait clairement la différence entre la vitesse moyenne du fluide et celle des molécules.

3.1.2 Descriptions eulérienne et lagrangienne du mouvement d'un fluide

L'ensemble des vitesses $\mathbf{v}$ des particules de fluide de position $\mathbf{r}$ à l'instant t ($\mathbf{r} = \mathbf{OM}$), définit un champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Dans la *description eulérienne* du mouvement d'un fluide, on s'intéresse à la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec le point *fixe* M de vecteur position $\mathbf{r}$; à chaque instant, on regarde donc les vitesses de particules *différentes*. À un instant ultérieur t', la vitesse au même point $\mathbf{r}$ sera devenue $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t')$. Ce point de vue est celui d'un observateur au repos par rapport au référentiel dans lequel est mesurée la vitesse $\mathbf{v}$ et correspond aux études expérimentales réalisées avec des *sondes fixes* par rapport au mouvement du fluide ; ces techniques seront décrites à la section 3.5 du présent chapitre. C'est la vitesse eulérienne que nous percevons lorsque nous regardons s'écouler une rivière du haut d'un pont : les particules de fluide

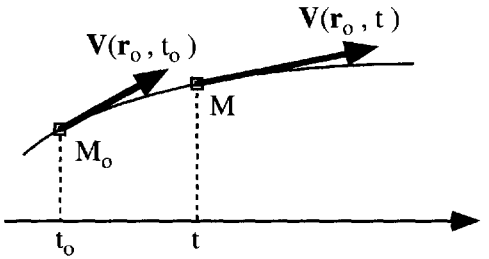


FIG. 3.1 – *Description lagrangienne du mouvement d'un fluide : chaque particule de fluide (représentée ici par un carré) est repérée par sa position* $\mathbf{r}_0$ *à un instant origine* t_0*, et suivie dans son mouvement. La vitesse du fluide est caractérisée par la vitesse de cette particule à l'instant considéré.*

qui défilent sous nos yeux sont différentes à chaque instant. Leur vitesse est fonction d'une part, de l'instant d'observation et, d'autre part, du point $\mathbf{r}$ (fixe par rapport au pont) que nous observons. La description eulérienne présente cependant l'inconvénient d'introduire des termes non linéaires dans l'expression de l'accélération, comme nous le verrons à la section 3.1.3.

Dans la *description lagrangienne*, on suit une particule de fluide au cours de son mouvement, en spécifiant sa position $\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 = \mathbf{OM_0})$ à un instant référence donné t_0. La vitesse du fluide est alors caractérisée par le vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t)$ qui est fonction des deux variables $\mathbf{r}_0$ et t (Fig. 3.1) ; la notation en majuscule que nous utilisons pour la vitesse lagrangienne souligne la distinction avec le champ de vitesse eulérien $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Dans la description imagée de la rivière qui s'écoule, ce point de vue est celui d'un observateur sur une barque entraînée par le courant : la vitesse de la barque représente la vitesse lagrangienne. Le point de vue lagrangien correspond à des mesures faites avec des instruments qui suivent le fluide dans son mouvement, tels que des ballons-sondes dans l'atmosphère ou des particules marquées (voir section 3.5).

3.1.3 Accélération d'une particule de fluide

Considérons une particule de fluide située au point $M_1(\mathbf{r}_1)$ à l'instant t ; sa vitesse à cet instant est $\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)$. À un instant ultérieur $t' = t + \delta t$, cette particule de fluide est parvenue au point $M_2(\mathbf{r}_2)$ tel que

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)\delta t + O(\delta t^2)$$

et sa vitesse est devenue $\mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t')$. La variation de vitesse $\delta\mathbf{v}$ de cette particule de fluide, dans l'intervalle de temps δt, est associée :

- d'une part à la variation explicite du champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ avec le temps, si l'écoulement n'est pas stationnaire (terme en $[\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)]$ (Fig. 3.2)) ;

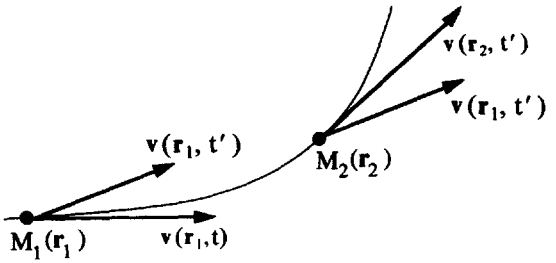


FIG. 3.2 – *Décomposition de l'accélération d'une particule de fluide dans un écoulement instationnaire.*

- d'autre part à l'exploration du champ de vitesse par la particule ; cet effet ne donne une contribution à l'accélération que si ce champ n'est pas uniforme (terme en $[\mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t')]$).

La variation résultante de vitesse $\delta\mathbf{v}$ s'écrit donc à l'aide d'un développement au premier ordre :

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\delta z$$

où δx, δy et δz sont les composantes du vecteur $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. L'accélération de la particule de fluide vaut donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta t} &= \lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}\right)\\ &= \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\end{aligned}$$

ou encore, sous une forme plus compacte :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}. \tag{3.1a}$$

La forme symbolique du deuxième terme au second membre fait intervenir un produit scalaire entre le vecteur $\mathbf{v}$ et l'opérateur **grad** de composantes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$. Les figures 3.3a et b illustrent les deux types de contributions de ce produit scalaire à l'accélération totale dans un écoulement stationnaire (tel que $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$).

Dans le premier cas (a), il existe une composante non nulle du gradient de vitesse $\partial v_x/\partial x$ suivant la direction de l'écoulement. Par conséquent, une particule entraînée par ce dernier subit une accélération égale à $v_x\partial v_x/\partial x$. Dans le deuxième cas (b), il existe un gradient transverse $\partial v_x/\partial y$ non nul de la composante de la vitesse de l'écoulement suivant Ox. Supposons qu'il existe de plus une composante non nulle v_y de la vitesse suivant la direction Oy ; il

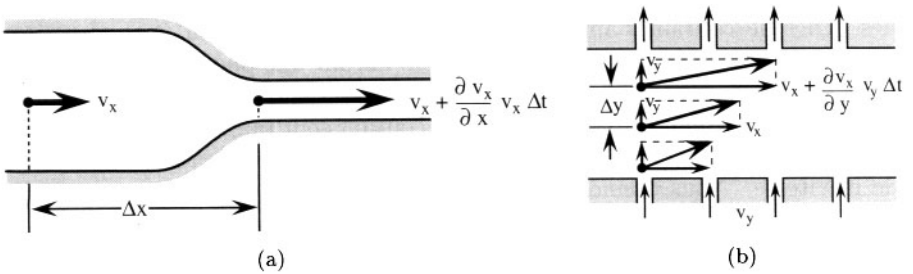


FIG. 3.3 – *Deux contributions traduisant l'effet d'accélération convective en écoulement stationnaire ; (a) accélération des particules de fluide lorsqu'elles suivent une trajectoire où des gradients de vitesse longitudinaux sont présents ; (b) accélération des particules de fluide dans un gradient de vitesse transverse à l'écoulement moyen produit par un écoulement à travers des plaques limites poreuses.*

en résulte une variation de la vitesse v_x *le long de la trajectoire d'une particule* dont la dérivée temporelle est égale à $v_y \partial v_x / \partial y$. Ces deux termes sont inclus dans l'expression $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) v_x$ qui est la composante suivant x du vecteur $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$.

Remarque On trouve dans la littérature la notation $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ pour désigner la dérivée totale telle que nous venons de l'introduire, afin de bien préciser qu'il s'agit d'une dérivée temporelle obtenue en suivant une particule de fluide. Pour notre part, nous garderons la notation $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ pour désigner ce type de dérivée.

On peut écrire l'équivalent de l'équation (3.1a) pour exprimer la variation d'autres grandeurs que la vitesse le long de la trajectoire d'une particule de fluide : on peut par exemple exprimer ainsi la variation de la température $T(\mathbf{r}, t)$ de la particule ou de sa concentration $C(\mathbf{r}, t)$ en une espèce chimique. Ainsi, la variation de température d'une particule *le long de sa trajectoire* vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})T \tag{3.1b}$$

où $\partial T / \partial t$ est la dérivée temporelle de la température du fluide en un point fixe donné. Le second terme traduit la variation de T due à l'écoulement du fluide dans la direction du gradient de température (cette équation se démontre comme nous avons démontré la relation (3.1a)).

3.1.4 Lignes et tubes de courant, trajectoires, lignes d'émission

♦ Les *lignes de courant* sont les lignes du champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$; elles sont définies comme étant les tangentes en chaque point au vecteur

vitesse $\mathbf{v}(x, y, z, t_0)$ à un instant donné t_0. Un tube de courant est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. On peut visualiser *expérimentalement* les lignes de courant en faisant une photo, en légère pose, d'un ensemble de particules : la direction des segments obtenus donne la direction du vecteur vitesse, les lignes de courant sont tangentes aux segments ainsi déterminés, et la longueur des segments est proportionnelle au module de la vitesse. Nous donnons à la fin de ce chapitre (section 3.5.1) quelques détails supplémentaires sur les méthodes de visualisation des écoulements.

Mathématiquement, ces lignes sont définies comme les courbes auxquelles le vecteur vitesse est tangent. En notant $\mathbf{dM}(dx, dy, dz)$ un petit déplacement le long de la ligne d'un point $M(x, y, z)$, on a :

$$\mathbf{dM} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z}.$$

On obtient l'équation des lignes de courant par intégration de ces deux équations différentielles.

♦ La *trajectoire* d'une particule de fluide est définie comme le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours de son mouvement. On peut les visualiser expérimentalement en photographiant avec une *pose prolongée* le déplacement d'un traceur émis pendant un temps très court en un point du fluide (colorant, particules diffusant la lumière, bulles d'hydrogène, ...). On les obtient mathématiquement, par intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t)$, c'est-à-dire du système d'équations :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_x(\mathbf{r}_0, t), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_y(\mathbf{r}_0, t), \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = V_z(\mathbf{r}_0, t).$$

En effet, soit $\mathbf{r}$ la position de la particule de fluide à l'instant t, et $\mathbf{r} + \mathbf{dr}$ sa position à l'instant $t + \mathrm{d}t$; on a, par définition de la vitesse lagrangienne $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t)$ (particule suivie dans son mouvement) :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

d'où, par intégration :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t')\,\mathrm{d}t'.$$

♦ Une *ligne d'émission* représente l'ensemble des positions successives d'une particule de fluide ayant coincidé à un instant antérieur avec un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Elles sont obtenues expérimentalement par émission continue d'un traceur (colorant par exemple) au point M_0, et par photographie *instantanée* de l'ensemble des positions du traceur.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le champ de vitesse ne dépend pas explicitement du temps, et on a $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$. Dans ce cas, les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission coïncident. En effet, les différentes particules « marquées » émises d'un même point au cours du temps ont les mêmes trajectoires : elles représentent donc en même temps les lignes d'émission. Par ailleurs, le vecteur vitesse local (indépendant du temps) est tangent en chaque point aux trajectoires qui représentent donc également les lignes de courant.

Au contraire, dans le cas d'un écoulement non stationnaire (par exemple dans le cas d'un obstacle qui se déplace dans un récipient où le fluide est au repos loin de l'obstacle), ces différentes lignes sont en général distinctes, et la correspondance entre elles est difficile à étudier. On s'intéresse alors en général aux lignes de courant.

Nous décrirons à la dernière section de ce chapitre (section 3.5) quelques méthodes de visualisation de champs de vitesse dans les fluides et de mesure sur ces champs de vitesse.

3.2 Déformations dans les écoulements

Nous analysons ici la déformation d'une particule de fluide. Cette discussion est nécessaire pour l'évaluation (qui sera faite au chapitre 4) de la force exercée par les particules voisines. Une démarche analogue est utilisable pour l'analyse des déformations d'un solide élastique, qui ne peut cependant subir que des déformations d'amplitude finie. Les notions de déformation et de rotation du solide remplacent alors celles de taux de déformation et de taux de rotation. Le terme « taux » signifie ici variation de la quantité considérée par unité de temps.

3.2.1 Décomposition du champ de gradient de vitesse au voisinage d'un point

Considérons, à un instant t, une particule de fluide située en un point $\mathbf{r}$ et dont la vitesse est $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$; celle d'une particule voisine située au point $\mathbf{r} + \mathbf{dr}$ est $\mathbf{v} + \mathbf{dv}$. Pour chaque composante $\mathrm{d}v_i$ ($i = 1$ à 3) de $\mathrm{d}\mathbf{v}$, l'accroissement de vitesse s'écrit, au premier ordre par rapport aux composantes $\mathrm{d}x_j$ ($j = 1$ à 3) du déplacement :

$$\mathrm{d}v_i = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_j. \tag{3.2}$$

Remarquons que le fait de ne s'intéresser qu'à la variation de vitesse entre deux points voisins revient à s'affranchir du mouvement de translation d'ensemble des particules ; en effet ce dernier ne fait pas apparaître de déformation. Les quantités $G_{ij} = (\partial v_i/\partial x_j)$ sont les éléments d'un tenseur de rang deux, le *tenseur des taux de déformation* (ou des *gradients de vitesse*) du fluide.

Il s'écrit sous la forme d'une matrice 3×3 (ou 2×2) à trois (respectivement deux) dimensions, qui peut être décomposée en une partie symétrique et une partie antisymétrique, sous la forme :

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.3a}$$

ou, en posant :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.3b}$$

et

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.3c}$$

$$G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij}. \tag{3.3d}$$

Analysons maintenant successivement les deux termes e_{ij} et ω_{ij}. Nous nous placerons dans le cas des déformations à deux dimensions (dans le plan) ; en pratique, on peut les observer en marquant la surface libre d'un liquide avec des petites particules. Pour analyser l'effet de chacun des deux termes e_{ij} et ω_{ij} sur le mouvement des particules de fluide, nous étudions l'évolution d'une grille « test » ABCD représentée sur la figure 3.4a. Afin d'alléger les notations, nous noterons dans la suite x_1 et x_2, respectivement x et y, et v_1 et v_2, respectivement v_x et v_y. Nous supposons que la grille est de petites dimensions, de côtés $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$. Pour un point quelconque P de la grille, nous calculons la variation du vecteur $\mathbf{AP}$ durant un intervalle de temps δt. En notant A' et P' les positions des points A et P après l'intervalle de temps δt, cette variation s'écrit :

$$\mathbf{A'P'} - \mathbf{AP} = \mathbf{PP'} - \mathbf{AA'} = \mathbf{v}(P)\delta t - \mathbf{v}(A)\delta t \approx \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\delta t.$$

Le membre de droite de la dernière égalité ci-dessus représente le premier terme du développement de $\mathbf{v}(P) - \mathbf{v}(A)$ donné par l'équation (3.2). Cette approximation est justifiée pour des intervalles de temps δt et des gradients de vitesse $\partial v_i/\partial x_j$ suffisamment petits. C'est le cas des *petites déformations* (nous examinerons dans un second temps le cas des *grandes déformations*, pour lesquelles cette hypothèse n'est plus justifiée). En explicitant les composantes v_x et v_y de la vitesse ($\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ représentent les vecteurs unitaires sur les axes, x et y respectivement), la relation plus haut peut s'écrire :

$$\mathbf{A'P'} - \mathbf{AP} \approx \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathbf{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathbf{e}_y\right)\delta t + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathbf{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathbf{e}_y\right)\delta t.$$

Nous allons utiliser cette relation pour étudier successivement l'évolution de chacun des côtés AB et AC de la grille test sous l'effet des différents termes G_{ij} du tenseur des gradients de vitesse.

3.2.2 Analyse des termes symétriques : déformation pure

Le tenseur de composantes e_{ij} est symétrique ($e_{ij} = e_{ji}$). Il comporte, dans le cas général, à la fois des termes diagonaux ($i = j$) et non-diagonaux ($i \neq j$). Nous allons regarder successivement l'effet de chacun de ces deux termes sur la grille « test » de la figure 3.4a.

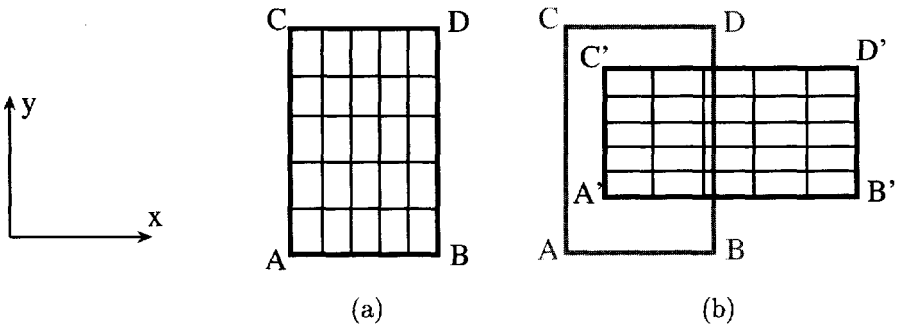


FIG. 3.4 – *Déformation d'une grille dans un écoulement dont le champ de gradients de vitesse ne comporte que des termes diagonaux du type ($\partial v_i/\partial x_i$) ; (a) grille non déformée à l'instant t ; (b) état de la grille à l'instant ultérieur $t + \delta t$.*

Termes diagonaux

Sous l'effet d'un champ de gradients de vitesse ne comportant que des *termes diagonaux* (termes du type $\partial v_i/\partial x_i$), le rectangle $ABCD$ subira, après le temps δt, la transformation montrée par la figure 3.4b. D'après la relation établie ci-dessus, en prenant le point P en B, nous pouvons écrire pour l'évolution du côté **AB** ($\mathrm{d}y = 0$), au premier ordre en δt :

$$\mathbf{A'B'} - \mathbf{AB} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,\delta t\right)\mathbf{e}_x.$$

Le côté **AB** ne tourne donc pas (il reste parallèle à l'axe Ox). Son allongement relatif est :

$$\frac{\delta(AB)}{AB} = \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,\delta t}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta t.$$

Il est positif si $\partial v_x/\partial x$ est positif (cas de la figure 3.4).

De même, pour l'évolution du vecteur **AC** ($\mathrm{d}x = 0$), nous pouvons écrire :

$$\mathbf{A'C'} - \mathbf{AC} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y\,\delta t\right)\mathbf{e}_y.$$

Le côté **AC** ne tourne donc pas sous l'effet de ce champ de vitesse. Son allongement relatif est :

$$\frac{\delta(AC)}{AC} = \frac{\partial v_y}{\partial y}\delta t.$$

Ainsi, les côtés de la grille restent parallèles à eux-mêmes. La grille subit une dilatation (respectivement contraction) dans la direction Ox (respectivement Oy). Cela montre que les *termes diagonaux* du tenseur de composantes $\partial v_i/\partial x_j$, représentent la vitesse d'élongation, ou *taux d'élongation*, de l'élément de fluide dans la direction correspondante (direction x pour AB). Évaluons maintenant la variation relative de surface du rectangle $ABCD$:

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta(AB)}{AB} + \frac{\delta(AC)}{AC} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\delta t = (\operatorname{div}\mathbf{v})\,\delta t. \tag{3.4a}$$

En effet, la trace du tenseur $[\mathbf{G}]$, qui est la somme des éléments diagonaux $(\partial v_i/\partial x_i)$, s'identifie à la divergence du champ de vitesse et représente le taux d'expansion de l'élément de fluide considéré. Dans notre exemple pris dans un plan, cette expansion correspond à un accroissement de surface. Plus généralement, dans le cas d'un écoulement avec des variations de vitesse dans les trois directions, la variation relative du volume V d'un parallélépipède s'écrit :

$$\frac{\delta V}{V} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta t = (\operatorname{div}\mathbf{v})\,\delta t. \tag{3.4b}$$

Aussi, le taux d'expansion du volume vaut également $\operatorname{div}\mathbf{v}$. Pour un fluide incompressible ($\delta V/V = 0$), le champ de vitesse est de divergence nulle, et nous retrouvons le fait que le volume d'un élément matériel de fluide reste alors constant.

Remarque Dans les relations plus haut et par la suite, nous utilisons la convention, dite d'Einstein, de sommation sur les indices muets : si deux indices sont répétés dans une expression, la sommation est faite implicitement sur ces indices. Ainsi, l'écriture $(\partial v_i/\partial x_i)$ signifie :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Dans le raisonnement précédent, nous nous sommes limités aux cas des petites déformations, en supposant que le déplacement d'un point matériel situé initialement en $\mathbf{r}_0$ était égal à $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)\delta t$. Ces déformations correspondent à l'évolution d'un fluide entre deux instants très voisins, ou encore aux déformations élastiques d'un solide.

Nous allons traiter maintenant, sur un exemple, le cas des grandes déformations pour lesquelles cette hypothèse n'est plus valable. Elles correspondent à l'évolution d'un liquide sur de grands intervalles de temps, ou au cas de solides très déformables. Considérons le champ de vitesse $v_x = ax$,

$v_y = -ay$. Il correspond à un champ dont le gradient ne comprend que des termes diagonaux et, de plus, il est de divergence nulle. Il correspond donc à des élongations des éléments de fluide sans changement de volume. Pour traiter ce problème, il faut un point de vue lagrangien qui permet de tenir compte de la variation de vitesse des éléments de fluide pendant leur déplacement. L'équation de mouvement d'un point matériel s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\left(\mathbf{r}(t)\right)$$

au lieu de :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\left(\mathbf{r}_0\right)$$

dans le cas des petites déformations. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ay$$

soit, après intégration :

$$x = x_0 \mathrm{e}^{at} \qquad \text{et} \qquad y = y_0 \mathrm{e}^{-at}.$$

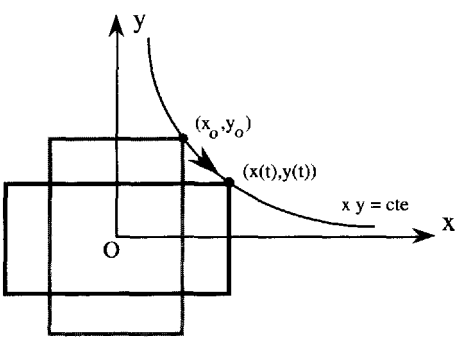


FIG. 3.5 – *Déformation d'un élément de fluide sous l'effet d'un écoulement incompressible ne comportant que de la déformation pure.*

En faisant le produit de ces deux expressions, on trouve $x(t)y(t) = x_0 y_0$: les trajectoires des particules sont donc des branches d'hyperboles (Fig. 3.5). Remarquons que, pour un rectangle dont la diagonale a pour position initiale $\mathbf{OM}_0(x_0, y_0)$, l'aire au temps t est égale à $x(t)y(t)$ (le point O est fixe) et reste donc constante. Les composantes $\delta x(t)$ et $\delta y(t)$ du déplacement par rapport à la position initiale valent donc: $\delta x(t) = x_0\left(\mathrm{e}^{at} - 1\right)$ et $\delta y(t) = y_0\left(\mathrm{e}^{-at} - 1\right)$; ce résultat peut donc être écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{at} - 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-at} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{D}] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

On voit donc que, dans le cas général des grandes déformations, le déplacement ne varie plus linéairement ni avec le temps, ni avec le tenseur [**G**] des gradients de vitesse ; la condition d'incompressibilité reste cependant satisfaite. Dans l'approximation des petites déformations ($at \ll 1$), on trouve, par un développement limité des exponentielles :

$$\begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{G}]t \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ce qui correspond à une dépendance linéaire des déformations avec le temps et le tenseur [**G**] des gradients de vitesse.

Termes non diagonaux

Étudions maintenant l'effet d'un gradient de vitesse tel que seuls les termes non diagonaux du tenseur G_{ij} (termes en $\partial v_i/\partial x_j$ avec $i \neq j$) soient non nuls. Analysons la déformation du rectangle considéré plus haut. Écrivons à cet effet les variations des vecteurs **AB** et **AC**. Reprenant la même démarche que précédemment, on obtient pour le vecteur **AB** ($\mathrm{d}y = 0$) :

$$\mathbf{A'B'} - \mathbf{AB} \approx \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \mathrm{d}x\, \delta t \right) \mathbf{e}_y.$$

À présent, le côté **AB** ne reste pas parallèle à l'axe Ox. Il tourne, d'un angle :

$$\delta\alpha \approx \frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial x} \mathrm{d}x\, \delta t}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta t.$$

L'angle $\delta\alpha$ est positif dans le cas de la figure 3.6.

On en tire :

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

En calculant de même la variation du vecteur **AC**, on obtient :

$$\mathbf{A'C'} - \mathbf{AC} \approx \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \mathrm{d}y\, \delta t \right) \mathbf{e}_x.$$

Le côté **AC** tourne d'un angle :

$$\delta\beta \approx -\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial y} \mathrm{d}y\, \delta t}{\mathrm{d}y} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \delta t.$$

Cet angle est négatif dans le cas de la figure 3.6 pour laquelle nous avons $\partial v_x/\partial y > 0$. La vitesse de variation ($\delta\gamma/\delta t$) de l'angle γ entre les côtés **A'B'** et **A'C'** s'écrit :

$$\frac{\delta\gamma}{\delta t} = -\frac{(\delta\alpha - \delta\beta)}{\delta t} = -\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -2e_{xy}.$$

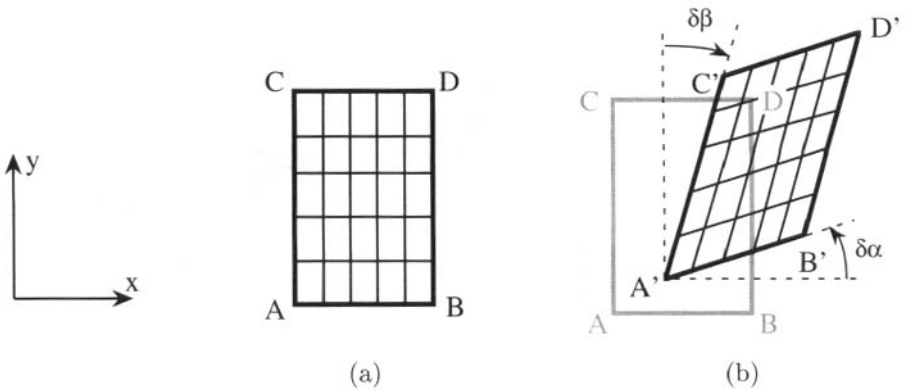


FIG. 3.6 – *Déformation d'une grille dans un écoulement dont le champ de gradients de vitesse ne comporte que des termes non diagonaux du type $\partial v_i \partial x_j$ avec $i \neq j$; (a) grille non déformée ; (b) état de la grille à un instant ultérieur $t + \delta t$.*

Remarque Du fait que la quantité ci-dessus représente la dérivée temporelle de l'angle γ, on rencontre souvent la notation $\dot{\gamma}$ pour cette quantité, appelée *taux de cisaillement.* Nous aurons l'occasion de retrouver cette notion plus loin, notamment dans la description des différents types de réponses d'un fluide à un écoulement (chapitre 4, section 4.4).

Ainsi, les *termes croisés* du tenseur gradient de vitesse représentent les *vitesses de déformation angulaire* locale. Cette analyse de l'effet de chacun des termes du champ de gradient de vitesse (termes diagonaux et termes non diagonaux) suggère l'intérêt d'une décomposition du tenseur symétrique e_{ij}, appelé globalement *tenseur des taux de déformation.* Écrivons-le sous forme d'une somme d'un terme diagonal et d'un terme de trace nulle (somme des termes diagonaux de la matrice) :

$$e_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll} + \left[e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll}\right] = t_{ij} + d_{ij}. \tag{3.5}$$

Le tenseur diagonal t_{ij} est associé à la *dilatation volumique* des éléments de fluide. Le tenseur d_{ij}, appelé *déviateur*, est associé aux déformations sans changement de volume des éléments de fluide ; on vérifie d'ailleurs immédiatement que sa trace est nulle.

Cas général

Envisageons à présent le cas où le tenseur G_{ij} ne comporte à nouveau que des termes diagonaux, comme dans le cas du début de la présente section, mais où la particule de fluide a ses côtés non parallèles aux axes Ox et Oy

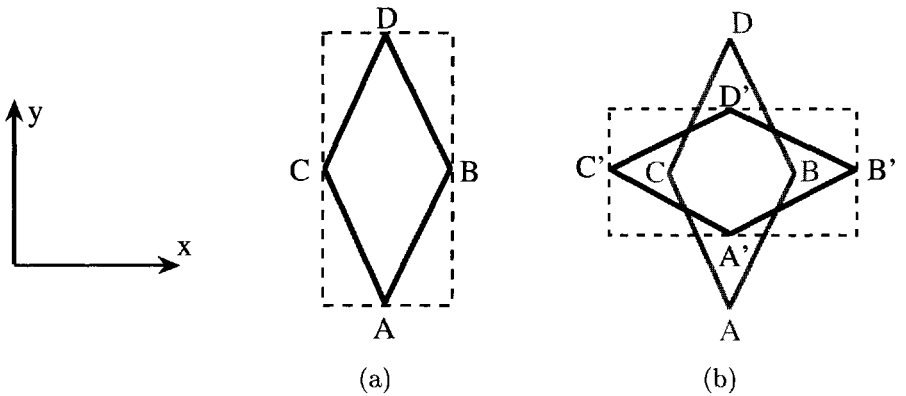


FIG. 3.7 – *Déformation d'un losange sous l'effet d'un écoulement dont le champ de gradient de vitesse ne comprend que des éléments diagonaux du type $(\partial v_i/\partial x_i)$; (a) losange non déformé à l'instant t ; (b) état du losange à l'instant ultérieur $t + \delta t$.*

(losange $ABCD$ de la figure 3.7a). Nous allons montrer que, contrairement au cas du rectangle dont les côtés restaient perpendiculaires, les angles entre les côtés du losange varient au cours du déplacement des particules de fluide, mais que la variation de sa surface reste toujours associée à la trace du tenseur des gradients de vitesse. Ce cas peut d'ailleurs se ramener au cas précédent de l'étude des termes non diagonaux, par rotation des axes, de façon à ce que le tenseur G_{ij} soit diagonal dans le nouveau système d'axes. Nous allons ici traiter directement ce cas.

Évaluons tout d'abord les variations des vecteurs **AD** et **CB** correspondant aux diagonales du losange. On peut écrire :

$$\mathbf{A'D'} - \mathbf{AD} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \mathrm{d}y \, \delta t \, \mathbf{e}_y.$$

Ainsi, la diagonale **AD** reste parallèle à l'axe Oy. De même, on peut écrire pour la diagonale **CB** :

$$\mathbf{C'B'} - \mathbf{CB} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathrm{d}x \, \delta t \, \mathbf{e}_x.$$

Elle reste donc parallèle à l'axe Ox.

Ainsi, le losange reste un losange, mais il est déformé (« aplati ») sous l'effet du champ de vitesse (Fig. 3.7b). Sa surface S a varié en valeur relative de :

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta(AD)}{AD} + \frac{\delta(CB)}{CB} = \frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial y} \mathrm{d}y \, \delta t}{\mathrm{d}y} + \frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} \mathrm{d}x \, \delta t}{\mathrm{d}x} = (\operatorname{div} \mathbf{v}) \, \delta t.$$

Nous trouvons ici encore que le taux d'expansion (variation relative de surface par unité de temps) s'identifie à la divergence du champ de vitesse. La déformation du losange est associée ici au fait que ses côtés ne sont pas orientés suivant les axes Ox et Oy qui sont les axes propres du tenseur G_{ij} puisqu'il a été choisi diagonal dans ce système d'axes. On peut remarquer que le rectangle (dessiné en pointillés à la figure 3.7) qui contient le losange, a subi la même déformation que celle étudiée au début de la présente section.

3.2.3 Analyse des termes antisymétriques : rotation pure

Nous considérons maintenant le terme antisymétrique $\omega_{ij} = (1/2)\,(\partial v_i/\partial x_j - \partial v_j/\partial x_i)$ défini en 3.2.1. Reprenons l'analyse de la déformation d'un rectangle élémentaire (section 3.2.2) ; le terme ω_{ij} n'introduit aucune élongation des éléments de fluide, puisqu'elle est associée aux termes diagonaux du tenseur des déformations et que tous les termes diagonaux du tenseur de terme général ω_{ij} sont nuls ($\omega_{ii} = 0$, quel que soit i). Regardons maintenant l'effet d'un champ de vitesse pour lequel seul le terme ω_{ij} est non nul. En utilisant à nouveau la relation générale établie à la fin de la section 3.2.1, on a pour, la variation du vecteur **AB** ($\mathrm{d}y = 0$) :

$$\mathbf{A'B'} - \mathbf{AB} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x\,\delta t\right)\mathbf{e}_y.$$

En effet, le terme en $\partial v_x/\partial x$ est nul puisque le tenseur des gradients de vitesse ne contient pas termes diagonaux. L'angle $\delta\alpha$, dont tourne le côté **AB** du rectangle « test » pendant le temps δt, vaut donc (Fig. 3.8) :

$$\delta\alpha \approx \frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x\,\delta t}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v_y}{\partial x}\delta t.$$

De même, l'angle $\delta\beta$, selon lequel tourne le côté **AC** pendant le même temps, s'écrit :

$$\delta\beta \approx -\frac{\partial v_x}{\partial y}\delta t = \delta\alpha$$

puisque nous avons choisi un champ de vitesse ne comportant que le terme antisymétrique ω_{ij} ($e_{ij} = 0$ entraîne en effet que $(\partial v_i/\partial x_j) = -\,(\partial v_j/\partial x_i)$). Ainsi, nous vérifions que la variation $\delta\gamma = -(\delta\alpha - \delta\beta)$ de l'angle entre les côtés **AB** et **AC** est nulle ; le rectangle ne subit aucune déformation sous l'effet du terme ω_{ij} du champ de vitesse, mais tourne simplement en bloc d'un angle :

$$\delta\alpha = \frac{\partial v_y}{\partial x}\delta t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\delta t = \omega_{yx}\,\delta t.$$

Le terme ω_{ij} représente donc la vitesse angulaire $\delta\alpha/\delta t$ de ***rotation locale sans déformation*** de l'élément de fluide.

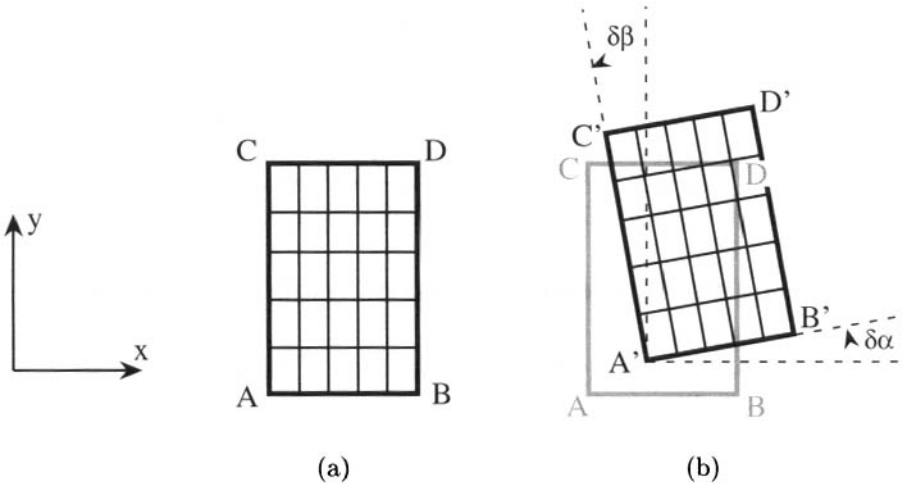


FIG. 3.8 – *Effet de la partie antisymétrique du champ de gradients de vitesse sur une grille. Le tenseur des gradients de vitesse ne comporte que des termes non diagonaux du type $\partial v_i/\partial x_j$ avec i différent de j et tels que $\partial v_i/\partial x_j = -\partial v_j/\partial x_i$; (a) grille à l'instant t ; (b) état de la grille à l'instant ultérieur $t + \delta t$.*

Nous pouvons également remplacer le tenseur antisymétrique de terme général ω_{ij} par le pseudo-vecteur $\boldsymbol{\omega}$ tel que :

$$\omega_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{ij}$$

avec : $\varepsilon_{ijk} = +1$ dans une permutation directe des indices i, j et k, $\varepsilon_{ijk} = -1$ pour une permutation inverse de ces indices, et $\varepsilon_{ijk} = 0$ si deux indices au moins, sur les trois, sont égaux. Ce vecteur $\boldsymbol{\omega}$ (appelé *vorticité* de l'écoulement) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}. \tag{3.6}$$

Notons en particulier que, pour des écoulements plans, le vecteur vorticité est perpendiculaire à ce plan. La notion de vorticité est très importante en mécanique des fluides et sera étudiée au chapitre 7 qui lui est entièrement consacré. Le vecteur $\boldsymbol{\Omega} = (1/2)\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$, appelé *vecteur tourbillon*, représente la vitesse angulaire de rotation locale d'un élément de fluide ; ainsi, dans l'exemple précédent, nous avons vu que $(\delta\alpha/\delta t) = \Omega = \omega_{yx} = (1/2)\omega_3$. Considérons de même, à trois dimensions, un champ de vitesse de rotation « solide » autour de l'axe Oz perpendiculaire à un plan xOy ; notant $\boldsymbol{\Omega}$ la vitesse angulaire de rotation, le champ de vitesse $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{r}$ a pour composantes

$v_r = 0$, $v_\theta = \Omega r$, $v_z = 0$. Son rotationnel vaut :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\right)\mathbf{e}_z = 2\Omega\,\mathbf{e}_z = 2\mathbf{\Omega}.$$

On peut mettre en évidence expérimentalement la rotation locale d'un fluide (et donc la vorticité), en suivant la rotation d'un ensemble rigide de deux bâtonnets, disposés en croix et flottant à la surface de l'eau. D'autres mesures plus élaborées seront décrites à la section 3.5.4.

Pour résumer l'étude des déformations faites dans ce paragraphe et en rassemblant les formules (3.3d) et (3.5), on peut retenir que le tenseur gradient de vitesse $G_{ij} = \partial v_i/\partial x_j$ peut toujours être décomposé en trois termes de la forme :

$$G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij} = t_{ij} + d_{ij} + \omega_{ij} \tag{3.7}$$

où :

- t_{ij} est un tenseur diagonal, qui représente la *variation de volume* (ou de surface à deux dimensions) des éléments de fluide (il est nul pour un fluide incompressible);
- d_{ij} est un tenseur de trace nulle et symétrique. Il est associé aux *déformations* des éléments de fluide, sans variation de volume;
- ω_{ij} est un tenseur antisymétrique qui traduit la *rotation* en bloc des éléments de fluide.

La décomposition de G_{ij} sous la forme (3.7) intervient dans l'étude des contraintes qui apparaissent dans un fluide en réponse à sa mise en écoulement, que nous étudierons au prochain chapitre. Nous verrons que seule intervient la partie de G_{ij} correspondant à des déformations (termes t_{ij} et d_{ij}).

3.2.4 Application

Prenons l'exemple de l'écoulement bidimensionnel caractérisé par le champ de vitesse stationnaire $\mathbf{v}(x, y)$ tel que $v_x = ax + 2by$ et $v_y = -ay$. Nous allons montrer qu'il combine les différents types de déformation et d'étirement des éléments de fluide que nous venons d'étudier. Il s'agit d'un champ sans écoulement moyen, pour lequel la vitesse est nulle à l'origine $O(0, 0)$, et le champ de vitesse symétrique par rapport à O.

Le tenseur $[\mathbf{G}]$ des gradients de vitesse défini par l'équation (3.3a) permet de caractériser ces déformations, et s'écrit :

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & -a \end{bmatrix}.$$

Décomposons-le en utilisant l'expression (3.7) :

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & -a \end{bmatrix} = \underset{\text{dilatation}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + \underset{\text{déformation}}{\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}} + \underset{\text{rotation}}{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}}.$$

La composante de dilatation est nulle, ce qui traduit l'incompressibilité de l'écoulement ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$). Notons que la composante de rotation représente seulement la rotation en bloc des éléments matériels. La composante de déformation induit, elle-aussi, des déplacements angulaires des vecteurs matériels $\delta\mathbf{r}$ et, de plus, elle fait varier leur longueur ; ces déplacements dépendent de l'orientation des vecteurs $\delta\mathbf{r}$. Il n'y aura dilatation sans rotation que dans deux directions propres, qui sont obtenues mathématiquement en diagonalisant le tenseur déformation. Écrivons que le déterminant $(\lambda^2 - a^2) - b^2$ de la matrice $\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{bmatrix}$ s'annule ; on obtient les valeurs propres :

$$\lambda = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Les vecteurs propres correspondants représentent les directions suivant lesquelles il n'y a pas de rotation induite. Ces directions sont représentées par des droites perpendiculaires d'équation :

$$(a - \lambda)x + by = 0$$

soit :

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{b} x.$$

– Le cas particulier $a \neq 0$, $b = 0$ correspond à une déformation pure, sans rotation globale des éléments de fluide, telle que nous l'avons représentée à la figure 3.4. Les deux directions propres sont les directions x et y des axes de départ, et un carré orienté suivant l'axe Ox se transforme en rectangle orienté suivant les mêmes axes ; la condition d'incompressibilité entraîne que, au premier ordre, les variations de longueur des deux côtés sont égales et opposées.

– Le cas $a = 0$, $b \neq 0$ correspond à un écoulement de cisaillement simple (ou écoulement de Couette plan) (Fig. 3.9) ; il résulte de la composition d'une déformation et d'une rotation telles que celles représentées par les figures 3.6 et 3.8. Nous avons alors $v_x = 2by$: la vitesse n'a de composante non nulle que suivant l'axe Ox et ne varie que dans la direction perpendiculaire à cet axe. Ce type de champ de vitesse est obtenu en mettant en mouvement relatif, parallèlement à leur plan, deux plaques parallèles entre lesquelles est placé un fluide visqueux. Remarquons que les directions propres de la composante de déformation sont orientées à $\pm 45°$ de la direction de cisaillement (les droites correspondantes ont en effet pour équation $y = \pm x$ d'après la formule générale établie plus haut).

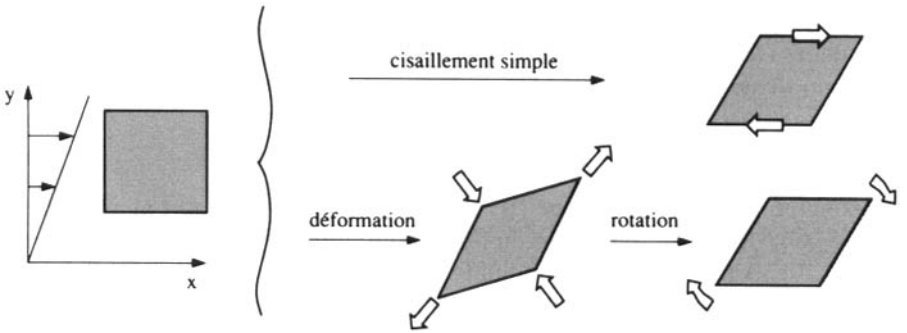


FIG. 3.9 – *La déformation d'un élément de volume dans un écoulement de cisaillement simple peut être décomposée en une élongation sans rotation et une rotation.*

Pour mieux percevoir la différence entre ces deux écoulements, analysons le comportement d'une goutte liquide, placée dans un liquide non miscible où un écoulement de ce type a été établi (la goutte est supposée centrée sur l'origine O) :

- le premier exemple est celui d'une déformation pure, telle qu'elle est produite par les dispositifs représentés plus loin (Fig. 3.14 de la section 3.4.2 du présent chapitre). Dans ce cas, l'élongation de la goutte est maximale le long de l'axe Ox (si a est positif), qui est un axe propre de l'écoulement ; les forces capillaires qui tendent à minimiser la surface de la goutte s'opposent alors à cette déformation. Comme le point O est un point de vitesse nulle, la goutte reste fixe ; elle dispose donc d'un temps suffisant pour s'allonger (et éventuellement se casser en émettant des petites gouttes à sa pointe) si les forces capillaires qui assurent sa cohésion sont insuffisantes ;
- dans le second exemple, l'élongation la plus forte est à 45° de la direction de l'écoulement de cisaillement simple (comme nous venons de le voir) et tend à déformer la goutte. Cependant, celle-ci tourne aussi à cause de la composante rotationnelle de l'écoulement ; l'effet d'étirement est donc en grande partie neutralisé et la goutte n'éclatera pas sauf pour des gradients elevés. Aux vitesses élevées, on peut même montrer qu'elle atteint un état stationnaire, avec une ellipticité de 0,25.

3.3 Conservation de la masse dans un fluide en écoulement

En écrivant le bilan global de masse de fluide à l'intérieur d'un volume *fixe*, nous allons obtenir une équation *locale* de conservation de la masse. La même

démarche sera suivie au chapitre 5, pour établir la loi de conservation d'autres grandeurs (énergie, quantité de mouvement), que nous intitulerons également *équation de bilan.*

3.3.1 Équation de conservation de la masse

Nous considérons un volume $(\mathcal{V})$ quelconque, fixe par rapport au référentiel utilisé pour décrire l'écoulement du fluide, et limité par une surface fermée $(\mathcal{S})$ (Fig. 3.10). À chaque instant, du fluide entre et sort de ce volume ; la variation de la masse totale m qu'il contient est opposée au flux sortant à travers la surface.

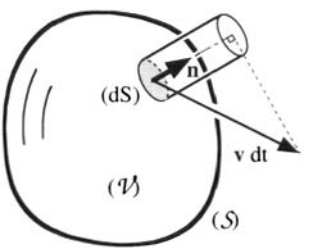


FIG. 3.10 – *Évaluation du bilan de masse de fluide à l'intérieur du volume fixe $\mathcal{V}$. Le vecteur unitaire normal* $\mathbf{n}$ *est orienté vers l'extérieur du volume $\mathcal{V}$, car nous évaluons le flux sortant de ce dernier. Le flux de masse sortant par unité de temps est égal à* $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$.

Remarque

Dans le cas présent, où on s'intéresse à un bilan global de masse, il n'y a pas de terme « source » correspondant à la création ou la disparition de cette grandeur. En revanche, en présence d'une réaction chimique et si on s'intéresse au bilan d'une espèce déterminée, il existe un terme de ce type.

Nous avons donc :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}V\right) = -\iint_{\mathcal{S}} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{3.8}$$

Le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ normal à la surface $\mathcal{S}$ est orienté vers l'extérieur du volume $\mathcal{V}$ Permutons la dérivée temporelle avec l'intégration sur le volume $\mathcal{V}$ (cette opération est possible car ce volume est fixe). En appliquant le théorème d'Ostrogradski au second membre de l'équation (3.8), nous obtenons :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})\right)\mathrm{d}V = 0. \tag{3.9}$$

Cette équation est vérifiée quel que soit le volume V ; en faisant tendre sa

taille vers 0, on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{3.10}$$

Remarque On peut noter le parallélisme entre cette équation et l'équation de conservation de la charge en électromagnétisme. Cette dernière s'écrit $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, où ρ et $\mathbf{j}$ représentent respectivement la densité volumique de charges électriques et la densité de courant.

On peut développer le terme $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})$ de l'équation (3.10) sous la forme :

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = \rho \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\rho$$

ce qui permet de récrire l'expression (3.10) sous la forme :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\rho\right) + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{3.11a}$$

Remarquons que le terme entre parenthèses représente précisément la variation $(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t)$ de masse volumique au cours du temps pour un élément de fluide qu'on suit au cours de l'écoulement (dérivée convective correspondant à une description lagrangienne). On peut donc récrire la relation (3.11a) sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{3.11b}$$

qui est une autre forme de l'équation de conservation de la masse.

3.3.2 Condition d'incompressibilité d'un fluide

Pour un fluide incompressible, c'est-à-dire tel que la masse volumique de chaque élément reste constante au cours du mouvement $(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t = 0)$, l'équation de conservation de la masse (formule 3.11b), prend la forme simple suivante :

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{3.12}$$

Remarques

(i) Ce résultat n'est pas surprenant, car nous avons vu à la section 3.2.2 que la quantité $\operatorname{div}\mathbf{v}$, qui est la trace du tenseur des gradients de vitesse, représente le taux d'expansion volumique local de l'élément de fluide.

(ii) Reprenons l'équation (3.11b) en remplaçant $\operatorname{div}\mathbf{v}$ par son expression $\operatorname{div}\mathbf{v} = (1/V)(\mathrm{d}V/\mathrm{d}t)$ en fonction du taux d'expansion volumique $(1/V)(\delta V/\delta t)$ (Éq. (3.4b) de la section 3.2.2) . On vérifie bien que ce taux d'expansion est l'opposé du taux de variation de la masse volumique car $(1/\rho)(\delta\rho/\delta t) + (1/V)(\delta V/\delta t) = 0$.

Les conditions dans lesquelles un fluide peut être considéré comme incompressible peuvent se réduire dans la plupart des cas à l'inégalité :

$$U \ll c \tag{3.13}$$

où U représente l'échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement et c est la célérité des ondes de pression dans le fluide considéré (ondes acoustiques par exemple). Nous justifions rapidement ci-dessous ce résultat.

L'ordre de grandeur des variations de pression dues à l'écoulement, lorsque la vitesse U de ce dernier est élevée, est ρU^2. Ce terme représente en effet le flux convectif de la quantité de mouvement à travers une surface unité. Ce résultat sera discuté plus en détail au chapitre 5, en relation avec l'équation de Bernoulli. Si χ est la compressibilité du fluide, les variations relatives de densité correspondantes sont $\delta\rho/\rho \approx \chi\rho U^2$. On pourra donc négliger la compressibilité du fluide si $\delta\rho/\rho \ll 1$, soit $U \ll 1/\sqrt{\chi\rho}$ où $1/\sqrt{\chi\rho}$ n'est autre que la celerité c du son.

On peut écrire la condition (3.13) sous une forme adimensionnelle en utilisant le nombre de Mach M qui est précisément égal au rapport U/c :

$$M \ll 1. \tag{3.14}$$

Cette condition n'est manifestement pas vérifiée dans l'étude de la dynamique des gaz à grande vitesse (aéronautique, ondes de chocs) : négliger la compressibilité d'un fluide revient en effet à supposer que la vitesse des ondes sonores est infinie.

Remarque Dans le cas où l'écoulement est dominé par les effets de la viscosité (c'est le cas des écoulements aux petits nombres de Reynolds qui seront étudiés spécifiquement au chapitre 8), la condition (3.13) est remplacée par la condition plus restrictive :

$$M \ll \sqrt{Re}$$

où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement. Dans ce cas, en effet les variations de pression dans l'écoulement sont de l'ordre de $\delta p \approx \eta U/L$.

Discutons maintenant le cas d'un écoulement non stationnaire, de temps caractéristique de variation T (période d'une onde acoustique par exemple) ; la condition (3.13) doit alors être complétée par une relation entre le temps T et le temps caractéristique L/c de propagation d'une perturbation de pression sur l'échelle de longueur L. Cette condition s'écrit :

$$T \gg \frac{L}{c}\cdot \tag{3.15}$$

Pour un écoulement périodique de période temporelle T, l'équation (3.15) peut être récrite sous la forme d'une relation entre la longueur d'onde $\lambda = cT$ et l'échelle spatiale L :

$$\lambda \gg L. \tag{3.16}$$

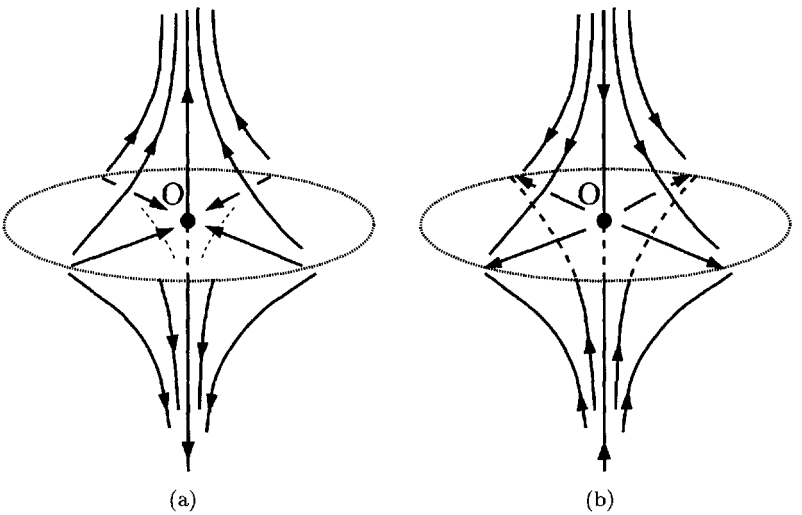


FIG. 3.11 – *Écoulement tridimensionnel autour d'un point de stagnation tel que deux valeurs propres du tenseur des gradients de vitesse soient négatives (a) (respectivement positives (b)).*

Pout terminer, nous allons examiner une conséquence de la condition d'incompressibilité (3.12) sur les écoulements tridimensionnels au voisinage d'un point de stagnation. On peut écrire le tenseur des déformations e_{ij} dans des axes de coordonnées correspondant à ses directions propres. Comme la trace du tenseur n'est pas modifiée par le changement d'axes, la condition d'incompressibilité (trace nulle du tenseur) entraîne que deux valeurs propres sont négatives et une positive ou, au contraire, qu'une valeur propre et une seule est négative. Ces deux types de déformations locales correspondent à deux types d'écoulements bien différents ; dans le premier cas (Fig. 3.11a), le fluide tend à se concentrer autour de l'origine à partir de directions situées dans le plan des valeurs propres négatives, et est étiré dans la troisième direction : une particule allongée placée dans cet écoulement s'alignera le long de cette dernière direction. Dans l'autre cas (Fig. 3.11b), on peut penser qu'une molécule en forme d'assiette s'alignera dans la direction du plan des valeurs propres positives. À côté de cet effet d'orientation, on peut également observer un effet de déformation en plaçant une goutte au point O : son allongement dans le premier cas, ou son applatissement dans le second, traduisent la forme très différente du champ de vitesse dans les deux cas.

Si on reprend l'exemple de l'écoulement à deux dimensions traité à la section 3.2.4, il n'y a plus lieu de considérer les deux types d'écoulement que nous venons de discuter, car il n'existe que deux valeurs propres opposées du tenseur des déformations. Il n'y a donc qu'un seul type possible de

déformation d'une goutte : elle prendra la forme d'une ellipse dont le grand axe sera orienté dans la direction correspondant à la valeur propre positive.

3.3.3 Analogies avec l'électromagnétisme

De façon très générale, il est possible de représenter un champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ comme la somme de trois termes :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_3(\mathbf{r}).$$

Deux types de correspondances peuvent être envisagés pour ces termes suivant que l'écoulement est incompressible (champ de vitesse de divergence nulle), ou irrotationnel (champ de vitesse de rotationnel nul).

♦ Le premier champ $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$ correspond à une rotation locale avec une vitesse angulaire $\Omega = \omega/2$ (ω est défini à la formule (3.6)). Ce champ vérifie :

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = 0 \qquad \mathbf{rot}\, \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}.$$

La détermination de ce champ de vitesse peut être faite en analogie complète avec les problèmes de magnétisme des courants dans l'approximation des régimes quasi-permanents. La vorticité correspond à la densité de courant électrique, la vitesse à l'excitation magnétique. Ces *écoulements*, dits *rotationnels*, sont très importants en mécanique des fluides et seront étudiés au cours du chapitre 7.

♦ La composante $\mathbf{v}_2(\mathbf{r})$ prend en compte les effets de dilatation volumique $(1/V)(\mathrm{d}V/\mathrm{d}t)$; elle est telle que :

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{v}_2(\mathbf{r}) = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}_2(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

Cette contribution correspond au champ électrique créé par une distribution de charges ; il sera en général peu important et n'interviendra pas pour les fluides incompressibles.

♦ Enfin, le troisième champ $\mathbf{v}_3(\mathbf{r})$ satisfait simultanément les relations :

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{v}_3(\mathbf{r}) = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}_3(\mathbf{r}) = 0.$$

Les écoulements correspondants, dits *écoulements potentiels*, sont équivalents à des problèmes d'électrostatique dans le vide ; l'analogue de la vitesse est le champ électrique et on introduit dans ce cas un *potentiel des vitesses* Φ, analogue du potentiel électrique, tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\, \Phi$. Ces écoulements interviendront toutes les fois que l'on pourra négliger les effets de la viscosité; ils seront étudiés au chapitre 6.

3.4 Fonction de courant

3.4.1 Introduction et signification de la fonction de courant

La fonction de courant permet de ramener l'étude du champ vectoriel de vitesse d'un fluide incompressible à un champ scalaire. Considérons un fluide *incompressible* en écoulement. La conservation de la masse se traduit par la relation (3.12) : $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Plaçons-nous dans le cas général d'un écoulement à trois dimensions où aucune des trois composantes de la vitesse n'est nulle ; on peut alors introduire une fonction vectorielle $\mathbf{A}$ telle que :

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}. \tag{3.17}$$

Le potentiel vecteur des vitesses $\mathbf{A}$, associé à la condition d'incompressibilité est l'analogue du potentiel vecteur introduit en magnétisme des courants et associé à la condition $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. L'intérêt pratique d'une telle fonction reste cependant limité, car on remplace le champ de vitesse $\mathbf{v}$ à déterminer, par un autre champ vectoriel $\mathbf{A}$. En revanche, lorsque la vitesse ne dépend que de deux coordonnées, le champ de vitesse peut s'exprimer directement à partir d'une seule composante du potentiel vecteur $\mathbf{A}$; ce sera le cas pour les écoulements plans, ou bien pour les écoulements axisymétriques (avec une symétrie de révolution autour d'un axe). Prenons le cas d'un écoulement plan (le cas des écoulements axisymétriques sera traité à la section 3.4.3) : le vecteur vitesse est supposé invariant par translation le long de l'axe Oz et sans composante suivant cette direction ($\mathbf{v} = (v_x(x,y),\ v_y(x,y),\ 0)$). La relation $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ se traduit alors à chaque instant par :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

D'après cette équation, il existe donc une fonction scalaire Ψ telle que :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{3.18a}$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\cdot \tag{3.18b}$$

En identifiant ces relations avec l'équation (3.17), on obtient :

$$\Psi \equiv A_z. \tag{3.18c}$$

La fonction scalaire $\Psi(x,y)$ (appelée *fonction de courant*) représente donc la composante du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ suivant la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement (ici Oz). Remarquons qu'on peut introduire une fonction de courant Ψ pour tous les écoulements incompressibles à deux dimensions, qu'ils soient visqueux ou non ; au contraire, on ne peut introduire de fonction potentiel de vitesse Φ que pour des fluides parfaits sans viscosité.

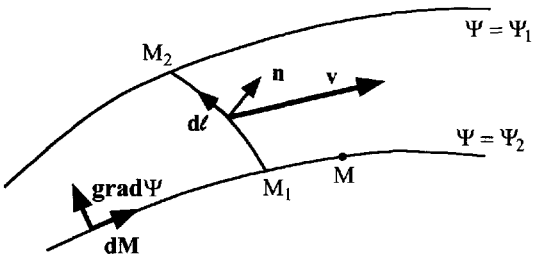


FIG. 3.12 – *Les lignes de courant d'un écoulement bidimensionnel incompressible (tangentes en chaque point au vecteur vitesse) sont confondues avec les lignes suivant lesquelles la fonction de courant Ψ est constante.*

Si des coordonnées polaires (r, θ) sont utilisées dans le plan de l'écoulement, les relations entre les composantes de la vitesse et la fonction de courant Ψ s'écrivent :

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \tag{3.19a}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \tag{3.19b}$$

Donnons maintenant les propriétés de la fonction de courant, ce qui nous permettra d'en dégager la signification.

♦ Les lignes Ψ = constante coïncident avec les lignes de courant. Nous le justifions ici dans le cas d'un écoulement plan ; une démarche identique permettrait de faire de même pour des écoulements axisymétriques. Évaluons le produit scalaire $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\Psi$ en utilisant les relations (3.18a et b) :

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\Psi = v_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0.$$

Or, les lignes Ψ = constante sont orthogonales en tout point au champ de vecteurs $\mathbf{grad}\,\Psi$. En effet, pour un déplacement $\mathrm{d}\mathbf{M}$, la variation $\mathrm{d}\Psi$ de cette fonction vérifie $\mathrm{d}\Psi = \mathbf{grad}\,\Psi \cdot \mathrm{d}\mathbf{M}$; on a donc $\mathrm{d}\Psi = 0$ lorsque $\mathrm{d}\mathbf{M}$ est perpendiculaire à $\mathbf{grad}\,\Psi$ (Fig. 3.12) ; la propriété indiquée est donc établie.

♦ Dans le cas d'un écoulement plan, la quantité $\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$ représente le débit Q de fluide dans le tube de courant de section rectangulaire, compris entre les lignes de courant $\Psi = \Psi_1$ et $\Psi = \Psi_2$ et d'épaisseur unité dans la direction Oz.

Pour établir cette propriété, évaluons le débit volumique Q de fluide dans un tel écoulement. Pour une épaisseur unité dans la direction Oz, on a :

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathrm{d}\ell.$$

Or, si $\mathbf{d\ell} = (\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y,\, 0)$, $(\mathrm{d}\ell\, \mathbf{n}) = (+\mathrm{d}y,\, -\mathrm{d}x,\, 0)$. On a donc bien :

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \mathrm{d}y + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) (-\mathrm{d}x) \right] = \int_{M_1}^{M_2} \mathrm{d}\Psi = \Psi_2 - \Psi_1.$$

On vérifie ainsi que, dans cet écoulement incompressible, le débit volumique dans un tel tube de courant est bien constant le long du tube.

3.4.2 Exemples d'écoulements plans et de leurs fonctions de courant

Les écoulements élémentaires (écoulement uniforme, tourbillons, sources et leurs combinaisons) seront analysés au chapitre 6. Nous étudions seulement l'exemple des écoulements plans, dont la fonction de courant est de la forme :

$$\Psi(x, y) = ax^2 + by^2$$

où a et b sont des constantes réelles. Les composantes de la vitesse du champ d'écoulement vérifient donc :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2by, \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -2ax$$

et les lignes de courant sont données par l'équation :

$$\Psi(x, y) = \text{constante}.$$

La figure 3.13 regroupe les profils de vitesse et les lignes de courant correspondant aux différentes valeurs du rapport (a/b). Étudions les différents cas.

♦ cas $a/b = 0$ (Fig. 3.13a). Nous avons alors :

$$v_x = 2by \qquad v_y = 0.$$

Nous avons déjà rencontré de tels écoulements de *cisaillement simple* aux sections 2.1.2 du chapitre 2 et 3.2.4 du présent chapitre. Ce type d'écoulement est obtenu dans un fluide visqueux placé entre deux plaques parallèles, situées à une distance d l'une de l'autre et se déplaçant parallèlement à leur plan avec une vitesse relative U. Le champ de vitesse est caractérisé par la valeur du gradient de vitesse ou taux de cisaillement $\dot{\gamma} = (U/d)$ (il vaut ici $2b$), qui est homogène à l'inverse d'un temps. Les lignes de courant correspondent aux droites $y =$ constante et sont parallèles aux plaques.

♦ Cas $a/b = -1$ (Fig. 3.13b). Les lignes de courant ont pour équation :

$$\Psi = a(x^2 - y^2) = \text{constante}.$$

Elles forment un faisceau d'hyperboles équilatères dont les asymptotes sont les bissectrices de chacun des quadrants ($y = \pm x$). Le champ de vitesse correspondant a pour composantes :

$$v_x = -2ay \qquad v_y = -2ax.$$

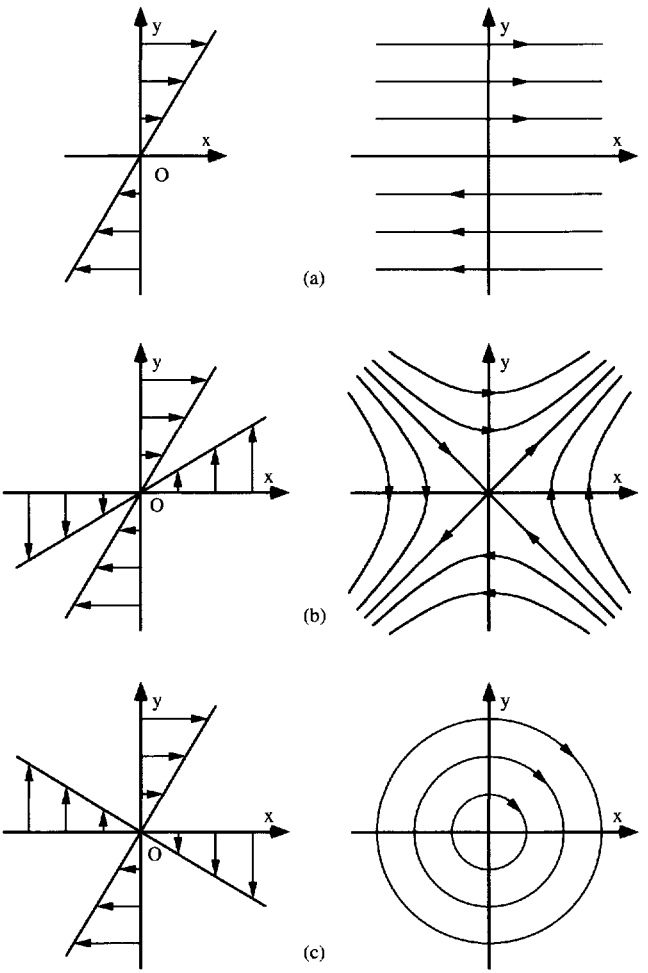


FIG. 3.13 – *Ensemble des profils de vitesse et des lignes de courant pour les écoulements plans dont la fonction de courant est de la forme* $\Psi(x, y) = ax^2 + by^2$ *pour des valeurs particulières du rapport* a/b *; (a) cisaillement simple* $a/b = 0$ *; (b) cisaillement pur* $a/b = -1$ *; (c) rotation pure* $a/b = 1$.

Calculons le rotationnel du champ de vitesse :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{u}_z = 0.$$

Ce champ d'écoulement est donc irrotationnel ; il correspond au champ de déformation pure sans rotation que nous avons déjà abordé aux sections 3.2.2 et 3.2.4 du présent chapitre.

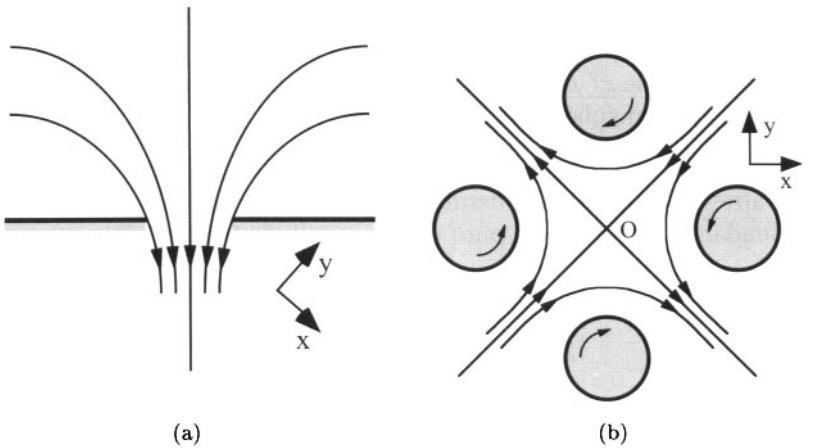


FIG. 3.14 – *Forme des lignes de courant dans le cas de l'écoulement élongationnel d'un fluide; (a) à travers un orifice en forme de fente ; (b) entre quatre cylindres contrarotatifs.*

Ce type de champ de vitesse est caractérisé par la présence de composantes *élongationnelles*, qui étirent les particules de fluide dans le sens de l'écoulement ; on le rencontre par exemple dans l'écoulement d'un fluide à travers un orifice en forme de fente (Fig. 3.14a) ou encore entre quatre cylindres en rotation de sens alternés (Fig. 3.14b). Dans ce dernier cas, on peut remarquer que le point central O est un point d'arrêt, ce qui présente un intérêt pour étudier la déformation d'un objet qui n'est pas globalement entraîné par l'écoulement.

♦ cas $a/b = 1$ (Fig. 3.13c). Les composantes de vitesses sont :

$$v_x = 2ay \qquad \text{et} \qquad v_y = -2ax.$$

Le rotationnel de ce champ de vitesse vaut :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -4a\mathbf{u}_z.$$

Cet écoulement correspond à une rotation pure du fluide autour de l'axe Oz perpendiculaire au plan de l'écoulement ; le module de la vitesse angulaire vaut $\Omega = |(\mathbf{rot}\,\mathbf{v})/2| = 2a$ (ce cas a été discuté à la section 3.2.3). On en déduit que les lignes de courant sont des cercles concentriques dont l'équation est de la forme :

$$\Psi = a(x^2 + y^2) = \text{constante}.$$

Dans le cas général où les coefficients a et b de la relation $\Psi(x, y) = ax^2 + by^2$ ne sont pas égaux en valeur absolue, on peut écrire Ψ sous la forme :

$$\Psi(x, y) = \frac{b+a}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{b-a}{2}\left(y^2 - x^2\right) = \Psi_{\text{rot}} + \Psi_{\text{cis}}$$

où :

- la fonction de courant Ψ_{cis} correspond à un *cisaillement pur* (les coefficients de x^2 et y^2 sont opposés) ;
- la fonction de courant Ψ_{rot} correspond à une *rotation pure* (les coefficients de x^2 et y^2 sont en effet égaux). Le module Ω de la vitesse de rotation angulaire est alors égal à $b + a$.

Comme la relation entre la fonction courant Ψ et le champ de vitesse est linéaire (dérivation), ce dernier est la somme des champs de vitesse correspondant à une rotation pure et à un cisaillement pur soit :

$$v_x = (b + a)y + (b - a)y$$

et :

$$v_y = -(b + a)x + (b - a)x.$$

L'analyse de ce cas général permet bien entendu de retrouver, pour $b = a$ et $b = -a$, les cas limites des écoulements de cisaillement et de rotation purs déjà décrits ; l'équation précédente décrit donc le passage continu d'une solution limite à une autre.

3.4.3 Cas des écoulements axisymétriques

Il s'agit des écoulements présentant un axe de rotation autour duquel le champ de vitesse est invariant. Pour vérifier identiquement l'équation de conservation de la masse, nous allons introduire de la même manière que précédemment, une fonction scalaire (dite *fonction de courant de Stokes*) que nous noterons également Ψ.

- Dans le cas d'un problème à *symétrie cylindrique*, nous écrivons en coordonnées cylindriques (r, θ, x) l'équation de conservation de la masse ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) pour un fluide incompressible. On obtient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

L'écoulement étant axisymétrique, le champ de vitesse est indépendant de θ et l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + r\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{3.20}$$

cette équation est vérifiée identiquement en introduisant la fonction courant Ψ, telle que :

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3.21a}$$

$$v_x = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\,. \tag{3.21b}$$

♦ Pour un problème à *symétrie sphérique*, on utilise des coordonnées sphériques (r, φ, θ) qui respectent la symétrie du problème. L'équation de conservation de la masse s'écrit dans ce cas :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 v_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\left(\sin\varphi\, v_\varphi\right)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = 0.$$

Pour un écoulement axisymétrique invariant par rotation autour de l'axe Ox, les composantes de vitesse sont indépendantes de θ, et l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\partial\left(r^2\sin\varphi\, v_r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(r\sin\varphi\, v_\varphi\right)}{\partial\varphi} = 0.$$

Cette relation exprime l'existence d'une nouvelle fonction courant (également notée Ψ) telle que :

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \tag{3.22a}$$

$$v_\varphi = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\cdot \tag{3.22b}$$

En comparant ces relations avec les composantes du rotationnel du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ dont dérive le champ de vitesse (relation (3.17)), on identifie la fonction de courant Ψ à la quantité $(r\sin\varphi\, A_\theta)$.

Plusieurs exemples d'utilisation de cette fonction de courant seront donnés aux sections 6.2.3, 6.2.4 du chapitre 6 et 8.4.1 du chapitre 8.

Remarque Le choix opéré pour la fonction de courant Ψ dans le cas des écoulements axisymétriques entraîne que sa dimension est différente de celle du cas des écoulements plans : elle est ici homogène au produit d'une vitesse par une surface (m^3/s), au lieu d'une vitesse par une longueur dans le cas précédent (m^2/s).

À l'annexe 2 du chapitre 6, nous résumons l'ensemble des relations entre les composantes de la vitesse et la fonction de courant.

3.5 Visualisations et mesures de vitesse et de gradient de vitesse dans les écoulements

Nous décrivons ici quelques méthodes de visualisation d'écoulements (section 3.5.1), dont certaines permettent de réaliser des mesures quantitatives (section 3.5.2), puis quelques méthodes de mesures de la vitesse et des gradients de vitesse dans les écoulements (sections 3.5.3 et 3.5.4).

3.5.1 Visualisation des écoulements

Les techniques de visualisation des écoulements utilisent des traceurs qui se déplacent en suivant le mouvement du fluide. D'autres techniques tirent parti des variations d'indice dues à des changements de densité ou des variations de température induites par l'écoulement.

Traçage par bulles, fumées (gaz), colorants (liquides) et particules

Par électrolyse de l'eau à l'aide de fils de très petit diamètre (10 à 100 μm), on crée des bulles de diamètre de l'ordre de grandeur de celui des fils. Il est possible de moduler l'émission des bulles et, en masquant une partie du fil, d'en limiter la zone d'émission.

De même, on peut marquer un écoulement gazeux par réaction entre des gaz présents dans l'écoulement (par exemple des fumées de chlorure d'amonium NH_4Cl obtenues par réaction d'ammoniac NH_3 sur des vapeurs de gaz chlorhydrique HCl), ou encore par chauffage d'un fil conducteur recouvert d'huile de paraffine parcouru par un courant électrique placé dans l'écoulement.

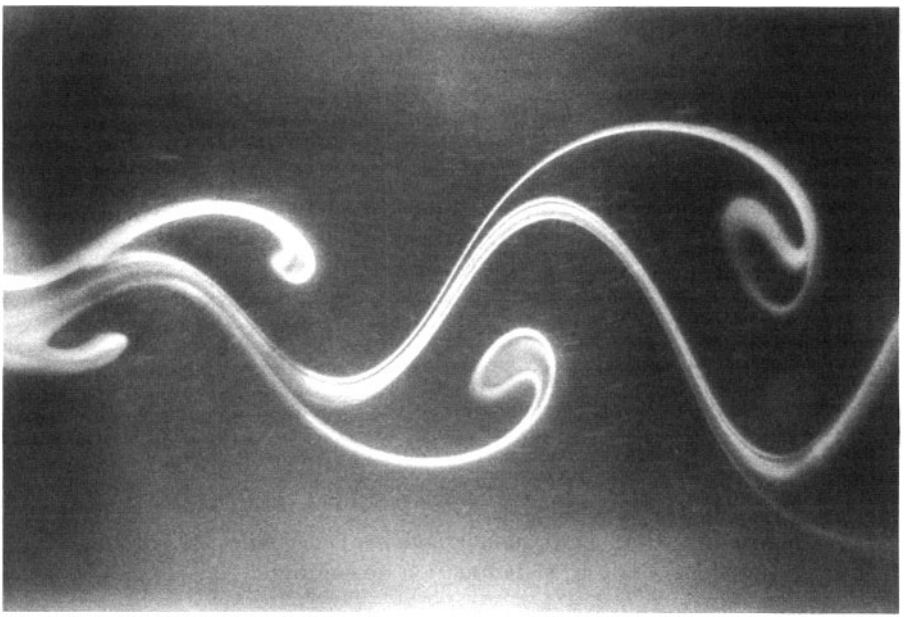


FIG. 3.15 – *Visualisation de l'écoulement autour d'un obstacle cylindrique dans des conditions où l'écoulement en aval de l'obstacle est instationnaire (il correspond à la situation expérimentale de la figure 2.11d). Le temps de pose de la photographie est suffisamment long pour qu'on distingue la trace du déplacement des particules diffusantes à partir desquelles on peut reconstruire les lignes de courant de l'écoulement. Ces lignes de courant et la ligne d'émission du colorant sont clairement bien différentes (cliché Marc Fermigier).*

Des visualisations de grande qualité peuvent être obtenues dans des écoulements laminaires de liquides, en utilisant un ensemble d'injecteurs libérant dans le fluide une solution de colorant en différents points. Sur la figure 3.15, on voit les lignes d'émission d'un colorant (ici une solution de bleu

de méthylène) autour d'un obstacle cylindrique en aval duquel se développe un écoulement instationnaire. En utilisant des colorants fluorescents qui peuvent être excités par un rayonnement de longueur d'onde adaptée, on obtient des visualisations très contrastées.

On utilise également des particules légères, de densité aussi proche que possible de celle du fluide, qui suivent localement la vitesse de l'écoulement. En éclairant le fluide avec un plan de lumière issue d'un laser, on peut observer le mouvement des particules suivant la lumière qu'elles diffusent. On observe également de telles particules sur la figure 3.15 où elles permettent de visualiser les lignes de courant.

Visualisation à l'aide de particules réfléchissantes anisotropes

Cette méthode est efficace lorsqu'on a des variations significatives de la direction de l'écoulement d'un point à un autre. On peut utiliser des paillettes d'aluminium (telles que celles qui existent dans les peintures aluminisées), ou des suspensions de particules en forme de plaquettes allongées de faible épaisseur. Quand ces particules sont en suspension dans l'eau ou dans un

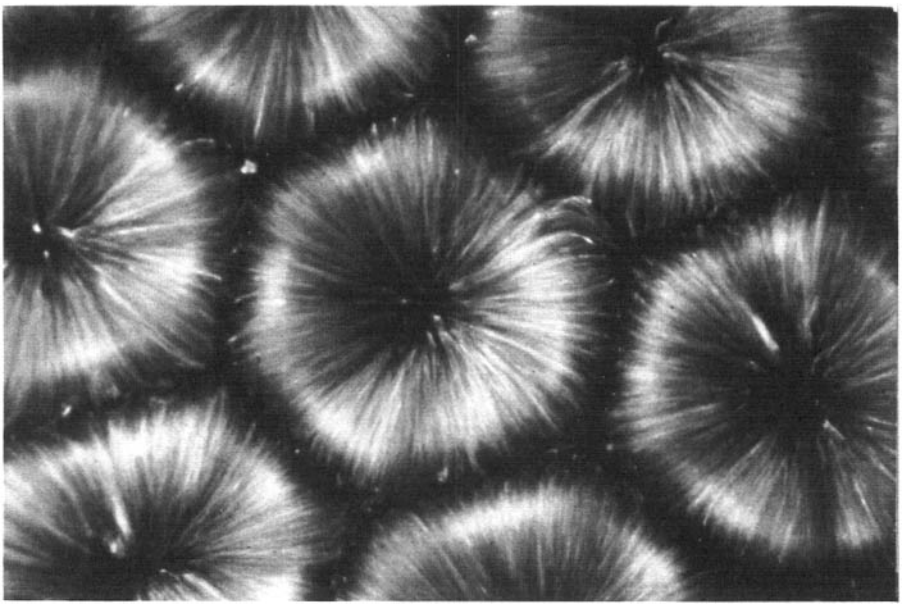


FIG. 3.16 – *Représentation d'un écoulement cellulaire obtenu dans une couche liquide chauffée par au-dessous et dont la surface supérieure est libre. Cette visualisation, qui correspond à une vue prise du dessus, a été obtenue à l'aide de particules, en forme de plaquettes allongées, en suspension dans le liquide. Le mouvement est induit par les variations locales de la tension superficielle, comme nous le verrons au chapitre 10 (section 10.3.2) (cliché J. Salan).*

fluide organique, elles s'alignent sous l'effet des gradients de vitesse : cela permet de visualiser les écoulements en créant un contraste de réflexion de la lumière. La photographie 3.16 montre l'utilisation de cette méthode pour la visualisation de l'écoulement à la surface libre d'un liquide chauffé par au-dessous : pour un gradient de température suffisant, il apparaît une instabilité (dite de Bénard–Marangoni) qui sera étudiée à la section 10.3.2 du chapitre 10. L'écoulement prend alors la forme d'un ensemble de cellules périodiques hexagonales.

Visualisation des variations d'indice par la méthode du Schlieren

Il existe un large éventail de méthodes optiques qui utilisent la déviation des rayons lumineux par des variations locales de l'indice de réfraction. Ces variations peuvent être provoquées par variations de température, qui induisent des gradients de densité et d'indice comme c'est le cas pour les phénomènes de convection thermique ; elles peuvent aussi être associées à des variations de masse volumique dues aux effets de compressibilité, comme dans les gaz à grande vitesse. La *méthode du Schlieren* est un exemple de ces techniques basées sur des variations d'indice. Son principe consiste à réaliser une image de la zone d'écoulement avec un dispositif optique qui arrête les rayons lumineux qui ne sont pas réfractés par les variations d'indice du fluide en écoulement ; seuls apparaissent sur l'image les rayons qui ont été réfractés, ce qui permet de visualiser les variations d'indice. La figure 3.17 donne le principe d'un des dispositifs expérimentaux utilisés. On utilise un

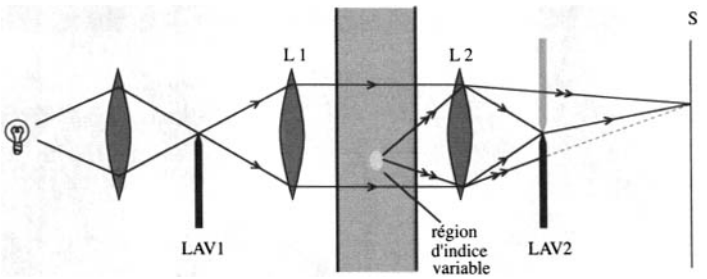


FIG. 3.17 – *Principe de la méthode du Schlieren pour la visualisation des variations d'indice dans un écoulement. Deux lames à arêtes vives LAV 1 et LAV 2 suppriment la transmission du faisceau direct grâce au jeu des deux lentilles L 1 et L 2. Seule apparaît sur l'écran la lumière réfractée par les variations d'indice optique dues à l'écoulement du fluide.*

faisceau de lumière que l'on fait successivement converger sur deux lames à arêtes vives ; le fluide en écoulement est placé entre les lames. La deuxième lame est symétrique de l'image de la première et dans le même plan, et leurs arêtes coïncident presque : elles forment ainsi une fente virtuelle de très faible

ouverture qui arrête ainsi presque complètement le faisceau lumineux direct. Au contraire, la lumière réfractée par les variations d'indice passe au-dessus de la seconde lame et apparaît sur l'image. La figure 3.18, obtenue par cette technique, représente un jet d'hélium s'écoulant dans l'air. Dans ce cas, ce sont les variations d'indice dues à la nature différente des gaz qui causent la déviation des faisceaux lumineux.

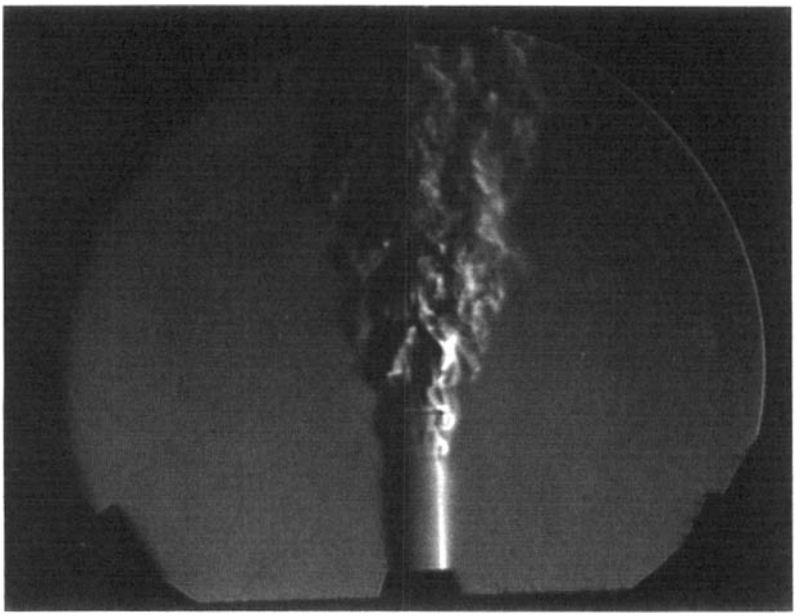


FIG. 3.18 – *Jet d'hélium injecté dans de l'air au repos montrant l'existence d'une structuration au voisinage de la sortie du jet. Le cliché a été obtenu par une méthode de Schlieren, avec un flash pour lequel la durée des impulsions est d'environ 1 μs (cliché Emmanuel Guyon).*

3.5.2 Mesure de la vitesse locale d'un fluide : la vélocimétrie laser Doppler

Cette technique présente l'avantage de ne nécessiter la présence d'aucun appareillage à l'intérieur du canal d'écoulement (mesure non intrusive). Elle donne une mesure quantitative directe précise de la vitesse du fluide, le volume de mesure peut être très réduit (une fraction de millimètre) et deux composantes de la vitesse peuvent être mesurées simultanément ; enfin, il est possible de suivre des variations très rapides de la vitesse du fluide (pendant des temps de quelques dixièmes de milliseconde ou moins).

D'autres méthodes sont également utilisées pour les mesures de vitesse locale des écoulements. Ainsi, les anémomètres à fil chaud déterminent la

vitesse de l'écoulement à partir du refroidissement d'un fil de très petite taille : nous discuterons le principe physique de cette technique au chapitre 9 (section 9.7.1). La sonde doit être placée à l'intérieur de l'écoulement, et le temps de réponse peut descendre jusqu'à quelques microsecondes.

Les tubes de Pitot miniatures fournissent une méthode simple (bien que moins performante) de mesure de vitesse locale ; cette méthode sera décrite au chapitre 5 (section 5.3.2) dans les applications de la relation de Bernoulli.

L'anémométrie ou vélocimétrie laser Doppler consiste à détecter les variations d'intensité d'une onde lumineuse diffusée par des particules en mouvement. On utilise deux faisceaux issus du même laser qui se croisent dans un petit volume de mesure (Fig. 3.19). Les deux faisceaux interfèrent dans le volume de mesure où il se forme un réseau de franges (les plans des franges sombres et brillantes sont perpendiculaires au plan des deux faisceaux). Des particules diffusantes sont placées dans un fluide. Lorsqu'elles

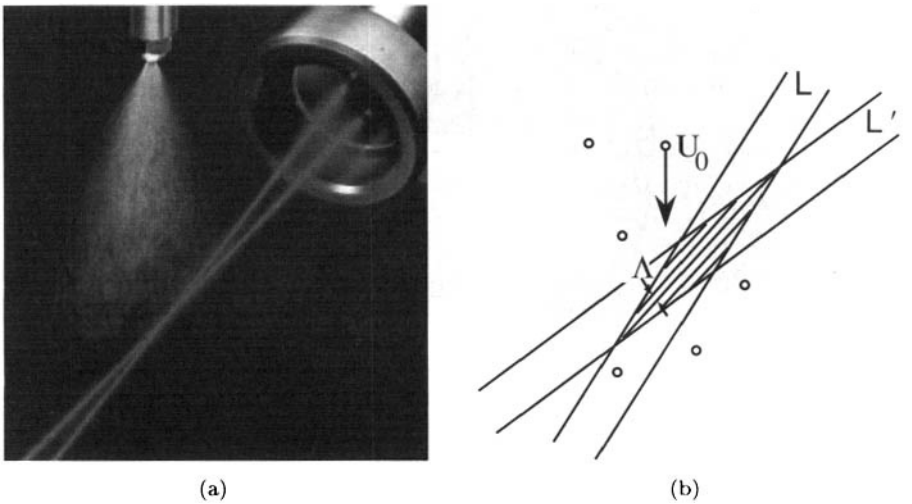


FIG. 3.19 – *(a) Expérience de vélocimétrie laser Doppler montrant les deux faisceaux laser qui forment une figure d'interférences dans leur zone de recouvrement, et un jet gazeux ensemencé de particules qui traverse cette zone (document TSI); (b) vue agrandie du volume de mesure où sont présentes les franges d'interférence.*

traversent le système de franges d'interférence en suivant l'écoulement, elles sont alternativement éclairées et sombres. Un photomultiplicateur permet de détecter la modulation correspondante de l'intensité de la lumière diffusée par les particules : la fréquence de la modulation est directement reliée à la vitesse du fluide.

Relation entre vitesse du fluide et fréquence du signal optique

Au chapitre 1 (section 1.5.3, formule (1.90)) nous avons montré que l'interfrange Λ, qui correspond à la géométrie de faisceaux de la figure 3.19, vérifie :

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\lambda_0}{2n\sin\frac{\varphi}{2}} \tag{3.23}$$

φ est l'angle entre les faisceaux à l'intérieur du fluide, n l'indice du fluide, et λ et λ_0 les longueurs d'onde de la lumière respectivement dans le fluide et dans le vide. Si une particule se déplace avec une composante de vitesse U_0 suivant y (donc normalement au plan des franges), la fréquence des variations d'éclairement de la particule, donc de l'intensité diffusée par celle-ci, est :

$$f = \frac{U_0}{\Lambda} = \frac{2U_0}{\lambda_0} n \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \tag{3.24}$$

Typiquement, pour $U_0 = 2$ cm/s, $\varphi = 30°$ et $\lambda_0 = 0,5$ μm, on trouve $f \approx 20$ kHz. La valeur de f est identique au déplacement de fréquence qui serait observé si la particule mobile émettait un rayonnement lumineux : c'est pourquoi on parle d'anémométrie laser Doppler. La mesure de fréquence se fait à l'aide d'un compteur qui détermine la fréquence de chaque train d'ondes correspondant à une particule, ou à l'aide d'un analyseur de spectre. Les vitesses maximales qui peuvent être mesurées atteignent 100 m/s. La réponse en fréquence à des fluctuations de vitesse turbulentes peut atteindre 100 ou 200 kHz.

Avantages des anémomètres laser Doppler

– Mesure non perturbatrice ; les poussières présentes dans un liquide sont souvent suffisantes pour donner un signal facilement mesurable. Dans le cas des gaz, il est en général nécessaire d'ensemencer l'écoulement avec des petites particules.

– Possibilité de déterminer le sens de l'écoulement en faisant défiler continûment les franges par un système de retard optique variable (le décalage de fréquence est lié à la vitesse relative des particules par rapport aux franges et, de ce fait, n'est pas le même pour deux particules dont les vitesses sont de signes opposés).

– Mesure absolue de vitesse indépendante des fluctuations de température ou des variations de composition du fluide.

– Mesure possible dans des flammes et des milieux réactifs.

– Possibilité de mesure simultanée de deux composantes de vitesse, réalisable avec un laser à deux couleurs, ou avec deux polarisations différentes de la lumière.

Problèmes et limitations

– On ne mesure pas directement la vitesse du fluide mais celle des particules diffusantes (des particules de 0,25 μm suivent les variations de vitesse jusqu'à 10 kHz ; des particules de 4 μm ne permettent pas de dépasser 1 ou 2 kHz) ; de plus, le fait d'avoir à ensemencer le fluide par des particules peut déjà présenter des limitations, notamment au niveau de la compatibilité des particules avec le fluide.

– Les mesures sont difficiles près des parois, à cause de l'agglomération de particules et des réflexions parasites.

– Les mesures sont impossibles dans les fluides opaques.

3.5.3 Mesures à partir du marquage des écoulements : vélocimétrie par images de particules

Grâce aux développements récents des outils d'analyse et de traitement d'images, il est maintenant possible de déterminer des champs de vitesse de fluides à partir d'images de particules diffusantes légères introduites dans le fluide. Elles suivent le mouvement local du fluide et sont visualisées par la diffusion de la lumière d'un faisceau plan issu d'un laser. La lumière issue du laser est pulsée de telle sorte qu'il est possible de capturer à l'aide d'une caméra video et d'un système de numérisation d'images, des images successives séparées par un court intervalle de temps δt (ou encore d'accumuler sur la même image deux prises de vue séparées par un intervalle δt). La détermination du déplacement $\delta \mathbf{r}$ des particules, à partir de l'analyse des images permet de remonter au champ de vitesse local, $\mathbf{v} = \delta \mathbf{r}/\delta t$, aux points où sont situées les différentes particules. Cette méthode présente l'avantage par rapport à la vélocimétrie laser Doppler décrite au paragraphe précédent, de fournir directement la vitesse en un grand nombre de points de l'écoulement au même instant. Sur la figure 3.20a, on voit la photographie correspondant à une brève exposition unique dans le cas d'un écoulement de convection (les cellules de convection sont visibles sur la figure 3.20b où quatre images ont été superposées pour visualiser le déplacement des particules). Les figures 3.20c et d montrent le champ de vitesse déterminé à partir de deux (ou quatre pour la figure (d)) prises de vue consécutives comme celle de la figure 3.20a.

3.5.4 Détermination de gradients de vitesse locaux

Un problème important, en particulier pour l'analyse des écoulements turbulents, est la détermination des gradients de vitesse dans un écoulement et, plus particulièrement, de leur partie rotationnelle que nous avons introduite à la section 3.2.3 de ce chapitre. Une première méthode consiste à ensemencer le fluide avec des particules sphériques qui sont réfléchissantes sur une partie seulement de leur surface. Sous l'effet de la composante rotationnelle de l'écoulement, les particules sont mises en rotation à une vitesse angulaire Ω qui représente la moitié de la vorticité locale

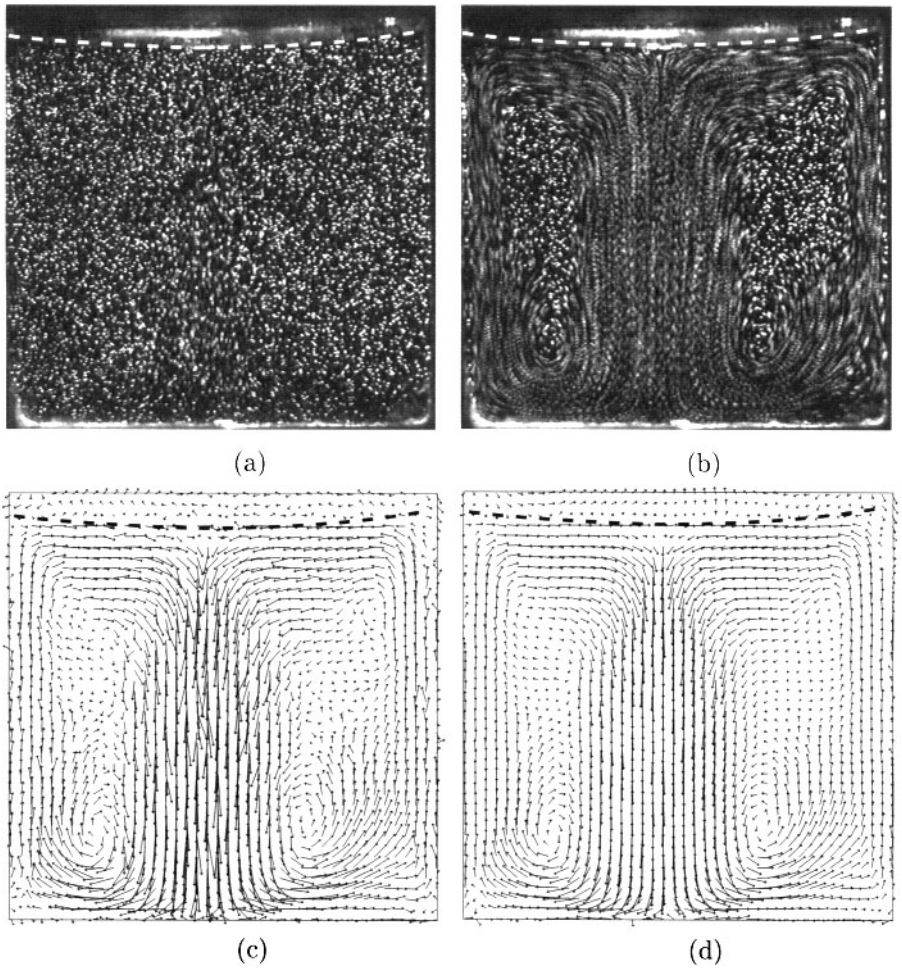


FIG. 3.20 – *Illustration de la mesure de vitesse par la méthode de vélocimétrie par images de particules, appliquée à un écoulement de convection induit dans une cavité par refroidissement de la partie supérieure par un bloc de glace dont le contour est marqué en pointillé (des écoulements analogues seront étudiés au chapitre 10). (a) Photographie de particules diffusantes correspondant à une exposition très brève (image de résolution* 500×500 *pixels) ; (b) superposition de 4 images successives du type de celle de la figure (a) ; (c) champ de vitesse obtenu par une technique de calcul du « flot optique » à partir de la comparaison de deux images consécutives du type de celles de la figure (a). (d) champ de vitesse obtenu avec une précision améliorée en analysant quatre images successives. La vitesse au centre de l'image correspond à un déplacement d'environ 20 pixels entre deux images consécutives (documents G.M. Quénot, J. Pakleza, LIMSI-CNRS et T.A. Kowalewski, Institute of Fundamental Technology Research, Varsovie).*

du fluide ($\Omega = (1/2)\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$) (section 3.2.3), à condition que les particules soient suffisamment légères pour suivre la rotation du fluide. Lors de leur rotation, les particules réfléchissent périodiquement la lumière qui provient d'un faisceau éclairant le fluide. De l'analyse temporelle de la fréquence des éclats, on tire la vitesse de rotation des particules, et donc la vorticité du fluide. Nous indiquerons au chapitre 9 (section 9.7.2) une autre technique, la *polarographie*, qui permet la mesure des gradients de vitesse au voisinage d'une paroi solide.

Chapitre 4

Dynamique des fluides visqueux, rhéologie, écoulements parallèles

APRÈS *avoir étudié au chapitre précédent les déformations d'un fluide en écoulement, nous présentons ici la manière dont on peut produire ces déformations en appliquant une contrainte (force extérieure, pression ...). En mécanique des solides, il existe une relation de proportionnalité entre les déformations et les contraintes tant que celles-ci sont peu importantes. Cette relation a été exprimée en premier par Robert Hooke qui, il y a trois siècles, écrivit la loi « ut tensio, sic vis » (« de telle façon est la déformation, ainsi est la force »). La relation correspondante pour les fluides visqueux, exprimée par Newton, indique la proportionnalité entre les vitesses de déformation introduites au chapitre 3 et les contraintes : elle s'applique aux écoulements aux faibles nombres de Reynolds et aux fluides dits newtoniens.*

Dans ce chapitre, nous écrirons tout d'abord (section 4.1) l'expression des forces en surface qui agissent sur un élément matériel de fluide (forces de pression et forces de viscosité). Nous établirons ensuite (section 4.2) l'équation du mouvement d'un fluide (équation de Navier–Stokes), dans des situations où les effets dus à la viscosité du fluide ne peuvent être négligés (fluide réel). Nous discuterons ensuite (section 4.3) les conditions aux limites sur les frontières limitant le fluide en écoulement. Puis nous aborderons (section 4.4) le cas des fluides non newtoniens, pour la relation entre la contrainte et la déformation n'est plus linéaire et instantanée.

Nous pourrons alors analyser quelques écoulements de géométrie simple, dans lesquels les termes d'accélération convective de la forme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ *introduits au chapitre 3 sont en général identiquement nuls, ou négligeables, pour des raisons géométriques. Nous aborderons d'abord le cas d'écoulements parallèles de fluides newtoniens (section 4.5), ou non (section 4.6). Nous présenterons ensuite l'approximation de lubrification, valable pour des écoulements dont les lignes de courant sont presque parallèles (section 4.7) et nous donnerons plusieurs exemples d'écoulements qui peuvent être analysés dans le cadre de cette approximation. Enfin nous discuterons quelques aspects*

de la dynamique du mouillage et de l'étalement de films fluides (section 4.8) qui peuvent, eux aussi, être analysés dans le cadre de l'approximation de lubrification.

4.1 Forces de surface

4.1.1 Expression générale des forces de surface

Contraintes dans un fluide

Considérons un élément de surface d'aire dS dans un fluide. On analyse la force exercée par la fraction de fluide située d'un côté de l'élément sur celle située de l'autre côté : la contrainte est la *valeur de la force qui s'exerce sur l'unité de surface.* Dans un fluide au repos, elle est *normale* aux éléments de surface et sa norme est indépendante de l'orientation de ceux-ci. La contrainte étant isotrope, il suffit d'un seul nombre pour en caractériser la valeur en chaque point ; c'est la *pression hydrostatique.*

Dans un fluide en mouvement, il apparaît en outre des contraintes *tangentes* à l'élément de surface dS. Ces contraintes reflètent les forces de frottement entre des couches de fluide glissant les unes par rapport aux autres, et sont dues à la viscosité du fluide. En effet, nous avons vu au chapitre 2 que la viscosité était un coefficient de transport qui traduisait le transfert de quantité de mouvement des zones de plus grandes vitesses vers les zones de plus faibles vitesses. Pour préciser ces forces, il est nécessaire de connaître :

- l'orientation de la surface dS dans l'espace ; elle est définie à l'aide du vecteur unitaire $\mathbf{n}$ normal à la surface (on notera $\mathbf{dS}$ le vecteur de norme dS et orienté suivant $\mathbf{n}$) ;

- les valeurs des trois composantes de la force par unité de surface suivant les axes Ox, Oy, Oz d'un trièdre de référence, pour trois orientations de surfaces unités perpendiculaires à ces axes.

Cela conduit à neuf coefficients σ_{ij} que l'on peut mettre sous forme d'un tableau à trois lignes et trois colonnes, qui représente le tenseur des contraintes $[\boldsymbol{\sigma}]$ dans le fluide considéré. Ce tenseur de rang deux s'écrit comme une matrice trois sur trois ; l'élément σ_{ij} du tenseur ($i = 1$ à 3, $j = 1$ à 3) représente la composante suivant i de la contrainte, ou force par unité de surface, exercée sur une surface dont la normale est orientée suivant j. Ainsi :

- σ_{yx} est la composante suivant Oy de la force exercée sur une surface unité dont la normale est orientée suivant Ox (Fig 4.1) ; c'est une *contrainte tangentielle ou de cisaillement* ;

- σ_{xx} est la composante suivant Ox de la force exercée sur une surface perpendiculaire à la même direction Ox ; c'est une *contrainte normale.*

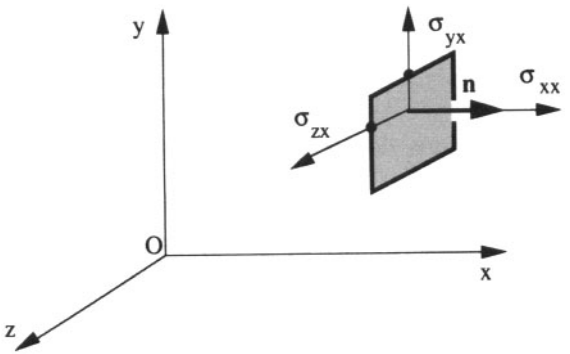


FIG. 4.1 – *Composantes σ_{xx}, σ_{yx} et σ_{zx} de la contrainte exercée sur une surface dont la normale est orientée suivant Ox.*

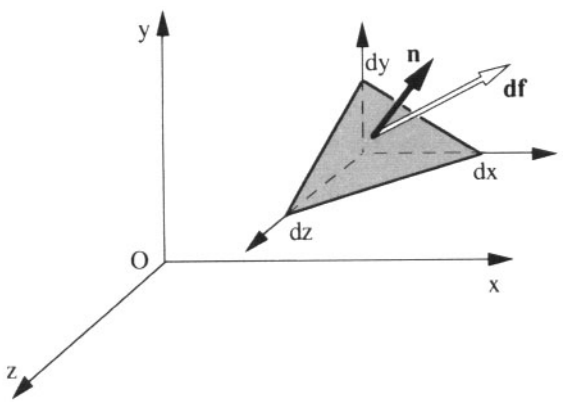


FIG. 4.2 – *Détermination de la contrainte sur une surface d'aire dS de normale* **n** *d'orientation quelconque. En raison de l'existence de contraintes tangentielles sur la surface, la force* **df** *n'est pas colinéaire au vecteur* **n** *normal à la surface.*

Déterminons maintenant la contrainte $\sigma_{\mathbf{n}}$ exercée sur une surface dS de normale **n** quelconque figure 4.2. Analysons pour cela les forces exercées sur un tétraèdre dont trois des arêtes sont parallèles aux directions Ox, Oy et Oz, et de longueurs dx, dy et dz ; la face bordée par les trois autres arêtes a une normale dirigée suivant le vecteur unitaire **n** de composantes n_x, n_y et n_z ; **n** est dirigé vers l'extérieur du volume du tétraèdre.

Notons $\sigma_{x\mathbf{n}}$ dS, $\sigma_{y\mathbf{n}}$ dS et $\sigma_{z\mathbf{n}}$ dS les composantes suivant Ox, Oy et Oz de la force de contrainte exercée sur la surface dS de normale **n**. Déterminons, par exemple, $\sigma_{x\mathbf{n}}$ en écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces exercées sur les faces du tétraèdre.

Les composantes suivant Ox des forces exercées sur les faces perpendiculaires à Ox, Oy et Oz sont respectivement :

$$(-\sigma_{xx})\, n_x \,\mathrm{d}S, \qquad (-\sigma_{xy})\, n_y \,\mathrm{d}S \qquad \text{et} \qquad (-\sigma_{xz})\, n_z \,\mathrm{d}S.$$

On a utilisé les définitions des composantes de contrainte normales et de cisaillement, et le fait que les surfaces $\mathrm{d}S_x$, $\mathrm{d}S_y$ et $\mathrm{d}S_z$ auxquelles ces contraintes s'appliquent sont égales au produit de dS par les cosinus directeurs n_x, n_y et n_z de $\mathbf{n}$ selon les trois axes. Les signes négatifs proviennent du fait que les normales à ces trois surfaces sont orientées extérieurement au volume du tétraèdre, et de la définition des contraintes. La contrainte totale sur l'ensemble des quatre faces du tétraèdre a donc pour composante suivant Ox :

$$\begin{aligned}\sigma_{x\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S - \sigma_{xx}\, n_x\,\mathrm{d}S - \sigma_{xy}\, n_y\,\mathrm{d}S - \sigma_{xz}\, n_z\,\mathrm{d}S \\ = (\sigma_{x\mathbf{n}} - \sigma_{xx}\, n_x - \sigma_{xy}\, ny - \sigma_{xz}\, nz)\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Écrivons la loi de Newton en notant $\mathrm{d}V$ le volume de l'élément, ρ sa densité, $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ son accélération suivant Ox et f_x une éventuelle force en volume comme, par exemple, la gravité ; on trouve :

$$(\sigma_{x\mathbf{n}} - \sigma_{xx}\, n_x - \sigma_{xy}\, n_y - \sigma_{xz}\, n_z)\,\mathrm{d}S + f_x\,\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}V\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\cdot \tag{4.2}$$

Faisons maintenant tendre la taille de l'élément vers zéro en réduisant de manière homothétique chacune de ses dimensions, ce qui permet de conserver l'orientation de $\mathbf{n}$. $\mathrm{d}V$ tend vers zéro comme $\mathrm{d}S^{3/2}$. Les deux derniers termes qui contiennent $\mathrm{d}V$ dans l'équation (4.2) tendent vers zéro plus rapidement que le terme qui contient $\mathrm{d}S$, et ne peuvent donc le compenser. Il en résulte que ce dernier doit être identiquement nul, ce qui conduit à l'égalité :

$$\sigma_{x\mathbf{n}} = \sigma_{xx}\, n_x + \sigma_{xy}\, n_y + \sigma_{xz}\, n_z. \tag{4.3}$$

En utilisant la symétrie entre les indices, on trouve une relation équivalente pour les deux autres composantes $\sigma_{y\mathbf{n}}$ et $\sigma_{z\mathbf{n}}$. On obtient ainsi l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x\mathbf{n}} \\ \sigma_{y\mathbf{n}} \\ \sigma_{z\mathbf{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

qui peut être récrite sous la forme :

$$\frac{\mathbf{df}}{\mathrm{d}S} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} = [\boldsymbol{\sigma}]\cdot\mathbf{n}. \tag{4.5}$$

L'expression $[\boldsymbol{\sigma}]\cdot\mathbf{n}$ traduit l'opération du produit du tenseur $[\boldsymbol{\sigma}]$ d'ordre 2 par le vecteur $\mathbf{n}$; on peut également utiliser la notation :

$$\sigma_{i\mathbf{n}} = \sigma_{ij}\, n_j \tag{4.6}$$

où on effectue une sommation implicite sur l'indice j (convention de sommation d'Einstein).

Forces de pression et tenseur des contraintes de viscosité

On peut extraire du tenseur des contraintes $[\boldsymbol{\sigma}]$ la partie qui correspond aux contraintes de pression, qui sont les seules présentes en l'absence de gradients de vitesse (fluide au repos ou en mouvement global de translation). Cette composante est purement diagonale (contraintes exclusivement normales) et isotrope (les trois coefficients diagonaux ont la même valeur); on décompose le tenseur sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\,\delta_{ij} \tag{4.7}$$

où p est la pression et δ_{ij} représente le tenseur de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Le signe négatif apparaissant devant p traduit le fait que le fluide au repos est généralement en compression : la contrainte est donc de sens opposé au vecteur $\mathbf{n}$ normal à la surface, qui pointe vers l'extérieur. Le terme σ'_{ij} est l'élément générique du tenseur des contraintes de viscosité : c'est la partie de σ_{ij} liée à la déformation des éléments de fluide.

Remarques

(i) Le fait d'avoir écrit le tenseur $[\boldsymbol{\sigma}]$ sous la forme précédente (relation (4.7)) n'entraîne pas que le tenseur des contraintes de viscosité $[\boldsymbol{\sigma}']$ ne comporte aucun terme diagonal ; de fait, il apparaît en général des contraintes normales lors du mouvement relatif de différentes parties du fluide (formule 4.15a). Dans les fluides élastiques, les contraintes normales dépendent de la direction ; par exemple, pour un champ de vitesse de cisaillement, $v_x(y)$, des différences entre les contraintes normales σ'_{xx} et σ'_{yy} apparaissent ; elles seront examinées à la section 4.4.4.

(ii) Le terme de pression utilisé pour désigner le paramètre p de la relation (4.7) doit être compris dans le sens de contribution à la pression mécanique, définie à partir des contraintes mécaniques exercées sur un élément de fluide. On ne peut pas définir la pression dans un fluide en mouvement à partir de considérations thermodynamiques, car le système n'est pas en équilibre thermodynamique à chaque instant.

4.1.2 Caractéristiques du tenseur des contraintes de viscosité

Montrons d'abord que le tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$ est symétrique : pour cela, analysons l'équilibre des couples sur un petit élément de volume cubique de côtés $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ parallèles aux axes (Fig 4.3).

Dans le raisonnement, nous nous limiterons à la rotation autour d'un axe parallèle à la direction Ox, passant par le centre du cube, ainsi qu'aux composantes σ'_{yz} et σ'_{zy} des forces de surface qui sont seules à contribuer au couple résultant Γ_x par rapport à cet axe (Fig. 4.3). On pourrait bien entendu raisonner de même pour les autres composantes. Les autres forces exercées sur les faces du cube sont parallèles à l'axe de rotation, ou le rencontrent, et ne contribuent pas à Γ_x. Calculons le couple résultant Γ_x des forces exercées

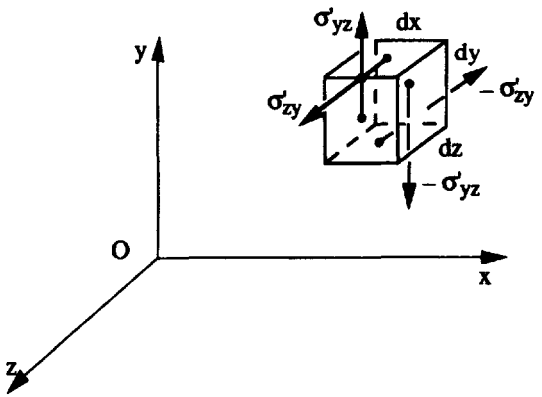


FIG. 4.3 – *Couples associés aux forces de viscosité qui s'exercent sur les faces d'un cube à l'intérieur d'un fluide.*

sur les faces du cube par rapport à un axe passant par son centre et parallèle à Ox (Fig. 4.3).

$$\Gamma_x = \sigma'_{zy}\,(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}y - \sigma'_{yz}\,(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}z = (\sigma'_{zy} - \sigma'_{yz})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (\sigma'_{zy} - \sigma'_{yz})\,\mathrm{d}V \tag{4.8}$$

où $\mathrm{d}V$ est le volume de l'élément. Si $\mathrm{d}^2\Omega_x/\mathrm{d}t^2$ est l'accélération angulaire de l'élément et $\mathrm{d}I$ son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, on a $\Gamma_x = \mathrm{d}I(\mathrm{d}^2\Omega_x/\mathrm{d}t^2)$. Faisons tendre $\mathrm{d}V$ vers zéro, comme nous l'avons fait pour établir l'équation (4.3) : $\mathrm{d}I$, qui est de l'ordre de $\mathrm{d}V(\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$, décroît plus vite que $\mathrm{d}V$ (comme $\mathrm{d}V^{5/3}$). On doit donc avoir $\sigma'_{zy} = \sigma'_{yz}$ pour que l'accélération angulaire reste finie (notons que, même s'il existait un mécanisme de création de couple en volume, le couple global sur l'élément de volume serait lui aussi proportionnel à $\mathrm{d}V$ et n'interviendrait pas).

Remarque Dans le calcul du couple, on n'a pas pris en compte les termes correspondant à la variation des forces de surface d'une face à l'autre, comme par exemple $(\partial\sigma'_{zy}\,/\,\partial y)\,\mathrm{d}y$. En effet dans l'équation (4.8), ces termes donnent des contributions d'ordre supérieur, du type $(\partial\sigma'_{zy}\,/\,\partial y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}V$, qui sont négligeables quand on fait tendre les dimensions de l'élément de volume vers 0.

Cette égalité se généralise aux autres composantes sous la forme :

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}. \tag{4.9}$$

Cette relation reflète simplement l'équilibre des couples exercés sur les volumes de fluide.

Précisons maintenant la relation entre les contraintes de viscosité (tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$) apparaissant dans un fluide et les déformations de ce fluide. Ces contraintes s'annulent quand un élément du fluide se déplace sans se déformer,

et ne dépendent, de ce fait, ni de la vitesse (translation globale), ni de la rotation locale. Cette dernière est déterminée par le tenseur antisymétrique d'élément général :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.10}$$

(les composantes ω_{ij} sont reliées au pseudovecteur vorticité $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$, que nous avons défini à la section 3.2.3 du chapitre 3) ; les composantes σ'_{ij} du tenseur des contraintes de viscosité, qui est lui-même symétrique, doivent donc dépendre uniquement des composantes e_{ij} de la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse, avec :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{4.11}$$

Les remarques précédentes nous permettent déjà de dire que, dans le cas général, les composantes du tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$ ne dépendent que de celles du tenseur $[\mathbf{e}]$.

4.1.3 Tenseur des contraintes de viscosité pour un fluide newtonien

Dans la suite de cet ouvrage, nous étudierons presque exclusivement les fluides qualifiés de newtoniens. Ce sont les fluides pour lesquels on suppose que les composantes σ'_{ij} du tenseur des contraintes de viscosité dépendent linéairement des valeurs instantanées des déformations. Lorsqu'on suppose, de plus, que le milieu est isotrope, cela se traduit par :

$$\sigma'_{ij} = 2A\, e_{ij} + B\, \delta_{ij}\, e_{mm} \tag{4.12}$$

où A et B sont des constantes réelles caractéristiques du fluide considéré.

Justification de la relation entre σ'_{ij} et e_{ij}

Au premier ordre, les composantes du tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$ dépendent linéairement des composantes de déformation e_{ij} : ces composantes doivent en effet changer de sens quand on inverse celui de la déformation. σ'_{ij} s'écrit donc :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl}\, e_{kl} \tag{4.13}$$

où A_{ijkl} représente un tenseur de rang quatre pour un milieu isotrope, dont on peut montrer que la forme générale est :

$$A_{ijkl} = A\, \delta_{ik}\, \delta_{jl} + A'\, \delta_{il}\, \delta_{jk} + B\, \delta_{ij}\, \delta_{kl}.$$

Le tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$ étant symétrique ($\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$), A_{ijkl} doit être symétrique en i et j, ce qui impose $A = A'$; on a donc :

$$\sigma'_{ij} = A\,(\delta_{ik}\, \delta_{jl}\, e_{kl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}\, e_{kl}) + B\, \delta_{ij}\, \delta_{kl}\, e_{kl} = A\,(e_{ij} + e_{ji}) + B\, \delta_{ij} e_{ll} \tag{4.14}$$

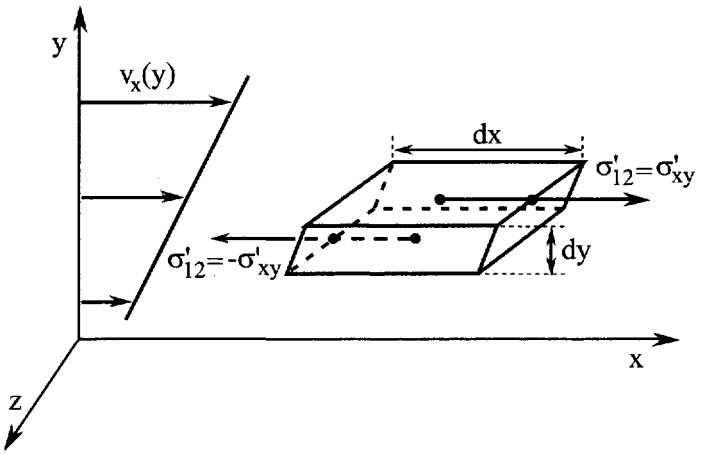


FIG. 4.4 – *Contrainte de cisaillement dans un écoulement de cisaillement simple.*

soit :

$$\sigma'_{ij} = 2A\, e_{ij} + B\, \delta_{ij} e_{ll}.$$

Nous utiliserons la relation (4.12) sous la forme équivalente :

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(2e_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\, e_{mm} \right) + \zeta(\delta_{ij}\, e_{mm}) \tag{4.15a}$$

qui utilise la décomposition du tenseur des déformations donnée au chapitre 3 (formule (3.5)). Le premier terme correspond à une déformation sans changement de volume, le second correspond à une dilatation isotrope ; il est nul pour un fluide incompressible.

Vérifions d'abord que η est identique au coefficient de viscosité de cisaillement introduit au chapitre 2 (section 2.1.2), dans le cas particulier d'un mouvement de cisaillement simple que nous avions utilisé alors (Fig 4.4). Supposons par exemple que le vecteur vitesse est orienté suivant la direction Ox et que la composante correspondante v_x ne varie que dans la direction perpendiculaire Oy. Les seuls termes non nuls de $[\boldsymbol{\sigma}']$ sont, d'après la relation (4.15a) :

$$\sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \tag{4.16}$$

On retrouve bien l'équation (2.2) pour le terme σ'_{xy} représentant les contraintes tangentielles dues au glissement relatif des différentes couches de fluide.

L'autre coefficient ζ apparaissant dans la relation (4.15a) est appelé *deuxième viscosité* ou *viscosité de volume* ; les contraintes correspondantes (termes diagonaux du tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$ de la forme $\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}$) sont associées aux variations de volume du fluide par compression. Ce terme n'apparaît pas dans l'étude des fluides incompressibles, car $\operatorname{div} \mathbf{v}$ est nul dans ce cas (les conditions dans lesquelles le fluide peut être considéré comme incompressible ont été discutées à la section 3.3.2 du chapitre 3). Dans ce cas, la relation (4.15a) prend la forme simplifiée :

$$\sigma'_{ij} = 2\,\eta\, e_{ij}. \tag{4.15b}$$

Le coefficient ζ intervient uniquement dans les phénomènes d'atténuation du son : la propagation du son dans un fluide s'accompagne en effet nécessairement d'un phénomène de compression ; dans le cas contraire, la vitesse du son serait infinie. En pratique, les mesures donnent des valeurs très faibles pour ζ.

Les coefficients de viscosité η et ζ introduits ici sont tous deux positifs ; nous le justifierons au chapitre 5 (section 5.3.1) dans le cas du coefficient η. En annexe au présent chapitre, nous donnons l'expression du tenseur des contraintes $[\boldsymbol{\sigma}']$ dans les systèmes de coordonnées courants.

4.2 Équation du mouvement d'un fluide

4.2.1 Équation de la dynamique d'un fluide dans le cas général

Nous appliquons la relation fondamentale de la dynamique à un volume de fluide $\mathcal{V}$ en écrivant l'égalité entre la variation temporelle de sa quantité de mouvement et l'ensemble des forces (de volume et de surface) exercées sur $\mathcal{V}$. Le *volume* $\mathcal{V}$ est *constitué d'éléments matériels* dont il suit les déplacements.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\iiint_{\mathcal{V}} \rho\, \mathbf{v}\, \mathrm{d}\tau\right] = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\, \mathbf{f}\, \mathrm{d}\tau + \iint_{\mathcal{S}} [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\Sigma. \tag{4.17}$$

Dans cette relation, $\mathrm{d}\tau$ représente le volume d'un élément matériel de fluide et $\mathrm{d}\Sigma$ est un élément de la surface fermée $\mathcal{S}$ limitant le volume $\mathcal{V}$. Le tenseur $[\boldsymbol{\sigma}]$ prend en compte l'ensemble des forces de surface (pression et viscosité) s'exerçant sur l'élément $\mathrm{d}\Sigma$. La force en volume par unité de masse $\mathbf{f}$ appliquée à l'unité de masse du fluide est, par exemple, la pesanteur ou la force électrostatique sur un fluide chargé.

La dérivée lagrangienne $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)$ est calculée dans un référentiel qui suit le mouvement du fluide (ces notions ont été discutées au chapitre 3, section 3.1.2). Dans ce référentiel, le produit $\rho \mathrm{d}\tau$, qui représente la masse d'un élément matériel de fluide, est une constante : en effet, tout élément de fluide contient, par définition, toujours les mêmes molécules qui suivent le champ de vitesse local de l'écoulement. Ce résultat essentiel nous permet

d'appliquer la dérivation temporelle uniquement au facteur $\mathbf{v}$ dans le premier terme de l'équation (4.17) et d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}\tau\right] = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.18}$$

En toute rigueur, un calcul complet du bilan des variations de quantité de mouvement dans le volume $\mathcal{V}$ serait nécessaire, mais le raisonnement simplifié ci-dessus contient l'essentiel de la physique du problème.

Par ailleurs, la composante totale de la force de surface dans la direction i peut s'écrire :

$$\left[\int_{\mathcal{S}} [\boldsymbol{\sigma}]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Sigma\right]_i = \int_{\mathcal{S}} \sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{4.19}$$

Elle représente donc le flux du vecteur de composantes $(\sigma_{ix},\,\sigma_{iy},\,\sigma_{iz})$ à travers la surface S. La relation (4.19) peut se transformer en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostrogradsky :

$$\int_{\mathcal{S}} \sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}\Sigma = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\tau \tag{4.20}$$

(dans les deux intégrales, on a omis le signe $\sum_i$ en utilisant la convention de sommation sur des indices répétés). L'équation (4.17) peut donc être mise sous la forme :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}\tau + \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}]\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.21}$$

L'expression $\mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}]$ représente ici le vecteur de composantes $\partial\sigma_{ij}\,/\,\partial x_j$. Rappelons que, dans l'équation (4.21), les intégrales portent sur un volume $\mathcal{V}$ qui suit le mouvement du fluide en se déformant. En faisant tendre ce volume vers zéro et en divisant par l'élément de volume, on obtient l'équation locale de mouvement d'une particule de fluide :

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}]. \tag{4.22}$$

En toute rigueur, comme nous l'avons vu au chapitre 3 (section 3.1.1), le volume minimal d'intégration (représentant celui d'une particule de fluide) est le volume au-dessous duquel l'hypothèse de continuité n'est plus vérifiée ; cette limite ne jouera de rôle que dans des cas très particuliers, comme celui de gaz à très faible pression.

Dans $[\boldsymbol{\sigma}]$, séparons maintenant la partie correspondant aux forces de pression de celle qui se rapporte aux forces de viscosité, comme dans la relation (4.7) ($\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$). On obtient :

$$(\mathrm{div}\,[\boldsymbol{\sigma}])_i = (\mathrm{div}\,[\boldsymbol{\sigma}'])_i - \frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} = (\mathrm{div}\,[\boldsymbol{\sigma}'])_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}\cdot \tag{4.23}$$

L'équation (4.22) devient alors :

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad}\, p + \mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}'] \tag{4.24}$$

cette équation est valable pour tous les fluides, car aucune hypothèse concernant la forme du tenseur des contraintes de viscosité $[\boldsymbol{\sigma}']$ n'a encore été introduite. On écrit le plus souvent cette équation en décomposant $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ en $\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ comme nous l'avons montré au chapitre 3 (section 3.1.3). Soit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad}\, p + \mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}'] \tag{4.25}$$

- le premier terme du membre de gauche de l'équation (4.25) représente l'accélération d'une particule de fluide due à la variation explicite de sa vitesse avec le temps dans un repère eulérien fixe (accélération dans un champ homogène instationnaire $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$) ;
- le second terme correspond à la variation de vitesse associée à l'exploration du champ de vitesse par la particule de fluide au cours de son mouvement. Cette accélération sera présente même dans un champ de vitesse stationaire $\mathbf{v}(\mathbf{r})$) ;
- le terme $\rho\mathbf{f}$ du membre de droite regroupe l'ensemble des forces en volume appliquées au fluide ;
- le second terme $-\,\mathbf{grad}\, p$ représente les forces de pression correspondant aux contraintes normales, qui existent même en l'absence de mouvement (pression hydrostatique). Dans le cas d'un fluide immobile ($\mathbf{v} = 0$), l'équation (4.25) se réduit à :

$$\rho \mathbf{f} - \mathbf{grad}\, p = 0 \tag{4.26}$$

  qui exprime le principe fondamental de l'hydrostatique ;
- enfin, le dernier terme $\mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}']$ représente les forces de viscosité dues à la déformation des éléments de fluide. Il contient à la fois les contraintes tangentielles, et les contraintes normales qui peuvent intervenir au cours du mouvement d'un fluide compressible ou élastique.

4.2.2 Équation de Navier–Stokes du mouvement d'un fluide newtonien

Reportons l'expression (4.15a) du tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$ dans le terme $\mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}']$ de l'équation (4.25) ; on obtient, pour la composante des forces de viscosité suivant la direction i :

$$\{\mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}']\}_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right). \tag{4.27}$$

Remarque

On a supposé implicitement que les variations spatiales $\partial\eta \,/\, \partial x_j$ et $\partial\zeta \,/\, \partial x_j$ des coefficients de viscosité η et ζ étaient négligeables, ce qui est vérifié pour des fluides homogènes. Cela n'est pas toujours le cas, comme par exemple pour les suspensions (chapitre 8, section 8.5) où les variations spatiales de concentration entraînent des variations de viscosité.

L'équation (4.27) s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}'] = \eta\,\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{v}). \tag{4.28}$$

En reportant cette expression dans l'équation (4.25), on obtient, pour l'équation de mouvement d'un fluide newtonien compressible ou non :

$$\rho\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = \rho\,\mathbf{f} - \mathbf{grad}\,p + \eta\,\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{v}). \tag{4.29}$$

Lorsque l'écoulement du fluide est tel qu'on peut négliger les effets de compressibilité, $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ et le second coefficient de viscosité ζ s'élimine. On obtient alors *l'équation de Navier–Stokes* que nous utiliserons largement dans la suite de cet ouvrage :

$$\rho\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = \rho\,\mathbf{f} - \mathbf{grad}\,p + \eta\,\Delta\mathbf{v}. \tag{4.30}$$

On trouvera, en annexe à ce chapitre, l'écriture de cette équation dans différents systèmes de coordonnées usuels.

4.2.3 Équation d'Euler pour le mouvement d'un fluide parfait

L'*équation d'Euler* est l'équation de la quantité de mouvement pour un fluide parfait (pour lequel les effets de viscosité sont négligeables) et incompressible. C'est donc simplement un cas particulier de l'équation de Navier–Stokes (4.30), dans laquelle nous posons $\eta = 0$, pour obtenir :

$$\rho\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = \rho\,\mathbf{f} - \mathbf{grad}\,p. \tag{4.31}$$

Cette équation est strictement valable pour les fluides parfaits, c'est-à-dire de viscosité nulle. C'est le cas de l'hélium dont l'isotope 4 voit sa viscosité s'annuler complètement lorsqu'il est refroidi à une température inférieure à 2,17 °K. Quelques propriétés de ce fluide très particulier seront présentées en annexe aux chapitres 6 et 7.

L'équation d'Euler est également valable pour les écoulements de fluides réels, dans lesquels les perturbations de vitesse dues à la viscosité (vitesse nulle sur une paroi solide par exemple) n'ont pas le temps de diffuser par viscosité

pendant le temps de passage du fluide : cela se produit pour les écoulements instationnaires, à des échelles de temps courts, ou à haute fréquence, tels que nous en décrirons plus loin.

De même, pour des écoulements à grands nombres de Reynolds, l'équation d'Euler peut être appliquée suffisamment loin des parois, mais seulement si l'écoulement en volume n'est pas turbulent. L'existence et les caractéristiques des zones où l'équation d'Euler ne s'applique pas (couche limite près d'une paroi solide, sillage derrière un obstacle) seront discutées au chapitre 9.

4.2.4 Forme adimensionnelle de l'équation de Navier–Stokes

Nous allons écrire l'équation de Navier–Stokes (4.30) à l'aide de combinaisons sans dimension (que nous noterons par des « primes ») des différentes quantités qui y interviennent. Soient L et U les échelles respectives de taille et de vitesse de l'écoulement ; on a :

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{L}, \qquad v' = \frac{\mathbf{v}}{U}, \qquad t' = \frac{t}{L\,/\,U}, \qquad p' = \frac{p - p_0}{1/2\,\rho\,U^2}.$$

Nous avons introduit dans p' la valeur p_0 que prend la pression en l'absence d'écoulement (pression hydrostatique). L'équation de Navier–Stokes devient, après division des deux membres par $\rho\,U^2\,/\,L$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{grad}')\,\mathbf{v}' = -\mathbf{grad}'\,p' + \frac{\eta}{\rho\,U\,L}\,\Delta'\,\mathbf{v}'.$$

Nous voyons apparaître, en facteur du terme $\Delta'\mathbf{v}'$, l'inverse du nombre de Reynolds $Re = (UL\,/\,\nu)$ associé à l'écoulement ; ce nombre représente le rapport des termes non linéaires $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ aux termes de viscosité $\nu\ \Delta\mathbf{v}$, comme nous l'avons vu au chapitre 2 (section 2.3.1).

D'après la forme de l'équation ci-dessus, nous pouvons dire que les champs de vitesse $\mathbf{v}'$ et de pression p', solutions de cette équation et satisfaisant les conditions aux limites, se mettront sous la forme :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{F}\,(x', y', z', t', Re)$$
$$p' = G\,(x', y', z', t', Re)$$

où $\mathbf{F}$ et G sont des fonctions dépendant de l'écoulement considéré.

4.3 Conditions aux limites dans les écoulements fluides

La détermination complète du mouvement d'un fluide (champ de vitesse $\mathbf{v}\,(\mathbf{r},\mathbf{t})$) nécessite, d'une part l'intégration de l'équation du mouvement des particules de fluide, d'autre part la donnée des conditions aux limites, c'est-à-dire la valeur des champs de vitesse et de contraintes à la frontière du domaine

qui limite le fluide. Deux cas sont à envisager, selon que le milieu qui limite le fluide est un corps solide, ou un autre fluide.

4.3.1 Conditions aux limites à la surface d'un corps solide

La non-pénétration du fluide dans le solide impose l'égalité des composantes de vitesse perpendiculaires à la surface de séparation, pour le fluide et le solide :

$$\mathbf{v}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n}.$$

Cette condition découle directement de l'équation de continuité $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ démontrée au chapitre 3 (formule (3.12)). Pour l'obtenir, il suffit d'intégrer cette relation dans un volume $\mathrm{d}\mathcal{V}$ limité par deux éléments de surface voisins, situés de part et d'autre de la surface du solide et parallèles à celle-ci (Fig 4.5). La condition à la limite précédente exprime que le flux du vecteur vitesse sortant du solide est nul dans le référentiel où le solide est au repos.

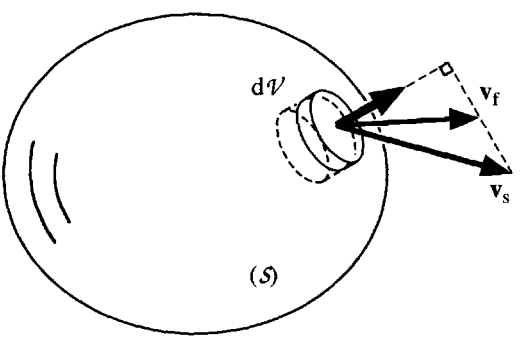


FIG. 4.5 – *Conditions aux limites sur les composantes de la vitesse d'écoulement à la surface de séparation entre un solide et un fluide parfait.*

Pour un *fluide parfait* (viscosité nulle), aucune condition n'est à imposer sur la composante tangentielle de la vitesse ; cela implique que le glissement du fluide parallèlement à la paroi solide est possible (cas de la Fig. 4.5).

En revanche, dans le cas d'un *fluide réel*, les contraintes de viscosité interdisent le glissement du fluide par rapport à la surface solide. Nous montrerons au chapitre 5 (section 5.3.1) qu'une telle discontinuité entraînerait une dissipation d'énergie infinie à la surface, par l'effet de la viscosité. Les composantes tangentielles des vitesses du fluide et du solide doivent donc être égales, ce qui, ajouté à la condition d'égalité des composantes normales, conduit à la relation :

$$\mathbf{v}_{\text{fluide}} = \mathbf{v}_{\text{solide}}. \tag{4.32}$$

4.3.2 Conditions aux limites entre deux fluides – effet de la tension superficielle

En plus de la condition (4.32) de continuité sur les vitesses, il faut exprimer une condition sur la continuité des contraintes (forces par unité de surface) à la surface de séparation entre les deux fluides. En effet, on doit avoir équilibre entre les contraintes à l'intérieur de chacun des deux liquides et les contraintes localisées sur la surface.

Remarque La condition d'égalité des contraintes à la surface de séparation entre un fluide et un solide est également valable, même pour un solide très peu déformable. Cependant, elle est surtout utile pour l'étude des efforts mécaniques induits par le fluide à l'intérieur du solide et ne fournira pas d'informations supplémentaires sur les caractéristiques de l'écoulement.

– À l'interface entre deux fluides, la condition sur les contraintes normales (pression) s'exprime par la loi de Laplace écrite au chapitre 1 (formule (1.58)). On a, entre les pressions p_1 et p_2 dans chaque fluide, la relation :

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \tag{4.33}$$

γ est le coefficient de tension superficielle entre le fluide 1 et le fluide 2, et R et R' sont les rayons de courbure principaux de l'interface. Rappelons que la pression est plus élevée à l'intérieur de la concavité de l'interface.

– Par ailleurs, l'équilibre des contraintes tangentielles à l'interface s'exprime par :

$$([\boldsymbol{\sigma}]^{(1)} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = ([\boldsymbol{\sigma}]^{(2)} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}. \tag{4.34}$$

Dans cette relation, les vecteurs résultant des produits tensoriels $[\boldsymbol{\sigma}]^{(i)} \cdot \mathbf{n}$ représentent les contraintes $\Sigma_{(i)}$ qui s'exercent sur l'interface de normale $\mathbf{n}$. Le produit scalaire de $\Sigma_{(i)}$ par le vecteur unitaire $\mathbf{t}$ tangent à l'interface donne les composantes tangentielles de ces contraintes. Les indices (i) ($i = 1$ et 2) se rapportent aux deux fluides de part et d'autre de l'interface.

L'équation (4.34) exprime l'équilibre au niveau de l'interface entre l'action exercée par chaque fluide sur l'autre et la réaction qu'il en reçoit.

Si l'un au moins des fluides est parfait, la contrainte tangentielle à l'interface est nulle.

Pour un fluide newtonien incompressible, la relation (4.15b) entre contraintes et gradient de vitesse prend la forme : $\sigma'_{ij} = \eta \left(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i \right)$ (en tenant compte de la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$). La condition de continuité (4.34) devient alors (Fig. 4.6) :

$$\eta_1 \left(\left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) n_i \right) t_j = \eta_2 \left(\left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial x_i} \right) n_i \right) t_j \tag{4.35}$$

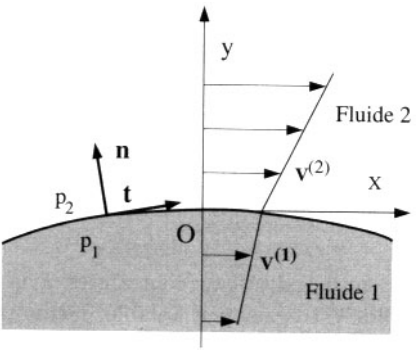


FIG. 4.6 – *Conditions à l'interface entre deux fluides visqueux (1) et (2).*

où t_i (resp. n_i) représente les composantes d'un vecteur unitaire $\mathbf{t}$ (resp. $\mathbf{n}$) quelconque, tangent (resp. normal) à l'interface. Supposons plus particulièrement que, dans le cas de la figure 4.6, on peut remplacer l'interface entre les deux fluides près du point O par un plan xOz, et que la vitesse $\mathbf{v}$ est localement parallèle à Ox et fonction de la distance $y(v_x(y))$. La contrainte tangentielle sur l'interface se réduit au terme $\sigma_{xy} = \eta\, \partial v_x/\partial y$. La condition d'égalité des contraintes tangentielles se réduit alors à :

$$\eta_1 \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial y} \tag{4.36}$$

ce qui signifie simplement que les gradients de vitesse à l'interface sont dans le rapport inverse des viscosités dynamiques.

La relation (4.36) se simplifie encore davantage lorsque l'un des deux fluides est un gaz (l'interface est alors qualifiée de *surface libre*) ; la faible viscosité des gaz permet alors d'écrire la nullité de la contrainte tangentielle dans le liquide à l'interface, avec (comme pour un fluide parfait) :

$$([\boldsymbol{\sigma}']^{(\text{liquide})} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 0 \tag{4.37}$$

soit, dans l'exemple décrit plus haut, $\partial v_x/\partial y = 0$ pour le liquide.

4.4 Les fluides non newtoniens

4.4.1 Fluides non newtoniens et rhéologie

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités au cas des *fluides* dits *newtoniens*, pour lesquels on a proportionnalité à tout instant entre les contraintes et les taux de cisaillement (ou les gradients de vitesse). Nous allons ici discuter qualitativement les *fluides* dits *non newtoniens* pour lesquels cette relation n'est plus linéaire et peut, de plus, dépendre de l'histoire de

l'écoulement. Souvent, ces propriétés proviennent de la présence dans le fluide d'objets de grande taille par rapport à l'échelle atomique (tout en restant très petits par rapport à la dimension globale de l'écoulement) : ce sont des macromolécules dans les solutions de polymères, ou des particules dans les suspensions, ou encore des gouttelettes dans les émulsions. Ces objets peuvent eux-mêmes former des structures encore plus grandes : comme des agrégats de plaquettes dans les argiles, des particules ou des macromolécules, qui influencent, considérablement les propriétés d'écoulement. Ces fluides sont très répandus tant dans la nature (neige, boue, sang, crème ...) que dans la vie courante (peinture, mousse à raser, mayonnaise, yaourt) ou l'industrie (ciment ...).

La compréhension de ces caractéristiques d'écoulement nécessite de comprendre la réponse des fluides à une contrainte imposée. C'est l'objet de la *rhéologie* : ce terme date seulement des années 20 et a été proposé par Bingham considéré, avec M. Reiner, comme le fondateur de cette science. Rappelons à ce propos l'affirmation d'Héraclite : *panta rei* « tout s'écoule ».

4.4.2 Mesures des caractéristiques rhéologiques des fluides

Pour des fluides newtoniens ou des fluides non newtoniens aux caractéristiques indépendantes du temps, il suffit de mesurer la relation entre le taux de déformation du fluide et la contrainte à l'origine de cette déformation. Pour un fluide newtonien, un seul point expérimental suffit en principe, alors que l'ensemble de la courbe est nécessaire pour les fluides non newtoniens.

Au contraire, pour les fluides dépendant du temps et les fluides viscoélastiques, il faut analyser la réponse temporelle du fluide à une excitation variable dans le temps. Par exemple, on peut mesurer l'évolution de la déformation lorsqu'on applique brusquement une contrainte, ou encore analyser la réponse du fluide à des variations sinusoïdales de la contrainte ou du taux de cisaillement.

Les approches expérimentales peuvent être très simples : mesure de débit à travers un tube sous une pression donnée, ou mesure de vitesse de la chute d'une bille dans un fluide. La mesure du temps de vidange d'un certain volume de fluide à travers un entonnoir fournit un test de terrain acceptable dans de nombreux cas. Cependant, le taux de cisaillement auquel sont soumis les fluides n'est pas constant dans de tels systèmes et, de plus, il est souvent trop complexe pour être calculé. De telles mesures ne sont quantitatives que pour des fluides newtoniens (après une calibration soigneuse avec des fluides bien connus) ; elles seront en revanche fort utiles pour évaluer simplemement la qualité d'un lot de fluide en vue d'une utilisation immédiate dans l'industrie ou sur le terrain.

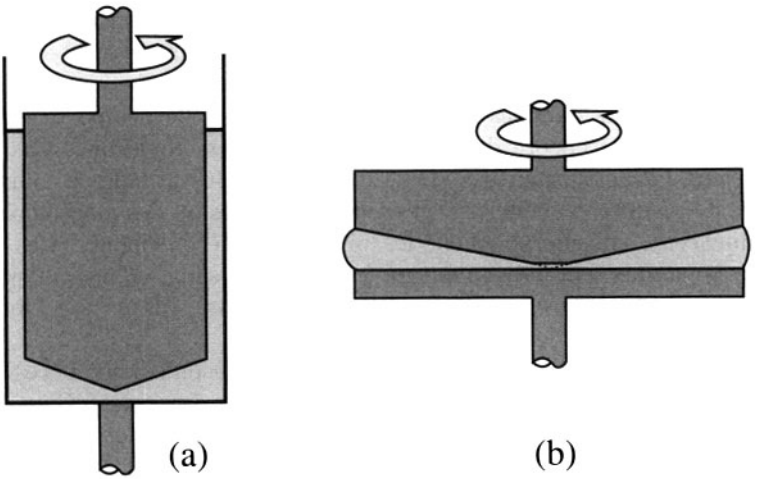


FIG. 4.7 – *(a) rhéomètre de Couette cylindrique ; (b) rhéomètre cône-plan. La rotation est imposée à un des solides et le couple mesuré sur celui-ci ou sur la surface lui faisant face.*

Les viscosimètres de laboratoire utilisent des géométries où le taux de cisaillement est le mieux connu et le plus constant possible dans le volume de mesure. La figure 4.7 montre deux des géométries les plus courantes.

Dans le *viscosimètre de Couette* à cylindres coaxiaux (a), le fluide est placé entre deux cylindres concentriques dont un seul est en mouvement. Dans les appareils les plus simples (dits à cisaillement imposé), on mesure le couple sur un des cylindres, après avoir imposé la vitesse de rotation de l'autre. Dans d'autres cas, on impose le couple, et on mesure la vitesse de rotation ainsi obtenue. Cette dernière configuration (dite à *contrainte imposée*) permet la détermination des seuils de contrainte des fluides à seuil. Le taux de cisaillement est à peu près constant si l'intervalle entre les deux cylindres est faible devant leur rayon, comme nous le verrons dans le calcul du champ de vitesse présenté plus loin dans ce chapitre. Des instabilités peuvent apparaître à forte vitesse (chapitre 10, section 10.3.1), et le domaine de taux de cisaillement accessible est limité. Par ailleurs, on a aussi des effets parasites sur le fond horizontal des cylindres, ce qui explique le choix d'une forme cônique pour le bas du cylindre intérieur. Enfin, il n'est pas toujours facile d'obtenir un entrefer bien constant, surtout s'il est très faible. De tels dispositifs peuvent être très sensibles et permettre des mesures sur des fluides peu visqueux ; les appareils les plus sensibles permettent également d'atteindre des domaines de taux de cisaillement suffisamment faibles pour ne pas perturber la structure interne des fluides. Les rayons des cylindres varient de un à quelques centimètres et les entrefers de un dixième à quelques millimètres (mais des dispositifs de plus grande taille sont nécessaires pour

analyser des suspensions de grosses particules). Dans le cas où les rayons intérieur R_1 et extérieur $R_2 = R_1 + \Delta R$ sont proches ($\Delta R \ll R_2$) et pour des cylindres de hauteur h, le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et la contrainte σ vérifient approximativement :

$$\sigma = \frac{M}{2\pi R^2 h} \tag{4.38a}$$

et

$$\dot{\gamma} = \frac{R}{\Delta R}\,\omega_0 \tag{4.38b}$$

(M est le moment du couple appliqué aux cylindres, ω_0 la vitesse angulaire de rotation et R la moyenne des rayons).

Le rhéomètre cône–plan (Fig. 4.7b), nécessite peu de liquide et est souvent plus facile d'emploi. Les cônes sont d'angle α très faible ($\alpha \leq 4°$). On fait tourner le cône supérieur en laissant le plan inférieur fixe ou l'inverse : le taux de cisaillement est presque constant, sauf près de la pointe (légèrement tronquée) si le sommet du cône coïncide parfaitement avec le plan inférieur. En effet, l'épaisseur et la vitesse tangentielle augmentent tous les deux linéairement avec la distance à l'axe de rotation. Le gradient vertical de vitesse est donc constant. Avec les mêmes notations que pour les équations (4.38a et b), on trouve :

$$\sigma = \frac{3M}{2\pi R^3} \tag{4.39a}$$

et

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega_0}{\alpha}\,. \tag{4.39b}$$

Là encore, les instabilités hydrodynamiques peuvent être une gêne à haute vitesse, ainsi que la présence d'une surface libre sur le côté qui favorise l'évaporation. Les dispositifs cône–plan sont en général moins sensibles et ne permettent d'étudier que des viscosités et/ou des taux de cisaillement plus élevés que pour les rhéomètres de Couette. De plus, certains rhéomètres permettent la mesure des contraintes normales aux surfaces en déplacement (nous verrons que cette mesure permet en particulier de détecter les éventuelles propriétés élastiques des fluides).

4.4.3 Fluides indépendants du temps soumis à un cisaillement

Principaux types de comportements

En général, on caractérise la vitesse de déformation par le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ qui correspond, pour un écoulement de cisaillement simple, au gradient de vitesse $\partial v_x/\partial y$ et s'exprime en s^{-1}. La figure 4.8 montre, en échelle

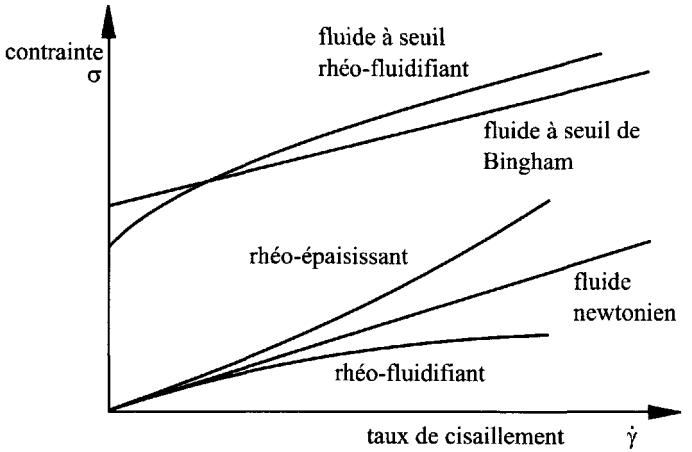


FIG. 4.8 – *Relation entre le taux de cisaillement et la contrainte, pour différents types de fluides.*

linéaire, des relations typiques entre contrainte de cisaillement σ et taux de déformation $\dot{\gamma}$ observées pour différents types de fluides non newtoniens.

♦ Fluides à seuil

Pour des fluides à seuil, on n'a aucun écoulement tant que la contrainte appliquée ne dépasse pas une valeur critique σ_c (dans des ouvrages ou articles anciens on trouve également le qualificatif de « fluides plastiques »). De nombreuses suspensions concentrées de solides dans un liquide et certaines solutions de polymères présentent effectivement un seuil d'écoulement, au-delà duquel la contrainte augmente avec la déformation. On introduit souvent la notion théorique de « *fluide de Bingham* » qui suppose une variation linéaire de la déformation avec la contrainte au-delà du seuil : une telle caractéristique ne reflète pas bien la relation contrainte – taux de cisaillement des fluides réels, et la loi réelle, au-dessus du seuil, est souvent plus proche d'une loi de puissance.

Appliquons une différence de pression croissante à un tel fluide qui remplit un tube cylindrique : on observe, juste au-dessus d'une valeur seuil, un écoulement en bloc de presque tout le fluide, avec une vitesse indépendante de la distance aux parois. Les gradients de vitesse sont localisés dans le voisinage immédiat de celles-ci, car c'est le seul endroit où on atteint la contrainte nécessaire pour créer un écoulement de cisaillement. On parle dans ce cas d'*écoulement bouchon*. En augmentant la contrainte, on retrouve un gradient de vitesse réparti dans tout le volume. Nous présenterons, à la section 4.6.2, le calcul quantitatif de ces profils.

On peut interpréter ces comportements par la destruction des structures tridimensionnelles internes du fluide qui se forment au repos : ainsi, certaines

argiles (*bentonites* ou *laponites* par exemple) ont une structure microscopique en plaquettes. En l'absence d'écoulement, les plaquettes forment des agrégats rigides, qui résistent jusqu'à un certain seuil de contrainte. Au-dessus de ce seuil, la structure est en partie détruite, et l'écoulement est rendu possible : plus la vitesse augmente, plus la structure se détruit, tandis que les plaquettes s'alignent dans la direction du mouvement. Il en résulte une augmentation de la contrainte avec la déformation plus lente que celle que donnerait une relation linéaire. On parle alors de fluides à seuil *rhéo-fluidifiants* (appelés parfois « fluides de Casson »). Un autre exemple de fluides de ce type est représenté par certaines suspensions de particules colloïdales; de même, les peintures doivent s'étaler quand elles sont soumises à un cisaillement avec un pinceau, mais elles ne doivent pas couler spontanément une fois appliquées.

Les boues de forage constituent un exemple particulièrement significatif d'une utilisation pratique de ce type de fluide : elles sont injectées au fond du puits au niveau du *trépan* à travers un train de tiges creuses qui entraînent la rotation de ce dernier depuis la surface, puis elles remontent ensuite vers la surface dans le forage. Elles doivent pouvoir couler facilement quand une pression de pompage est appliquée, mais doivent aussi entrainer les débris de roches vers la surface et empêcher leur chute quand la circulation est arrêtée.
Parmi les autres fluides à seuil dont les applications pratiques sont importantes, on peut citer de nombreuses crèmes et émulsions utilisées par exemple dans l'industrie des cosmétiques et des pâtes dentifrices. Un autre exemple est le ciment frais (contrainte seuil σ_c de l'ordre de quelques dizaines de pascals), ou divers produits de l'industrie alimentaire (concentrés de tomate à secouer avant de verser).

♦ Fluides rhéo-fluidifiants

Ces fluides s'écoulent même sous une contrainte faible, mais ils ont une viscosité effective $\eta_{\text{eff}} = \sigma / \dot{\gamma}$ qui diminue lorsque la contrainte croît (noter que la littérature en langue anglaise parle de *shear-thinning fluids*, et que l'ancienne appellation de fluides « pseudoplastiques » est parfois rencontrée). De nombreuses solutions de polymères présentent ce type de comportement qui peut être attribué à des macromolécules entremêlées qui se séparent progressivement et s'alignent dans les écoulements. Dans d'autres cas, il provient de la disparition des structures qui sont formées par suite de l'attraction entre particules solides.

Des exemples classiques sont les suspensions diluées de particules solides, les solutions diluées de polymères de masse moléculaire élevée. On peut citer également le shampooing, ou les concentrés de jus de fruits. De même, les encres d'imprimerie formées de pigments solides en suspension dans des liquides complexes ont des caractéristiques rhéofluidifiantes.

♦ Fluides rhéo-épaississants

Ce sont des fluides dont la viscosité augmente cette fois avec la contrainte appliquée. Le sable mouillé en est un exemple : à faible vitesse, les grains glissent les uns par rapport aux autres en étant lubrifiés par l'eau ; sous forte contrainte, ils viennent frotter et s'arc-bouter les uns contre les autres.

Les suspensions concentrées d'amidon ont des propriétés similaires. Certaines solutions de polymères présentent également ce comportement : quand les macromolécules sont initialement enroulées sur elles-mêmes, les contraintes associées à l'écoulement peuvent les dérouler en longues chaînes, ce qui augmente la viscosité. Ces fluides sont quelquefois appelés « dilatants » (*shear thickening* en anglais), ils n'ont presque jamais de seuil d'écoulement. D'autres fluides ont des caractéristiques encore plus complexes que les précédents et présentent successivement des régimes rhéo-fluidifiants et rhéo-épaississants lorsqu'on augmente le taux de cisaillement (on peut ainsi commencer par dérouler et aligner des chaînes polymères, ce qui diminue la viscosité η, jusqu'à ce qu'elles commencent à interagir et à se structurer, ce qui augmente de nouveau η). La diminution de η dans le domaine des contraintes de cisaillement intermédiaires peut entraîner l'apparition d'instabilités.

Deux exemples de fluides réels

♦ Fluide rhéofluidifiant sans seuil

La figure 4.9 montre des caractéristiques rhéologiques typiques obtenues pour des solutions de différentes concentrations d'un polymère (scléroglucane de la famille des polysaccharides) produit industriellement par fermentation bactérienne. Ce polymère, et d'autres similaires, sont utilisés dans de nombreuses applications chimiques et agroalimentaires. Au lieu de tracer le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ en fonction de la contrainte σ, comme à la figure 4.8, on a tracé en coordonnées logarithmiques la variation de la viscosité effective $\eta = \sigma / \dot{\gamma}$ en fonction du taux de cisaillement. Un tel tracé permet de mettre en évidence les déviations par rapport au comportement newtonien : la caractéristique de l'eau apparaîtrait comme une droite horizontale correspondant à une viscosité constante de l'ordre de 1 mPa.s, alors que des variations de plus d'un facteur 1 000 sont observées pour certaines solutions. Chaque courbe correspond à une concentration donnée croissant de bas en haut. La concentration en masse de polymère dans une masse donnée de solution varie typiquement de 5.10^{-4} à 3.10^{-3}.

On observe que la viscosité effective $\eta = \sigma / \dot{\gamma}$ varie avec $\dot{\gamma}$ en suivant une loi de puissance :

$$\eta = K\dot{\gamma}^{-\alpha} \tag{4.40}$$

(représentée par une droite en coordonnées logarithmiques) sur une gamme de taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ d'autant plus large que la concentration de la solution est forte (les exposants α sont indiqués à côté de chaque courbe de la figure). Aux faible valeurs de $\dot{\gamma}$, la viscosité tend vers une valeur constante η_0 (palier newtonien) : η_0 est d'autant plus forte que la concentration est plus élevée et peut être plusieurs millliers de fois supérieure à la viscosité du solvant (l'eau). De plus, la limite inférieure du domaine de valeurs de $\dot{\gamma}$, où la loi de puissance est valable, est d'autant plus faible que l'exposant α est élevé.

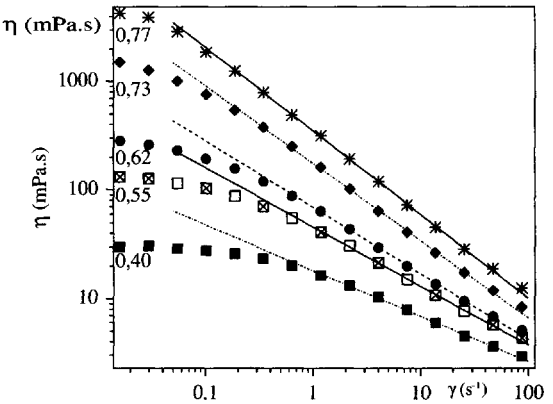


FIG. 4.9 – *Mesures de la viscosité apparente $\eta = \sigma/\dot{\gamma}$ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ réalisées en écoulement continu dans un viscosimètre de Couette pour des solutions aqueuses de polymère (scléroglucane) de différentes concentrations. Les chiffres reportés sur chaque courbe correspondent à l'exposant α de la variation de la viscosité avec $\dot{\gamma}$ (document C. Allain, A. Paterson, A. d'Onofrio).*

Aux plus forts taux de cisaillement, la viscosité de la solution reste de toute manière supérieure à celle du solvant. Comme pour presque tous les fluides non newtoniens, la variation de la viscosité reflète une évolution de la structure interne du fluide (ici un réarrangement des macromolécules). Les caractéristiques rhéologiques des solutions correspondant à la figure 4.9 varient peu lorsqu'on les soumet à des cycles d'augmentation et de diminution du taux de cisaillement. Ce comportement n'est pas général, et les caractéristiques rhéologiques des fluides complexes évoluent fréquemment de façon marquée au fur et à mesure des cycles de variation de contrainte.

♦ Fluide à seuil

La figure 4.10 montre la relation contrainte–déformation en coordonnées semi–logarithmiques pour un mélange eau–kaolin qui correspond à une suspension de particules colloïdales : lorsque la contrainte est progressivement augmentée à partir de zéro, aucun écoulement ne se produit jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur de l'ordre de 10 Pa.

Quelques lois rhéologiques approchées

Pour de nombreuses applications pratiques, il faut disposer de lois analytiques approchées reliant la contrainte et la déformation. Comme nous venons de le voir, une variation en loi de puissance du type de celle de l'équation (4.40) – initialement proposée par Ostwald – fournit une première approximation valable dans certains cas. Un exposant $\alpha > 0$ correspond

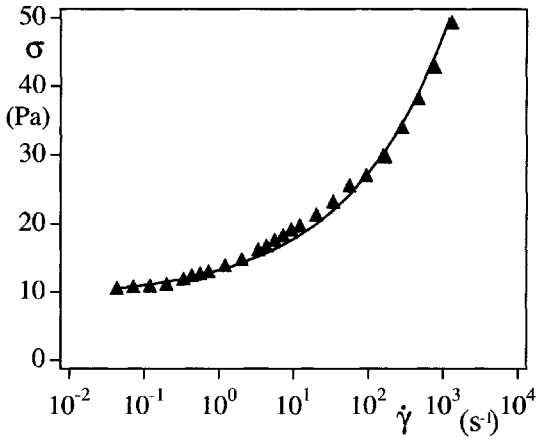


FIG. 4.10 - *Relation contrainte-déformation (en coordonnées semi-logarithmiques) mesurée avec un rhéomètre plan-plan sur un mélange eau-kaolin. Les triangles pleins représentent les données expérimentales. La ligne continue correspond à un ajustement avec l'équation (4.43) (document P. Coussot).*

à un fluide rhéo-fluidifiant (les plus fréquents), alors que $\alpha < 0$ correspond aux fluides rhéo-épaississants. Pour $\alpha > 0$, la relation (4.40) prédit que η devient infini quand le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ tend vers 0, alors qu'on observe que η tend au contraire vers une valeur limite constante (appelée souvent « palier newtonien ») comme on l'observe dans la figure 4.9. Pour représenter l'ensemble de la courbe et, en particulier, les limites aux valeurs de $\dot{\gamma}$ faibles et élevées, on utilise des formules plus complexes du type :

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = f(\dot{\gamma}) \tag{4.41}$$

où la fonction $f(\dot{\gamma})$ est par exemple une loi de puissance modifiée du type $f(\dot{\gamma}) = (1 + \beta^2 \dot{\gamma}^2)^{-p}$ (loi de Carreau).

Les lois précédentes prédisent une viscosité finie pour $\dot{\gamma} = 0$; et ainsi elles ne s'appliquent pas par construction aux fluides à seuil. Il faut donc utiliser d'autres équations, dont la plus simple est celle de Bingham, qui suppose que le taux de cisaillement est proportionnel à la différence $\sigma - \sigma_c$ au-dessus de la valeur seuil σ_c de la contrainte σ. Très peu de fluides suivent une telle caractéristique, et la relation contrainte–déformation présente en général une courbure dirigée vers le bas (fluides à seuil rhéofluidifiants). On représente souvent un tel comportement par des lois combinant effet de seuil et lois de puissance, comme la loi d'Herschel–Bulkley :

$$\sigma \leq \sigma_c \ : \ \dot{\gamma} = 0 \tag{4.42}$$

et

$$\sigma > \sigma_c \ : \ \sigma = \sigma_c + K\dot{\gamma}^n. \tag{4.43}$$

Cette loi représente très bien, par exemple, la caractéristique rhéologique de la figure 4.10 (la ligne en traits pleins correspond aux valeurs $\sigma_c = 9$ Pa, $n = 0,32$ et $K = 4,2$ Pa.s$^{-0,32}$).

4.4.4 Fluides non newtoniens dépendant du temps

Quelques types de comportements

♦ Fluides thixotropes

Ces fluides ont une viscosité qui diminue avec le temps quand on leur applique une contrainte constante. Après suppression de cette contrainte, on ne retrouve la viscosité initiale qu'après un certain temps. Les solutions concentrées de polymères et les suspensions en sont des exemples. De nombreux corps sont à la fois thixotropes, rhéofluidifiants et même, à seuil.

La relation entre thixotropie et propriétés rhéo-fluidifiantes dépend des valeurs relatives des temps caractéristiques τ de réarrangement de la structure interne du fluide, et T de variation de la contrainte appliquée. Le rapport :

$$De = \frac{\tau}{T} \tag{4.44}$$

de ces deux temps est appelé nombre de Deborah, De. Lorsque le nombre De est très petit devant l'unité, le fluide a le temps de se réarranger lorsqu'on fait varier la contrainte (ou bien le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$) imposée. Pour un fluide rhéo-fluidifiant, tel que ceux décrits à la section 4.4.3, la viscosité apparente diminue avec $\dot{\gamma}$, mais la valeur obtenue est indépendante de la durée de la mesure ; de plus, si on décrit des cycles d'augmentation et de diminution de taux de cisaillement, la relation contrainte–taux de cisaillement est toujours la même. En pratique, de telles caractéristiques représentent surtout un cas modèle qui ne décrit bien que des écoulements permanents ou lentement variables de fluides réels. Au contraire, pour un nombre De très supérieur à l'unité et, même si on impose une contrainte ou un cisaillement constant, les propriétés rhéologiques mesurées évoluent au fur et à mesure du changement de structure des fluides. De même, lorsqu'on décrit une suite d'augmentations et de diminutions du taux de cisaillement, on observe un effet d'hystérésis et on finit par décrire – après un régime transitoire – un cycle limite où les courbes caractéristiques correspondant à une variation dans un sens et dans l'autre ne coïncident pas. De tels comportements sont des manifestations de la thixotropie.

Pour les polymères, la thixotropie reflète souvent, à l'échelle microscopique, le désenchevêtrement d'amas de macromolécules. Pour les suspensions, on peut avoir destruction d'édifices de particules dont la formation est due à l'existence de forces d'attraction électrostatiques ou

de forces de Van der Waals. On observe des propriétés similaires pour certaines solutions d'argiles (bentonites) évoquées à la section précédente : lorsqu'on mesure la variation du couple à exercer pour maintenir une vitesse de rotation donnée, on constate que celui-ci diminue avec le temps sur des durées de plusieurs minutes ou dizaines de minutes. Si on ramène ensuite progressivement la vitesse de rotation à zéro, on décrit une caractéristique contrainte–déformation différente de la courbe initiale : une modification lente de la structure s'est produite et on ne retrouve la courbe de départ qu'en laissant le fluide au repos pendant plusieurs heures (même si le fluide retrouve en quelques minutes, ou même secondes, une partie de ses propriétés au repos). Cette évolution lente de la structure interne du fluide en écoulement se superpose aux non-linéarités de la relation contrainte–défomation : elle est d'autant plus marquée que les gradients de vitesse auxquels est soumis le fluide sont plus importants. Enfin, les temps caractéristiques de destruction et de réarrangement de la structure interne de tels fluides soumis à des cisaillements peuvent être différents.

Les fluides thixotropes ont de nombreuses applications pratiques : les peintures et les boues de forage déjà évoquées sont fortement thixotropes, ce qui vient renforcer l'effet des caractéristiques rhéofluidifiantes que nous avons vues plus haut. Quelques rares fluides ont des caractéristiques inverses des précédentes et deviennent plus visqueux au cours du temps quand on les soumet à un cisaillement : on parle alors de fluides anti–thixotropes, tels que la pâte de gypse et certains polymères auto-associatifs (on rencontre également le terme de *rhéopexie*, mais il caractérise plutôt la solidification progressive de certains fluides lorsqu'ils sont agités).

Remarque Marcus Reiner, l'un des pères de la rhéologie avec E.C. Bingham, a défini le *nombre de Deborah* en référence à la prophétesse Deborah qui, selon la Bible (livre des Juges **5**, 5), chanta après une victoire sur les Philistins : « les montagnes coulèrent devant le Seigneur ». Dans les traductions anglaises, « couler » fut incorrectement changé en « fondre », mais c'était négliger le fait que si, à l'échelle humaine, les montagnes paraissent intangibles elles finissent nécessairement par se déformer, puis par disparaître, pendant la durée – infinie – de l'observation divine. Tout n'est qu'une question d'échelle de temps caractéristique !

♦ Viscoélasticité

La *viscoélasticité* correspond à un comportement intermédiaire entre celui d'un solide élastique (déformation proportionnelle à la contrainte et reliée à celle-ci par les coefficients d'élasticité) et celui d'un liquide (taux de déformation croissant avec la contrainte). Un exemple particulièrement spectaculaire de tels fluides (Fig. 4.11) est fourni par des boules de certaines pâtes silicone qui rebondissent élastiquement sur le sol comme des solides mais s'étalent comme des liquides quand on les laisse posées assez longtemps sur un plan.

Quand la vitesse de variation des contraintes est très élevée (comme dans le cas d'un impact), la structure interne de la substance n'a pas le

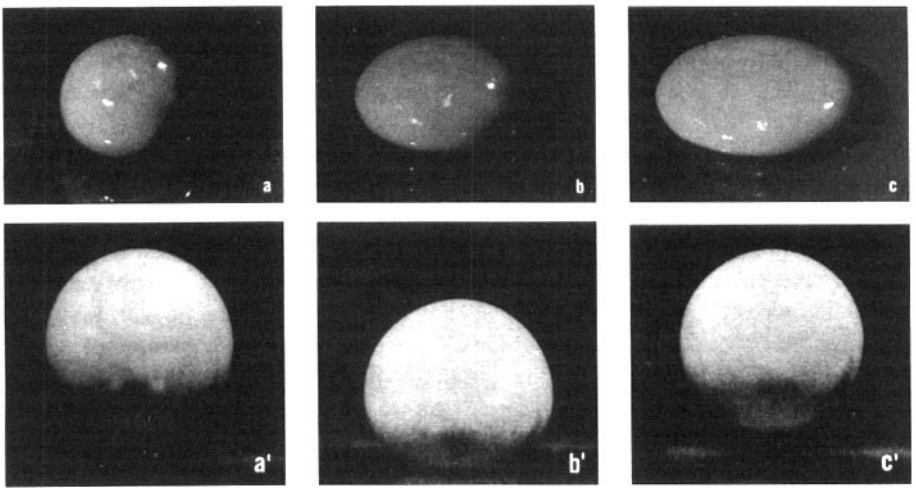


FIG. 4.11 – *Une boule de certaines pâtes silicone se comporte très différemment suivant la variation temporelle des contraintes auxquelles elle est soumise. Vues du haut : elle s'étale comme un liquide si on la laisse reposer un long moment sur une table. Vues du bas : elle rebondit comme une balle élastique si on la laisse tomber en la soumettant ainsi à une contrainte brève et intense. (Extrait de* Illustrated experiments in Fluid mechanics*)*

temps de se réarranger pour s'adapter, et le matériau réagit comme un solide élastique ; il réagit au contraire comme un fluide et finit par s'étaler sous l'effet d'une contrainte constante dans le temps quand la vitesse de variation des contraintes est faible. Comme la thixotropie, la viscoélasticité fait intervenir des changements de structure induits par les contraintes, et la valeur relative des temps de réarrangement de la structure et d'évolution des contraintes appliquées est également un paramètre essentiel.

Les solutions concentrées aqueuses de polymères (solution de polyoxyéthylène à des concentrations en masse de quelques centièmes), la pâte à pain, les fibres textiles artificielles sont d'autres exemples de fluides viscoélastiques. Parfois, les caractéristiques des matériaux viscoélastiques sont proches de celles des solides – c'est le cas, par exemple, des gelées et de certaines mousses.

Les fluides viscoélastiques présentent enfin généralement des différences de contraintes normales entre les composantes parallèles et perpendiculaires au plan du cisaillement. Cet effet – aussi observable dans d'autres types de fluides – sera décrit plus loin dans ce chapitre.

♦ Autres dépendances par rapport aux variations temporelles des contraintes

On observe aussi des comportements dependant du temps sur des substances de caractéristiques rhéologiques très différentes et pas

nécessairement viscoélastiques : le sable mouillé ne réagit pas de la même manière si on appuie fortement et brièvement dessus (les grains tendent à s'arc-bouter les uns contre les autres et le volume entre grains peut même alors augmenter), ou plus longuement (on peut y enfoncer un objet pointu). Dans le premier cas, le phénomène, appelé *dilatance*, permet d'expliquer pourquoi, lorsqu'on marche sur du sable de plage humide, la zone voisine du pied apparaît plus sèche. Pour les mêmes raisons, une épaisse couche de farine de maïs (maïzena) en solution dans l'eau réagit comme un solide élastique si on la frappe sèchement avec le fond d'une cuillère, alors qu'on pourra y enfoncer facilement cette même cuillère en la déplaçant plus lentement (ou même en la laissant posée). Si, dans ces deux exemples, le temps de relaxation des structures est très court, il peut être beaucoup plus élevé dans certains cas. Un cas extrême est celui du manteau terrestre, qui se comporte comme un fluide visqueux dans les mouvements convectifs tectoniques, mais, qui est bien évidemment un solide aux échelles de temps usuelles.

Mesure des propriétés dépendantes du temps

Une première approche consiste à imposer une brusque variation de contrainte (resp. de taux de cisaillement) et à suivre les variations correspondantes de la déformation (resp. de la contrainte). Augmentons par exemple brusquement le couple Γ appliqué à un des cylindres d'un viscosimètre de Couette rempli de fluide viscoélastique (Fig. 4.12a). Pour un fluide newtonien classique, la vitesse de rotation se stabilise en principe instantanément après la variation de couple imposée. Pour un fluide viscoélastique, au contraire, la vitesse de rotation ω du cylindre augmente d'abord souvent fortement, puis relaxe ensuite vers une valeur finale plus faible (Fig. 4.12b). L'effet inverse est observé en réduisant ensuite bruquement le couple ; s'il revient à 0 ou à une valeur faible, le cylindre peut même tourner légèrement en sens inverse, avant de s'immobiliser comme s'il était tenu par un fil de torsion en caoutchouc représentant l'élasticité du liquide (phénomène de « recouvrance »). Les constantes de temps qui apparaissent dans les réponses à de telles excitations caractérisent le temps d'adaptation de la structure (le temps τ intervenant dans le nombre de Deborah).

Cet exemple décrit un fluide qui réagit comme un solide élastique pour des excitations brèves, et comme un liquide aux temps longs, ou pour des déformations lentement variables. On peut également rencontrer le cas inverse d'un système plus proche d'un solide dont la variation de taux de cisaillement sous une excitation brusque est, au contraire, ralentie. De tels processus font intervenir plusieurs temps caractéristiques : le (ou les) temps caractéristique(s) de réponse de la structure du fluide, le temps caractéristique de variation de la contrainte (ou du taux de cisaillement), l'inverse du taux de cisaillement. Suivant les valeurs relatives de ces temps (et les non-linéarités des caractéristiques du fluide), l'un ou l'autre type de comportement pourra être observé.

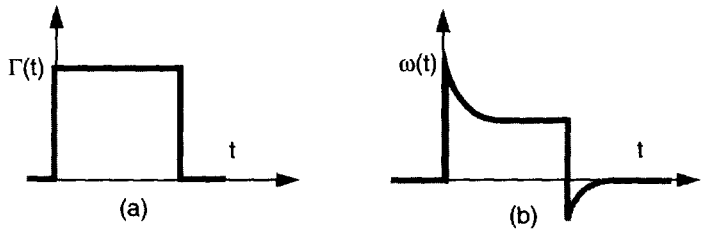


FIG. 4.12 – *Exemples de réponse d'un fluide viscoélastique à des variations brusques de contrainte appliquée. (a) Variation brusque du couple* Γ *appliqué par un rhéomètre ; (b) variations correspondantes de la vitesse de rotation* ω.

Une mesure similaire réalisée sur les fluides à seuil est l'étude du « fluage » du liquide : on impose une contrainte constante proche du seuil, et on suit ensuite l'évolution de la déformation au cours du temps. Ces mesures sont particulièrement intéressantes pour les gels, qui peuvent supporter des contraintes importantes sans qu'apparaisse un taux de cisaillement mesurable en régime stationnaire. Enfin, on obtient des informations complémentaires en effectuant des séquences de variation des contraintes (ou des déformations) et en analysant la réversibilité des variations d'un cycle à l'autre.

Enfin, une autre technique d'étude des fluides dépendant du temps consiste à leur faire subir des variations sinusoïdales de contraintes (ou de taux de cisaillement) et à mesurer les variations correspondantes de l'autre variable en fonction du temps. Dans le cas de petites déformations, celles-ci sont aussi sinusoidales mais présentent un déphasage variable par rapport à l'excitation : il est donc nécessaire de mesurer aussi bien l'amplitude que la phase du signal pour une excitation donnée. La réponse à ces excitations sinusoïdales est très variable suivant les ordres de grandeur relatifs de la période de l'excitation et des temps de réarrangement de la structure interne (donc suivant le nombre de Deborah) ; elle dépend aussi de l'amplitude des déformations réalisées.

Elasticité et viscosité complexes des fluides viscoélastiques

♦ Définition des coefficients caractéristiques

Quantitativement, les mesures sous excitation sinusoïdale citées précédemment permettent de déterminer le module complexe $\bar{G}(\omega)$ qui relie la contrainte complexe $\bar{\sigma}(t) = \sigma_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$ et la déformation complexe $\bar{\gamma}(t) = \gamma_0(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ avec :

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{G}(\omega)\,\bar{\gamma}(t) = (G'(\omega) + \mathrm{i}\,G''(\omega))\,\bar{\gamma}(t) \tag{4.45}$$

(à noter que $\bar{\gamma}(t)$ est la déformation et non pas le taux de cisaillement qui est sa dérivée temporelle). $\bar{G}(\omega)$ est appelé *module de rigidité complexe* : sa partie réelle, directement reliée à l'élasticité du matériau, est le *module de*

conservation et la partie imaginaire, liée à la viscosité, est le *module de perte*. Pour un solide élastique :

$$G'(\omega) = G \tag{4.46a}$$

et

$$G''(\omega) = 0 \tag{4.46b}$$

où G est le module de cisaillement du matériau. Pour un fluide visqueux newtonien, on a, en notation complexe : $\dot{\bar{\gamma}}(t) = \mathrm{i}\omega\,\bar{\gamma}(t)$. En identifiant avec la relation habituelle $\bar{\sigma} = \eta\,\dot{\bar{\gamma}}(t)$ on a :

$$G'(\omega) = 0 \tag{4.47a}$$

et

$$G''(\omega) = \eta\omega. \tag{4.47b}$$

Pour des fluides ayant un caractère essentiellement visqueux avec une faible composante viscoélastique, il est plus significatif (mais équivalent) d'introduire une viscosité complexe :

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(\omega) = \eta'(\omega) - \mathrm{i}\eta''(\omega) &= \frac{\bar{\sigma}(t)}{\dot{\bar{\gamma}}(t)} = \frac{\bar{\sigma}(t)}{\mathrm{i}\omega\bar{\gamma}(t)} \\ &= \frac{G'(\omega) + \mathrm{i}\,G''(\omega)}{\mathrm{i}\omega} = \frac{G''(\omega)}{\omega} - \mathrm{i}\frac{G'(\omega)}{\omega}\,.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Avec de telles définitions, on obtient les relations :

$$\eta'(\omega) = \frac{G''(\omega)}{\omega} \tag{4.49a}$$

et

$$\eta''(\omega) = \frac{G'(\omega)}{\omega}\,. \tag{4.49b}$$

Pour un fluide purement visqueux sans élasticité, on retrouve bien $\eta'(\omega) = \eta$ et $\eta''(\omega) = 0$.

Les coefficients $G'(\omega)$, $G''(\omega)$, $\eta'(\omega)$ et $\eta''(\omega)$ dépendent de la fréquence, mais aussi de l'amplitude, de l'excitation, et une étude de ces fluides implique l'analyse de l'influence de ces deux paramètres. Ainsi, la fréquence de transition entre les régimes visqueux à basse fréquence (nombre de Deborah petit devant l'unité) et élastique à haute fréquence donne une estimation du nombre de Deborah, et permet d'estimer les temps caractéristiques de réponse de la structure interne du fluide.

♦ Modèles mécaniques de fluides viscoélastiques

Comme pour la relation contrainte–déformation des fluides indépendants du temps, il est utile de disposer d'expressions analytiques approchées. On peut caractériser la variation de G' et G'' avec la fréquence ω d'excitation avec des modèles linéaires de type mécanique.

Le modèle du « liquide de Maxwell » rend compte du cas d'un fluide viscoélastique se comportant comme un liquide de viscosité η à des fréquences angulaires ω faibles, et comme un solide de module élastique G lorsqu'elles sont plus élevées (qualitativement, cela correspond au comportement des pâtes de silicone évoquées plus haut). Du point de vue des relations contrainte–déformation, le matériau se comporte comme un ressort (contrainte $\bar{\sigma}$ proportionnelle à la déformation avec $\bar{\sigma} = G\bar{\gamma}$) en série avec un amortisseur (contrainte $\bar{\sigma} = \eta\dot{\bar{\gamma}} = \mathrm{i}\omega\eta\bar{\gamma}$ proportionnelle au taux de cisaillement $\dot{\bar{\gamma}}$) (Fig. 4.13a).

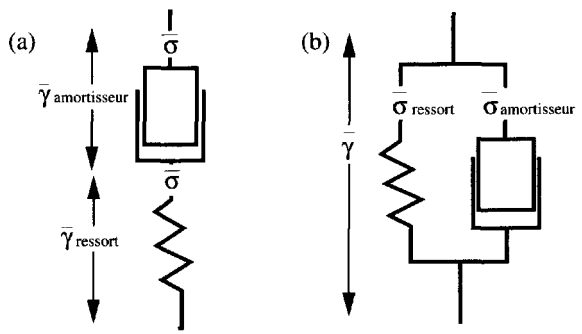


FIG. 4.13 – *(a) Modèle mécanique d'un fluide de Maxwell avec un ressort et un amortisseur en série ; (b) modèle mécanique d'un solide de Kelvin–Voigt.*

Pour les excitations de fréquence élevée, l'amortisseur n'a pas le temps de réagir, et le système se comporte comme un ressort pur ; aux fréquences très basses, le ressort est à peine déformé, et seul l'amortisseur intervient. Soulignons toutefois qu'il ne s'agit que d'un modèle analogique mécanique, qui ne vise nullement à décrire la structure interne du matériau, mais uniquement à reproduire son comportement global. Dans ce système, on retrouve la contrainte appliquée $\bar{\sigma}$ aussi bien sur le ressort que sur l'amortisseur ; les deux déformations $\bar{\gamma}_{\text{ressort}}$ et $\bar{\gamma}_{\text{amortisseur}}$ s'ajoutent avec :

$$\bar{\gamma}_{\text{Maxwell}} = \bar{\gamma}_{\text{ressort}} + \bar{\gamma}_{\text{amortisseur}} = \frac{\bar{\sigma}}{G} + \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\frac{\bar{\sigma}}{\eta} = \frac{\bar{\sigma}}{G' + \mathrm{i}\,G''}\,. \tag{4.50}$$

On a donc :

$$G' + \mathrm{i}G'' = \frac{\mathrm{i}\omega\,\eta}{1 + \mathrm{i}\omega\,\dfrac{\eta}{G}} = \frac{\mathrm{i}\omega\,\eta}{1 + \mathrm{i}\omega\,\tau} \tag{4.51}$$

où $\tau = \eta\,/\,G$ représente le temps caractéristique de relaxation du fluide, qui détermine la fréquence ω de transition entre les régimes de fréquence où le fluide apparaît comme un liquide ($\omega \ll 1\,/\,\tau$ soit $De \ll 1$), et comme un solide élastique ($\omega \gg 1\,/\,\tau$ soit $De \gg 1$).

Le modèle du « solide de Kelvin–Voigt » se comporte au contraire comme un solide élastique (module élastique G) pour des variations lentes d'excitation, et comme un liquide visqueux (viscosité η) sous des excitations brèves. Le matériau peut aussi être modélisé par un ressort mis cette fois-ci en parallèle avec un amortissseur (Fig. 4.13b). En procédant comme précédemment, l'expression du module élastique complexe $\overline{G}$ est cette fois :

$$G' + \mathrm{i}\,G'' = G + \mathrm{i}\omega\eta = G(1 + \mathrm{i}\,\omega\tau). \tag{4.52}$$

Les fluides réels correspondent rarement à ces deux cas limites et font souvent intervenir plusieurs temps caractéristiques de réarrangement de leur structure. Des modèles plus complexes ont été élaborés pour décrire leur comportement et, en particulier, pour prendre en compte l'effet de l'amplitude des déformations.

Exemple de caractéristiques d'un fluide viscoélastique

La figure 4.14 montre les caractéristiques rhéologiques d'un fluide contenant des micelles géantes : il s'agit de solutions de molécules de composés

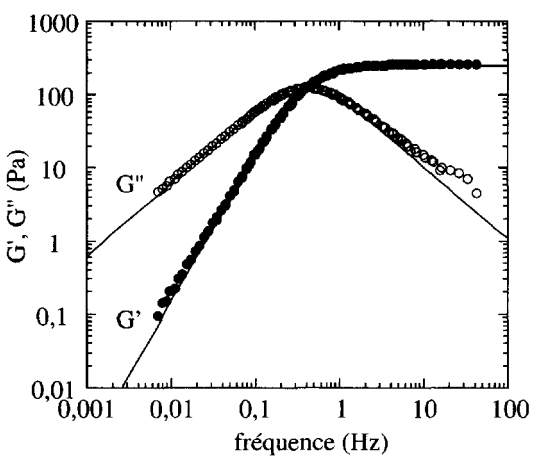


FIG. 4.14 – *Variation en fréquence (échelle log–log) des modules rhéologiques G' et G'' d'une solution de micelles géantes neutres (solution de chlorure de cetylpyridinium et de salicylate de sodium de concentration 12 % dans de l'eau salée avec 0,5 M de NaCl). La ligne continue correspond à un ajustement par le modèle de Maxwell (Éq. (4.51)) avec les valeurs de paramètres $\tau = 0,38$ s et $G = 249$ Pa. Les courbes ont été obtenues à plusieurs températures, puis remises à l'échelle pour correspondre à $T = 25\,°C$ (document J.-F. Berret, G. Porte et J.-P. Decruppe).*

tensioactifs qui se groupent en structures vermiformes de très faible diamètre (deux tailles moléculaires) et de grande longueur. Ces structures sont dites « vivantes » car elles se coupent et se rattachent en permanence de manière dynamique. Sur la figure, on distingue clairement deux comportements, suivant la fréquence de l'écoulement. Aux fréquences inférieures à 0,2 Hz, les solutions se comportent essentiellement comme des fluides visqueux avec un module de perte G'' croissant linéairement avec la fréquence (ce qui correspond à la partie imaginaire de la relation (4.51)) ; l'influence du module de perte est alors dominante par rapport à celle du module de conservation G' qui varie comme le carré de la fréquence. Aux fréquences supérieures à 2 Hz, le module de conservation G' est pratiquement constant, et le module de perte G'' décroît avec la fréquence comme f^{-1}. Dans ce domaine, le comportement du fluide se rapproche de celui d'un solide élastique. Aux fréquences encore supérieures, (au dessus de 10 Hz), la composante G'' dévie vers le haut par rapport à la relation (4.51) à cause de nouveaux mécanismes de perte d'énergie.

Un tel exemple est particulièrement simple, même si plusieurs mécanismes interviennent déjà : les fluides usuels rencontrés dans la nature et dans l'industrie suivent généralement des lois beaucoup plus complexes.

Quelques autres effets rhéologiques des fluides dépendant du temps : contraintes normales, viscosité élongationnelle

Nous avons traité jusqu'à présent les différents types de relations contrainte–déformation – dépendant ou non du temps – observées sur les fluides non newtoniens en n'analysant que le comportement de la viscosité de cisaillement. Nous allons maintenant décrire d'autres phénomènes, tels que l'anisotropie des contraintes normales, ou la viscosité élongationnelle qui font intervenir d'autres composantes du tenseur des contraintes ou du tenseur des déformations (voir Fig. 3.14).

♦ Observation qualitative de l'anisotropie des contraintes normales

Dans un fluide newtonien en écoulement parallèle, il n'apparaît pas de contrainte normale due à l'écoulement. Prenons par contre un fluide viscoélastique soumis à un cisaillement en le faisant s'écouler dans un tube. Il apparaît alors souvent, au sortir du tube (extrusion), une contrainte normale de type « tension » dans la direction parallèle à l'écoulement, et de type « pression » dans la direction perpendiculaire. La différence entre ces contraintes normales est la cause du gonflement des jets de certains polymères fondus (liquides sans solvant à température élevée), ou en solution à la sortie d'un orifice (Fig. 4.15). Le diamètre final du jet augmente avec la vitesse d'écoulement (Figs. 4.15a & b) et peut atteindre plusieurs fois le diamètre de départ. Au-delà d'une certaine vitesse d'écoulement, on peut observer des effets de retard, où le jet ne commence à gonfler qu'après avoir parcouru une certaine distance (Fig. 4.15c). Lors de la fabrication de fils ou de tubes par

(a) (b) (c)

FIG. 4.15 – *(a) Gonflement d'un jet de solution aqueuse de polymère (scléroglucane de concentration en masse 1 ‰) et de sel à la sortie d'un tube capillaire (diamètre intérieur $d_i = 0,6$ mm, extérieur $d_e = 0,9$ mm). Le jet est injecté dans une solution d'eau et de sel de même densité. (a) Débit $q = 5$ ml/h, diamètre final $d_f = 1,3d_i$. (b) $q = 80$ ml/h, $d_f = 2,57d_i$. (c) $q = 120$ ml/h, $d_f = 2,48d_i$ (document C. Allain, P. Perrot, D. Senis).*

extrusion, ou pour la réalisation de pièces de plastique par injection dans un moule, il faut tenir compte de cet effet pour le choix de la taille de l'orifice.

L'effet Weissenberg est une autre manifestation classique des différences de contraintes normales. Un fluide viscoélastique comme le blanc d'œuf (ou les pâtes à pain) remonte le long de l'axe d'un batteur rotatif ; pour un fluide newtonien, on observe au contraire un creusement de la surface libre dû à la force centrifuge. Là encore, cette montée est due à la répartition des contraintes normales : le maximum de pression qui apparaît près de l'axe est similaire à l'effet d'une bande élastique entourant le cylindre et mise en tension sous l'effet de la rotation.

Enfin, si les anisotropies de contraintes normales sont souvent importantes dans les solutions viscoélastiques de polymères, elles peuvent aussi être observées dans d'autres fluides comme les suspensions de particules anisotropes non browniennes (par exemple des bâtonnets de taille supérieure au micromètre), ou les solutions de micelles géantes (comme celles utilisées pour obtenir les courbes de la figure 4.14). Dans le cas des solutions de polymères, on peut expliquer de manière simpliste les comportements observés par la traction exercée par les macromolécules de polymère déroulées et allongées dans la direction de l'écoulement : celles-ci agissent alors un peu comme des caoutchoucs étirés. Suivant cette approche, le fluide se comporte dans l'expérience de gonflement du jet comme une bande élastique étirée par l'écoulement qui reprend ensuite sa longueur et sa forme.

♦ Variation quantitative des différences de contraintes normales

Nous avons évoqué qualitativement plus haut l'anisotropie des contraintes normales induites par un écoulement de cisaillement d'un fluide viscoélastique.

Supposons ainsi un écoulement de cisaillement à deux dimensions $v_x(y)$. Dans l'écoulement d'un fluide newtonien isotrope, les contraintes normales σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{zz} sont toutes identiques. En revanche, dans les écoulements de certains fluides non newtoniens, la différence :

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \tag{4.53a}$$

appelée *première différence des contraintes normales*, a souvent une valeur importante et positive (dans certains cas elle atteint dix fois la contrainte de cisaillement). La *seconde différence des contraintes normales* est prise égale à :

$$N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz}. \tag{4.53b}$$

Elle a en général une valeur beaucoup plus faible (moins de 10% de N_1) et négative, et elle est considérée comme nulle dans certains modèles classiques (Weissenberg). N_1 et N_2 s'annulent à cisaillement nul, et varient souvent selon une loi de puissance en fonction de taux de cisaillement. Enfin, des effets dépendant du temps peuvent également être observés sur la variation des contraintes normales : ainsi, dans l'expérience de la figure 4.15, le jet n'augmente de diamètre qu'en aval de l'orifice, au-delà d'une vitesse seuil d'écoulement (la distance d'apparition augmente avec la vitesse).

Certains rhéomètres actuels permettent de mesurer N_1 dans la géométrie classique cône–plan. Les effets provoqués par les différences de contraintes normales peuvent également être utilisés pour estimer plus indirectement ces dernières (gonflement d'un jet, ascension d'un fluide près d'un axe tournant). Il est à noter que ces différences de contraintes normales ne dépendent pas du sens de la déformation : on observe, en effet, une ascension de la surface du fluide quel que soit le sens de rotation.

♦ Effets de viscosité élongationnelle

De tels effets sont particulièrements importants dans les géométries où la composante élongationnelle est privilégiée, comme par exemple dans l'écoulement à travers un petit orifice ou encore entre deux cylindres d'axes parallèles tournant en sens contraire. Nous considérons ici le cas de l'écoulement entre deux disques identiques parallèles et coaxiaux qu'on éloigne l'un de l'autre. La vitesse s'annule sur l'axe à mi-distance entre les disques (point O). En dehors du plan médian ($x = 0$), la composante axiale est dirigée vers le disque le plus proche alors que la composante radiale est dirigée vers l'axe Ox. Un champ de vitesse de la forme :

$$v_x = \dot{\varepsilon}\, x \tag{4.54a}$$

$$v_y = -\dot{\varepsilon}\, \frac{y}{2} \tag{4.54b}$$

$$v_z = -\dot{\varepsilon}\, \frac{z}{2} \tag{4.54c}$$

représente bien de manière approchée un tel écoulement (il vérifie d'autre part $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$). Pour un tel champ de vitesse, on définit la viscosité élongationnelle

par :

$$\eta_{el} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}/2 - \sigma_{zz}/2}{3\,\dot{\varepsilon}}\,. \tag{4.55}$$

On rencontre également une définition identique, mais n'incluant pas le facteur 3 (viscosité de Trouton). Comme pour les phénomènes analysés plus haut, cette définition fait intervenir des différences de contraintes normales, mais le type de déformations associé à l'écoulement est différent. Pour un fluide newtonien, on a simplement $\sigma_{xx} = 2\eta\,\dot{\varepsilon}$, $\sigma_{yy} = -\eta\,\dot{\varepsilon}$, $\sigma_{zz} = -\eta\,\dot{\varepsilon}$ et on retrouve simplement $\eta_{el} = \eta$. Mais, pour certains fluides non newtoniens, la viscosité élongationnelle est beaucoup plus élevée que la viscosité de cisaillement. À l'échelle microscopique, les variations d'orientation des macromolécules ou des particules induites par la composante extensionnelle de l'écoulement ont une influence importante sur la viscosité élongationnelle.

La viscosité élongationnelle est difficile à mesurer en pratique car, contrairement aux cas précédents, on peut difficilement réaliser des écoulements élongationnels stationnaires. Une conséquence pratique très importante est par exemple la forte résistance à l'étirement des fibres textiles synthétiques : l'élongation est forte au niveau des points d'amincissement mais s'accompagne d'une augmentation de la viscosité élongationnelle, et donc de la résistance locale de la fibre à l'étirement. Pour un fluide ordinaire, la résistance diminuerait au contraire aux points d'amincissement. De tels effets de résistance à l'étirement et à la rupture d'un filet liquide sont démontrés par d'autres expériences spectaculaires sur des fluides viscoélastiques. Un « fil » d'un tel fluide tiré vers le haut à partir d'une surface libre sans support solide peut ainsi être enroulé sur une bobine tournante placée au-dessus. Signalons enfin que certains écoulements font intervenir simultanément les différents effets décrits à la présente section : les écoulements d'extrusion font apparaître des effets d'anisotropie de contrainte normale, mais présentent aussi une composante élongationnelle importante.

4.5 Quelques exemples d'écoulements parallèles de fluides visqueux newtoniens

4.5.1 Équation de Navier–Stokes pour les écoulements unidirectionnels

L'équation de Navier–Stokes, qui décrit le mouvement d'un fluide newtonien visqueux incompressible :

$$\rho\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = \rho\,\mathbf{f} - \mathbf{grad}\,p + \eta\,\Delta\mathbf{v} \tag{4.56}$$

résulte de nombreuses hypothèses simplificatrices que nous avons évoquées plus haut. Elle ne peut cependant être, en général, résolue analytiquement.

Cela est dû, en particulier, à la présence d'un terme non linéaire convectif $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ qui traduit l'exploration des variations spatiales du champ de vitesse par les particules de fluide. Cependant, aux très faibles vitesses d'écoulement, ce terme est négligeable devant la composante $\eta\,\Delta\mathbf{v}$ représentant les forces de frottement visqueux. Les écoulements à faible nombre de Reynolds étudiés au chapitre 8 vérifient ainsi une équation de mouvement linéaire ou *équation de Stokes*.

L'équation de Navier–Stokes se simplifie également lorsque les termes non linéaires sont identiquement nuls ou négligeables, indépendamment de la valeur de la vitesse (nous avons déjà signalé ce cas au chapitre 2, section 2.3.1). C'est le cas pour les écoulements unidirectionnels et quasi-unidirectionnels que nous allons présenter maintenant. Supposons par exemple un écoulement unidirectionnel où la vitesse est partout parallèle à Ox avec :

$$v_y(x,\, y,\, z) = v_z(x,\, y,\, z) = 0. \tag{4.57}$$

Compte tenu de ces deux égalités, la condition d'incompressibilité $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ se réduit à :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{4.58}$$

$\mathbf{v}$ a donc pour composantes $(v_x(y,\, z),\, 0,\, 0)$. Ainsi :

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}. \tag{4.59}$$

Physiquement, ce résultat signifie que le terme convectif de l'équation de mouvement est absent, non pas en raison des faibles valeurs de la vitesse (ce qui serait approximativement le cas lorsque le nombre de Reynolds est petit), mais à cause de la géométrie particulière de l'écoulement unidirectionnel. Lorsque le champ de vitesse est stationnaire, le mouvement des particules de fluide résulte de l'équilibre entre le gradient de pression et les forces de frottement visqueux.

Les quatre premiers exemples d'écoulements que nous allons analyser sont de ce type. Nous verrons ensuite l'écoulement de Couette cylindrique, qui constitue un exemple de détermination possible d'un champ de vitesse en présence de termes non-linéaires. Le fait que nous trouvions une solution pour l'écoulement ne signifie pas que celui-ci soit le seul observable. De façon générale, pour des nombres de Reynolds suffisament élevés, ces écoulements parallèles deviennent instables, et il se développe des écoulements turbulents dont les champs de vitesse sont beaucoup plus complexes et instationnaires.

4.5.2 Écoulement de Couette entre deux plans parallèles en mouvement relatif

Nous avons précédemment décrit cet écoulement au chapitre 2 (section 2.1.2), en introduisant la diffusion de la quantité de mouvement.

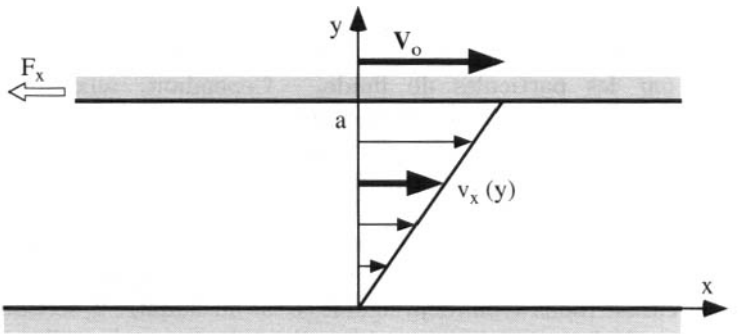


FIG. 4.16 – *Écoulement de Couette plan. Le plan inférieur est fixe et le plan supérieur est déplacé à vitesse constante* $\mathbf{V}_0$ *dans la direction* Ox.

Nous déterminons ici le profil de vitesse $v_x(y)$ entre un plan inférieur ($y = 0$) fixe et un plan supérieur ($y = a$) qui se déplace parallèlement à lui-même à une vitesse constante $\mathbf{V}_0$ (Fig. 4.16). On suppose qu'aucun gradient de pression extérieur n'est appliqué parallèlement aux plaques, que l'écoulement est établi et stationnaire, et que les plans sont horizontaux. L'équation de Navier–Stokes s'écrit :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g. \tag{4.61}$$

En l'absence de gradient de pression extérieur appliqué, on a $\partial p/\partial x = 0$; l'équation (4.60) devient :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \tag{4.62}$$

qui s'intègre en :

$$v_x = V_0 \frac{y}{a} \tag{4.63}$$

en tenant compte des conditions aux limites de vitesse relative nulle par rapport aux plans (nous avons vu au chapitre 3 (section 3.2.4) que cet écoulement de cisaillement correspond à une combinaison d'une rotation et d'une déformation des éléments de fluide). La pesanteur crée simplement un gradient de pression hydrostatique vertical, mais n'influence pas l'écoulement. La force de frottement visqueux par unité de surface sur chacun des plans vaut :

$$|F_x| = |\sigma_{xy}| = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\eta V_0}{a} \cdot \tag{4.64}$$

Notons que, aussi paradoxal que cela puisse paraître, la force résultante d'origine visqueuse $\eta\,(\partial^2 v_x/\partial y^2)$ par unité de volume d'un élément matériel de fluide en mouvement est nulle. Les forces correspondant aux contraintes locales sur les divers éléments de sa surface s'annulent en effet globalement, puisque F_x est indépendante de la distance y aux plans. Cela est dû au fait que le gradient de pression extérieur appliqué est nul.

4.5.3 Écoulements de Poiseuille

Nous traitons maintenant l'écoulement d'un fluide incompressible entre deux plans parallèles fixes puis dans un tube de section circulaire ; ces écoulements sont induits par une différence de pression appliquée entre les deux extrémités du tube ou des plans. Nous nous plaçons à une distance suffisamment grande de l'entrée du canal pour pouvoir considérer le profil d'écoulement comme indépendant de la position dans la direction des plans (les problèmes d'établissement de profils de vitesse seront traités au chapitre 9 (section 9.2) en liaison avec la variation d'épaisseur des couches limites avec la distance). Le cas de l'écoulement entre les deux plans parallèles sera traité directement à partir du bilan des forces appliquées sur un élément de fluide, afin de montrer que différentes méthodes de résolution sont possibles ; le profil d'écoulement dans un tube circulaire sera déterminé en utilisant l'équation de Navier–Stokes.

Écoulement entre deux plans parallèles fixes

Nous étudions l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux, fixes et parallèles d'équations $y = -a/2$ et $y = a/2$. L'écoulement est induit par un gradient de pression $(\partial p/\partial x) = -K = -(\Delta p/L)$ dans la direction x. Le gradient de pression est négatif lorsque l'écoulement se fait dans la direction des x positifs.

Évaluons la composante suivant l'axe Ox des forces exercées sur un élément de fluide de dimensions $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ (Fig. 4.17) : sur les faces $ABCD$ et $A'B'C'D'$, nous avons les forces de pression (contraintes normales), qui donnent une contribution :

$$f_{1x} = -p(x + \mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + p\,(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

soit :

$$f_{1x} \approx -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\Delta p}{L}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = K\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Sur les faces supérieure ($ABB'A'$) et inférieure ($DCC'D'$), les contraintes de viscosité $\sigma'_{xy} = \eta\,(\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}y)$ donnent une force globale dans la direction x :

$$f_{2x} = [\,\sigma'_{xy}(y + \mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \sigma'_{xy}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,]$$

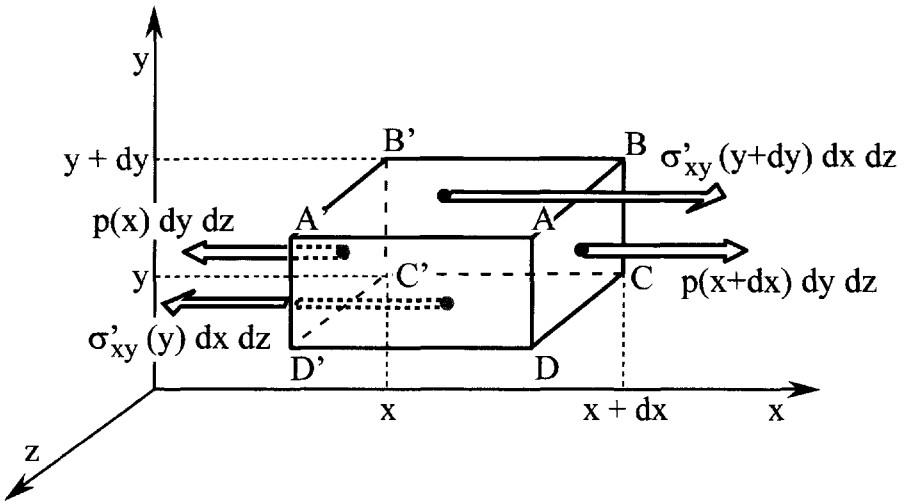


FIG. 4.17 - *Bilan des forces exercées sur un élément de fluide de forme parallélépipédique dans un écoulement unidirectionnel.*

soit :

$$f_{2x} = \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \eta\,\frac{\mathrm{d}^2\,v_x}{\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Notons que, pour un canal horizontal, le seul effet de la pesanteur est d'induire une différence de pression hydrostatique entre les parois inférieure et supérieure : cette différence équilibre le poids de l'élément de fluide et n'influence pas son mouvement. En écoulement permanent établi, la somme des forces appliquées à l'élément considéré est nulle :

$$f_{1x} + f_{2x} = 0$$

d'où :

$$\eta\,\frac{\mathrm{d}^2\,v_x}{\mathrm{d}y^2} + K = 0. \tag{4.65}$$

Cette dernière équation n'est autre que la composante suivant Ox de l'équation de Navier–Stokes pour le problème considéré. En intégrant cette équation, et compte tenu des conditions aux limites sur les parois du tube ($v_x = 0$ pour $y = \pm\,a\,/\,2$), on trouve :

$$v_x = \frac{K}{2\eta}\left(-y^2 + \frac{a^2}{4}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{1}{2\eta}\left(-y^2 + \frac{a^2}{4}\right) = V_{\max}\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)\cdot \tag{4.66}$$

L'écoulement correspondant est appelé *écoulement de Poiseuille plan*. Son profil de vitesse est parabolique, et la vitesse a sa valeur maximale $V_{\max}$ dans le plan de symétrie du canal ($y = 0$) avec :

$$V_{\max} = K\frac{a^2}{8\eta} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{a^2}{8\eta}\cdot \tag{4.67}$$

Le débit volumique de fluide Q, par unité de largeur du canal dans la direction Oz, vérifie alors :

$$Q = \int_{-a/2}^{a/2} v_x(y)\,\mathrm{d}y = K\,\frac{a^3}{12\eta} = \frac{\Delta p}{L}\,\frac{a^3}{12\,\eta}\cdot \tag{4.68}$$

Le débit Q est donc proportionnel à a^3 pour une différence de pression donnée, et décroît donc beaucoup plus rapidement que la section de l'écoulement (qui varie comme a) ; les forces de viscosité, qui augmentent avec le gradient de vitesse, sont donc plus élevées dans des capillaires de petite dimension.

On définit, à partir du débit Q, la vitesse moyenne d'écoulement U par la relation $U\,a = Q$, d'où :

$$U = K\,\frac{a^2}{12\,\eta} = \frac{2V_{\max}}{3}\cdot \tag{4.69}$$

Superposition d'un écoulement de Couette et de Poiseuille entre deux plans

Prenons maintenant un écoulement entre deux plans parallèles à l'axe Ox dans la géométrie de la figure 4.16, avec deux plans distants de a, le plan inférieur $y = 0$ étant pris comme référence et le plan supérieur se déplaçant à la vitesse $v_x = V_0$ parallèlement à lui-même. À la différence du cas de la section 4.5.2, on applique un gradient de pression constant $\partial p/\partial x$ parallèlement aux plans. Comme pour l'écoulement de Poiseuille, l'équation (4.61) implique que ce gradient de pression est indépendant de y. En intégrant l'équation (4.60), on trouve que :

$$v_x\,(y) = \frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{y^2}{2\eta} + Cy + D. \tag{4.70}$$

Le coefficient D est égal à 0 puisque la vitesse s'annule sur le plan $y = 0$; le coefficient C peut être déterminé en écrivant que la vitesse vaut V_0 sur le plan supérieur. On obtient alors :

$$v_x\,(y) = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{y\,(a-y)}{2\eta} + V_0\,\frac{y}{a}\cdot \tag{4.71}$$

Le champ de vitesse résultant est donc la superposition d'un champ de vitesse parabolique de Poiseuille qui correspond au premier terme du membre de droite de l'équation (4.71) et d'un champ de vitesse de Couette représenté

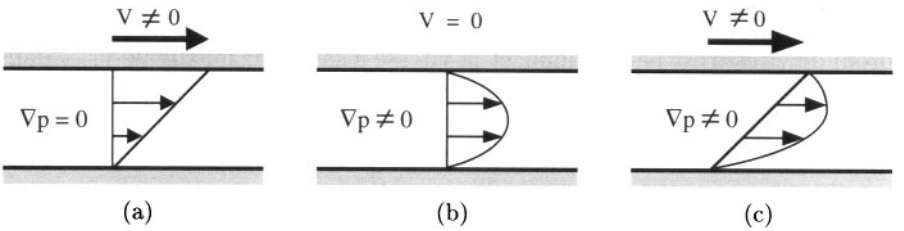


FIG. 4.18 – *Superposition d'un écoulement de cisaillement (a) et d'un écoulement de Poiseuille plan (b) ; on obtient un troisième écoulement (c), où coexistent un cisaillement et un gradient de pression le long de l'écoulement.*

par le second terme. La figure 4.18 donne l'allure de ces différents champs de vitesse. Suivant les cas, les profils de vitesse correspondants présenteront ou non un maximum entre les deux plans.

Le débit résultant par unité de longueur suivant Oz peut être obtenu par intégration directe de l'équation (4.71) :

$$Q = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{a^3}{12\,\eta} + \frac{V_0 a}{2}\,. \tag{4.72}$$

On remarque qu'il correspond lui aussi à la somme des débits respectifs des composantes de Poiseuille et de Couette. La possibilité d'additionner les champs de vitesse et les débits résulte, comme nous le verrons plus généralement au chapitre 8, de la linéarité de l'équation (4.60).

Nous rencontrerons des écoulements de ce type lors de l'étude de l'écoulement induit par deux plans en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre et faisant entre eux un petit angle (section 4.7.4), et de l'étude de l'écoulement induit par des variations de température à la surface libre d'un liquide (effet Marangoni, section 4.8.3).

Écoulement dans un tube cylindrique

On considère un tube cylindrique horizontal de rayon R (Fig. 4.19) et on étudie l'écoulement induit par une différence de pression Δp sur une longueur L du tube. On s'intéressera aux écoulements unidirectionnels parallèles à l'axe Ox du tube, pour lesquels la vitesse v_x dépend uniquement de la distance r à l'axe du tube. Comme dans le cas précédent, nous utiliserons le coefficient de perte de charge $K = (\Delta p/L) = -(\partial p/\partial x) =$ constant (positif si l'écoulement se fait dans la direction des x positifs) ; mais, cette fois, nous chercherons à résoudre directement l'équation de Navier–Stokes.

(i) Champ de vitesse de l'écoulement

Écrivons l'équation de Navier–Stokes (4.56) en coordonnées cylindriques pour le champ de vitesse $v_x(r)$; en projection sur les trois axes r, θ et x on

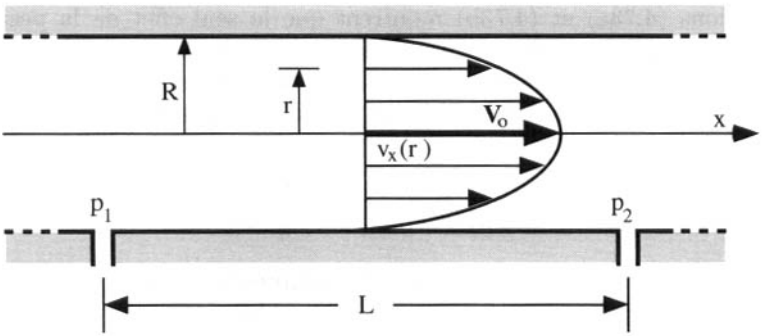


FIG. 4.19 – *Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon R, induit par une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ sur une longueur L (rapprocher ce profil de celui de la figure 2.7b).*

obtient :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g \cos\theta \tag{4.73a}$$

$$0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g \sin\theta \tag{4.73b}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma'_{xr}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\right]\cdot \tag{4.73c}$$

Remarques

- nous avons pris $\theta = 0$ pour le rayon vecteur vertical dirigé vers le haut à l'opposé de l'accélération **g** de la pesanteur ;
- nous avons supposé que la vitesse n'avait pas de composante suivant θ ; cette composante correspondrait à une rotation transitoire du fluide autour de l'axe du tube, qui disparaîtrait en régime stationnaire, comme nous l'avons vu au chapitre 2 (section 2.1.1) ;
- l'absence de composante de vitesse radiale peut être déduite de l'équation d'incompressibilité $\operatorname{div} v = 0$. Si v_x est indépendant de x, cette équation se réduit à $(1/r)\partial/\partial(rv_r) = 0$. Compte tenu de la condition aux limites au bord du tube, cela impose que la composante de vitesse radiale soit identiquement nulle ;
- il est possible d'établir directement l'équation (4.73c) qui régit le profil de vitesse, en considérant un bilan de forces, comme nous avons fait plus haut dans le cas de deux plans (4.5.3). On utilise pour cela un volume limité par deux cylindres concentriques de rayon r et $r + \mathrm{d}r$ auxquels sont appliquées les contraintes visqueuses, et deux sections distantes de $\mathrm{d}x$ entre lesquelles s'exerce le gradient de pression. On obtient alors l'équation :

$$2\pi(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}x(\sigma'_{xr})_{r+\mathrm{d}r} - 2\pi r\,\mathrm{d}x(\sigma'_{xr})_r = 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x\frac{\partial p}{\partial x}\cdot \tag{4.74}$$

Les relations (4.73a) et (4.73b) montrent que le seul effet de la pesanteur est d'établir dans la section du tube un gradient de pression hydrostatique sans influence sur l'écoulement. Ce gradient de pression est indépendant de la distance x dans la direction de l'axe ; aussi, $\partial p/\partial x$ sera indépendant de r et θ. On obtient alors :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = -\frac{K}{\eta}\cdot \tag{4.75}$$

En intégrant cette équation et en tenant compte des conditions aux limites sur les parois du tube ($v_x = 0$ pour $r = R$), on obtient :

$$v_x = \frac{K}{4\eta}(R^2 - r^2) = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{4.76}$$

avec :

$$V_0 = \frac{KR^2}{4\,\eta}$$

où V_0 est la valeur maximale de la vitesse, obtenue sur l'axe du tube ($r = 0$). Le débit volumique de fluide Q dans la section du tube s'écrit :

$$Q = \int_0^R v_x(r)\,2\pi\,r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi K R^4}{8\,\eta}\cdot \tag{4.77}$$

En exprimant le débit en fonction du diamètre d du tube, de sa longueur L et de la différence de pression Δp entre les deux extrémités, on obtient :

$$Q = \frac{\pi}{128\,\eta}\,\frac{\Delta p}{L}\,\mathrm{d}^4. \tag{4.78}$$

Ce résultat, qui constitue la *loi de Poiseuille*, montre que le débit varie comme la puissance quatrième du diamètre d'un tube circulaire, c'est-à-dire comme le carré de la section du tube (le changement de puissance $a \to a^3$ entre la section et le débit pour le problème de Poiseuille plan, correspond à celui $\mathrm{d}^2 \to \mathrm{d}^4$ dans le cas du tube circulaire). Comparons par exemple les débits Q induits par un même gradient de pression dans un tube de diamètre R et dans cent tubes de diamètre $R/10$ en parallèle, représentant la même section totale : le débit sera cent fois plus faible dans le dernier cas ! Ce résultat est très différent de celui qui est obtenu dans un problème de transport de courant électrique : si les deux systèmes de tubes sont remplis d'un même fluide conducteur, on obtient la même résistance électrique globale dans les deux cas, pour un courant circulant parallèlement à l'axe des tubes. La différence entre les deux problèmes vient de la condition aux limites de vitesse nulle sur les parois pour l'écoulement des fluides visqueux, qui n'existe pas pour le transport de courant électrique. À cause de cette condition, les gradients de vitesse et, par suite, les forces de frottement visqueuses augmentent fortement quand la taille des canaux diminue.

Remarque Nous avons toujours supposé jusqu'à présent que l'accélération de la pesanteur a une composante nulle suivant la direction Ox de l'écoulement, ce qui revient à supposer un écoulement horizontal. Dans le cas contraire, et pour une géométrie de tube cylindrique, l'équation (4.73c) devient :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\, g_x + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma'_{xr}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\, g_x + \eta\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\right].$$

C'est donc la somme $-\partial p/\partial x + \rho\, g_x$ et pas simplement le gradient $-\partial p/\partial x$ qui représente le terme moteur induisant l'écoulement. Prenons le cas d'un tube parallèle à Ox, ouvert à la pression atmosphérique à ses deux extrêmités et incliné par rapport à l'horizontale d'un angle θ (il peut par exemple relier deux réservoirs à surface libre de niveaux différents). Le gradient de pression $-\partial p/\partial x$ est alors nul, puisqu'il est constant le long du tube et qu'on a la même pression aux deux extrêmités. L'écoulement qui apparaît est donc uniquement dû à la composante $\rho\, g_x = \rho\, g \sin\theta$ et l'équation (4.78) est remplacée par :

$$Q = \frac{\pi\rho}{128\,\eta}\, g_x\, \mathrm{d}^4.$$

On peut faire bien entendu des raisonnements du même type pour les autres géométries d'écoulement.

(ii) Force de frottement sur les parois d'un tube circulaire

La force de frottement exercée par le fluide sur le tube se calcule à partir de la contrainte sur les parois :

$$F = \iint_{(\text{paroi})} [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S \tag{4.79}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à la paroi. La composante F_x dans la direction Ox de l'écoulement s'écrit simplement :

$$F_x = \iint_{(\text{paroi})} [\sigma'_{xr} r]_{r=R}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}x = \int_0^L \mathrm{d}x \int_0^{2\pi} [\sigma'_{xr} r]_{r=R}\, \mathrm{d}\theta. \tag{4.80}$$

En utilisant l'expression $\sigma'_{xr} = \eta(\partial v_x/\partial r)$ donnée dans l'annexe A-1 de la fin de ce chapitre, on obtient, pour la force f_x par unité de longueur de tube :

$$f_x = 4\pi\,\eta\, V_0. \tag{4.81}$$

On définit habituellement un *coefficient de frottement* sans dimension C_d en normalisant la force f_x par la quantité $(1/2)\rho V_0^2\, R$. Comme nous l'avons vu au chapitre 2 (section 2.3.1), le terme $(1/2)\rho V_0^2$ correspond à un terme de pression dynamique, ou encore – avec un facteur 0,5 supplémentaire – à un flux convectif de la quantité de mouvement. On obtient alors :

$$C_d = \frac{f_x}{(1/2)\rho V_0^2 R} = 8\pi\left(\frac{\eta}{\rho V_0 R}\right) = \frac{8\pi}{Re} \tag{4.82}$$

où on a défini le nombre de Reynolds associé à l'écoulement par $Re = (V_0 R\rho)/\eta$. Ce type de variation du coefficient de frottement en $(1/Re)$ est caractéristique des écoulements dans lesquels les effets convectifs associés aux termes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ sont nuls ou négligeables. Au contraire, dans la limite opposée des grands nombres de Reynolds, on obtient en général un coefficient C_d qui varie peu avec le nombre de Reynolds (Figs. 11.8 et 11.13). La définition de C_d est donc bien adaptée aux écoulements aux grands nombres de Reynolds.

4.5.4 Écoulements oscillants dans un fluide visqueux

Écoulement de cisaillement près d'un plan oscillant parallèlement à sa surface

Nous allons maintenant étudier l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible au-dessus d'un plan horizontal infini, animé d'un mouvement d'oscillation sinusoïdale parallèlement à lui- même. On notera A l'amplitude du mouvement, supposé dirigé suivant l'axe Ox, et f sa fréquence (Fig. 4.20). Ce problème est la version « harmonique » de la brusque mise en mouvement d'un plan infini à vitesse constante, déjà analysée au chapitre 2 (section 2.1.2).

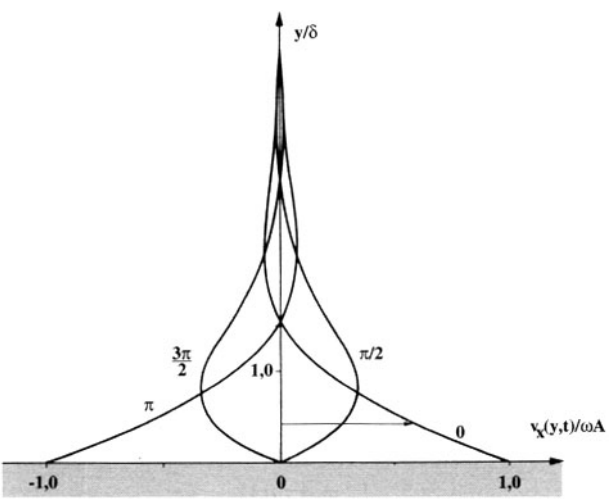


FIG. 4.20 – *Profil instantané de vitesse $v_x(y, t)$ dû à l'oscillation d'un plan rigide xOz parallèlement à lui-même dans la direction Ox, avec une amplitude A pour différentes phases du mouvement de la plaque $y = 0$.*

On recherche la solution des équations de mouvement la plus simple qui respecte les symétries du problème. Analysons tout d'abord les composantes du champ de vitesse au-dessus du plan solide. Par suite de l'invariance par translation dans les directions Ox et Oz, le champ de vitesse du fluide

ne dépend ni de x, ni de z ; on en déduit, en utilisant la condition d'incompressibilité $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, que $(\partial v_y/\partial y) = 0$. Par suite, comme $v_y = 0$ sur le plan, on a $v_y = 0$ dans tout l'espace. Enfin, le plan xOy est un plan de symétrie du problème et doit donc être un plan du symétrie des champs de vitesse et de pression, ce qui impose $v_z = 0$ et $(\partial p/\partial z) = 0$. Les composantes de $\mathbf{v}$ sont donc : $(v_x(y, t), 0, 0)$. Écrivons les projections de l'équation de Navier–Stokes (4.56) suivant les axes Ox et Oy :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \left(\nu = \frac{\eta}{\rho}\right) \tag{4.83a}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g. \tag{4.83b}$$

La composante suivant l'axe Oz de l'équation vectorielle est identiquement vérifiée car v_z et $\partial p/\partial z$ sont tous deux nuls. L'équation (4.83b) montre que le gradient de pression suivant Oy correspond simplement à la pression hydrostatique et n'a pas d'effet sur le mouvement du fluide. Ce gradient de pression vertical est le même quels que soient x et z. Ainsi, si, à une altitude y_0 donnée, on a $p(x, y_0, z) =$ constante (surface libre à la pression atmosphérique par exemple), $p(y)$ sera partout indépendant de x et z, et $(\partial p/\partial x) = 0$. Nous allons maintenant chercher une solution de l'équation (4.83a) sous la forme d'une fonction $v_x = v(y, t)$ périodique dans le temps :

$$v(y, t) = f(y)\cos(\omega t + \varphi) = \Re(f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \tag{4.84}$$

$f(y)$ est une fonction complexe, et le symbole $\Re$ signifie qu'on prend la partie réelle de la quantité considérée. En reportant cette expression dans l'équation (4.83a), nous obtenons :

$$\mathrm{i}\omega f(y) = \nu\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{4.85}$$

dont la solution générale est :

$$f(y) = C_1\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})\,ky} + C_2\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\,ky}$$

où on a posé :

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,. \tag{4.86}$$

On en tire :

$$v(y, t) = \Re\left\{C_1\mathrm{e}^{-\,ky}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - ky)} + C_2\mathrm{e}^{ky}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + ky)}\right\}. \tag{4.87}$$

Physiquement, la vitesse doit rester finie lorsqu'on s'éloigne du plan oscillant et que y tend vers l'infini, ce qui impose $C_2 = 0$. D'autre part, la condition à

la limite sur la surface du plan oscillant s'écrit : $v(y = 0, t) = \omega A \cos \omega t$, ce qui permet de déterminer la constante d'intégration $C_1 = \omega A$; on en déduit :

$$v(y, t) = \omega A \mathrm{e}^{-ky} \cos(\omega t - ky). \tag{4.88}$$

Cela montre que l'oscillation de vitesse imposée à la surface du plan se propage à l'intérieur du fluide (terme en $\cos(\omega t - ky)$) en s'amortissant exponentiellement (terme en e^{-ky}). On a ainsi propagation d'une onde transverse atténuée dans le fluide visqueux.

On définit la *profondeur de pénétration* δ de *la vitesse* comme la distance par rapport au plan oscillant pour laquelle l'amplitude de la vitesse est réduite par un facteur 1/e, soit :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \cdot \tag{4.89}$$

Prenant par exemple un mouvement d'oscillation à une fréquence de 2 Hz dans un fluide de viscosité $\nu = 10^{-3}$ m^2/s (mille fois la viscosité de l'eau), nous obtenons $\delta \approx 10^{-2}$ m.

Ce problème est l'analogue de l'effet de peau en électricité, ou de la pénétration des variations saisonnières de température dans le sol. L'équivalent du coefficient de viscosité est la résistivité du conducteur dans le cas de l'effet de peau (au facteur μ_0 près), et la diffusivité thermique dans le cas du problème des variations de température du sol. Dans tous ces cas, on a une profondeur de pénétration δ variant comme $1/\sqrt{\omega}$ et un vecteur d'onde complexe $\mathbf{k}$ de module égal à l'inverse de δ. Ces deux variations sont caractéristiques de tous les phénomènes de propagation diffusive.

Le résultat principal de cette étude est l'impossibilité de propager, à grande distance, une onde de cisaillement dans un liquide. L'onde acoustique correspondante est dite *amortie critiquement.* On a là une différence essentielle entre les liquides et les solides dans lesquels on peut propager, en plus de *l'onde de compression*, deux modes d'oscillations transverses à la direction de propagation qui correspondent à deux polarisations orthogonales : *les ondes de cisaillement*. Des résultats intermédiaires, avec possibilité de propager des ondes de cisaillement sur des distances significatives peuvent être obtenus avec des fluides viscoélastiques, ils seront décrits dans ce chapitre, à la section 4.6.4.

Application en géophysique

Un sismographe, placé à une certaine distance d'un point où a eu lieu une secousse sismique, détecte trois pics correspondant aux trois types d'ondes qui se propagent dans le sol. Néanmoins, si la source et le détecteur sont disposés au voisinage des antipodes, le sismographe ne détecte qu'un seul signal d'onde de compression ; en effet, les ondes de cisaillement ne se propagent pas à travers le noyau terrestre central dont la partie périphérique (à des distances du centre allant de 2 800 à 5 100 km) est liquide.

La force de frottement F_x sur le plan oscillant s'écrit :

$$F_x = \iint_{(\text{plan})} \sigma_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \iint_{(\text{plan})} \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z. \tag{4.90}$$

En combinant les équations (4.86, 4.88) et (4.90) on obtient la valeur f_x de la force de frottement par unité de surface :

$$f_x = (\eta\,\omega\,A\,k)\,\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right) = A\,\omega^{3/2}\,\sqrt{\rho\eta}\,\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)\cdot \tag{4.91}$$

Ainsi, la force de frottement f_x a un retard de phase de trois huitièmes de période sur la vitesse $\mathbf{v}\,(0,\,t)$ du plan. Comme nous l'avons fait dans le cas du tube circulaire, normalisons l'amplitude de la force f_x par la pression dynamique $(1/2)\rho A^2\omega^2$ construite avec la valeur crête $U = \omega A$ de la vitesse. Nous obtenons le coefficient de frottement :

$$C_d = \frac{A\,\omega^{3/2}\,\sqrt{\rho\eta}}{\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2} = 2\sqrt{\frac{\nu}{\omega A^2}} = \frac{2}{\sqrt{Re}} \tag{4.92}$$

où $Re = (\omega A^2)/\nu$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement construit à partir de la vitesse U et de la longueur A. Cette fois, nous trouvons une dépendance du coefficient de frottement C_d en racine carrée de l'inverse du nombre de Reynolds. Cette variation est plus lente que celle en $1/Re$ obtenue pour les écoulements laminaires parallèles discutés à la section 4.5.3. Nous trouverons un résultat du même type au chapitre 9, pour les écoulements de couches limites.

Écoulement induit entre deux plans par un gradient de pression oscillant

Lorsqu'on module le débit d'un écoulement, l'effet de l'inertie du liquide augmente avec la fréquence de modulation. Près des parois d'un tube capillaire, il peut apparaître des couches limites oscillantes comme celles que nous avons rencontrées dans l'exemple précédent. Analysons ces phénomènes dans le cas simple d'un écoulement entre deux plans $y = \pm\,a/2$, où la vitesse locale $u(y)$ est dirigée suivant l'axe Ox (Fig. 4.21).

Supposons le gradient longitudinal de pression $\partial p/\partial x$ modulé sinusoïdalement à une pulsation ω avec une amplitude $(\partial p/\partial x)(\omega)$. Écrivons l'équation de Navier–Stokes en incluant le terme d'accélération $\partial u/\partial t$ (u représente la composante de la vitesse dans la direction Ox) ; les termes non linéaires $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ sont nuls car l'écoulement est parallèle. En cherchant pour u une solution sinusoïdale à la pulsation ω, on obtient en notation complexe :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{i}\,\omega\,u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\,(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot$$

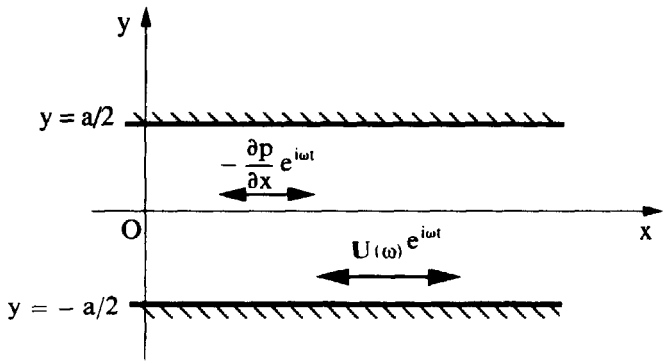


FIG. 4.21 – *Écoulement oscillant induit entre deux plans parallèles fixes par un gradient de pression sinusoïdal dans la direction parallèle aux plans.*

La fonction complexe $u(\omega, y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, solution de cette équation différentielle linéaire, qui satisfait aux conditions aux limites $u = 0$ pour $y = \pm\,\dfrac{a}{2}$, est :

$$u(\omega, y) = \frac{\mathrm{i}}{\rho\,\omega}\frac{\partial p}{\partial x}(\omega)\left(1 - \frac{\operatorname{ch} k(\omega)\,y}{\operatorname{ch}\dfrac{k(\omega)a}{2}}\right) \tag{4.93}$$

avec :

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}\omega}{\nu}} = (1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,.$$

Nous déduisons, par intégration sur la variable y, la valeur moyenne de l'amplitude complexe des variations de vitesse :

$$U(\omega) = \frac{\mathrm{i}}{\rho\,\omega}\frac{\partial p}{\partial x}(\omega)\left(1 - \frac{\tanh\dfrac{k(\omega)a}{2}}{\dfrac{k(\omega)a}{2}}\right) \tag{4.94}$$

$k(\omega)$ est le vecteur d'onde complexe de l'onde de cisaillement amortie, qui se propage à partir d'un plan oscillant parallèlement à lui-même dans un fluide visqueux (relation (4.84)) ; la quantité $1/|k(\omega)|) = \delta(\omega) = \sqrt{2\nu/\omega}$ donne donc l'ordre de grandeur de la distance $\delta(\omega)$ sur laquelle se fait sentir l'influence des parois en régime oscillant à pulsation ω. La réponse du système sera très différente suivant que $\delta(\omega)$ est plus grande ou plus faible que la distance a entre plaques :

♦ $|k(\omega)|a \ll 1$, ou $\delta(\omega) \gg a$ (régime de basses fréquences où les forces de viscosité sont dominantes).

Effectuons un développement limité de $\tanh(ka/2)$ au voisinage de $ka = 0$; nous obtenons :

$$U(\omega) = -\frac{a^2}{12\,\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(\omega)\left(1 - \mathrm{i}\frac{a^2\,\omega}{10\,\nu}\right) \cdot \tag{4.95}$$

Le premier terme domine : il représente simplement la vitesse que nous avons calculée en écoulement stationnaire ; l'écoulement n'est que peu influencé par les forces d'inertie auxquelles correspond le second terme en quadrature de phase (à cause du facteur i).

On peut remarquer que le terme correctif $N = a^2\omega/\nu$ est un rapport de fréquences dans lequel ω est divisée par l'inverse du temps de diffusion par viscosité sur la distance a. Il représente le rapport des effets d'instationnarité de l'écoulement (terme en $\rho(\partial\mathbf{v}/\partial t)$ dans l'équation du mouvement), à ceux de viscosité (termes en $\eta\,\Delta\mathbf{v}$). Dans le cas d'une géométrie plus complexe, où il faudrait faire intervenir également les termes en $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$, l'écoulement dépendrait également d'un *nombre de Strouhal* de la forme $\omega L/U$ (L et U vitesse et longueur caractéristiques). Ce nombre a été défini au chapitre 2 (section 2.4.1) et représente le rapport des termes d'instationnarité et convectifs. Le rapport de ces deux nombres sans dimension est le nombre de Reynolds de l'écoulement.

♦ $|k|a \gg 1$ ou $\delta(\omega) \ll a$ (régime des hautes fréquences où les effets d'inertie sont dominants).

Développons la tangente du nombre complexe $(ka)/2$; on obtient, en notant $\alpha = (1/2)\sqrt{\omega a^2/2\nu}$ et en utilisant l'identité $\tanh(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\,\tan(x)$, vraie quel que soit x réel) :

$$\tanh\frac{k(\omega)a}{2} = \tanh[\alpha(1+i)] = \frac{\tanh\alpha + \mathrm{i}\,\tan\alpha}{1 + \mathrm{i}\,\tanh\alpha\tan\alpha} \cdot$$

Or, pour α grand devant l'unité, $\tanh(\alpha)$ est de l'ordre de l'unité ; on en déduit :

$$\tanh\frac{k(\omega)a}{2} \approx 1$$

et donc :

$$U(\omega) \approx \frac{\mathrm{i}}{\rho\,\omega}\frac{\partial p}{\partial x}(\omega)\left(1 - (1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{2\nu}{\omega a^2}}\right) \cdot \tag{4.96}$$

Le terme dominant $(\mathrm{i}/\rho\omega)(\partial p/\partial x)$ correspond à une oscillation en bloc de la masse de fluide en quadrature de phase avec la variation de pression et d'amplitude uniquement limitée par son inertie. C'est seulement sur une épaisseur de l'ordre de grandeur de $\delta(\omega)$ que les effets de la viscosité dominent et causent une dissipation qui se traduit dans la partie réelle du terme correctif. Le rapport $\sqrt{(2\nu/\omega a^2)}$ entre les deux termes de l'équation (4.96) est d'ailleurs de l'ordre de grandeur du rapport entre l'épaisseur de la couche limite et la largeur totale du canal.

4.5.5 Écoulement de Couette cylindrique

On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible de viscosité η, compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tournant autour de leur axe avec des vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 (Fig. 4.22). On suppose qu'aucun gradient de pression n'est appliqué extérieurement. On choisit le système de coordonnées cylindriques (r, θ, x) où l'axe Ox est confondu avec celui des cylindres, et on cherche à déterminer les composantes v_r, v_θ et v_x de la vitesse.

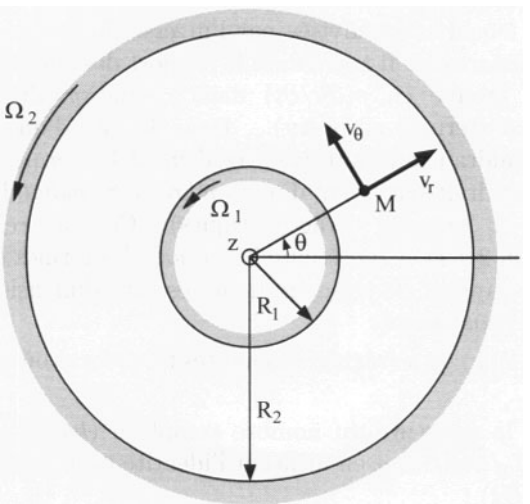


FIG. 4.22 – *Écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques en rotation, vu dans la direction de l'axe des cylindres.*

Nous nous intéressons ici à l'écoulement le plus simple possible, qui correspond à des champs de vitesse et de pression indépendants de x et θ ; c'est celui qui est observé aux faibles vitesses.

Dans ce cas, compte tenu de la symétrie du problème par rapport aux plans perpendiculaires à Ox et de l'absence de gradient de pression axial, on a $v_x = 0$. Par ailleurs, dans la configuration d'écoulement la plus simple, v_θ est indépendant de θ par symétrie. L'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), qu'on trouvera écrite en coordonnées cylindriques en fin de chapitre (annexe A-1), donne :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) = 0 \tag{4.97}$$

v_r ne peut donc être que de la forme $v_r = (C/r)$ où C est une constante. Or, les conditions aux limites sur les parois solides imposent que $v_r(r = R_1) = v_r(r = R_2) = 0$; v_r sera donc nul dans tout le fluide.

L'équation de Navier–Stokes, écrite en coordonnées cylindriques (voir annexe A-1), donne :

$$\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{4.98a}$$

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2}\right) = 0. \tag{4.98b}$$

Dans la première équation, le terme (v_θ^2/r) correspond simplement à la force d'inertie centrifuge due à la courbure des trajectoires des particules de fluide. Bien que ce terme fasse intervenir le carré de la vitesse, il n'intervient pas sur l'écoulement, car il est équilibré par le gradient de la pression dans la direction radiale ; il représente donc une forme généralisée de pression hydrostatique, tout comme le terme de pesanteur dans les écoulements unidirectionnels horizontaux étudiés précédemment. Les termes de la deuxième équation correspondent aux différents termes du laplacien de la vitesse en coordonnées cylindriques.

Remarque L'équation (4.98b) peut aussi être obtenue en écrivant que le couple global sur un volume limité par deux cylindres concentriques de hauteur unité et de rayons r et $r + \mathrm{d}r$ est nul, soit :

$$2\pi(r^2\,\sigma_{\theta r})(r + \mathrm{d}r) - 2\pi(r^2\,\sigma_{\theta r})(r) = 0 \tag{4.99a}$$

soit, en faisant tendre $\mathrm{d}r$ vers 0 :

$$\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\,\sigma_{\theta r}) = 0. \tag{4.99b}$$

En effet, $\sigma_{\theta r}$ est la seule composante non nulle du tenseur des contraintes, compte tenu de la symétrie du champ de vitesse $\mathbf{v}\,(0,\, v_\theta(r),\, 0)$, (on le vérifie à partir des expressions du tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques données à l'annexe A-1) ; $\sigma_{\theta r}$ s'écrit donc :

$$\sigma_{\theta r} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2}\right) = \eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) = \eta\, r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{4.100}$$

(remarquons que $\sigma_{\theta r}$ s'annule bien pour une rotation en bloc du fluide avec $v_\theta = \omega r$). En reportant l'expression ci-dessus dans l'équation (4.99b) qui exprime l'absence de couple global sur un volume annulaire, on retrouve la relation (4.98b) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right) = 0.$$

En cherchant des solutions de la relation (4.98b) sous la forme de puissances de r, on trouve :

$$v_\theta = a\,r + \frac{b}{r} \tag{4.101}$$

(nous omettrons désormais l'indice θ dans v). Les constantes a et b sont déterminées par les conditions aux limites :

$$v_\theta(r = R_1) = \Omega_1 R_1 \qquad \text{et} \qquad v_\theta(r = R_2) = \Omega_2 R_2.$$

On obtient alors :

$$v_\theta = \frac{(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{((\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2 R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \cdot \tag{4.102}$$

La distribution de pression s'en déduit par intégration à partir de l'équation (4.98a). Examinons à présent quelques cas particuliers qui dépendent des valeurs des vitesses de rotation des cylindres et de leur rayon :

- lorsque le rayon des deux cylindres tend vers l'infini, tandis que la différence $R_2 - R_1 = \mathrm{d}$ reste constante, nous retrouvons le champ de vitesse correspondant à l'écoulement de Couette plan ;
- si $\Omega_1 = \Omega_2$, alors $v = \Omega r$, ce qui correspond à un mouvement de rotation en bloc du fluide ;
- si $\Omega_2 = 0$ et que l'on fait tendre R_2 vers l'infini (ce qui revient à supprimer le cylindre extérieur), alors $v = (\Omega_1 R_1^2)/r$. C'est le champ de vitesse d'un écoulement bidimensionnel tourbillonnaire irrotationnel, qui sera discuté au chapitre 6 (section 6.2.3) ;
- dans le cas où seul le cylindre intérieur tourne, et pour une vitesse de rotation Ω_1 du cylindre intérieur supérieure à une valeur critique Ω_c, nous montrerons, au chapitre 10 (section 10.3.1), que l'écoulement de base est instable ; il apparaît alors un écoulement secondaire sous forme de rouleaux toroïdaux.

Cette instabilité, dite de Taylor–Couette, peut être observée aussi dans le cas où les deux cylindres sont en rotation avec un seuil qui dépend de Ω_1 et Ω_2.

Calculons maintenant le moment des forces de viscosité qui s'exercent sur les cylindres (forces tangentielles). En utilisant la formule (4.100) pour calculer $\sigma_{\theta r}$, on trouve :

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{2\,b\,\eta}{r^2} \tag{4.103}$$

où b est le coefficient du terme en $1/r$ du champ de vitesse dans l'équation (4.101). Calculons maintenant le couple de frottement visqueux total Γ_1 exercé sur le cylindre de rayon R_1, par unité de longueur suivant l'axe Ox. Γ_1 est égal au produit de $\sigma_{\theta r}(R_1)$ par la surface $2\pi R_1$ sur laquelle est exercée la contrainte, et par la distance R_1 entre l'axe et le point d'application des forces. Ainsi, le couple sur le cylindre intérieur est :

$$\Gamma_{R_1} = 2\,\pi\,R_1^2\,\frac{2\,b\,\eta}{R_1^2}\,\mathbf{e}_x = -4\,\pi\,\eta\,b\,\mathbf{e}_x = 4\,\pi\,\eta\,\frac{(\Omega_2 - \Omega_1)\,R_2^2\,R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\,\mathbf{e}_x \tag{4.104}$$

où $\mathbf{e}_x$ est le vecteur unitaire suivant l'axe Ox. On vérifie qu'une rotation « solide » globale des deux cylindres à la même vitesse angulaire ne fait pas apparaître de couple : une rotation relative ($\Omega_2 \neq \Omega_1$) est nécessaire pour cela.

L'équation (4.104) confirme la possibilité (déjà discutée à la section 4.4.2) d'une mesure du coefficient de vicosité η à partir de la mesure du couple résistant exercé par le fluide sur l'un des deux cylindres lorsqu'on leur impose une rotation relative (viscosimètre de Couette). Avec certains appareils d'ailleurs, on impose un couple sur un des cylindres, et on mesure la rotation résultante.

Remarque En régime stationnaire, d'après l'équation 4.103, la contrainte de cisaillement varie en $1/r^2$ avec la distance à l'axe de rotation. Ce résultat – établi à l'aide des équations (4.99a & b) – exprime l'équilibre des couples des forces entre les différentes couches de fluide, et reste vérifié pour des fluides non newtoniens. La relation déformation–contrainte ne peut donc être déterminée directement pour de tels fluides que si la contrainte peut être considérée comme constante dans le volume de mesure, et donc si l'intervalle entre cylindres est très petit devant leur rayon moyen.

4.6 Écoulements parallèles simples de fluides non newtoniens indépendants du temps

Pour les fluides non newtoniens, l'équation de Navier–Stokes n'est plus valable : nous nous limitons au cas de fluides de caractéristiques indépendantes du temps et isotropes, en supposant une relation entre le taux de cisaillement et les contraintes visqueuses qui soit définie et uniquement fonction du matériau. Pour un écoulement plan parallèle $v_x(y)$, on considère que le taux de cisaillement $\partial v_x/\partial y$ n'est pas simplement proportionnel à la contrainte visqueuse, mais présente une variation plus complexe $f(\sigma'_{xy})$ (Fig. 4.8). Cela revient à dire qu'on prend en compte les caractéristiques rhéo-fluidifiantes ou rhéo-épaississantes, mais pas la thixotropie ou la viscoélasticité. Par ailleurs, on continue de supposer que le gradient de pression $\partial p/\partial x$ est constant entre les plans : cela est vérifié si on atteint un régime d'écoulement établi suivant Ox. Même si des gradients de pression transverses apparaissent à cause des contraintes normales, ils seront constants avec la distance. Pour un écoulement à symétrie radiale, cette relation devient, en coordonnées polaires (r, θ, x) : $\partial v_x/\partial r = f(\sigma'_{xr})$.

4.6.1 Écoulement stationnaire d'un fluide non newtonien entre deux plans parallèles en mouvement relatif

On considère un écoulement stationnaire parallèle, de même géométrie que celui de la figure 4.16 : la tranche de fluide située entre y et $y + \delta y$ doit être en équilibre mécanique, ce qui impose que la condition

$\sigma'_{xy}(y+\delta y) = \sigma'_{xy}(y)$ soit réalisée pour toutes les valeurs de y et de δy. La contrainte visqueuse σ'_{xy} doit donc être constante dans toute la couche fluide, ce qui impose que le taux de cisaillement $\partial v_x/\partial y = f(\sigma'_{xy})$ soit également constant. On a donc, comme pour un fluide newtonien, un écoulement de cisaillement simple de vitesse $v_x = V_0 y/a$. Une telle géométrie serait théoriquement idéale pour une mesure directe de la caractéristique rhéologique $f(\sigma'_{xy})$, puisque aussi bien le taux de cisaillement que la contrainte visqueuse sont parfaitement définis. Cette condition n'est vérifiée que de manière approximative dans les géométries pratiques décrites plus haut (rhéomètre cône–plan et rhéomètre de Couette cylindrique).

4.6.2 Calcul du champ de vitesse et de la chute de pression pour un fluide non newtonien dans un écoulement entre deux plans parallèles

On étudie d'abord l'écoulement bidimensionnel entre deux parois planes $y = a/2$ et $y = -a/2$ parallèles à l'axe Ox abordé plus haut (section 4.5.3) pour les fluides newtoniens. La projection sur Ox de l'équation de mouvement générale (4.25) :

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\, v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho\, f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} \tag{4.105}$$

peut s'écrire :

$$\frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.106}$$

(comme dans le cas newtonien, on suppose l'axe y vertical pour ne pas avoir à faire intervenir l'accélération de la pesanteur). Dans le plan de symétrie $y = 0$ de l'écoulement, on a $\sigma'_{xy} = 0$, car le transport de quantité de mouvement n'a pas de raison de s'effectuer dans une direction plutôt que dans une autre. Par intégration de l'équation (4.106), on a alors :

$$\sigma'_{xy} = y\,\frac{\partial p}{\partial x}\,. \tag{4.107}$$

Remarque On vérifie bien que la force par unité de surface est la même en valeur absolue sur les deux parois. Plus généralement, l'équation (4.107) reflète, comme nous l'avons fait à la section 4.6.1, le bilan des forces sur des tranches de fluide situées entre des plans $y =$ cte. Il est cependant nécessaire de prendre en compte les forces dues au gradient de pression qui n'apparaissent pas dans l'écoulement de cisaillement pur. Notons également que, aussi bien les gradients de vitesse que les contraintes visqueuses partent de 0 dans le plan $y = 0$, pour devenir maximales en valeur absolue sur les parois (cela résulte de l'équation (4.107) et du fait que la fonction f est monotone et croissante).

Si $\partial v_x/\partial y = f(\sigma'_{xy})$, on obtient par intégration la vitesse $v_x(y)$ à la distance y avec :

$$v_x(y) = -\int_y^{a/2} f\left(u\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) \mathrm{d}u \cdot \tag{4.108}$$

Le débit Q entre les deux plans par unité de longueur dans la troisième direction Oz est obtenu par une nouvelle intégration suivant Oy :

$$Q = -2\int_0^{a/2} \left[\int_y^{a/2} f\left(u\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) \mathrm{d}u\right] \mathrm{d}y \tag{4.109}$$

(on intègre sur une moitié de l'intervalle entre les plans et on prend le double du résultat). Une intégration par parties transforme alors l'intégrale en une forme plus simple :

$$Q = -2\int_0^{a/2} y\, f\left(y\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) \mathrm{d}y \cdot \tag{4.110}$$

Remarque Dans le cas d'un fluide newtonien, la fonction $f(u)$ se réduit simplement à $f(u) = u/\eta$, et on retrouve l'expression $Q = -(a^3/12\eta)(\partial p/\partial x)$ (Éq. (4.68)). Par ailleurs, l'utilisation des expressions précédentes nécessite simplement que la fonction f soit définie monotone et intégrable. Il sera en particulier possible de traiter sans problème des cas où la fonction f a une expression différente de part et d'autre d'une valeur seuil de la contrainte.

On peut calculer le taux de cisaillement $\dot{\gamma}_w$ à la paroi, sans avoir besoin de connaître la fonction f, simplement à partir de la variation du débit Q en fonction du gradient de pression. Récrivons pour cela la relation (4.110) en exprimant y en fonction de σ'_{xy} avec le changement de variable

$$\sigma'_{xy} = 2\,\frac{y}{a}\,\sigma'_w. \tag{4.111}$$

La relation (4.110) devient alors, en introduisant la valeur à la paroi $\sigma'_w = (a/2)(\partial p/\partial x)$

$$Q = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma'^2_w}\int_0^{\sigma'_w} \sigma'_{xy}\, f(\sigma'_{xy})\, \mathrm{d}\sigma'_{xy} \tag{4.112a}$$

ou :

$$Q\sigma'^2_w = -\frac{1}{2}\,a^2\int_0^{\sigma'_w} \sigma'_{xy}\,\dot{\gamma}_{xy}\,\mathrm{d}\sigma'_{xy}. \tag{4.112b}$$

Dérivons alors cette équation par rapport à σ'_w (notons que Q dépend de $\partial p/\partial x$ et donc de σ'_w), on obtient :

$$2\,Q + \sigma'_w\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\sigma'_w} = -\frac{1}{2}\,a^2\,\dot{\gamma}_w \tag{4.113}$$

ou :

$$\dot{\gamma}_w = -\frac{2Q}{a^2}\left(2 + \frac{\mathrm{d}\ln Q}{\mathrm{d}\ln \Delta p}\right). \tag{4.114}$$

Cette équation (dite de Mooney-Rabinovitch) est très utile lorsque ses conditions de validité sont vérifiées (loi universelle et constante dans le temps pour la variation de la contrainte du fluide en fonction du taux de cisaillement). En effet, elle ne fait intervenir que des paramètres macroscopiques relativement faciles à mesurer (débit, différence de pression). Par ailleurs, la contrainte à la paroi σ'_w se déduit immédiatement par la relation : $\sigma'_w = (a/2)(\partial p/\partial x)$. La caractéristique rhéologique locale peut donc être alors déterminée à partir de la courbe de variation globale qui relie le débit et le gradient de pression suivant l'écoulement.

Transposition des résultats à des géométries cylindriques : tube capillaire par exemple

À partir de l'équation (4.105), et en tenant compte du fait que la relation $\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0$ reste vérifiée, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma'_{xr}\, r) = r\,\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.115a}$$

d'où :

$$\sigma'_{xr} = \frac{r}{2}\,\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4.115b}$$

On a supposé de nouveau, pour passer de (4.115a) à (4.115b), que $\sigma'_{xr} = 0$ sur l'axe $r = 0$. Pour une relation force–déformation $\partial v_x/\partial r = f(\sigma'_{xr})$, on en déduit la relation :

$$v_x(r) = -\int_r^R f\left(\frac{u}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\mathrm{d}u. \tag{4.116}$$

On peut alors calculer le débit Q par intégration de $2\pi r\, v_x(r)$ suivant r. Après intégration par parties, on obtient finalement l'équivalent de la relation (4.110) :

$$Q = -\pi\int_0^R r^2\, f\left(\frac{r}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\mathrm{d}r. \tag{4.117}$$

On vérifie de même qu'en prenant $f(u) = u/\eta$, on retrouve bien les équations pour les fluides newtoniens. Comme dans le cas des deux plans, on peut remplacer dans l'équation (4.117) r et $(\partial p/\partial x)$ en fonction de σ'_{xr} et de la contrainte σ'_w à la paroi, en utilisant la relation (4.115b) et la relation $\sigma'_{xr} = \sigma'_w\, r/R$ qui en dérive. On a alors :

$$Q = -\pi\,\frac{R^3}{\sigma'^3_w}\int_0^{\sigma'_w} \sigma'^2_{xr}\, f(\sigma'_{xr})\,\mathrm{d}\sigma'_{xr} \tag{4.118a}$$

soit :

$$Q\,\sigma'^3_w = -\pi\, R^3\int_0^{\sigma'_w} \sigma'^2_{xr}\,\dot{\gamma}_{xr}\,\mathrm{d}\sigma'_{xr}. \tag{4.118b}$$

Dérivons cette équation par rapport à σ'_w :

$$3Q + \sigma'_w \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\sigma'_w} = -\pi R^3 \dot{\gamma}_w \tag{4.119a}$$

ou

$$\dot{\gamma}_w = -\frac{Q}{\pi R^3}\left(3 + \frac{\mathrm{d}\ln Q}{\mathrm{d}\ln \Delta p}\right). \tag{4.119b}$$

Là encore, cette équation combinée avec la relation entre $\partial p/\partial x$, σ'_w et le rayon du tube permet de déterminer en principe la caractéristique rhéologique du fluide à partir de la relation débit–différence de pression. En pratique, on réalise plusieurs mesures sur des tubes de même diamètre, mais de longueurs différentes, pour pouvoir estimer et corriger l'influence des effets d'entrée. La comparaison des résultats obtenus sur des tubes de diamètres différents permet de détecter des effets éventuels de glissement à la paroi.

4.6.3 Quelques profils de vitesse pour des lois rhéologiques simples

Fluides en loi de puissance

Supposons que $\sigma'_{xy} = D(\partial v_x/\partial y)^{1-\alpha}$ (correspondant à une viscosité effective en $(\partial v_x/\partial y)^{-\alpha}$) ; cette loi se réduit à la loi des fluides newtoniens pour $\alpha = 0$ avec $D = \eta$. Pour $\alpha < 0$, la viscosité apparente $\sigma'_{xy}/(\partial v_x/\partial y)$ augmente avec le taux de cisaillement (fluide rhéo-épaississant). Pour $\alpha > 0$, la viscosité apparente diminue avec le taux de cisaillement (fluide rhéo-fluidifiant). On a alors : $f(u) = D^{-1/(1-\alpha)}u^{1/(1-\alpha)}$. En reportant cette expression dans les équations (4.108) et (4.116), on obtient pour l'écoulement entre deux plans distants de a et symétriques par rapport à $y = 0$, le profil :

$$v_x(y) = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\left[\frac{1}{D}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} - y^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}\right) \tag{4.120a}$$

et, à l'intérieur d'un tube cylindrique :

$$v_x(r) = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\left[\frac{1}{2D}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(R^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} - r^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}\right) \tag{4.120b}$$

(on multiplie ces expressions par -1 si $\partial p/\partial x > 0$). Les valeurs de débit correspondantes sont :

$$Q = \frac{2-2\alpha}{3-2\alpha}\left[\frac{1}{D}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}} \tag{4.121a}$$

$$Q = \frac{\pi(1-\alpha)}{4-3\alpha}\left[\frac{1}{2D}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} R^{\frac{4-3\alpha}{1-\alpha}}. \tag{4.121b}$$

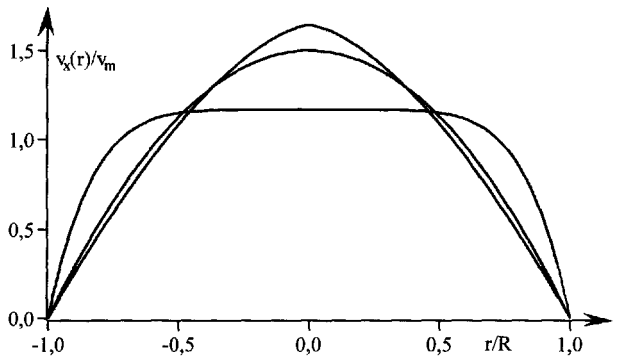


FIG. 4.23 – *Profil diamétral du rapport de la vitesse locale et de la vitesse moyenne dans un tube cylindrique pour des fluides présentant une caractéristique rhéologique en loi de puissance* $\sigma'_{xy} = \eta(\partial v_x/\partial y)^{1-\alpha}$ *; courbe supérieure :* $\alpha = -0,8$ *(fluide rhéo-épaisissant), courbe intermédiaire :* $\alpha = 0$ *(fluide newtonien), profil le plus aplati :* $\alpha = 0,8$ *(fluide rhéo-fluidifiant).*

On constate que, pour $\alpha > 0$, l'exposant de la loi de variation du débit avec l'ouverture des canaux à gradient de pression donné est plus élevé que les lois en a^3 ou en R^4 obtenues pour des fluides newtoniens (l'exposant de a peut en effet être récrit : $3+\alpha/(1-\alpha)$, et celui de R : $4+\alpha/(1-\alpha)$). Le contraste de débit entre deux canaux de sections différentes sous une différence de pression donnée est donc augmenté par les caractéristiques rhéo-fluidifiantes du fluide. Ce contraste est au contraire réduit pour un fluide rhéo-épaississant.

Soit $v_m = Q/a$ et $v_m = Q/(\pi R^2)$ les valeurs moyennes respectives de la vitesse dans les deux cas ; on peut réécrire les profils de vitesse sous la forme :

$$\frac{v_x}{v_m} = \frac{3-2\alpha}{2-\alpha}\left[1-\left(\frac{2y}{a}\right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}\right] \tag{4.122a}$$

et

$$\frac{v_x}{v_m} = \frac{4-3\alpha}{2-\alpha}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}\right]. \tag{4.122b}$$

Comme on peut le voir à la figure 4.23, les profils de vitesse obtenus pour $\alpha > 0$ (fluides rhéo-fluidifiants) sont plus aplatis que le profil parabolique correspondant aux fluides newtoniens ($\alpha = 0$). Par contre, pour les valeurs de $\alpha < 0$ (fluides rhéo-épaississants), les profils sont plus pointus. Plus la valeur de α est supérieure à 0, et plus l'exposant qui caractérise les profils est élevé : les profils sont donc de plus en plus aplatis.

Fluide de Bingham entre deux plans parallèles

Comme nous l'avons vu plus haut, ce sont des fluides à seuil, pour lesquels on a une relation linéaire entre contrainte et déformation au-dessus du seuil σ_c. On suppose que :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{D}(\sigma'_{xy} - \text{signe}(\sigma'_{xy})\sigma_c) \qquad \text{si} \qquad |\sigma'_{xy}| > \sigma_c > 0 \tag{4.123a}$$

et :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad \text{si} \qquad |\sigma'_{xy}| \leq \sigma_c. \tag{4.123b}$$

Dans le cas présent, la fonction $f(u)$ est donc du type $(1/D)(u - \text{signe}(u)\sigma_c)$ pour $|u| > \sigma_c$ et $f(u) = 0$ pour $|u| \leq \sigma_c$. Par la suite, nous supposons que $\partial p/\partial x < 0$ et $v_x \geq 0$. La relation : $\sigma'_{xy} = y(\partial p/\partial x)$ reste par ailleurs valable, et la contrainte σ'_{xy} s'annule pour $y = 0$. On a donc une zone près du plan de symétrie, où σ'_{xy} est inférieure à la valeur seuil et où $\partial v_x/\partial y$ est nul. La limite $\pm y_0$ de cette zone, où la vitesse est constante et égale à une valeur $V_{\max}$, vérifie :

$$y_0 = \sigma_c / \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \cdot \tag{4.124}$$

Si $y_0 > a/2$, la vitesse est nulle en tout point. Si $y_0 < a/2$, le profil de vitesse près de la paroi $y = a/2$ est obtenu par simple intégration de l'équation (4.123a) :

$$v_x(y) = \frac{1}{D}\int_y^{a/2} \left[u\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| - \sigma_c\right] \mathrm{d}u \tag{4.125}$$

et on a un profil symétrique près de la paroi $y = -a/2$. On obtient alors, à l'aide des relations (4.123a et b), les profils :

$$v_x(y) = \frac{1}{2D}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \left[\frac{a}{2} - y\right]\left[\frac{a}{2} + y - 2y_0\right] \tag{4.126a}$$

et :

$$v_x(y) = V_{\max} = \frac{1}{2D}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \left[\frac{a}{2} - y_0\right]^2 \tag{4.126b}$$

respectivement pour $y > y_0$ et $0 < y \leq y_0$ (on a une distribution de vitesse symétrique dans la région $y < 0$). Qualitativement, on observe les formes de profils de vitesse de la figure 4.24.

Lorsque la contrainte σ'_{xy} est en tous points inférieure à la contrainte seuil, aucun écoulement n'est observé. Lorsque le gradient de pression appliqué augmente, on observe des profils de vitesse avec une partie plate au centre,

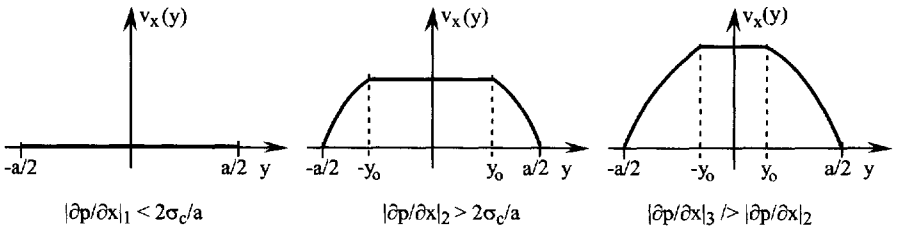


FIG. 4.24 – *Profils de vitesse observés pour un fluide de Bingham avec diverses valeurs du gradient de pression longitudinal.*

et dont l'étendue diminue au fur et à mesure qu'on augmente le gradient de pression appliqué. Plus généralement, on remarque, d'après les figures 4.23 et 4.24, que l'existence d'un effet de seuil ou d'une diminution de la viscosité avec la contrainte de cisaillement (qui joue un peu le même rôle) conduit à un aplatissement du profil de vitesse.

Fluide de Bingham dans un tube cylindrique

Le cas d'un fluide de Bingham dans un tube cylindrique est résolu exactement comme celui de l'écoulement entre deux plans, en utilisant la relation $\sigma'_{xr} = (r/2)(\partial p/\partial x)$ qui reste également valable. Le gradient de vitesse $\partial v_x/\partial r$ est nul dans la région centrale du profil jusqu'à un rayon r_0 vérifiant :

$$r_0 = 2\sigma_c / \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \cdot \tag{4.127}$$

Dans cette zone, on aura une vitesse constante $V_{\max}$ qui est nulle si $r_0 > R$. Si $r_0 < R$, le profil de vitesse près de la paroi vérifie l'équation :

$$v_x(r) = \frac{1}{D}\int_r^R \left[\frac{u}{2}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| - \sigma_c\right] \mathrm{d}u. \tag{4.128}$$

On obtient alors les expressions des profils de vitesse respectivement pour $r > r_0$ et $r < r_0$:

$$v_x(r) = \frac{1}{4D}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| [R - r][R + r - 2r_0] \tag{4.129a}$$

et :

$$v_x(r) = V_{\max} = \frac{1}{4D}\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| [R - r_0]^2. \tag{4.129b}$$

La forme de ces profils est qualitativement la même que dans la figure 4.24.

4.6.4 Écoulement d'un fluide viscoélastique près d'un plan oscillant

Nous avons étudié, à la section 4.5.4, l'écoulement d'un fluide newtonien près d'un plan solide oscillant parallèlement à lui-même, avec une pulsation ω. Supposons maintenant que le fluide est un fluide viscoélastique de Maxwell de caractéristiques rhéologiques décrites par l'équation (4.51). Pour analyser ce problème, nous reprenons la même démarche que précédemment, en supposant que la vitesse v parallèlement au plan vérifie $v(y,,t) = f(y)\cos(\omega t + \varphi) = \Re(f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ (Fig. 4.20), et en remplaçant dans l'équation (4.85) la viscosité ν par une viscosité complexe $\overline{\nu}$ vérifiant :

$$\overline{\nu} = \frac{\nu}{1 + \mathrm{i}\,\omega\tau}\cdot \tag{4.130}$$

Le temps caractéristique τ du fluide est relié au module élastique G et à la viscosité dynamique $\eta = \nu\rho$ par $\tau = \eta/G$. En résolvant l'équation (4.85) en utilisant l'expression (4.130) de la viscosité, on trouve que les solutions sont du type :

$$f(y) = C_1\,\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}k)y} + C_2\,\mathrm{e}^{(\beta+\mathrm{i}k)y} \tag{4.131}$$

où, contrairement au cas newtonien, on n'a plus nécessairement $\beta = k$, et où β et k vérifient :

$$\mathrm{i}\,\omega = \nu\,\frac{1 - \mathrm{i}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\,(\beta^2 - k^2 + 2\,\mathrm{i}\,\beta k). \tag{4.132}$$

Si on se limite aux écoulements dans le demi-espace infini $y > 0$, on peut prendre (comme pour le fluide newtonien) $C_2 = 0$ avec $\beta > 0$. Les parties réelles et imaginaires de l'équation (4.132) fournissent les deux relations :

$$(\beta^2 - k^2) + 2\beta k\omega\tau = 0 \tag{4.133a}$$

et

$$\omega(1 + \omega^2\tau^2) = 2\beta\nu\,k - \nu\omega\tau\,(\beta^2 - k^2). \tag{4.133b}$$

En reportant la valeur de $\beta^2 - k^2$ d'une équation dans l'autre, on trouve la relation :

$$\beta\,k = \frac{\omega}{2\nu}\cdot \tag{4.134}$$

Cette expression impose donc $k > 0$ si $\beta > 0$. En la reportant dans l'équation (4.133a), et en prenant la racine positive de la relation ainsi obtenue, on obtient finalement l'expression de k :

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\tau}{\nu} + \frac{\tau}{\nu}\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}\right]\cdot \tag{4.135}$$

On en déduit immédiatement l'expression de β à l'aide de la relation (4.131). Aux faibles fréquences telles que $\omega\tau \ll 1$, l'expression (4.135) se réduit à $k^2 = \omega/2\nu$ et on obtient la même valeur pour β d'après (4.134). Ce comportement est identique à celui d'un fluide newtonien (Éq. (4.86)) : cela était attendu puisque la viscosité complexe $\overline{\nu}$ devient alors égale à ν, d'après la relation (4.130). Dans le cas opposé où $\omega\tau \gg 1$ (période de l'excitation sinusoïdale courte devant le temps caractéristique τ du fluide viscoélastique), l'équation (4.135) devient :

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{\tau}{\nu} = \frac{\rho}{G} = \frac{1}{c_s^2} \cdot \tag{4.136}$$

Le rapport ω/k est alors égal à la vitesse de propagation c_s des ondes transverses de cisaillement dans un solide de module élastique de cisaillement G et de densité ρ : pour les hautes fréquences d'excitation, le corps se comporte bien comme un solide élastique (le module complexe $\overline{G}$ de l'équation (4.51) se réduit alors à G) où peuvent se propager de telles ondes, contrairement à un fluide newtonien dans lequel elles s'atténuent très rapidement.

Remarque La distance $1/\beta$ représente la distance caractéristique d'atténuation des oscillations de vitesse induites par le plan ; le rapport k/β représente donc l'ordre de grandeur du nombre de longueurs d'onde sur lesquelles s'effectue l'atténuation. À l'aide des relations (4.134) et (4.136), et en utilisant la définition (4.89) de la profondeur de pénétration $\delta(\omega)$ des oscillations pour un fluide newtonien, on obtient :

$$2k^2\,\delta^2(\omega) = 4\omega\tau \tag{4.137}$$

et

$$\frac{k}{\beta} = \frac{k^2}{\omega/2\nu} = k^2\,\delta^2\,(\omega). \tag{4.138}$$

La condition $\omega\tau \gg 1$ (comportement élastique du fluide) entraîne donc nécessairement $k\delta(\omega) \gg 1$ (longueur d'onde faible devant la profondeur de pénétration visqueuse), $k/\beta \gg 1$ (grand nombre de longueurs d'ondes dans la distance d'atténuation des oscillations de vitesse). Comme la relation (4.134) peut être récrite sous la forme : $\beta\delta(\omega) = 1/(k\delta(\omega)) \ll 1$, on en déduit également que la distance d'atténuation $1/\beta$ dans le régime élastique est très supérieure à la distance de pénétration $\delta(\omega)$ qui résulterait des seuls effets de la viscosité (il faut cependant noter que, avec des fluides réels tels que ceux qui correspondent à la figure 4.14, les déviations par rapport à la loi de Maxwell observées à haute fréquence réduiront en pratique la distance de propagation).

4.7 Écoulements quasi parallèles – approximation de lubrification

Nous avons étudié jusqu'à présent dans ce chapitre les écoulements parallèles pour lesquels le terme non linéaire $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ de l'équation de

Navier–Stokes est nul, parce que le gradient de la vitesse $\mathbf{v}$ est normal à celle-ci. Si les écoulements sont stationnaires ($\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$), ils vérifient par un simple effet de géométrie – et quel que soit le nombre de Reynolds – l'équation de Stokes :

$$\mathbf{grad}\, p - \rho\, \mathbf{f} = \eta\, \Delta \mathbf{v}. \tag{4.139}$$

Les écoulements quasi parallèles se rencontrent dans de nombreuses applications telles que l'étalement d'un film fluide ou la lubrification de machines tournantes. On peut calculer la dynamique de l'étalement du film dans le premier cas, les forces entre les surfaces en mouvement dans le second, en faisant l'hypothèse que les écoulements sont principalement parallèles aux surfaces de ces films. Dans cette section, nous nous intéressons à des écoulements de couches minces de fluide entre des parois fixes presque parallèles : les termes non linéaires de l'équation de mouvement ne sont pas exactement nuls mais ils sont alors suffisamment petits pour ne pas influencer la dynamique du fluide. On parle alors d'approximation de lubrification.

4.7.1 Approximation de lubrification

Nous supposerons que les distances caractéristiques de variation des paramètres d'écoulement parallèlement aux parois sont beaucoup plus grandes que la distance entre celles-ci, comme c'est le cas sur la figure 4.25 (on doit avoir en particulier un angle $\theta \ll 1$ en tout point entre les parois). Dans la suite, nous nous plaçons dans une configuration bidimensionnelle, où seules interviennent les directions x et y, mais les résultats sont aisément généralisables à un cas tridimensionnel.

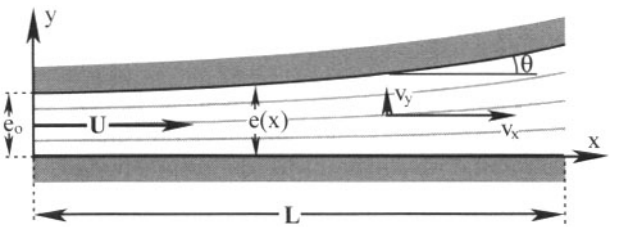


FIG. 4.25 – *Vue schématique de la géométrie d'un écoulement de lubrification.*

Cherchons ce que deviennent les différents termes de l'équation de Navier–Stokes (4.56) pour l'écoulement bidimensionnel dans le plan (x, y). À cette équation, il faut ajouter l'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{4.140}$$

Comme déjà indiqué précédemment, il faut noter que, l'écoulement n'est pas induit seulement par le gradient de pression, mais par le gradient de la combinaison $(p - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{r})$ (en l'absence de mouvement, l'équation de l'hydrostatique donne $(p - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}) = \text{cte}$, où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur pour le point considéré). En supposant la gravité absente, ou en supposant que $\mathbf{grad}\, p$ représente en fait le gradient de $(p - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{r})$, les composantes de l'équation (4.56) deviennent :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \tag{4.141a}$$

et

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + (\mathbf{v}.\mathbf{grad})v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \tag{4.141b}$$

cependant que :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{4.142}$$

Nous considérons d'abord un écoulement stationnaire, ce qui permet de négliger les termes en $\partial/\partial t$, et nous faisons un raisonnement axé sur l'évaluation approchée des ordres de grandeur des différents termes. Dans le cas d'un écoulement « laminaire » stable et lent, on observe expérimentalement que la trajectoire des particules de fluide suit le profil des parois, de même que dans la figure 4.25. Comme dans le cas de deux plans parallèles, la vitesse s'annule sur les parois. Dans le centre de l'écoulement, on peut considérer que l'angle du vecteur vitesse avec la paroi $y = 0$ est de l'ordre de l'angle $\theta(\ll 1)$ entre les deux parois. D'où :

$$v_y \approx v_x\,\theta \approx U\,\theta \tag{4.143}$$

où U est la vitesse caractéristique de l'écoulement (la vitesse moyenne, par exemple ou encore la vitesse maximale au centre du canal – les deux pouvant être considérées comme d'un même ordre de grandeur dans le raisonnement approximatif que nous effectuons). Compte tenu de l'existence d'un profil de vitesse de type Poiseuille entre les parois, on peut considérer que la distance type sur laquelle s'effectuent les variations de vitesse dans la direction y est l'épaisseur locale $e(x)$ qu'on supposera de l'ordre de grandeur d'une valeur moyenne e_0 (cela revient à dire que la variation relative de l'épaisseur n'est pas trop grande sur la longueur L). On obtient donc :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{U}{e_0} \tag{4.144a}$$

et :

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{U\theta}{e_0}\cdot \tag{4.144b}$$

D'où, en utilisant l'équation (4.142) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{U\theta}{e_0} \cdot \tag{4.145}$$

(Tous les ordres de grandeur sont donnés en valeur absolue). En ce qui concerne les dérivées secondes, on peut alors, en utilisant ces résultats, estimer de la même manière, que :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \approx \frac{U\theta}{e_0^2} \tag{4.146a}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \frac{U}{e_0^2} \tag{4.146b}$$

et :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \approx \frac{U\theta}{e_0^2} \cdot \tag{4.146c}$$

On peut également donner une borne supérieure des termes $\partial^2 v_x/\partial x^2$ et $\partial^2 v_y/\partial y \partial x$ (égaux et opposés en raison de la condition d'incompressibilité) en prenant $\partial/\partial x \approx 1/L$ avec, par conséquent :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} \approx \frac{U\theta}{e_0 L} \tag{4.147a}$$

et, de même :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \approx \frac{U\theta}{L^2} \cdot \tag{4.147b}$$

Ces termes sont très petits, et seules les dérivées secondes par rapport à y doivent être prises en compte dans les termes de viscosité des équations (4.141a & b).

Évaluons maintenant les conditions pour que le terme non linéaire de la composante de l'équation de mouvement suivant l'écoulement moyen reste négligeable devant le terme de viscosité. En utilisant les résultats précédents, on obtient :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \approx \frac{U^2\theta}{e_0} \tag{4.148a}$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{U^2\theta}{e_0} \tag{4.148b}$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \nu \frac{U}{e_0^2} \cdot \tag{4.148c}$$

Les termes non linéaires sont donc négligeables si :

$$\frac{U^2\theta}{e_0} \ll \nu \frac{U}{e_0^2} \tag{4.149a}$$

soit :

$$Re = \frac{U e_0}{\nu} \ll \frac{1}{\theta} \cdot \tag{4.149b}$$

Pour des écoulements de géométrie quelconque, la condition sur le nombre de Reynolds, qui permet de négliger les termes non linéaires, est $Re \ll 1$. Ici, la condition (4.149b) est bien moins sévère car, dans les géométries de lubrification, l'angle θ est très petit devant l'unité. On pourra donc continuer à utiliser une équation linéaire même pour des écoulements correspondant à un nombre de Reynolds nettement supérieur à l'unité. Dans le cas des écoulements exactement parallèles, la condition devient $Re < \infty$, ce qui reflète le fait que le terme non linéaire s'annule pour des raisons purement géométriques, quel que soit le nombre de Reynolds.

Calculons la composante $\partial p/\partial y$ du gradient de pression dans la direction perpendiculaire à l'écoulement moyen à partir de l'équation (4.141b). On estime comme précédemment que :

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \frac{U^2\,\theta}{L} \tag{4.150a}$$

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{U^2\,\theta^2}{e_0} \tag{4.150b}$$

$$\nu\,\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \approx \nu\,\frac{U\,\theta}{e_0^2} \cdot \tag{4.150c}$$

Le terme visqueux donné par l'équation (4.150c) est donc d'un ordre de grandeur en θ inférieur à celui de l'équation (4.148c). Si $Re \ll 1/\theta$ et que e_0/L est assez petit, les termes non linéaires (4.150a et b) seront inférieurs au terme visqueux (4.150c), et en tout cas très faibles devant le terme visqueux de l'équation suivant Ox. On peut donc considérer que le gradient de pression transverse à l'écoulement est nul (ou plutôt se réduit au gradient de pression hydrostatique) quand θ est faible et que le nombre de Reynolds est assez petit.

Il faut cependant noter que toute cette discussion suppose que l'écoulement laminaire est établi et non perturbé : au-delà de certaines vitesses critiques d'écoulement, et même si la condition (4.149b) reste vérifiée (comme entre des plans parallèles), l'écoulement devient instable et des composantes de vitesse significatives normales à l'écoulement moyen apparaissent. La discussion précédente n'est alors plus valable.

4.7.2 Effets d'instationnarité

Reprenons maintenant la forme générale (4.56) de l'équation de Navier-Stokes en supposant que l'écoulement varie avec un temps caractéristique T ou une pulsation caractéristique ω (paramètre mieux adapté pour un écoulement périodique). Le terme $\partial \mathbf{v}/\partial t$ sera de l'ordre de U/T, ou encore de $U\omega$. Il sera négligeable devant le terme de viscosité si $\partial \mathbf{v}/\partial t \ll \nu \Delta \mathbf{v}$, soit :

$$\frac{U}{T} \ll \nu \frac{U}{e_0^2}$$

ou :

$$N = \frac{\omega\, e_0^2}{\nu} \ll 1.$$

Nous retrouvons le même rapport de fréquences que nous avons rencontré dans l'étude de l'écoulement alternatif entre deux plans (section 4.5.4, formule (4.95)). La condition $N \ll 1$ implique que le temps caractéristique de diffusion des gradients de vitesse (ou de la vorticité) sur l'épaisseur du film fluide, qui représente le temps caractéristique d'établissement d'un profil de vitesse stationnaire, soit beaucoup plus petit que le temps caractéristique T d'évolution de l'écoulement (ou encore $1/\omega$). Si cette condition est réalisée, l'écoulement pourra être considéré comme quasi stationnaire, et les termes en $\partial \mathbf{v}/\partial t$ pourront être négligés.

4.7.3 Équations de mouvement dans l'approximation de lubrification

Dans ce cas, si des d'instabilités ne se développent pas dans l'écoulement, et que les conditions $\theta \ll 1$ et $Re \ll 1/\theta$ sont vérifiées, les équations (4.141a & 4.141b) se réduisent, en régime stationnaire, à :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{4.151a}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{4.151b}$$

ce qui représente exactement le même système d'équations que pour un écoulement parallèle. La vitesse v_x variera suivant Ox si l'épaisseur n'est pas constante, mais beaucoup plus lentement que dans la direction Oy pour laquelle la distance caractéristique de variation est e_0. Pour calculer le profil de vitesse, on intègre donc l'équation (4.151a) par rapport à y, comme si $\partial p/\partial x$ était une constante (les deux variables sont découplées). En fait $\partial p/\partial x$ est effectivement pratiquement indépendant de y (si les conditions de l'approximation de lubrification sont vérifiées), mais pourra évoluer suivant

Ox sur des distances très grandes cependant devant l'épaisseur de la couche de fluide. Les écoulements faiblement instationnaires peuvent être traités de la même façon si la variation temporelle de la vitesse est suffisamment lente. Nous verrons plus loin des exemples où l'instationnarité joue un rôle.

4.7.4 Écoulement stationnaire entre deux plans mobiles formant un angle faible

Si on fait glisser une feuille de papier parallèlement à la surface horizontale d'une table lisse, la présence du film d'air entre la table et la feuille favorise le glissement ; au contraire, si la feuille est percée de quelques trous, elle glisse très mal, car il n'existe plus de différence de pression entre l'air extérieur et cette couche intermédiaire. La différence de pression qui existe dans le premier cas est due à la formation d'un biseau vers l'arrière entre la feuille et la table, schématisé par la figure 4.26.

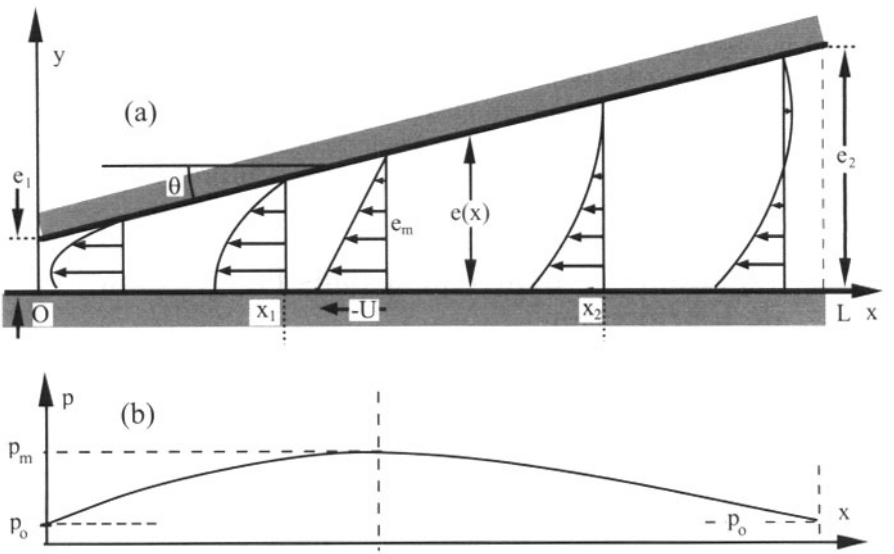


FIG. 4.26 – *Schéma de l'écoulement induit par le mouvement relatif d'un plan incliné se déplaçant par rapport à un plan horizontal ; (a) le champ de vitesse a été représenté dans le référentiel où le plan incliné est fixe ; (b) loi de variation de la pression dans l'intervalle entre les deux plans.*

Pour le calcul, nous considérons que les plaques sont infiniment étendues dans la direction transverse (direction perpendiculaire au plan de figure) : aussi, nous donnerons des valeurs de force ou de débit correspondant à une tranche de dimension unité dans cette direction. Nous supposons par ailleurs que la vitesse de la feuille est nulle, le plan inférieur se déplaçant avec une

vitesse $-U$; cela permet d'obtenir un profil d'écoulement stationnaire, car la surface inférieure se déplace dans son propre plan et l'épaisseur de fluide reste donc constante en un point fixe par rapport au plan supérieur. La distance entre les plans est donnée par :

$$e(x) = e_1 + \theta\, x$$

où l'angle $\theta = (e_2 - e_1)/L$ est supposé petit. On peut donc appliquer les équations (4.151a et b) et intégrer l'équation (4.151a) en prenant $\partial p/\partial x$ indépendant de y.

L'équation (4.151b) montre que la pression p ne dépend que de x. En tenant compte des conditions aux limites $v(y=0) = -U$ et $v(y = e(x)) = 0$, on obtient alors par intégration de l'équation (4.151a) :

$$v(x,y) = -\frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\, y\,[e(x) - y] - U\,\frac{e(x) - y}{e(x)}\,. \tag{4.152}$$

Remarquons que, comme plus haut (section 4.5.3), le champ de vitesse correspond à la superposition d'un écoulement de Poiseuille (terme parabolique associé au gradient de pression) et d'un écoulement de Couette (terme linéaire en y, associé au déplacement du plan à la vitesse $-U$). Sur la figure 4.26a on a représenté les profils de vitesse paraboliques correspondant à différentes positions entre les deux plans.

Calculons à présent la répartition de pression sous le plan supérieur ; pour cela, nous exprimons la condition de conservation, aux différentes abcisses, du débit Q (par unité de largeur de plaque suivant Oz), obtenu par intégration de l'équation (4.152), soit :

$$Q = \text{constante} = \int_0^{e(x)} v\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{e(x)^3}{12} - \frac{U\,e(x)}{2}\,. \tag{4.153}$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette expression coincide avec l'expression (4.72) lorsqu'on remplace V_0 par $-U$ et a par $e(x)$. On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \theta\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}e} = -\frac{12\,\eta\,Q}{e(x)^3} - \frac{6\,\eta\,U}{e(x)^2}\,. \tag{4.154}$$

Cette équation donne d'ailleurs la valeur e_m de l'épaisseur au point où la pression est extrémale ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}e = 0$) avec :

$$e_m = -2\,\frac{Q}{U}\,. \tag{4.155}$$

On obtient ensuite la valeur du champ de pression en intégrant l'équation (4.154) par rapport à e, compte tenu de la condition $p(x=0) = p_0$ (pression atmosphérique à l'extérieur du film de faible épaisseur). On trouve :

$$p(x) = p_0 + \frac{6\,\eta\,Q}{\theta}\left[\frac{1}{e(x)^2} - \frac{1}{e_1^2}\right] + \frac{6\,\eta\,U}{\theta}\left[\frac{1}{e(x)} - \frac{1}{e_1}\right]. \tag{4.156}$$

On détermine la valeur du débit Q en écrivant que la pression vaut également p_0 à l'autre extrémité du plan (en $e = e_2$). On trouve alors :

$$Q = -\frac{e_1\, e_2}{e_1 + e_2}\, U \tag{4.157}$$

d'où, d'ailleurs :

$$e_m = 2\,\frac{e_1\, e_2}{e_1 + e_2}\,\cdot \tag{4.158}$$

L'équation (4.158) indique que, dans le cas où $e_1 \ll e_2$, le point où la pression est extrémale vérifie $e_m = 2e_1$, et est donc très proche du bord où l'épaisseur est faible. L'équation (4.157) indique que Q et U sont de signes opposés c'est-à-dire que le débit moyen du fluide est orienté dans la direction du mouvement du plan inférieur. L'équation (4.156) peut alors être transformée en remplaçant Q par son expression en fonction de U, pour obtenir finalement :

$$p(x) = p_0 + \frac{6\,\eta\, U}{\theta}\,\frac{(e_2 - e(x))\,(e(x) - e_1)}{e(x)^2\,(e_1 + e_2)}\,\cdot \tag{4.159}$$

La différence $p(x) - p_0$ est donc nécessairement du même signe que U/θ, puisque $e(x)$ est compris entre e_1 et e_2. On a représenté à la figure 4.26b la répartition de pression correspondante entre plans (dans le cas de cette figure, la condition $e_1 \ll e_2$ n'est pas vérifiée, et le maximum de pression est situé un peu plus loin de l'ouverture d'épaisseur e_1).

La force de sustentation F_N sur la feuille, due à l'excédent de pression induit par le débit, est donnée par l'intégrale :

$$F_N = \int_0^L (p - p_0)\,\mathrm{d}x = \frac{6\,\eta\, U}{\theta^2}\left[\ln\frac{e_2}{e_1} - \frac{2(e_2 - e_1)}{e_2 + e_1}\right]\cdot \tag{4.160}$$

On peut aussi déterminer la force de frottement tangentielle sur la plaque, soit :

$$\begin{aligned} F_T = \int_0^L \eta\,\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x &= \int_0^L \left(\frac{e(x)}{2}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\eta\, U}{e(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\,\eta\, U}{\theta}\left[-\ln\frac{e_2}{e_1} - \frac{3(e_2 - e_1)}{e_2 + e_1}\right]\cdot \end{aligned} \tag{4.161}$$

Dans le cas général, le rôle relatif des valeurs de θ, e_1 et e_2 est subtil puisque, lorsque $\theta \to 0$, $e_2 \to e_1$; le numérateur ainsi que le dénominateur des expressions de F_T et F_N tendent alors vers 0. Nous évaluerons donc ces deux composantes dans le cas particulier où l'épaisseur e_2 est très supérieure à l'épaisseur minimale e_1. Dans ce cas, on trouve :

$$F_T \approx -\left(6 + 2\ln\frac{e_2}{e_1}\right)\frac{\eta U}{\theta} \tag{4.162a}$$

$$F_N = \left(\ln \frac{e_2}{e_1} - 2\right) \frac{6\eta U}{\theta^2} \tag{4.162b}$$

avec $\theta = (e_2 - e_1)/L \approx e_2/L$ (on remarque que les variations du rapport e_2/e_1 influent peu sur celles de F_T et F_N). Compte tenu des faibles valeurs de θ, F_N peut prendre des valeurs très importantes, alors que la force de freinage tangentielle F_T est inférieure d'un ordre de grandeur : c'est le résultat essentiel de la lubrification. Cette propriété est mise à profit dans les paliers de machines tournantes, ou sur les patins hydrauliques ; grâce à des biseaux d'angle très faible, on peut créer des forces normales importantes, qui supportent de lourdes charges. Dans un palier hydraulique, les *forces* normales dites *élastohydrodynamiques* peuvent ainsi déformer élastiquement les solides au voisinage des points de section minimale.

Remarques

♦ Pour $e_2/e_1 = 10$, par exemple, les coefficients numériques des expressions de F_T et F_N valent respectivement $-8,3$ et 0,3, et ils ne varient que très lentement avec e_2/e_1. Remarquons que les variations respectives de F_T et F_N en $1/\theta$ et $1/\theta^2$, dans ces formules, ne restent valables que si e_2/e_1 reste élevé (*i.e.* la réduction de θ est due uniquement à la diminution de e_2/L). Si $e_2/e_1 \to 1$, il faut alors revenir à la forme initiale des expressions de F_T et F_N donnant $F_N = 0$ pour $e_2 = e_1$ (plans parallèles).

♦ Notons aussi que, lorsque $e_2 \gg e_1$, le maximum de $p(x)$ est obtenu pour $e \approx 2e_1$; ce résultat montre que les forces normales sont localisées dans les zones de plus faible épaisseur ; il permet d'obtenir des solutions approchées des problèmes de lubrification. Prenons, par exemple, le calcul de la force qui s'exerce entre deux sphères de même rayon R, qui s'approchent l'une de l'autre de telle façon que la séparation minimale à l'instant t est $e_1(t)$: on résoud le problème en se limitant aux contributions des points de l'écoulement sur une calotte sphérique de rayon $\sqrt{R\,e_1(t)}$ (la séparation des bords de la calotte au plan est égale dans ce cas à $2e_1$).

♦ Discutons finalement les profils de vitesse entre les deux parois à partir de l'équation (4.141) transformée en remplaçant $\partial p/\partial x$ par $\theta(\partial p/\partial e)$, et en remplaçant $\partial p/\partial e$ par l'expression (4.154) combinée à l'expression (4.157). On s'intéresse tout particulièrement ici à l'existence possible d'un maximum dans le profil de vitesse. Nous calculerons donc simplement la dérivée :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2y - e(x)}{2\eta}\,\theta\,\frac{\partial p}{\partial e(x)} + \frac{U}{e(x)} = \frac{2U}{e(x)^2}\left[\frac{3e_1e_2(2y-e)}{e(x)(e_1+e_2)} + 2e(x) - 3y\right]. \tag{4.163}$$

Près de la paroi inférieure ($y = 0$) et de la paroi supérieure ($y = e(x)$), on a respectivement :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2U}{e(x)^2}\left[-\frac{3e_1e_2}{(e_1+e_2)} + 2\,e(x)\right] \tag{4.164a}$$

et

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2U}{e(x)^2}\left[\frac{3e_1e_2}{(e_1+e_2)} - e(x)\right]. \tag{4.164b}$$

Les dérivées $\partial v_x/\partial y$ du profil de vitesse sur les plans inférieur et supérieur s'annulent donc respectivement pour $e(x_1) = 3e_1e_2/(2(e_1+e_2)) = 3e_m/4$ et

$e(x_2) = 3e_1e_2/(e_1 + e_2) = 3e_m/2$, c'est-à-dire de part et d'autre du point où se trouve le maximum de pression. Pour des distances plus faibles que x_1, on a un minimum de vitesse ; pour des distances plus grandes que x_2, la vitesse est dirigée vers la droite à proximité de la paroi supérieure et on a un maximum de vitesse. Pour la section d'épaisseur e_m correspondant au maximum de la pression, on a un profil de variation linéaire avec la distance : on le voit aisément en calculant la dérivée seconde $\partial^2 v_x/\partial y^2$ du profil $v_x(y)$ de la vitesse à partir de l'équation (4.163), pour obtenir $\partial^2 v_x/\partial y^2 = (\theta/\eta)(\partial p/\partial e(x))$. Le profil de courbure nulle correspond bien au maximum de pression : ce qui est normal puisque, en l'absence de gradient de pression, la composante de Poiseuille de l'écoulement s'annule et seule la composante de Couette subsiste.

4.7.5 Écoulements d'un film fluide de profil d'épaisseur quelconque

Dans cette partie, nous traitons le cas plus général de l'écoulement d'un film mince de fluide entre deux surfaces solides d'espacement variable avec des mouvements relatifs dans des directions quelconques.

Équation de Reynolds

On conserve l'hypothèse d'un film fluide suffisamment mince par rapport aux distances caractéristiques de variation de la vitesse et de l'épaisseur parallèlement au film, pour qu'on puisse continuer de considérer l'écoulement comme quasi parallèle (Fig. 4.27). On suppose également que la surface inférieure est un plan immobile $y = 0$, que la surface supérieure est située à une hauteur $h(x, t)$, et que chaque point de la surface supérieure a une vitesse $\mathbf{U}(x, t)$ de composantes respectives $U(x, t)$ et $V(x, t)$ suivant Ox et Oy. Le gradient longitudinal de pression $\partial p/\partial x$ est considéré comme constant sur l'épaisseur du film, mais peut varier lentement le long de celui-ci.

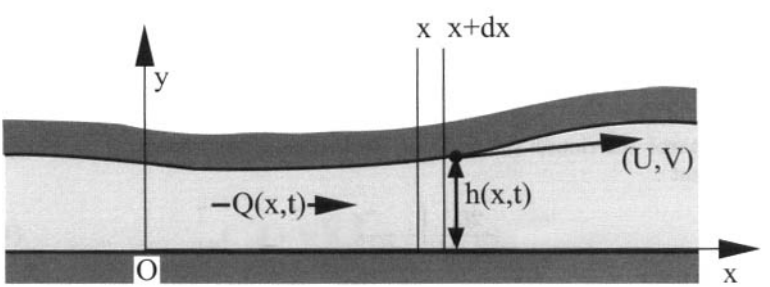


FIG. 4.27 – *Schéma d'un écoulement quasi unidimensionnel d'une fine couche de liquide entre un plan et une surface supérieure solide de distance $h(x, t)$ au plan variable avec le temps et la position.*

Enfin, comme précédemment, l'écoulement local est une superposition d'un écoulement de Poiseuille (induit par le gradient de pression $\partial p/\partial x$) et d'un écoulement de Couette dû au déplacement relatif éventuel des surfaces solides limitant les surfaces supérieure et inférieure du film.

Négligeons des forces en volume (parallèles à la couche fluide) éventuelles : on peut conserver la relation (4.153) entre le débit local $Q(x, t)$ dans le film (par unité de longueur suivant Oz), le gradient $\partial p/\partial x$ et la composante de vitesse $U(x, t)$ du plan supérieur dans la direction Ox, avec :

$$Q(x, t) = -\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2} \cdot \tag{4.165}$$

Analysons maintenant la conservation de la masse dans une tranche du film fluide sur l'intervalle $(x, x + \mathrm{d}x)$: la variation $(\partial h/\partial t)\mathrm{d}x$ de volume de fluide dans la tranche, par unité de temps, est la différence $Q(x) - Q(x + \mathrm{d}x) = -(\partial Q/\partial x)\,\mathrm{d}x$ entre les débits de fluide entrant et sortant. On obtient alors, en dérivant par rapport à x l'équation (4.165) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{12\,\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right] - \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial h}{\partial x}\right) \cdot \tag{4.166}$$

Cela correspond à un écoulement à deux dimensions invariant par translation dans la direction Oz. On appelle l'expression (4.166) *équation de Reynolds.* En pratique, on impose souvent les valeurs de pression aux extrémités de la couche fluide.

Notons enfin que les composantes verticale V et horizontale U de la vitesse locale de la paroi sont reliées à la dérivée $\partial h/\partial t$ par la relation géométrique :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = V - U\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \tag{4.167}$$

En effet, un déplacement horizontal de la paroi supérieure entraînera une variation de l'épaisseur locale si la paroi n'est pas elle-même localement horizontale. Cette variation locale s'ajoute à celle induite par la composante verticale du déplacement de la paroi. La variation résultante est nulle si la paroi supérieure se déplace dans son plan ($V/U = \partial h/\partial x$). Dans le cas d'un film à deux dimensions où l'épaisseur $h(x, z, t)$ varie dans les deux directions x et z parallèles au plan inférieur, on doit remplacer l'équation (4.165) par :

$$\mathbf{Q}(x, z, t) = -\frac{h^3}{12\eta}\,\mathbf{grad}\,p + \frac{\mathbf{U}h}{2} \tag{4.168}$$

où $\mathbf{U}$ représente la projection sur le plan xOz de la vitesse de la surface supérieure et $\mathbf{Q}$ a pour composantes le débit local par unité de section respectivement perpendiculaire à Ox et Oz. En écrivant l'équation de conservation de la masse sous une forme tridimensionnelle $\partial h/\partial t + \mathrm{div}\,\mathbf{Q} = 0$,

on obtient la généralisation de l'équation (4.166) :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[h^3\,\mathbf{grad}\,p] &= h^3\,\Delta p + 3\,h^2\,\mathbf{grad}\,h\cdot\mathbf{grad}\,p\\ &= 6\eta\left(h\operatorname{div}\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{grad}\,h+2\frac{\partial h}{\partial t}\right)\cdot\end{aligned}\tag{4.169}$$

De même, l'équation (4.167) devient alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = V - \mathbf{U}\cdot\mathbf{grad}\,h \tag{4.170}$$

Le problème de la section 4.7.4 (écoulement entre deux plans formant un angle θ) peut être traité comme une solution particulière de l'équation de Reynolds avec $\partial h/\partial t = -U\partial h/\partial x$, $h(x) = e(x)$ et $\partial e/\partial t = -U\,\partial e/\partial x$. En effet, on se plaçait dans un référentiel fixe par rapport au plan supérieur où l'écoulement était stationnaire, alors que dans cette section on se place dans un référentiel fixe par rapport au plan inférieur (la vitesse locale du plan supérieur est alors U). L'équation (4.166) devient alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h^3\,\frac{\partial p}{\partial x}\right] = -6\eta\,U\,\frac{\partial h}{\partial x}\cdot \tag{4.171}$$

On obtient la même équation en multipliant la relation (4.154) par $e(x)^3$ et en dérivant par rapport à x (Q = cte par rapport à x dans le référentiel du plan supérieur, alors qu'il varie dans celui du plan inférieur).

Un exemple d'application de l'équation de Reynolds : cylindre descendant vers un plan infini

Considérons le problème avec une symétrie de révolution (Fig. 4.28) d'un cylindre, qui s'approche d'un plan infini parallèle à sa face inférieure. On suppose qu'il y a une goutte de volume constant V_0 (Fig. 4.28a) entre le cylindre et le plan, ou que le cylindre et le plan sont immergés complètement dans un même fluide (Fig. 4.28b). On appelle F_{ext} la force supposée constante, qui peut être le poids du cylindre, exercée par le cylindre sur le fluide. On suppose que la pression en dehors de la goutte, ou en dehors de l'intervalle cylindre-plan, est une constante notée p_{at}. En notant que $\mathbf{grad}\,h = 0$ et $U = 0$, on trouve :

$$\Delta p = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{12\eta}{h^3}\,\frac{\partial h}{\partial t}\cdot \tag{4.172}$$

En intégrant deux fois l'équation (4.172) par rapport à r, on trouve :

$$p(r) = \frac{3\eta}{h^3}\,\frac{\partial h}{\partial t}\,r^2 + B\,\ln r + C. \tag{4.173}$$

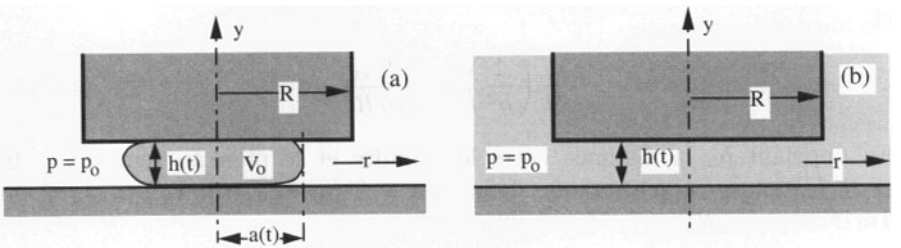


FIG. 4.28 – *(a) Schéma d'un cylindre descendant vers un plan infini en écrasant une goutte liquide de volume constant, avec une symétrie de révolution du cylindre ; (b) cylindre complètement immergé dans un fluide descendant vers un plan infini parallèle.*

Le coefficient B est nul car la pression doit rester finie sur l'axe, et C est déterminé en écrivant que $p(r) = p_{\text{at}}$ pour $r = a(t)$ (cas (a)) ou $r = R$ (cas (b)). On obtient alors respectivement :

$$p(r) = \frac{3\eta}{h^3}\frac{\partial h}{\partial t}(r^2 - a^2) + p_{\text{at}} \tag{4.174a}$$

et

$$p(r) = \frac{3\eta}{h^3}\frac{\partial h}{\partial t}(r^2 - R^2) + p_{\text{at}}. \tag{4.174b}$$

Notons que, dans le cas d'une goutte de volume constant V_0 fini, le rayon $a(t)$ de la goutte est relié à l'épaisseur $h(t)$ par $a^2(t) = V_0/(\pi h(t))$. Calculons la force totale F_p exercée par la pression du fluide sur le piston par intégration de la pression par rapport à r entre 0 et $a(t)$ ou R ($F_p = \int 2\pi(p - p_{\text{at}})r\,\mathrm{d}r$). On obtient alors respectivement :

$$F_p = -\frac{3\pi\eta a^4}{2h^3}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{3\eta V_0^2}{8\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{h^4}\right) \tag{4.175a}$$

et

$$F_p = -\frac{3\pi\eta R^4}{2h^3}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{3\pi\eta R^4}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{h^2}\right). \tag{4.175b}$$

Cette force est équilibrée par la force $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ supposée constante appliquée par le cylindre. En remplaçant $h(t)$ par sa valeur, en supposant la force $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ dirigée vers le bas et en négligeant les termes associés à l'accélération du cylindre, on obtient les équations différentielles pour la variation de $h(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{h^4}\right) = \frac{8\pi\,|F_{\text{ext}}|}{3\eta\,V_0^2} \tag{4.176a}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{h^2}\right) = \frac{4\,|F_{\text{ext}}|}{3\pi\eta\,R^4}\,. \tag{4.176b}$$

En appelant h_0 la distance entre le cylindre et le plan au temps $t = 0$, et t_0 le temps caractéristique défini par : $8\pi\,t_0\,|F_{\text{ext}}|/(3\eta\,V_0^2) = 1/h_0^4$ ou $4\,t_0\,|F_{\text{ext}}|/(3\pi\eta\,R^4) = 1/h_0^2$, on obtient :

$$h(t) = \left[\frac{3\,\eta\,V_0^2}{8\,\pi\,|F_{\text{ext}}|}\right]^{1/4} \frac{1}{(t+t_0)^{1/4}} \tag{4.177a}$$

et

$$h(t) = \left[\frac{3\,\pi\,\eta\,R^4}{4\,|F_{\text{ext}}|}\right]^{1/2} \frac{1}{(t+t_0)^{1/2}}\,. \tag{4.177b}$$

Dans le premier cas (a), le rayon $a(t)$ de la goutte augmentera avec le temps en $(t+t_0)^{-1/8}$. Quand le rayon de goutte atteint le rayon R du cylindre, les formules du deuxième cas (b) s'appliquent au premier.

Pour une force $|F_{\text{ext}}|$ constante imposée, le cylindre devrait atteindre le plan au bout d'un temps infini par suite de l'effet croissant du ralentissement. Ce dernier est encore plus marqué dans le cas d'une goutte n'occupant qu'une partie de l'intervalle entre cylindre et plan : en effet, quand h diminue, non seulement les forces de frottement deviennent plus élevées mais, de plus, la surface sur laquelle on a frottement visqueux augmente.

Remarque En pratique, l'effet des rugosités des surfaces en regard fait disparaître la singularité, lorsque la distance devient de l'ordre de la hauteur de ces rugosités.

Inversement, si on impose la vitesse de descente $V_z = \mathrm{d}h/\mathrm{d}t$, la force de pression F_p à appliquer pour conserver cette vitesse de descente augmentera rapidement lorsque l'épaisseur diminuera (d'après (4.175a et b)) :

$$F_p = -\frac{3\eta\,V_0^2}{2\pi\,h^5}\,V_z \tag{4.178a}$$

et

$$F_p = -\frac{3\pi\eta\,R^4}{2h^3}\,V_z. \tag{4.178b}$$

On voit donc qu'on peut développer des forces considérables lorsque l'intervalle entre les objets et l'épaisseur du film fluide diminue.

4.7.6 Quelques problèmes de lubrification

Une application très importante des problèmes de lubrification se rencontre dans les déplacements de pièces en mouvement, lorsqu'il y a un faible intervalle entre les pièces (piston–cylindre, essieu–logement ...). Un autre exemple

est l'interaction entre des particules dans une suspension, lorsqu'elles se rapprochent à faible distance. Les calculs de lubrification permettent aussi de rendre compte de l'augmentation de la force de frottement visqueux sur une sphère se déplaçant au voisinage d'une paroi. Néanmoins, lorsque la distance devient très faible, les effets de rugosité jouent un rôle important. Un exemple en est donné à la figure 4.29. Dans le cas de deux sphères parfaitement lisses qui se rencontrent, la trajectoire finale coïncide avec la ligne de déplacement initial (Fig. 4.29a) : on peut montrer que cela résulte de la réversiblité par renversement du temps des solutions de l'équation de mouvement de Stokes à petit nombre de Reynolds (voir chapitre 8, section 8.2.3). Cette réversibilité peut être brisée par l'effet des rugosités des particules (Fig. 4.29b). Nombre de problèmes liés à la lubrification, aux frottements et à l'usure dépendent des hétérogénéités des surfaces.

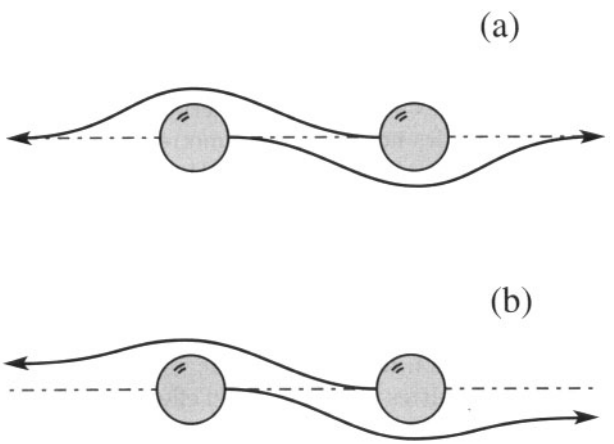


FIG. 4.29 – *Différence entre le mouvement d'une sphère se déplaçant par rapport à une autre sphère fixe, dans le cas idéal de sphères sans interactions autres que celles dues à l'hydrodynamique (a) ; dans un cas réel de sphères rugueuses (b). Dans le deuxième cas, les deux sphères subissent un décalage de leur trajectoire après s'être rencontrées, au lieu de revenir sur la ligne commune où elles se trouvaient initialement (un effet analogue pourrait être obtenu dans le cas où les deux sphères présenteraient des interactions interparticulaires telles que, par exemple, la répulsion électrostatique).*

Notons enfin que l'argument de réversibilité suppose que le champ de vitesse prend à chaque instant sa configuration d'équilibre qui correspond à la valeur instantanée de la distance entre les obstacles. En fait, les variations de vitesse se font sentir avec une constante de temps gouvernée par la viscosité. Dans le cas des deux sphères qui se rapprochent, ce temps est de l'ordre de d^2/ν ; il doit être petit devant le temps convectif d/U, de façon à ce que le nombre de Reynolds construit avec ces deux temps soit petit. Dans le cas

inverse, le mouvement de la sphère dépend de l'histoire passée, cas que nous ne discuterons pas ici.

4.8 Écoulements de couches liquides avec surfaces libres – hydrodynamique du mouillage

Un autre type d'écoulement où les forces inertielles et les termes non linéaires des équations de mouvement des fluides sont négligeables est celui des films fluides minces à surfaces libres. De tels écoulements ont des applications très importantes dans l'étalement de revêtements, de peintures ou de nettoyants sur des matériaux. Ce cas est proche de celui de la lubrification car, là aussi, les lignes de courant sont presque parallèles, mais la présence de surfaces libres fait apparaître des forces supplémentaires de tension superficielle. Nous avons introduit cette notion au chapitre 1 (section 1.4) et décrit quelques propriétés statiques des interfaces qui en résultent. Nous avons également introduit les notions de paramètre d'étalement et d'angle de contact statique à travers la relation d'Young–Dupré (1.72).

À présent, nous nous intéressons aux phénomènes dynamiques d'écoulement de films fluides, pour lesquels il y a compétition entre la tension superficielle, la gravité et la viscosité. Ainsi, nous étudierons tout d'abord l'évolution, avec la vitesse de déplacement de la ligne de contact, de l'angle de contact dynamique d'une interface en situation de mouillage total. Ce résultat sera utilisé pour la prédiction de l'étalement de gouttes de petite taille, et il sera comparé à celui de gouttes s'étalant sous l'effet de la gravité.

Nous aborderons ensuite le cas – différent – où des gradients de température ou de concentration de composés tensioactifs induisent des gradients de tension superficielle, qui créent eux-mêmes des écoulements.

4.8.1 Angle de contact dynamique en situation de mouillage total – loi de Tanner

On s'intéresse ici aux variations de l'angle de contact d'avancée, dues à des effets hydrodynamiques en situation de mouillage total : l'angle de contact statique θ_s est nul, le paramètre d'étalement initial $S = \gamma_{sg} - \gamma_{\mathrm{sl}} - \gamma$ est positif (nous notons $\gamma = \gamma_{\mathrm{lg}}$). Le déplacement de l'interface à la vitesse V fait passer l'angle de contact de la valeur $\theta_s = 0$ à une valeur finie $\theta(V)$. Notons que, dans de tels systèmes en mouillage total, il y a toujours en amont de la ligne de contact, un film précurseur d'épaisseur submicronique : l'angle de contact $\theta(V)$ est en fait un *angle de contact apparent* – avec la paroi – de la partie *macroscopique* du ménisque (Fig. 4.30).

Étudions tout d'abord l'équilibre des forces exercées sur la ligne de contact, en nous plaçant dans une géométrie à deux dimensions. En suivant la même démarche que celle utilisée au chapitre 1 pour démontrer l'équation

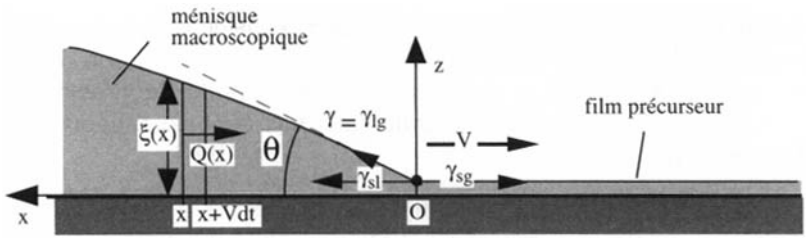


FIG. 4.30 – *Schéma du déplacement d'une interface sur une surface solide en présence d'un film précurseur.*

de Young–Dupré (relation (1.72)), on trouve une force résultante, par unité de longueur, de composante horizontale : $F_r = \gamma_{sg} - \gamma_{\mathrm{sl}} - \gamma \cos\theta$. Il faut toutefois noter que, avec cette relation, on ne peut vérifier la condition d'équilibre statique $F_r = 0$ à vitesse nulle même pour $\theta = 0$, car le paramètre d'étalement S est positif puisque le mouillage est supposé total. On considère en général que la force restante S par unité de longueur est utilisée pour former le film précurseur. La force résultante qui induit le déplacement de la partie d'épaisseur macroscopique du ménisque (à gauche du point O sur la figure 4.30) lorsque l'angle θ ne vaut plus 0 mais $\theta(V) \neq 0$, n'est pas alors F_r, mais la différence $F_r - S = \gamma(1-\cos\theta)$. L'énergie par unité de temps, $\mathrm{d}E_{ts}/\mathrm{d}t$, fournie par les forces de tension superficielle pour générer l'écoulement dans le ménisque, est donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_{ts}}{\mathrm{d}t} = \gamma(1 - \cos\theta)\, V. \tag{4.179}$$

L'énergie correspondante sera dissipée par viscosité dans l'écoulement à l'intérieur du film associé au déplacement de l'interface. Remarquons que cette énergie serait nulle pour un angle $\theta = 0$, qui correspondrait au cas d'une interface presque immobile pour lequel toute l'énergie disponible serait dissipée dans le film résiduel.

Analysons maintenant l'écoulement dans la partie macroscopique du film fluide, en appelant $\xi(x)$ l'épaisseur du film : on suppose qu'on est suffisamment proche de la ligne de contact pour que les effets de la gravité soient négligeables sur les faibles distances verticales considérées. On supposera également que l'angle de contact macroscopique apparent θ est assez faible pour qu'on puisse utiliser en tout point l'approximation de lubrification. Appelons $Q(x)$ le débit (par unité de longueur perpendiculairement à la figure) dans la section du film à une distance x de la ligne de contact, et supposons par ailleurs que l'interface se déplace sans se déformer à la vitesse V. La variation entre t et $t + \mathrm{d}t$ du volume compris entre la section x et la ligne de contact est égale à $Q(x)$. Avec les hypothèses précédentes, cette variation correspond au volume $\xi(x)(V\,\mathrm{d}t)$ d'une tranche de fluide d'épaisseur $V\,\mathrm{d}t$, située autour de la section x.

$$Q(x) = V\,\xi(x). \tag{4.180}$$

Dans l'approximation de lubrification, on peut considérer que la contrainte tangentielle $\eta\,\partial v_x/\partial z$ sur l'interface $z = \xi(x)$ est nulle (condition de surface libre) ; par ailleurs, $v_x(0) = 0$. On aura donc un profil de vitesse du type $v_x(z) = A(x)\,(\xi(x) - z/2)z$. En intégrant entre 0 et $\xi(x)$ par rapport à z pour calculer $Q(x)$, on trouve :

$$v_x(z) = 3\frac{Q(x)}{\xi^3(x)}\left[\xi(x) - \frac{z}{2}\right] z. \tag{4.181}$$

Notons que la vitesse du fluide à l'interface est plus grande que la vitesse moyenne $Q(x)/\xi(x)$.

Écrivons maintenant que la puissance $\mathrm{d}E_{ts}/\mathrm{d}t$ donnée par l'équation (4.179) est égale à la puissance dissipée par viscosité dans l'écoulement correspondant au profil de vitesse (4.181). Cette puissance dissipée par unité de volume est donnée par $\eta\,(\partial v_x/\partial z)^2$. On obtient la dissipation totale $\mathrm{d}E_v/\mathrm{d}t$ (toujours par unité de longueur transversale) en intégrant cette expression entre 0 et $\xi(x)$, puis par rapport à x. Prenons maintenant $\xi(x) = \theta x$, ce qui revient à négliger la courbure de l'interface dans le plan $(x,\, z)$: cette approximation revient à supposer que la plus grande partie de la dissipation a lieu très près de la ligne de contact – là où l'erreur ainsi introduite est la plus faible. On obtient alors en valeur absolue à partir des équations (4.180 et 4.181) :

$$\frac{\mathrm{d}E_v}{\mathrm{d}t} = \int 3\eta\frac{Q^2(x)}{\xi^3(x)}\,\mathrm{d}x = 3\,\eta\,V^2\int\frac{1}{\xi(x)}\,\mathrm{d}x = 3\,\eta\,\frac{V^2}{\theta}\int_{x_m}^{x_M}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{4.182}$$

Il est nécessaire d'introduire des bornes supérieure x_M et inférieure x_m dans l'intégrale, compte tenu de la divergence de l'intégrale (logarithme) lorsque x tend vers zéro et l'infini. On peut supposer que la borne supérieure x_M correspond à une longueur de l'ordre de la taille de la goutte dans le plan xOz, mais un problème plus important vient de la divergence de la puissance dissipée aux très petites distances de la ligne de contact. Cet aspect a fait l'objet de nombreuses études et simulations numériques à l'échelle moléculaire, et aucune solution exacte n'est actuellement disponible. En considérant alors x_m comme un paramètre ajustable du modèle, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E_{ts}}{\mathrm{d}t} = \gamma(1 - \cos\theta)\,V = -\frac{\mathrm{d}E_v}{\mathrm{d}t} = 3\,\eta\,\frac{V^2}{\theta}\,\ln\left(\frac{x_M}{x_m}\right)\cdot \tag{4.183}$$

Dans l'approximation des petits angles de contact où $(1 - \cos\theta) \approx \theta^2/2$, on trouve finalement la *relation de Tanner* :

$$\theta^3 = 6\frac{\eta\,V}{\gamma}\,\ln\left(\frac{x_M}{x_m}\right) = 6\,Ca\,\ln\left(\frac{x_M}{x_m}\right)\cdot \tag{4.184}$$

Le nombre sans dimension $Ca = \eta\,V/\gamma$ est appelé *nombre capillaire* : il représente l'importance relative des effets dus à la viscosité et de ceux dus à la capillarité. En effet, si les gradients de vitesse et les rayons de courbure des

interfaces ont une même longueur caractéristique L, les différences de pression d'origine visqueuse et capillaire seront respectivement de l'ordre de $\eta\, V/L$ et de γ/L, et leur rapport sera de l'ordre de Ca (dans le cas contraire, le rapport sera toujours de l'ordre de Ca, mais il faudra introduire un facteur géométrique correcteur). Le nombre capillaire peut également être considéré comme le rapport de la vitesse V caractéristique de l'écoulement et d'une vitesse γ/η caractéristique du fluide (de l'ordre de 10^2 m s^{-1} pour l'eau). On remarque que le résultat ne fait pas intervenir la valeur du paramètre d'étalement : cela reflète simplement le fait que l'excès d'énergie correspondant à la valeur positive de ce paramètre est supposé s'être dissipé dans le film résiduel, sans intervenir dans la dynamique du ménisque macroscopique. Des théories plus complètes ont été développées pour prendre en compte des effets qui sont négligés dans les calculs précédents (comme, par exemple, les variations de courbure de l'interface près de la ligne de contact). On obtient des expressions similaires à l'équation (4.184) pour les faibles valeurs de θ, mais le coefficient 6 est remplacé par 9.

La figure 4.31 montre comment la loi de Tanner est vérifiée expérimentalement, à partir de mesures effectuées par une méthode optique sur un ménisque d'huile silicone se déplaçant à l'intérieur d'un tube capillaire. La courbe continue représente la variation théorique prédite par l'équation de Tanner (Éq. (4.184) avec un préfacteur égal à 9 au lieu de 6) pour la valeur $\varepsilon = 10^{-4}$ du rapport x_m/x_M, qui donne le meilleur accord avec les points expérimentaux. Ceux-ci suivent de très près la loi théorique, jusqu'à des

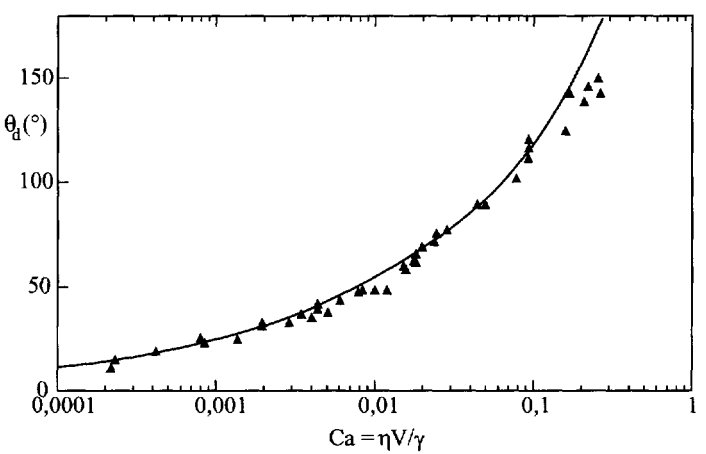


FIG. 4.31 – *Variations de l'angle de contact en fonction du nombre capillaire d'une interface d'huile silicone dans un tube capillaire, dans des conditions de mouillage total . (——) courbe théorique déduite de la loi de Tanner pour* $\varepsilon = x_m/x_M = 10^{-4}$ *; (▲) données expérimentales (document M. Fermigier et P. Jenffer).*

valeurs très élevées de l'angle θ, de l'ordre de 100°. La valeur correspondante de x_m est de l'ordre de 100 nm.

Remarque Cette valeur expérimentale est du même ordre de grandeur que celle prédite par des considérations théoriques de P. G. de Gennes, à partir de l'analyse à petite échelle du raccordement entre le ménisque macroscopique et le film précurseur, et la dissipation d'énergie dans ce dernier. Dans ce modèle, la zone de transition où l'interface ne peut plus être considérée comme un coin d'angle θ commence quand l'épaisseur du film atteint une valeur inférieure à a/θ (a est une longueur atomique). La valeur correspondante de la distance x_m est ainsi de l'ordre de a/θ^2, ce qui explique la valeur relativement élevée de x_m, et donc du rapport x_m/x_M. Les théories plus complètes, comme celle de Cox, permettent de reproduire ces variations expérimentales jusqu'à des valeurs de θ_d encore plus élevées.

On peut appliquer une approche du même type au cas du mouillage partiel, à condition que l'angle de mouillage soit proche de zéro. Les relations ainsi obtenues sont beaucoup moins bien vérifiées que la loi de Tanner et, et généralement, on utilise plutôt des approches plus empiriques qui généralisent cette loi. D'autres modèles, faisant intervenir des processus d'adsorption moléculaire, ont également été proposés.

4.8.2 Dynamique de l'étalement de gouttes sur une surface plane

Gouttes de petite dimension avec mouillage total

On s'intéresse ici à la variation, en fonction du temps, du rayon de gouttes d'un liquide non volatil, posées sur un substrat solide dans des conditions de mouillage total. Pour de telles gouttes, on admettra que la dynamique résulte d'un équilibre entre la dissipation visqueuse discutée plus haut et les forces capillaires. On suppose par ailleurs (nous discuterons ce point plus tard) qu'il suffit de prendre en compte la dissipation par viscosité dans la zone proche de la ligne de contact ; nous appliquerons à ce système tridimensionnel les équations obtenues plus haut dans un cas bidimensionnel, en supposant qu'elles restent valables tant que le rayon de courbure de l'interface est assez grand devant l'épaisseur de la goutte. L'idée du calcul est de supposer qu'on a, à tout instant, équilibre entre cette dissipation et le travail des forces capillaires exercées sur la ligne de contact.

Appelons Ω le volume de la goutte, et supposons qu'elle garde une forme de calotte sphérique de hauteur $h(t)$, de rayon de courbure $R(t)$ et de rayon de contact $r_g(t)$ avec le plan (Fig. 4.32). On a :

$$\Omega = \frac{\pi}{4} r_g^3 \theta. \tag{4.185}$$

Démonstration Entre les paramètres géométriques, on a la relation exacte $(2R-h)h = r_g^2$ (Fig. 4.32). On obtient le volume de la calotte sphérique en prenant l'intégrale entre zéro et $h(t)$ de $\pi r^2 = (2R+z-h)(h-z)$ (r est ici le rayon, exprimé

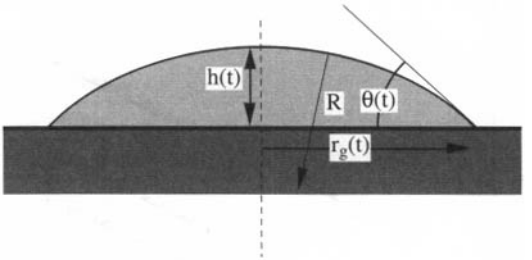


FIG. 4.32 – *Étalement d'une goutte sous l'influence des forces de capillarité.*

à partir de cette même formule, de la coupe horizontale de la calotte à une hauteur z quelconque). On obtient alors :

$$\Omega = \pi \left(R h^2 - \frac{h^3}{3} \right) \approx \pi R(t) h^2(t) = \frac{\pi}{2} r_g^2(t) h(t). \tag{4.186}$$

Par ailleurs, on a $h(t) = r_g(t) \tan(\theta/2)$, et on obtient l'équation (4.185) en supposant θ très petit devant l'unité.

Combinons les équations (4.184) et (4.185), et remplaçons V par $\mathrm{d}r_g/\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}r_g}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{\eta} \frac{1}{6 \ln\left(\frac{x_M}{x_m}\right)} \left[\frac{4\Omega}{\pi r_g^3} \right]. \tag{4.187}$$

D'où, finalement :

$$[r_g(t)]^{10} = \frac{5}{3} \frac{\gamma}{\eta \ln\left(\frac{x_M}{x_m}\right)} \left[\frac{4\Omega}{\pi} \right]^3 t. \tag{4.188}$$

On prédit donc une croissance très lente, en $t^{1/10}$, du rayon de la goutte avec le temps. Comme le produit $r_g^3(t)\theta(t)$ est une constante (relation 4.185), $\theta(t)$ décroît donc dans ce régime en $t^{-3/10}$. Les coefficients numériques peuvent être calculés facilement en combinant les équations (4.186) et (4.188). Remarquons que la solution obtenue ne peut être qu'approchée, car nous avons supposé le rayon de courbure constant le long de l'interface, puisqu'elle est considérée comme une calotte sphérique. Aussi, la pression juste sous la surface libre est constante le long de cette dernière : cela est en contradiction avec l'existence de l'écoulement d'étalement qui fait apparaître des gradients de pression provenant de la viscosité. La solution exacte est assez complexe, elle donne une variation de $r_g(t)$ similaire, mais avec des coefficients numériques un peu différents.

La figure 4.33 montre la variation avec le temps du rayon d'un ensemble de gouttes d'huile silicone déposées sur des plaques de verre hydrophiles non

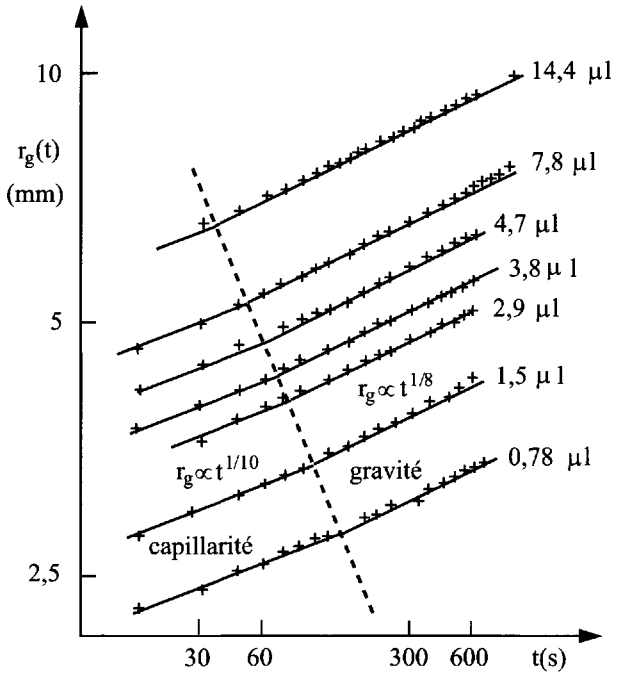


FIG. 4.33 – *Variation temporelle (en coordonnées log–log) du rayon $r_g(t)$, pour un ensemble de gouttes d'huile silicone ($\eta = 0,02$ Pa.s, $\gamma = 20$ mN.m^{-1}), de volume Ω variable, qui s'étale sur des plaques planes de verre hydrophiles. La ligne en tirets marque la limite entre les régimes dominés par la gravité et par la capillarité. Les lignes continues respectivement à droite et à gauche de la ligne en tirets correspondent à des variations en lois de puissance d'exposants 1/8 et 1/10 (document A.-M. Cazabat, M. Cohen Stuart).*

rugueuses. La loi de variation en $t^{1/10}$ n'est observée qu'aux temps courts (à gauche de la ligne en tirets) auxquels le rayon r_g est assez faible pour que les effets capillaires restent dominants. Aux temps plus longs, on passe dans un régime dominé par les forces de gravité et il s'applique aux gouttes de plus grand diamètre que nous allons décrire maintenant (nous avons en effet montré au chapitre 1 (section 1.4.2) que ce sont les valeurs relatives du rayon r_g et de la longueur capillaire qui déterminent l'importance relative des effets de capillarité et de gravité).

Gouttes de grande dimension sous l'effet de la gravité

Dans ce cas, la gravité joue un rôle dominant pour déterminer à la fois la géométrie de la goutte et sa dynamique. Les gouttes peuvent alors être considérées comme plates dans la partie centrale, et leur courbure est

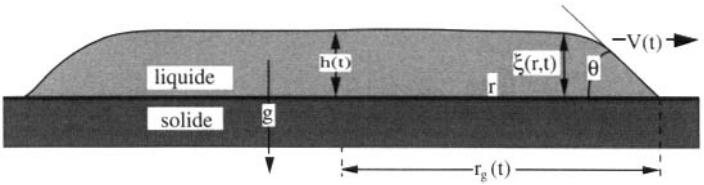


FIG. 4.34 – *Vue schématique d'une goutte de grand rayon s'étalant sous l'effet de la gravité.*

localisée près des bords (Fig. 4.34). Nous allons tout d'abord estimer les effets de dissipation d'énergie due à la viscosité dans la partie centrale, pour les comparer ensuite à ceux que nous avons calculés dans le cas précédent, près de la ligne de contact.

Supposons que, dans la partie centrale, la goutte a une épaisseur $h(t)$ indépendante de la distance r à l'axe. Analysons la conservation de la masse de liquide dans un cylindre de rayon r, de même axe que la goutte et contenant toute cette dernière. Soit $V(r)$ la moyenne à la distance r de la vitesse radiale du fluide sur l'épaisseur de la goutte ; le débit volumique total $Q(r)$ à travers le cylindre de rayon r est égal à $2\pi\, r\, h\, V(r)$. $Q(r)$ doit être égal et opposé à la variation $\pi\, r^2\, \mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ de la masse de fluide dans le cylindre, avec par conséquent :

$$\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2\frac{V(r)}{r}\,. \tag{4.189}$$

La relation s'applique également pour $r = r_g$, et on a donc :

$$V(r) = V(r_g)\,\frac{r}{r_g} \tag{4.190}$$

où $V(r_g)$ est également la vitesse d'étalement $V = \mathrm{d}r_g/\mathrm{d}t$ du bord de la goutte (on le démontre comme pour l'équation (4.180)). Compte tenu du profil parabolique à l'intérieur de la lame de fluide (avec une vitesse maximale et un gradient de vitesse nul à la surface (Éq. (4.37)), ainsi qu'une vitesse nulle sur la paroi), la vitesse V_s à la surface vérifie $V_s(r) = (3/2)V(r)$ avec $v_r(z) = V_s(r)z(2h - z)/h^2$. h est l'épaisseur de la goutte dans la partie plate et on a, comme dans le cas précédent, une contrainte nulle à la surface $z = h$. La dissipation visqueuse dans la partie plate de la goutte, prise en première approximation égale au rayon r_g, vérifie donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_{vpg}}{\mathrm{d}t} = -\eta\int_0^{r_g} 2\pi r\,\mathrm{d}r\int_0^{h(r)}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2\mathrm{d}z = \frac{3}{2}\,\pi\eta\, V^2\frac{r_g^2}{h}\,. \tag{4.191}$$

En appliquant la formule (4.183) sur le périmètre $2\pi r_g$ de la goutte, on trouve

l'énergie dissipée par viscosité très près de la ligne de contact :

$$\frac{\mathrm{d}E_{vlc}}{\mathrm{d}t} = 6\pi\,\eta\,r_g\,\frac{V^2}{\theta}\,\ln\left(\frac{x_M}{x_m}\right)\cdot \tag{4.192}$$

Le rapport des deux termes est de l'ordre de :

$$\left[\frac{\mathrm{d}E_{vpg}}{\mathrm{d}t}\right] / \left[\frac{\mathrm{d}E_{vlc}}{\mathrm{d}t}\right] \approx \left[\frac{r_g\,\theta}{4\,h}\right] / \left(\ln\left(\frac{x_M}{x_m}\right)\right)\cdot$$

Au coefficient logarithmique près, ce rapport est de l'ordre de grandeur de celui du rayon r_g de la goutte et de la largeur ($\approx h/\theta$) de la zone de transition entre la ligne de contact et la partie plate de la goutte). Ainsi, pour des gouttes de taille r_g grande devant h/θ, la dissipation par viscosité dans la partie plane de la goutte finit par être dominante, contrairement aux gouttes de petite taille vues précédement, pour lesquelles la dissipation près la ligne de contact est plus importante.

Nous allons maintenant déterminer la loi d'étalement des gouttes, dans le cas où les forces de gravité sont dominantes (Fig. 4.34). Comme précédemment, on suppose que le liquide utilisé est non volatil, pour éviter des phénomènes d'évaporation qui, souvent accompagnés de variations de tension superficielle, créent des écoulements supplémentaires par effet Marangoni (étudié à la section suivante). Nous estimons la loi d'étalement à l'aide de la formule (4.191), en supposant que l'épaisseur de la goutte est constante sur toute sa surface. La dissipation d'énergie par viscosité doit à tout instant correspondre à la variation d'énergie potentielle de la goutte : celle ci vaut $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[(\pi/2)\,\rho\,g\,r_g^2\,h^2]$. Par ailleurs, le volume $\Omega = \pi r_g^2 h$ de la goutte est constant. On a donc en utilisant l'expression (4.191) avec $V = \mathrm{d}r_g/\mathrm{d}t$ le bilan d'énergie suivant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{2}\,\rho\,g\,r_g^2\,h^2\right) = -\frac{3}{2}\,\eta\,\pi\left(\frac{\mathrm{d}r_g}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{r_g^2}{h}\cdot \tag{4.193}$$

Remplaçons maintenant h par son expression en fonction de Ω et r_g. On obtient :

$$r_g^7\frac{\mathrm{d}r_g}{\mathrm{d}t} = \frac{2\Omega^3}{3\pi^3}\frac{\rho g}{\eta} \tag{4.194}$$

soit :

$$r_g(t) = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{8}}\left(\frac{16}{3}\frac{\rho g t}{\eta}\right)^{\frac{1}{8}}\cdot \tag{4.195}$$

De cette manière, on prédit donc (en supposant le rayon de la goutte nul au temps $t = 0$) une croissance de la goutte en $t^{1/8}$, au lieu de $t^{1/10}$ dans le cas précédent. Ce résultat correspond bien à l'évolution aux temps longs, observable sur les courbes de la figure 4.33. On peut obtenir une évaluation

– toujours de la même forme mais avec des coefficients plus précis – de $r_g(t)$ en supposant que l'épaisseur du film n'est pas exactement constante avec la distance à l'axe, mais est décrite par un profil autosimilaire.

Les lois d'étalement en $t^{1/8}$ et $t^{1/10}$ représentent deux cas limites, valables pour l'étalement des gouttes dans des conditions de mouillage total. D'autres types de loi d'étalement (en $t^{1/4}$) sont observées pour des écoulements sur une plaque en rotation, ou sur certaines surfaces rugueuses. Des adaptations de ces modèles à des géométries et des propriétés de fluides plus complexes ont des applications très importantes pour les procédés d'étalement de revêtements décoratifs ou protecteurs. Un autre problème pratique important – non discuté ici – est l'apparition d'instabilités interfaciales des films de fluides en écoulement, qui peuvent se manifester par des déformations, souvent très importantes, de la ligne de contact ou par des variations d'épaisseur.

4.8.3 Écoulements induits par des gradients de la tension superficielle – effet Marangoni

Les gradients de tension superficielle dus à des variations de température ou de concentration de solutés (tensio-actifs par exemple) peuvent créer des contraintes en surface et induire des mouvements dans les fluides. Ainsi, si une couche d'eau est posée sur une surface et qu'un point de la surface est touché avec un morceau de savon, on voit cette partie de la surface s'assécher (Fig. 4.35) : en effet, la tension superficielle est réduite localement et les forces de tension superficielle sont déséquilibrées. Un écoulement s'effectue donc vers les parties voisines, où la tension superficielle reste inchangée.

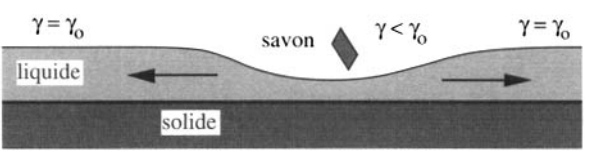


FIG. 4.35 – *Déformation d'une couche de fluide par addition locale d'un peu de tensioactif.*

Ces mouvements de fluide peuvent être également dus à des variations de la température T d'un point à l'autre d'une interface liquide–air ou liquide–liquide : en effet, comme nous l'avons indiqué au chapitre 1 (section 1.4.1), le coefficient de tension superficielle dépend de la température, selon une loi qui peut s'écrire, pour des variations de température modérées, sous la forme :

$$\gamma(T) = \gamma(T_0)(1 - b\,(T - T_0)). \tag{4.196}$$

Ainsi, un gradient de température parallèle à la surface d'un liquide fait apparaître une contrainte tangentielle sur celle-ci (Fig. 4.36). En effet, sur une bande de largeur $\mathrm{d}x$, les forces de tension de surface ne sont plus équilibrées ;

la résultante est orientée vers les zones où la température est la plus faible. Au gradient de température $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ correspond un gradient de tension superficielle égal à :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -b\,\gamma\,(T_0)\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right). \tag{4.197}$$

Ce gradient induit une contrainte $\sigma_{xy}^{(\gamma)}$ parallèle à Ox sur l'élément de surface L $\mathrm{d}x$ avec :

$$\sigma_{xy}^{(\gamma)} = \frac{\mathrm{d}F}{L\,\mathrm{d}x} = \frac{F_2 - F_1}{L\,\mathrm{d}x} = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)L}{L\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x} = -b\,\gamma(T_0)\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right). \tag{4.198}$$

Il en résulte donc un écoulement parallèle à la surface, et le signe négatif qui apparaît dans $\sigma_{xy}^{(\gamma)}$ traduit le fait que la traction se fait dans la direction où la température est la plus faible.

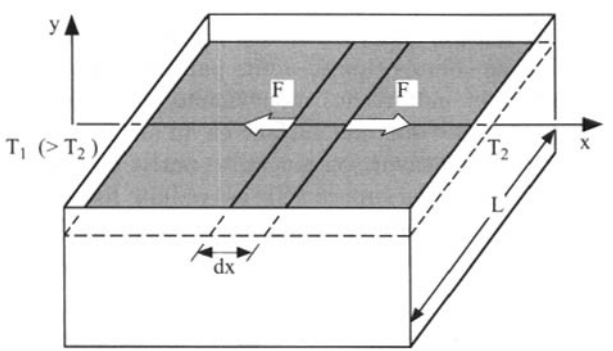


FIG. 4.36 – *Apparition de contraintes de traction à la surface libre d'un liquide, par suite de l'existence d'un gradient de température horizontal.*

La mise en mouvement du fluide sous l'effet des gradients de tension superficielle constitue *l'effet Marangoni*. Pour une surface libre plane d'un liquide en contact avec un gaz, la contrainte tangentielle globale doit être nulle. La contrainte de frottement visqueux $\sigma_{xy}^{(\nu)} = -\eta\,(\partial v_x/\partial y)$ correspondant à l'écoulement doit donc compenser $\sigma_{xy}^{(\gamma)}$. On a alors :

$$\sigma_{xy}^{(\gamma)} + \sigma_{xy}^{(\nu)} = -b\,\gamma(T_0)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} - \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{\text{interface}} = 0. \tag{4.199}$$

Calculons maintenant le profil d'écoulement ainsi créé dans le film fluide, limité inférieurement par un plan solide horizontal $y = 0$, d'épaisseur moyenne a, et infiniment étendu dans la direction Oz (Fig. 4.37). Nous supposons, comme dans les sections précédentes, que l'écoulement est unidirectionnel, la

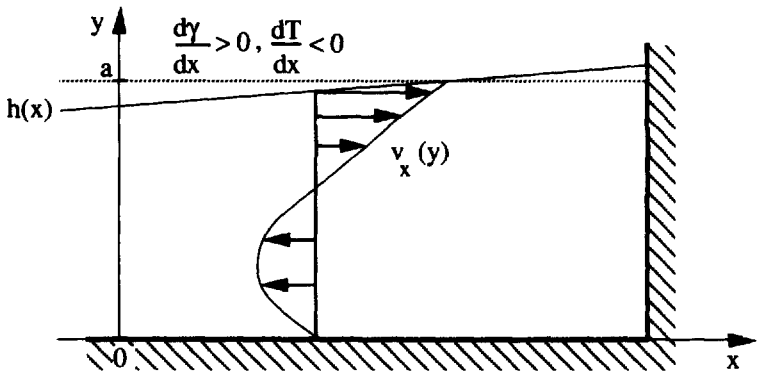


FIG. 4.37 – *Profil de vitesse à l'intérieur d'un film fluide de longueur finie, en présence d'un gradient de température horizontal qui induit un écoulement de recirculation par effet Marangoni. Le gradient de pression induit par le profil parabolique de vitesse est accompagné d'une déformation de la surface libre supérieure.*

seule composante non nulle étant $v_x(y)$. Le gradient de pression suivant Oy vérifie $(\partial p/\partial y) = -\rho g$. Supposons, dans un premier temps, que la surface supérieure est parfaitement horizontale, que la densité du fluide est constante avec la température, et que cette dernière est uniforme sur l'épaisseur h. La pression vérifie alors en tout point :

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g(a - y). \tag{4.200}$$

La pression ne dépend donc pas de x, et la composante suivant Ox de l'équation de mouvement se réduit à :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0. \tag{4.201}$$

On a donc une variation linéaire de la vitesse v_x avec y, comme dans un écoulement de cisaillement simple. En utilisant (4.199), on trouve :

$$v_x(y) = -\frac{b\,\gamma(T_0)}{\eta}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) y. \tag{4.202}$$

Dans la pratique, le film est de taille finie dans la direction Ox ; le fluide s'accumule donc du côté vers lequel se fait l'écoulement, ce qui crée un gradient de l'épaisseur $h(x)$ du film. Soit $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$, la pente de la surface libre ($(\mathrm{d}h/\mathrm{d}x) \ll 1$) ; l'écoulement reste quasi-unidirectionnel, et le gradient vertical de pression est toujours égal à $-\rho g$. Le seul effet de l'inclinaison de la surface est donc d'introduire un gradient de pression horizontal $\rho g(\mathrm{d}h/\mathrm{d}x)$. En régime stationnaire, ce gradient crée un contre-écoulement en profondeur,

qui compense exactement l'écoulement de cisaillement près de la surface pour donner un débit global nul. L'équation de mouvement correspondant à l'écoulement stationnaire global s'écrit :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \rho\, g \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \cdot \tag{4.203}$$

Après intégration, et en utilisant les conditions :

$$\int_0^a v_x(y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{et :} \qquad v_x(0) = 0$$

on obtient (en supposant les variations d'épaisseur faibles devant la valeur moyenne a) :

$$v_x = \frac{\rho\, g}{\eta} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{ay}{3} \right) \cdot \tag{4.204}$$

Cet écoulement est donc la superposition d'un écoulement de cisaillement et d'un écoulement de Poiseuille. On obtient la valeur de $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ en utilisant de nouveau la condition (4.198) sur la contrainte en surface, soit :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -\frac{3}{2} \frac{b\,\gamma(T_0)}{\rho\, g\, a} \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \right) \cdot \tag{4.205}$$

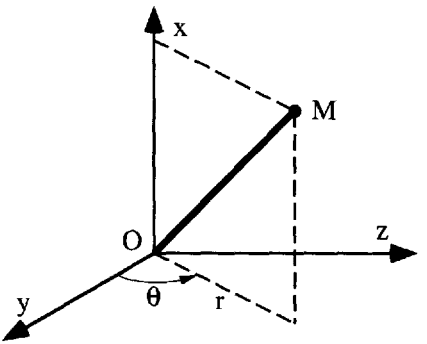
Le phénomène que nous venons de décrire peut aisément être observé en approchant la pointe d'un fer à souder de la surface de l'eau ; on constate que la surface se creuse au-dessous de la pointe. Les gradients de tension superficielle sont également à l'origine d'une instabilité convective induite sur une couche liquide libre de fluide, chauffée par au-dessous. Nous rencontrerons cette *instabilité*, dite de *Bénard–Marangoni*, au chapitre 10 (section 10.3.2).

Des effets du même type et d'origine similaire s'observent dans de nombreux cas, comme l'ascension d'un film liquide sur une paroi solide en présence d'un gradient de température vertical sur la paroi, ou le déplacement spontané de gouttes sur une surface solide en présence d'un gradient de température ou de tension superficielle. Une manifestation spectaculaire est le phénomène des *larmes de vin*, qui s'observe dans un verre partiellement rempli de vin suffisamment alcoolisé, en agitant initialement le verre ce qui permet de laisser un film de liquide sur les parois au-dessus de la surface du liquide. On observe une ascension du liquide du film, qui se rassemble à la partie supérieure de ce dernier en un bourrelet, puis l'apparition de gouttelettes, qui retombent régulièrement vers le bas après un certain temps. L'évaporation de l'alcool contenu dans le film liquide fait augmenter sa tension superficielle et provoque l'ascension du fluide du film au-dessus de la surface libre – où la tension superficielle reste inchangée. Dans le bourrelet, l'effet d'évaporation finit par se réduire, et les gradients de tension superficielle n'arrivent pas à équilibrer l'effet de la gravité sur les gouttes, qui retombent en « *larmes* ».

Par ailleurs, il est possible d'induire des gradients de tension superficielle et des mouvements de couches liquides libres s'il existe des variations de composition chimique en surface. Ainsi, en déposant une goutte de savon liquide à la surface de l'eau, on constate que les poussières initialement présentes sur cette surface sont repoussées loin de la goutte. Cela est dû à la forte diminution de tension interfaciale dans la zone où le savon est présent. Les propriétés des agents tensioactifs qui modifient – et en général abaissent – la tension superficielle jouent un rôle très important dans de nombreuses opérations physicochimiques, et souvent aussi dans la vie quotidienne.

Annexe A-1

Expression du tenseur des contraintes, équations de conservation de la masse et de Navier–Stokes en coordonnées cylindriques (r, θ, x)



Tenseur des contraintes

$$\sigma_{rr} = -p + 2\,\eta\,\frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \sigma_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

$$\sigma_{xx} = -p + 2\,\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad \sigma_{xr} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\,\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \qquad \sigma_{\theta x} = \eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta}\right).$$

Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible (div v = 0)

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

Équation de Navier–Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)=$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r}{r^2}\right)+\rho\, f_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)=$$

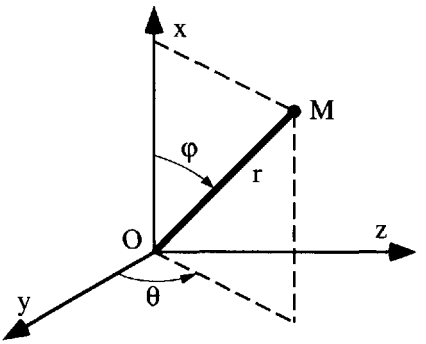
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right)+\rho\, f_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)=$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)+\rho\, f_x.$$

Annexe A-2

Expression du tenseur des contraintes, équations de conservation de la masse et de Navier–Stokes en coordonnées sphériques (r, φ, θ)



Tenseur des contraintes

$$\sigma_{rr} = -p + 2\,\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \sigma_{r\varphi} = \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\,\eta \left(\frac{1}{r\,\sin\varphi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varphi \mathrm{cotan}\varphi}{r} \right) \qquad \sigma_{\varphi\theta} = \eta \left(\frac{1}{r\,\sin\varphi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta \mathrm{cotan}\varphi}{r} \right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) \qquad \sigma_{\theta r} = \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\varphi}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right).$$

Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible (div v = 0)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\, v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\varphi}\frac{\partial (\sin\varphi\, v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\,\sin\,\varphi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Équation de Navier–Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+\frac{v_\theta}{r\sin\varphi}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\varphi^2+v_\theta^2}{r}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\operatorname{cotan}\varphi}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right.$$
$$\left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{2}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\operatorname{cotan}\varphi}{r^2}v_\varphi\right)+\rho f_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v_\theta}{r\sin\varphi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\varphi}{r}-\frac{v_\theta^2\operatorname{cotan}\varphi}{r}\right)=$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_\varphi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2}+\frac{\operatorname{cotan}\varphi}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right.$$
$$\left.-\frac{2\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\right)+\rho f_\varphi$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}+\frac{v_\theta}{r\sin\varphi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+\frac{v_\varphi v_\theta\operatorname{cotan}\varphi}{r}\right)=$$
$$-\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\operatorname{cotan}\varphi}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{2\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\varphi}\right)+\rho f_\theta.$$

Chapitre 5

Équations de bilan

CE CHAPITRE *traite des différentes équations de bilan pour un fluide en mouvement : bilan de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie. Le bilan de la circulation de la vitesse (associée au moment cinétique) sera traité en détail au chapitre 7. Le bilan de masse, déjà établi au chapitre 3, ne sera que rappelé ici (section 5.1).*

L'équation de mouvement des fluides réels a été établie au chapitre précédent. Associée à l'équation de bilan de masse, elle nous permettra d'établir l'équation de bilan de la quantité de mouvement (section 5.2). En utilisant cette équation et en l'appliquant à un volume convenablement choisi dans le fluide, dit volume de contrôle, nous analyserons les échanges de quantité de mouvement dans des écoulements simples.

Puis nous établirons l'équation de bilan de l'énergie que nous mettrons sous la forme de l'équation de Bernoulli (section 5.3). Nous l'appliquerons ensuite à quelques exemples classiques (tube de Pitot, tube de Venturi).

Nous terminerons (section 5.4) en traitant quelques problèmes plus complexes, qui montreront comment on peut analyser quantitativement des écoulements à l'aide des équations de bilan, sans avoir à déterminer complètement le champ de vitesse du fluide.

5.1 Équation de bilan de masse

Cette équation de bilan a été établie à la section 3.3.1 du chapitre 3. Rappelons seulement ici les deux écritures équivalentes qui correspondent aux points de vue eulérien et lagrangien :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \tag{5.1}$$

(point de vue eulérien ; formule (3.10)),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \tag{5.2}$$

(point de vue lagrangien ; formule (3.11b)).

La dérivée convective $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$ se rapporte à la variation de masse volumique d'un élément matériel de fluide que l'on suit dans son mouvement (comme précédemment, nous utilisons la convention d'Einstein en effectuant une somme implicite sur les indices apparaissant deux fois dans des facteurs différents d'un même terme).

Supposons qu'il existe un terme de production du fluide (cas d'un écoulement réactif dans lequel une espèce chimique A peut se former au sein de l'écoulement). Notons ρ_A la masse volumique *partielle* de cette espèce chimique ; l'équation (5.1) devient :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\rho_A \mathbf{v}) + q_A \tag{5.3}$$

où q_A désigne le taux algébrique de production de masse de l'espèce considérée par unité de volume. L'équation (5.3) exprime l'équilibre entre la variation de densité volumique $\partial\rho_A/\partial t$ d'une part, la divergence du courant de masse $\rho_A\mathbf{v}$, et un terme q_A de source en volume d'autre part. Nous verrons que c'est la forme générale des équations de bilan.

5.2 Bilan de quantité de mouvement

5.2.1 Expression locale

La quantité de mouvement par unité de volume de fluide est égale à $\rho\mathbf{v}$; calculons la dérivée temporelle de sa $i$ème composante :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = v_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial t}\cdot \tag{5.4}$$

Combinons l'équation (5.4) avec l'équation (5.1) (après avoir multiplié cette dernière par v_i), et avec la forme générale suivante de l'équation de mouvement d'un fluide (relation (4.25)) projetée sur l'axe x_i :

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \tag{5.5}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -v_i\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} - \rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + p\delta_{ij} - \sigma'_{ij}) + \rho f_i \tag{5.6}$$

ρf_i est une force par unité de volume et σ'_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses. Nous avons fait entrer le terme de pression $\partial p/\partial x_i$ dans la

dérivation sous la forme $\partial(p\delta_{ij})/\partial x_j$. Cette équation générale est valable pour tous les fluides, newtoniens ou non, incompressibles ou non. Nous y trouvons un terme $\partial(\rho v_i)/\partial t$ de variation de densité volumique de quantité de mouvement, la divergence d'un flux $(\rho v_i v_j + p\delta_{ij} - \sigma'_{ij})$ et un terme de source ρf_i. Pour dégager plus précisément la signification physique de ces différents termes, nous allons donner une expression globale de l'équation (5.6), en l'intégrant sur un volume macroscopique de fluide.

5.2.2 Forme intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement

Intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement

Reprenons l'équation plus haut. Nous obtenons par intégration sur un volume $\mathcal{V}$ *fixe dans l'espace* (les particules de fluide peuvent donc traverser la frontière qui le limite) :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho\, v_i)}{\partial t}\mathrm{d}V = -\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\, v_i v_j + p\,\delta_{ij} - \sigma'_{ij})\mathrm{d}V + \iiint_{\mathcal{V}} \rho f_i\,\mathrm{d}V. \quad (5.7)$$

En transformant la première intégrale du second membre à l'aide du théorème de la divergence, on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho\, v_i)}{\partial t}\mathrm{d}V = -\iint_{\mathcal{S}} (\rho\, v_i v_j + p\,\delta_{ij} - \sigma'_{ij})n_j\,\mathrm{d}S + \iiint_{\mathcal{V}} \rho f_i\,\mathrm{d}V \quad (5.8)$$

$\mathcal{S}$ représente la surface limitant le volume d'intégration $\mathcal{V}$. En utilisant le fait que le volume d'intégration $\mathcal{V}$ est fixe, on peut donc écrire la dérivée temporelle de la composante i de la quantité de mouvement totale dans $\mathcal{V}$, sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho\, v_i\,\mathrm{d}V\right) = -\iint_{\mathcal{S}} (\rho\, v_i v_j + p\,\delta_{ij} - \sigma'_{ij})n_j\,\mathrm{d}S + \iiint_{\mathcal{V}} \rho f_i\,\mathrm{d}V. \quad (5.9)$$

Soit, sous forme vectorielle, avec la normale $\mathbf{n}$ orientée vers l'extérieur du volume V :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V\right) = -\iint_{\mathcal{S}} (\rho\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + p\,\mathbf{n} - \sigma'\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S + \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V. \quad (5.10)$$

♦ La première intégrale du second membre représente la contribution à la variation de quantité de mouvement du flux de celle-ci à travers la

surface $\mathcal{S}$. La quantité de mouvement étant une grandeur vectorielle, le flux correspondant est un tenseur de rang deux de composante générale :

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p\,\delta_{ij} - \sigma'_{ij} \tag{5.11}$$

Π_{ij} est appelé *tenseur flux de quantité de mouvement* : c'est le flux dans la direction j de la composante de la quantité de mouvement suivant i. Il comprend trois termes :

- $\rho\, v_i v_j$, le transport de la composante ρv_i dans la direction i de la quantité de mouvement par les particules en déplacement dans la direction j ;
- $p\,\delta_{ij}$, le transport de quantité de mouvement associé aux forces de pression ;
- $-\sigma'_{ij}$, le transport de quantité de mouvement associé aux forces de frottement visqueux.

L'intégrale $-\iint_{\mathcal{S}} p \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ est la résultante des forces de pression exercées *normalement* à la surface $\mathcal{S}$. L'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} \sigma' \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ est égale à la composante *tangentielle* de la force de frottement visqueux exercée sur la surface $\mathcal{S}$.

♦ La seconde intégrale du second membre représente la production de quantité de mouvement par unité de temps dans le volume considéré ; cet apport de quantité de mouvement est dû au champ de forces extérieures $\mathbf{f}$.

L'équation (5.10) se présente sous la forme classique de toute équation de conservation : la variation temporelle d'une grandeur quelconque (ici la quantité de mouvement du fluide situé dans le volume d'intégration) apparaît comme la somme d'un terme de *flux* et d'un terme de *source*. L'intérêt de cette équation est de permettre, dans certains cas, de déterminer les paramètres d'un écoulement sans avoir à le caractériser en détail à *l'intérieur* d'un volume $\mathcal{V}$: il suffit de connaître cet écoulement à la *frontière* du volume. En effet, supposons un écoulement stationnaire (champs de vitesse et de pression indépendants du temps) ; le terme du premier membre de l'équation de conservation (5.10), qui est le seul à faire intervenir une intégration en volume sur le champ de vitesse du fluide, est alors identiquement nul. L'équation prend la forme simplifiée (en supposant que la seule force en volume est la pesanteur $\mathbf{g}$) :

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S + \iint_{\mathcal{S}} p\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \iint_{\mathcal{S}} [\sigma']\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathbf{g}\,\mathrm{d}V = 0. \tag{5.12}$$

Par un choix judicieux du volume d'intégration, appelé *volume de contrôle* (limité par exemple par les parois d'un canal dans lequel s'écoule le fluide, ou par des surfaces confondues avec des tubes de courant, ou perpendiculaires à ceux-ci), on peut déterminer assez aisément la force exercée sur les parois de ce volume par le fluide en écoulement (nous traiterons quelques exemples utilisant cette propriété à la section 5.4.4).

Cas d'un fluide newtonien incompressible

Par la suite, nous nous limiterons à l'étude des *fluides newtoniens incompressibles.* On a, dans ce cas, la relation simple $[\boldsymbol{\sigma}'] = 2\eta[\mathbf{e}]$ entre le tenseur des contraintes $[\boldsymbol{\sigma}']$ et le tenseur des déformations $[\mathbf{e}]$ (formule (4.15b)). L'équation (5.10) devient donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V\right) = -\iint_{\mathcal{S}} (\rho\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + p\,\mathbf{n} - 2\eta\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S + \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V. \quad (5.13)$$

Nous allons traiter maintenant quelques exemples d'écoulements simples, auxquels nous appliquerons les équations locales et intégrales de bilan de la quantité de mouvement.

Application des équations de bilan de quantité de mouvement à des écoulements simples

Au chapitre 4, nous avons établi l'équation du mouvement d'un fluide visqueux et nous l'avons appliquée à des écoulements simples, tels que l'écoulement de Poiseuille ou l'écoulement de cisaillement simple entre deux plans. Nous allons ici analyser ces écoulements en termes de conservation de la quantité de mouvement, plutôt qu'en termes d'équilibre de forces.

Prenons tout d'abord le cas d'un écoulement stationnaire de cisaillement simple d'un fluide newtonien incompressible entre deux plans $y = 0$ et $y = a$; le plan inférieur est immobile et le plan supérieur se déplace parallèlement à lui-même à la vitesse constante V_0 dans la direction Ox. Comme nous l'avons démontré au chapitre 4, le champ de vitesse $\mathbf{v}$ a pour composantes $(V_0 y/a, 0, 0)$. On suppose l'écoulement stationnaire et on ne fait pas intervenir la gravité. Analysons le bilan d'échange de quantité de mouvement pour un élément de volume fixe $\delta\mathcal{V}$, de profondeur unité suivant Oz, et de dimensions δx et δy dans les deux autres directions (Fig. 5.1).

Comme le champ de vitesse est partout parallèle à Ox, seule la composante de la quantité de mouvement suivant cet axe est non nulle. Dans cette direction, le flux de quantité de mouvement entrant par la face d'abscisse x est égal, d'après l'équation (5.11), à :

$$J_x\,\delta y = \Pi_{xx}\,n_x\,\delta y = (\rho v_x^2 + p)\delta y.$$

Or la vitesse v_x ne dépend que de la coordonnée y, et la pression p est constante dans l'écoulement. Le flux algébrique sortant par la face d'abscisse $x + \delta x$ est donc égal et opposé au flux entrant (le changement de signe vient du changement d'orientation de la normale à la surface considérée) ; il y a donc simplement transfert passif de la quantité de mouvement à travers l'élément.

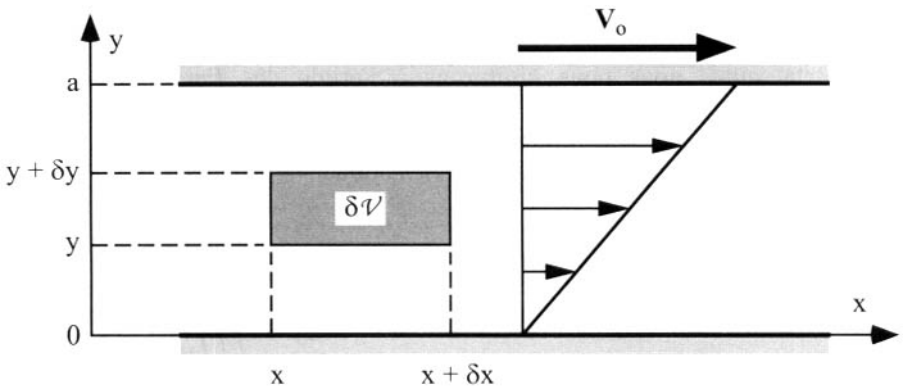


FIG. 5.1 – *Définition de l'élément de volume $\delta\mathcal{V}$ pour le calcul du bilan de quantité de mouvement dans un écoulement de cisaillement simple entre deux plans parallèles sans gradient de pression extérieur.*

Le flux de quantité de mouvement dans la direction Oy s'écrit:

$$J_y\,\delta x = \Pi_{xy}\,n_y\,\delta x = -\sigma'_{xy}\,n_y\,\delta x = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\delta x.$$

Ce flux est dirigé vers le bas car les couches de fluide situées près du plan en mouvement, où la vitesse est la plus grande et voisine de V_0 entraînent les autres. Là encore, comme le gradient de vitesse $\partial v_x/\partial y$ ne dépend pas de y, on a simplement transfert passif de la quantité de mouvement dans la direction Oy.

Nous allons voir qu'on obtient un résultat très différent dans le cas d'un écoulement de Poiseuille induit entre deux plans parallèles fixes $y = a/2$ et $y = -a/2$ par un gradient de pression constant $(\partial p/\partial x)$ (Fig. 5.2).

Au chapitre 4, nous avons établi le champ de vitesse $v_x(y)$ (formule (4.66)), dont le profil est parabolique avec :

$$v_x(y) = V_{\text{Max}}\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right) \tag{5.14}$$

avec :

$$V_{\text{Max}} = -\frac{a^2}{8\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot \tag{5.15}$$

Comme précédemment, seule la composante $\rho\,v_x$ de la quantité de mouvement est non nulle. En l'absence de gravité, il n'y a pas de gradient de pression dans la direction perpendiculaire à l'écoulement.

Le flux de quantité de mouvement suivant Ox est égal à :

$$J_x\,\delta y = \Pi_{xx}\,n_x\,\delta y = (\rho\,v_x^2(y) + p(x))\delta y.$$

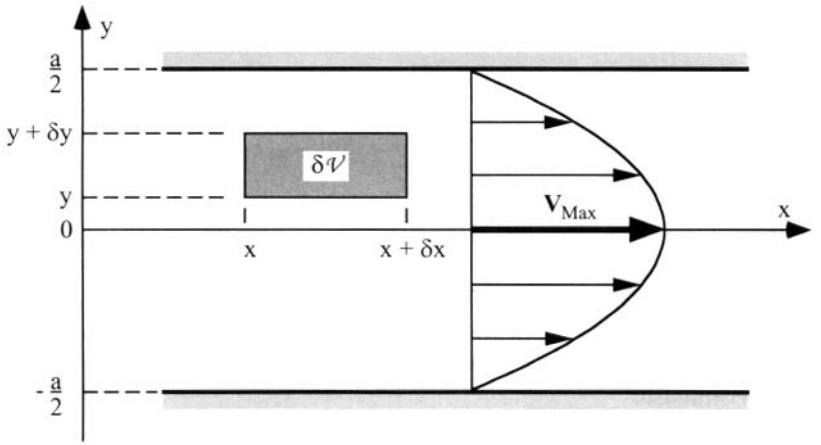


FIG. 5.2 – *Définition de l'élément de volume $\delta\mathcal{V}$ pour le calcul du bilan de quantité de mouvement dans un écoulement de Poiseuille entre deux plans $y = a/2$ et $y = -a/2$. L'écoulement est induit par un gradient de pression horizontal $\partial p/\partial x$.*

Cette fois, le flux varie suivant la direction Ox, par suite du gradient de pression $\partial p/\partial x$. Cette variation tend à créer, dans l'élément de volume, une variation par unité de temps de la composante P_x de la quantité de mouvement qui s'écrit (Éq. (5.7)) :

$$\frac{\partial P_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x)\,\delta x\,\delta y = -\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}\,\delta x\,\delta y = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\,\delta y. \tag{5.16}$$

Le flux de quantité de mouvement dans la direction Oy s'écrit :

$$J_y\,\delta x = \Pi_{xy}\,n_y\,\delta x = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\,\delta x = \frac{8\eta V_{\text{Max}} y}{a^2}\delta x.$$

Ce flux varie avec y et il est nul dans le plan de symétrie $y = 0$; son signe est tel qu'il est orienté vers la paroi la plus proche, et il augmente en valeur absolue lorsque la distance à celle-ci diminue. Le gradient de Π_{xy} permet de compenser la variation de quantité de mouvement dans l'élément de volume considéré, qui est due au gradient de pression (Éq. (5.16)) : en effet, il induit une variation de signe contraire de la composante P_x :

$$\frac{\partial P_x}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y}\,\delta x\,\delta y = -\frac{8\eta V_{\text{Max}}}{a^2}\,. \tag{5.17}$$

En combinant les équations (5.16) et (5.17), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_x)\delta x\,\delta y &= -\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}\,\delta x\,\delta y - \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y}\delta x\,\delta y \\ &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{8\eta V_{\text{Max}}}{a^2}\right)\delta x\,\delta y. \end{aligned} \tag{5.18}$$

La variation totale de quantité de mouvement à l'intérieur de l'élément $\delta\mathcal{V}$ est donc nulle, comme le requiert la stationnarité de l'écoulement.

En résumé, le gradient de pression $\partial p/\partial x$ entraîne un apport uniforme de quantité de mouvement dans tout le fluide ; cette quantité de mouvement est ensuite transférée transversalement vers les parois, par le mécanisme de diffusion visqueuse.

5.3 Bilan d'énergie cinétique – équation de Bernoulli

Nous allons tout d'abord évaluer la variation au cours du temps de l'énergie cinétique de l'unité de volume d'un fluide en écoulement. Cela nous conduira, dans le cas particulier des fluides parfaits, à la relation de Bernoulli, qui constitue une des formes du bilan d'énergie. Nous discuterons enfin quelques applications de cette équation à des écoulements réels, où l'influence de la viscosité peut être cependant négligée.

5.3.1 Équation de bilan d'énergie cinétique dans un fluide incompressible en écoulement avec ou sans viscosité

Établissement de l'équation de bilan

Nous considérons le cas d'un fluide en écoulement incompressible. L'énergie cinétique de l'unité de volume du fluide s'écrit :

$$e_c = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}V} = \frac{\rho\, v^2}{2}\cdot$$

En calculant la dérivée eulérienne de e_c par rapport au temps en un point fixe, on obtient l'équation suivante démontrée plus bas :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\, v^2}{2}\right) = -\mathrm{div}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\rho\, v^2}{2} + p\right) - (\boldsymbol{\sigma}'\cdot\mathbf{v})\right] + \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{f} - \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot \tag{5.19}$$

Démonstration de l'équation (5.19) On peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\, v^2}{2}\right) = \rho\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho\, v_i\frac{\partial v_i}{\partial t}\cdot \tag{5.20}$$

En remplaçant le terme $\partial v_i/\partial t$ par son expression, tirée de l'équation de mouvement du fluide (Éq. (4.25)) :

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}+\rho f_i \tag{5.21}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)&=-\rho v_i v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+v_i\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}+\rho v_i f_i &(5.22)\\ &=-v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)-v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i\sigma'_{ij})-\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\rho v_i f_i\\ &=(-\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\left(\rho\frac{v^2}{2}+p\right)+\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\mathbf{v})-\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}. &(5.23)\end{aligned}$$

En appliquant la relation générale $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{A})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}\,\alpha+\alpha\operatorname{div}\mathbf{A}$, on trouve :

$$\operatorname{div}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\rho v^2}{2}+p\right)\right]=\left(\frac{\rho v^2}{2}+p\right)\operatorname{div}\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\left(\frac{\rho v^2}{2}+p\right). \tag{5.24}$$

En combinant la condition d'incompressibilité $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ avec les équations (5.23) et (5.24), on retrouve bien l'équation (5.19).

Afin de se représenter plus aisément la signification des différents termes de l'équation locale (5.19), nous allons l'intégrer pour en donner une version *globale*. Choisissons un volume d'intégration $\mathcal{V}$, fixe dans l'espace ; nous obtenons alors, en utilisant le théorème d'Ostrogradsky pour remplacer l'intégrale de volume de la divergence par le flux des fonctions vectorielles correspondantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_{\mathcal{V}}\rho\frac{v^2}{2}\mathrm{d}V\right)=&-\iint_{\mathcal{S}}\rho\frac{v^2}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S-\iint_{\mathcal{S}}p\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S\\ &+\iint_{\mathcal{S}}([\boldsymbol{\sigma}']\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}S+\iiint_{\mathcal{V}}\rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}V\\ &-\iiint_{\mathcal{V}}\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\mathrm{d}V. &(5.25)\end{aligned}$$

♦ Le premier terme du second membre de l'équation précédente représente le flux global d'énergie cinétique $\rho v^2/2$ transportée par le fluide à travers la surface $\mathcal{S}$.

♦ Le second et le troisième termes représentent le travail des forces de pression et des composantes des contraintes visqueuses exercées *normalement* à la surface $\mathcal{S}$ limitant le volume $\mathcal{V}$.

♦ Le quatrième terme correspond à l'apport d'énergie par les forces extérieures (égales à $\rho\mathbf{f}$ par unité de volume). Ce terme est positif lorsque $\rho\mathbf{f}$ et $\mathbf{v}$ sont de même sens ; par exemple, ce sera le cas pour un fluide s'écoulant vers le bas, dans le champ de pesanteur terrestre ($\mathbf{f}=\mathbf{g}$), qui lui fournit de l'énergie cinétique.

Ces quatre premiers termes représentent donc l'ensemble des échanges d'énergie d'origine convective dus aux travaux des forces exercées sur la surface $\mathcal{S}$ ou à ceux d'un champ de force extérieur (dans ce dernier cas, on a échange entre énergie cinétique et énergie potentielle si le champ de force extérieur dérive d'un potentiel).

♦ Enfin le dernier terme $\left(-\iiint_{\mathcal{V}} \sigma'_{ij}(\partial v_i/\partial x_j)\mathrm{d}V\right)$ représente la transformation irréversible d'énergie cinétique en énergie interne du fluide sous forme de chaleur.

La présence de deux termes où intervient le tenseur des contraintes visqueuses $[\boldsymbol{\sigma}']$ est un point important que nous allons développer sur un cas particulier.

Dissipation d'énergie cinétique par viscosité dans un écoulement de cisaillement simple

Analysons, dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple, la signification respective des deux termes du second membre de l'équation (5.25) qui contiennent le tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$ (Fig. 5.1). On considère un élément de volume de dimensions δx et δy suivant Ox et Oy, et de dimension unité dans la direction Oz. La différence entre les forces de frottement visqueux sur les parties inférieure et supérieure de l'élément vaut $\left(\partial\sigma'_{xy}/\partial y\right)\delta x\,\delta y$. Le travail par unité de temps de cette résultante est égal, au premier ordre près, à $v_x\left(\partial\sigma'_{xy}/\partial y\right)\delta x\,\delta y$. Il contribue à accélérer l'élément et donc, à augmenter son énergie cinétique.

Le dernier terme de l'équation (5.25) est égal à $\sigma'_{xy}\left(\partial v_x/\partial y\right)\delta x\,\delta y$ et correspond au contraire uniquement à un travail de déformation. En effet, dans un repère se déplaçant à la vitesse moyenne $v_x(y)$, il correspond au travail de la force $\sigma'_{xy}\delta x$ exercée sur la face supérieure de l'élément : le point d'application de cette force se déplace à la vitesse $(\partial v_x/\partial y)\delta y$ par rapport à la face inférieure. Si l'élément était solide, ce travail serait emmagasiné sous forme d'énergie potentielle de déformation élastique ; pour un fluide, il est dissipé sous forme de chaleur et transformé en énergie interne.

Le terme $\operatorname{div}\left([\boldsymbol{\sigma}']\cdot\mathbf{v}\right)$ de l'équation (5.19), représenté par $\iint_S([\boldsymbol{\sigma}']\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}S$ dans l'équation (5.25), est égal à $\left(\partial(\sigma'_{xy}v_x)/\partial y\right)\delta x\,\delta y$, c'est-à-dire à la somme des deux termes précédents. Ainsi, dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple, on vérifie que $\iint_S([\boldsymbol{\sigma}']\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}S$ représente le travail total des contraintes de viscosité sur la surface d'un élément de fluide. Une fraction (terme en $\iiint_{\mathcal{V}} v_x\left(\partial\sigma'_{xy}/\partial y\right)\mathrm{d}V$) est transformée en énergie cinétique ; elle correspond à un entraînement par les couches de fluide sous l'effet de la viscosité. L'autre partie (terme en $\iiint_{\mathcal{V}} \sigma'_{ij}\left(\partial v_i/\partial x_j\right)\mathrm{d}V$) est dégradée sous forme de chaleur. C'est pour cette raison que ce terme apparaît avec un signe négatif dans l'équation (5.25), puisque c'est la partie de $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\mathbf{v})$ qui ne contribue pas au taux d'accroissement d'énergie cinétique.

Dissipation d'énergie cinétique dans un fluide newtonien

Explicitons le dernier terme de l'équation (5.25) dans le cas d'un fluide newtonien incompressible, en utilisant la symétrie du tenseur σ'_{ij} ($\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$) et la relation linéaire : $\sigma'_{ij} = \eta\,(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$. On a :

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sigma'_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\\ &= \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

En intégrant ce terme sur tout le volume $\mathcal{V}$ occupé par le fluide, nous obtenons le taux de dissipation d'énergie cinétique par viscosité :

$$\frac{\delta E_c}{\delta t} = -\frac{\eta}{2}\iiint_{\mathcal{V}}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V. \tag{5.26}$$

L'intégrale est nécessairement positive. Comme le terme $\delta E_c/\delta t$ correspond à une dissipation irréversible d'énergie et que la forme quadratique sous l'intégrale est positive, le coefficient de viscosité η est nécessairement positif (nous avions annoncé cette propriété au chapitre 4 (section 4.1.3)).

Dissipation d'énergie cinétique dans un écoulement parallèle

Le terme de dissipation et sa signification physique apparaissent particulièrement simplement dans l'exemple d'un écoulement parallèle stationnaire $v_x(y)$ d'un fluide newtonien entre deux parois $y = 0$ et $y = a$, que nous analysons ci-après.

Considérons donc cet écoulement dans lequel nous négligeons la pesanteur. Dans un tel écoulement, la vitesse est constante le long des lignes de courant et il n'y a de variation d'énergie cinétique des particules de fluide ni au cours de leur déplacement, ni au cours du temps. Appliquons maintenant l'équation (5.25) à un volume compris entre les plans x et $x+\Delta x$, les parois $y = 0$ et $y = a$, et sur une distance unité suivant Oz ; en tenant compte du fait que le champ de vitesse et la contrainte visqueuse $\sigma'_{xy} = \eta\partial v_x/\partial y$ sont invariants dans la direction Ox et que la pression p ne dépend que de x, on obtient :

$$\begin{aligned}\left[(p(x) - p(x+\Delta x))\int_0^a v_x(y)\mathrm{d}y\right] + \left[\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}(a)v_x(a)\Delta x\right.\\ \left. - \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}(0)\,v_x(0)\Delta x\right] = \eta\iiint\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Le premier membre de l'équation représente la somme algébrique, d'une part, du travail par unité de temps de la résultante des forces de pression sur les sections x et $x + \Delta x$ et, d'autre part, du travail des forces exercées sur le fluide par les parois latérales (celles-ci sont égales et opposées aux forces de frottement visqueux exercées par le fluide sur les parois). Comme il n'y a pas de variation d'énergie cinétique du fluide au cours du temps, ni au cours de son mouvement, ce travail est

intégralement dissipé sous forme de frottement visqueux en volume : l'expression de cette dissipation est donnée par le second membre de l'équation et coïncide bien avec les valeurs trouvées plus haut.

5.3.2 Relation de Bernoulli – applications

La *relation de Bernoulli* traduit le bilan d'énergie pour les fluides *parfaits, incompressibles* dans le cas où *les forces en volume* $\mathbf{f}$ *dérivent d'un potentiel* φ avec $\mathbf{f} = -\mathbf{grad}\,\varphi$. Nous allons successivement discuter le cas des écoulements potentiels, stationnaires ou non, et enfin présenter quelques applications de cette relation.

Équation de Bernoulli pour un écoulement stationnaire

Pour un fluide parfait en écoulement stationnaire, dans lequel on peut négliger les pertes d'énergie par viscosité, l'équation (5.19) devient :

$$\operatorname{div}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\rho v^2}{2}+p\right)\right]-\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}=\operatorname{div}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\rho\,v^2}{2}+p\right)\right]+\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\varphi=0. \tag{5.27}$$

En utilisant la relation vectorielle générale : $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{A})=\alpha\operatorname{div}\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}\,\alpha$, la relation d'incompressibilité $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ et la propriété $\rho=$ constante, l'équation (5.27) peut se mettre sous la forme :

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\left(\frac{\rho\,v^2}{2}+p+\rho\,\varphi\right)=0. \tag{5.28}$$

Le produit scalaire ci-dessus représente la variation temporelle $\mathrm{d}\mathcal{P}/\mathrm{d}t$ de la quantité $\mathcal{P}=\rho(v^2/2)+p+\rho\,\varphi$ au cours du déplacement d'une particule de fluide le long d'une ligne de courant (tangente en tous points au vecteur vitesse). En effet :

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathcal{P}=\left(\frac{\mathbf{dM}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{grad}\right)\mathcal{P}=\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{5.29}$$

$\mathbf{dM}/\mathrm{d}t$ représente la vitesse de déplacement de la particule. Nous en déduisons la première forme de l'*équation de Bernoulli* :

$$\rho\frac{v^2}{2}+p+\rho\varphi=\text{constante}\qquad \textit{le long d'une ligne de courant.} \tag{5.30}$$

La quantité $\rho\,v^2/2$, homogène à une pression, est appelée *pression dynamique.*

Analysons ce résultat en considérant un écoulement uniforme horizontal de vitesse $\mathbf{U}$ perpendiculaire à un obstacle (Fig. 5.3) : il apparaît un point de stagnation S, où la vitesse tangentielle est nulle même dans un fluide parfait. Appelons p_0 la pression en un point O situé assez loin de l'obstacle sur la

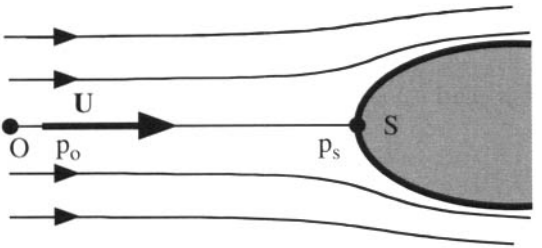


FIG. 5.3 – *Écoulement au voisinage d'un point de stagnation S d'un fluide incident sur un obstacle.*

même ligne de courant horizontale que S (φ est donc constante), et où la vitesse a la valeur U. On a, entre p_0 et la pression p_S en S, la relation :

$$p_S = p_0 + \rho \frac{U^2}{2} \cdot \tag{5.31}$$

Le fait que la vitesse soit nulle en S justifie le nom de p_S : *pression de stagnation* qui sera donné par extension dans le cas général à la somme $p + (\rho v^2)/2$ (on utilise aussi la dénomination de pression totale).

L'équation (5.30) prédit qu'une augmentation de la vitesse en un point d'une ligne de courant s'accompagne d'une diminution de la pression en ce même point. Cet effet permet d'expliquer les phénomènes de *cavitation* : si la vitesse augmente suffisamment pour que la pression diminue jusqu'à la pression de vapeur saturante du fluide à la température correspondante, le fluide se vaporise. Les bulles de vapeur ainsi formées au sein du fluide et qui sont entraînées par son mouvement implosent ensuite sur des surfaces solides (pales de turbines, hélices ...) et provoquent, à la longue, des arrachements de matière très dommageables. Le bruit associé à ces émissions de bulles est également un problème très important pour la discrétion des sous-marins militaires.

Équation de Bernoulli pour des écoulements potentiels

Considérons à présent le cas où l'écoulement du fluide est potentiel (le chapitre 6 traite en détail ce type d'écoulements) ; le champ de vitesse $\mathbf{v}$ dérive alors d'un potentiel Φ tel que :

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\, \Phi. \tag{5.32}$$

On continue de supposer l'écoulement incompressible, avec une densité ρ constante et la présence de forces en volume $\mathbf{f}$ dérivant d'un potentiel φ ; par contre, nous ne supposons plus le champ de vitesse stationnaire. Nous allons établir l'équation de Bernoulli directement à partir de l'équation d'Euler (4.31) (nous aurions d'ailleurs pu utiliser cette méthode pour établir l'équation de

Bernoulli dans le cas général) :

$$\rho\frac{\partial\,\mathbf{grad}\,\Phi}{\partial t} = \rho\,\mathbf{grad}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} - \mathbf{grad}\,p - \mathbf{grad}\,(\rho\,\varphi). \tag{5.33}$$

Utilisons l'identité vectorielle suivante, qui peut être démontrée en identifiant terme à terme chacune de ses composantes :

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = \mathbf{grad}\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\wedge\mathbf{rot}\,\mathbf{v}. \tag{5.34}$$

De plus, l'écoulement est irrotationnel, puisque la vitesse dérive d'un potentiel. L'équation (5.33) devient donc :

$$\mathbf{grad}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\mathbf{grad}\left(\rho\frac{v^2}{2}\right) - \mathbf{grad}\,p - \mathbf{grad}\,(\rho\,\varphi) \tag{5.35}$$

soit, après intégration :

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho\frac{v^2}{2} + p + \rho\varphi = \text{constante}. \tag{5.36}$$

Cette relation constitue une deuxième forme de *l'équation de Bernoulli.* Pour un écoulement stationnaire tel que $\rho\,(\partial\Phi/\partial t) = 0$, l'équation ci-dessus semble se ramener à l'équation (5.30). La différence capitale vient de ce que la quantité $(\rho(v^2/2) + p + \rho\varphi)$ est *constante dans tout le volume de l'écoulement,* au lieu de l'être simplement le long d'une ligne de courant, comme dans le cas précédent. En revanche, cette relation plus spécifique ne peut pas être démontrée seulement à partir d'un bilan d'énergie.

Applications de l'équation de Bernoulli

La relation de Bernoulli est à la base d'un grand nombre d'effets dans lesquels une variation de vitesse dans un écoulement (due par exemple au rétrécissement d'un tube) entraîne une variation de pression en sens inverse. Les exemples qui suivent présentent quelques illustrations ou applications de ces effets. Par ailleurs, nous verrons comment on peut appliquer – au moins de manière approchée – l'équation de Bernoulli à des écoulements de fluides réels.

♦ Rappel préliminaire : une propriété importante des écoulements unidirectionnels

Avant d'aborder ces exemples, rappelons un résultat clé que nous avons déjà rencontré pour les écoulements de Couette et de Poiseuille discutés au chapitre 4. Considérons un volume de fluide en écoulement, dans lequel la vitesse reste parallèle à une même direction Ox. Nous allons montrer que, dans ce cas, la variation transverse de la pression dans une section perpendiculaire

à l'écoulement se réduit au gradient de pression hydrostatique : il n'apparaît pas de terme supplémentaire dû à l'écoulement. En effet, le terme $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ de l'équation de mouvement est identiquement nul car $v_y = v_z = 0$, ce qui entraîne $\partial v_x/\partial x = 0$ (en utilisant la condition d'incompressibilité $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$). Par ailleurs, les forces de frottement visqueux sont parallèles à Ox ; l'équation de mouvement se réduit donc à :

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g = 0 \qquad \text{dans la direction verticale} \tag{5.37a}$$

et:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad \text{dans l'autre direction normale à l'écoulement.} \tag{5.37b}$$

En l'absence de pesanteur, la pression est constante dans une section normale à l'écoulement. Ce résultat est précieux pour de nombreux problèmes d'écoulements de fluides réels. En effet, à vitesse élevée, ils se comportent comme des fluides parfaits, sauf dans une couche mince proche des parois solides. C'est dans cette *couche limite*, qui sera étudiée en détail au chapitre 9, que se fait la transition entre la condition de vitesse tangentielle nulle à la paroi et la vitesse d'un écoulement de fluide parfait. Comme l'écoulement dans cette couche limite est localement pratiquement parallèle à la paroi, on aura, d'après les équations (5.37), continuité de la pression entre la paroi et la zone juste à l'extérieur de la couche limite.

♦ *Le tube de Pitot* est une application directe de l'équation de Bernoulli : il permet de déterminer la vitesse d'un écoulement fluide à partir d'une mesure de pression. Dans l'exemple que nous considérerons plus bas, l'obstacle est fixe et le fluide est en mouvement ; dans de nombreux cas pratiques, le tube de Pitot est également utilisé pour mesurer la vitesse d'un véhicule (avion, bateau) dans un fluide immobile. Ce dispositif est constitué de deux tubes concentriques (Fig. 5.4) : le tube intérieur est percé d'une ouverture S à son

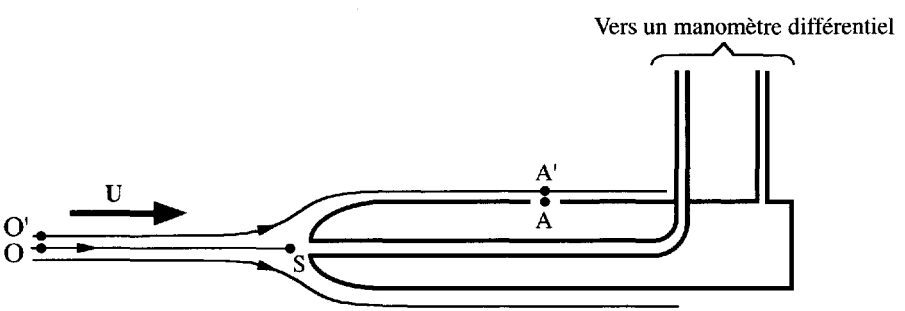


FIG. 5.4 – *Principe du tube de Pitot. La relation de Bernoulli est appliquée le long des deux lignes de courant allant de O à S, et de O' à A'.*

extrémité, placée face à l'écoulement, et l'autre tube est percé d'une série de petits orifices A répartis sur une couronne. Un manomètre différentiel relié à chacun des deux tubes permet de mesurer la différence de pression Δp entre les points S et A.

Négligeons les effets de viscosité en les supposant seulement importants dans une mince couche limite près de la paroi des tubes ; nous pouvons appliquer l'équation (5.30) le long de la ligne de courant OS qui coïncide avec l'axe des tubes :

$$p_0 + \rho\frac{U^2}{2} = p_S. \tag{5.38}$$

Appliquons également la relation (5.30) le long de la ligne de courant $O'A'$ (le point A' est sur la même verticale que la prise de pression A, mais à l'extérieur de la couche limite) :

$$p_{0'} + \rho\frac{U^2}{2} = p_{A'} + \rho\frac{v_{A'}^2}{2} = p_A + \rho\frac{v_{A'}^2}{2} = p_A + \rho\frac{U^2}{2}\cdot \tag{5.39}$$

Comme nous venons de le voir, la pression reste en effet constante lorsqu'on traverse l'écoulement quasi-unidirectionnel dans la couche limite normalement à l'écoulement, et on a donc $p_A = p_{A'}$. Par ailleurs, la vitesse en A' est pratiquement égale à U, si A' est suffisamment en aval de S et si la section du tube de Pitot est faible devant la taille du canal d'écoulement. Enfin, les pressions aux points O et O', infiniment voisins l'un de l'autre et situés loin en amont de l'obstacle, ont la même valeur. On en déduit alors, en combinant les équations (5.38) et (5.39) :

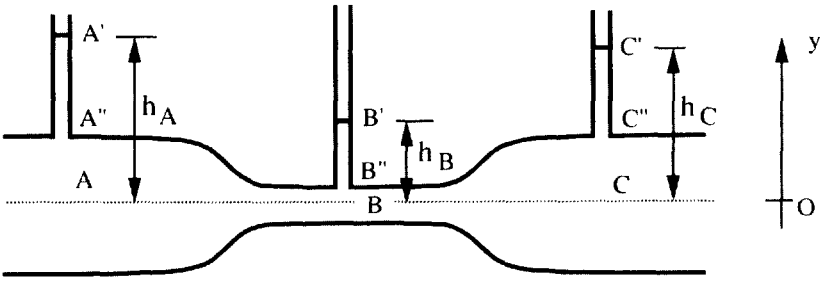
$$\Delta p = p_S - p_A = \rho\frac{U^2}{2}\cdot \tag{5.40}$$

Le module de la vitesse de l'écoulement découle donc de la mesure de la différence de pression Δp.

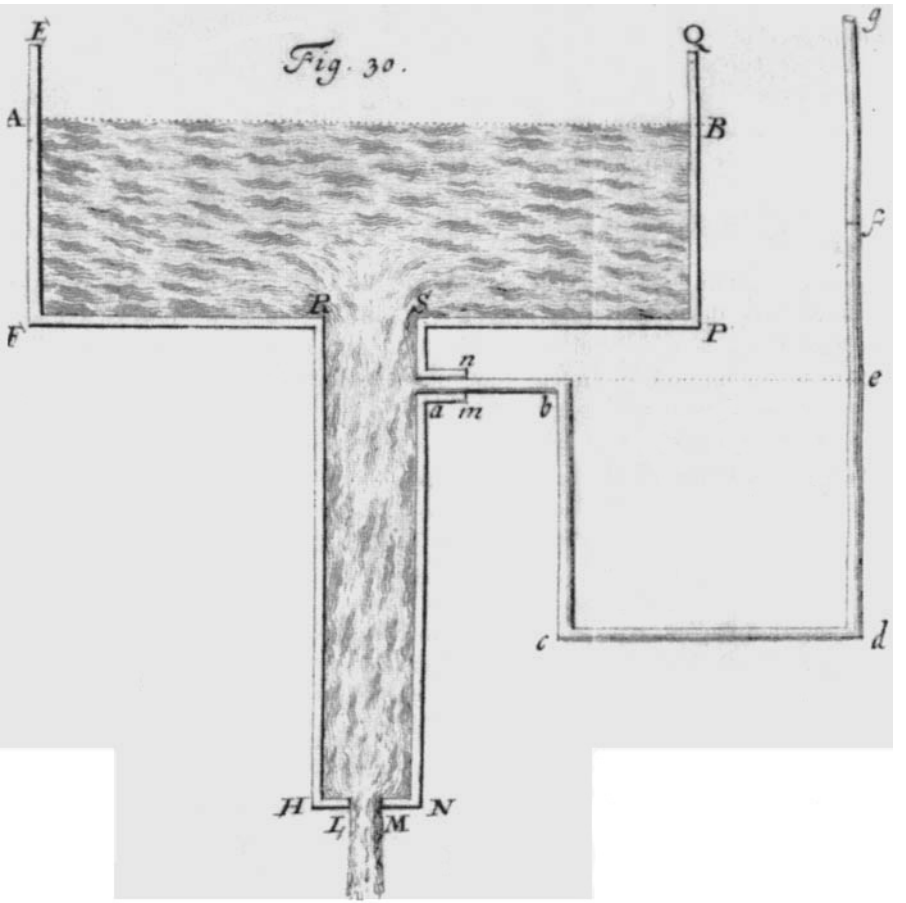
♦ *Le tube de Venturi* (Fig. 5.5) utilise la relation de Bernoulli pour créer une dépression au niveau du rétrécissement d'un tube ; il est souvent utilisé en pratique (aspiration du mélange air-essence dans un carburateur de voiture, trompe à eau, mesure de débit, ...).

Lorsqu'un écoulement est créé dans le système, il apparaît une différence de hauteur, proportionnelle au carré du débit, entre les niveaux h_A et h_B dans les tubes manométriques A et B ; par contre, les niveaux h_A et h_C sont pratiquement les mêmes (h_C est légèrement plus faible que h_A si l'écoulement est dirigé de A vers C, par suite de la perte de charge dans le tube due à la viscosité, que nous négligeons dans ce traitement). À la surface du niveau liquide, dans les trois tubes manométriques, on a une pression égale à la pression atmosphérique p_0 :

$$p_{A'} = p_{B'} = p_{C'} = p_0. \tag{5.41}$$



(a)



(b)

FIG. 5.5 – *(a) Dépression créée au niveau du rétrécissement dans un tube de Venturi. (b) Reproduction du traité original de Bernoulli* "Hydrodynamica" *: la diminution de la pression au niveau mn du tube détectée par la différence entre le niveau AB de liquide et le niveau f permet de mesurer la vitesse d'écoulement du liquide au niveau b (cliché J. L. Deniel, École Polytechnique).*

Si les tubes manométriques sont suffisamment étroits, ils perturbent peu l'écoulement ; celui-ci reste donc parallèle dans les sections du tube où se trouvent les points A, B et C (si les prises de pression sont assez éloignées des zones de changement de section du tube pour que la vitesse soit uniforme). On peut donc appliquer les relations (5.37). Les gradients de pression entre A et A'', B et B'', C et C'' se réduisent au gradient de pression hydrostatique. L'écoulement ne pénètre pratiquement pas à l'intérieur des tubes manométriques et le gradient de pression y est aussi uniquement hydrostatique. On peut donc écrire :

$$p_A = p_{A'} + \rho g h_A = p_0 + \rho g h_A. \tag{5.42}$$

De même :

$$p_B = p_0 + \rho g h_B \tag{5.43}$$

et

$$p_C = p_0 + \rho g h_C. \tag{5.44}$$

Supposons maintenant que l'écoulement soit uniforme dans chacune des sections, avec des vitesses v_A, v_B et v_C, sauf très près des parois solides ; la transition à la condition de vitesse tangentielle nulle sur la paroi solide s'effectue sur une mince couche limite sans gradient de pression transverse, comme nous l'avons montré plus haut. Si la perte d'énergie par frottement visqueux est assez faible devant l'énergie cinétique du fluide, on peut appliquer l'équation de Bernoulli (5.30) le long de la ligne de courant horizontale ABC avec :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 \tag{5.45}$$

soit, en remplaçant p_A, p_B et p_C par leurs expressions données par les équations (5.42, 5.43) et (5.44), et en divisant le résultat par ρg :

$$h_A + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} = h_B + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} = h_C + \frac{1}{2}\frac{v_C^2}{g}\cdot \tag{5.46}$$

On prédit donc bien un niveau plus faible dans le tube manométrique B placé au niveau de la zone de plus forte vitesse, et une variation de la différence de niveau entre A et B proportionnelle à $(v_B^2 - v_A^2)$. Pour établir l'équation (5.45), nous avons supposé la vitesse uniforme dans chacune des sections A, B et C. Cette condition n'est pas réalisée en pratique, à cause de la condition aux limites de vitesse nulle aux parois ; il faudra donc introduire un facteur correctif expérimental qui dépende du profil de vitesse.

Remarque Dans tout ce qui précède, nous avons négligé les forces de viscosité ; et il pourrait donc sembler que le modèle précédent corresponde à une approximation de fluide parfait. Or, nous allons montrer au contraire que le phénomène des tubes

de Venturi ne serait pas observé dans un fluide parfait en écoulement potentiel et que la condition aux limites de vitesse nulle aux parois joue un rôle essentiel ! La raison de ce paradoxe apparent est le fait que l'hypothèse clé de notre raisonnement (c'est-à-dire le fait que le gradient de pression transverse se réduise à la pression hydrostatique) ne serait alors plus vérifiée.

Écrivons l'équation de Bernoulli (5.36), en supposant que la seule force en volume est la pesanteur et que l'écoulement est *potentiel dans tout le fluide* :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}. \tag{5.47}$$

Si les tubes manométriques sont assez longs, l'influence de l'écoulement principal décroîtra suffisamment en remontant dans les tubes pour qu'on puisse écrire :

$$v_{A'} = v_{B'} = v_{C'} = 0. \tag{5.48}$$

Ainsi, en appliquant l'équation (5.47) aux points A', B' et C', où la pression p est égale à p_0, on trouve :

$$gh_A = gh_B = gh_C \tag{5.49}$$

soit :

$$h_A = h_B = h_C. \tag{5.50}$$

Il n'y aurait donc pas de différence de niveau entre les trois tubes ! On continue d'avoir une différence de pression entre les points A et B, mais celle-ci est compensée exactement en sens inverse par la variation de vitesse lorsqu'on remonte vers A'' et B'' à l'intérieur des tubes manométriques. En effet, comme on n'a plus la condition de vitesse tangentielle nulle aux parois, on a une remontée de l'écoulement sur une distance finie à l'intérieur des tubes ; le champ de vitesse n'est donc plus parallèle au niveau des prises de pression, et un gradient de pression transverse à l'écoulement moyen peut exister. Dans l'écoulement visqueux réalisé pratiquement, au contraire, la vitesse est nulle, ou très faible, aussi bien sur les parois qu'à l'intérieur des tubes manométrique : on peut donc avoir un écoulement pratiquement parallèle dès qu'on s'éloigne un peu de la paroi.

Écriture de l'équation de Bernoulli en écoulement courbe

Considérons un écoulement avec des lignes de courant courbes de rayon de courbure R (Fig. 5.6). Supposons qu'on puisse négliger les forces de frottement visqueux et les forces en volume. L'équilibre entre le gradient de pression et l'accélération d'un élément matériel de fluide incompressible s'écrit :

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\mathbf{t} + \left(\rho\frac{v^2}{R}\right)\mathbf{n} = -\mathbf{grad}\,p \tag{5.51}$$

$\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ sont les vecteurs unitaires tangent et normal aux lignes de courant, $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ est l'accélération lagrangienne. En multipliant scalairement

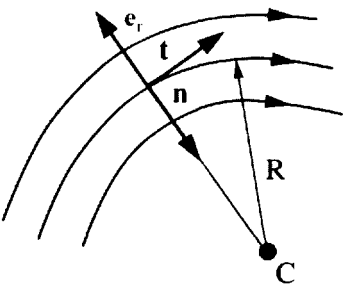


FIG. 5.6 – *Variation de pression dans un écoulement dont les lignes de courant sont courbes.*

l'équation (5.51) par $\mathbf{t}$, on obtient, en notant s la coordonnée curviligne le long de la ligne de courant :

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} \tag{5.52}$$

qui est une forme locale de l'équation du mouvement (rappelons que $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$). De même, en multipliant scalairement la même équation par $\mathbf{n}$, on obtient :

$$\rho \frac{v^2}{R} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad})\, p = -\mathbf{n} \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{\partial p}{\partial r} \tag{5.53}$$

($\mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire radial opposé à $\mathbf{n}$). La pression *augmente* donc lorsqu'on s'éloigne du centre de courbure C de la ligne de courant.

Ce résultat est à la base de *l'effet Coanda*, qu'on peut l'illustrer chez soi en plaçant un obstacle cylindrique sous un jet liquide, normalement à celui-ci, mais légèrement à côté de l'axe : le jet tend à se coller sur l'obstacle et il est défléchi par lui. Ce même effet est à l'origine du maintien en « lévitation » d'une balle légère dans un jet d'air arrivant un peu au-dessus d'elle (Fig. 5.7). La sustentation de la balle n'est pas due à une surpression créée par le jet d'air, mais à une dépression venant de la courbure des lignes de courant – comme on peut le comprendre par l'analyse qualitative de la formule (5.53).

D'après cette formule, la pression décroît lorsqu'on se rapproche radialement de la balle ; elle passe d'une valeur p_0 à une valeur inférieure p_1. La différence de pression $p_1 - p_0$ entre la face supérieure et la face inférieure entraîne l'apparition d'une force $\mathbf{F}_p$ dirigée perpendiculairement à la direction du jet incident, qui équilibre le poids de la balle et la force de résistance $\mathbf{R}$ due à l'écoulement. La force $\mathbf{F}_p$ peut aussi être considérée comme correspondant à la variation temporelle de la quantité de mouvement du jet, venant de sa déflexion par la balle.

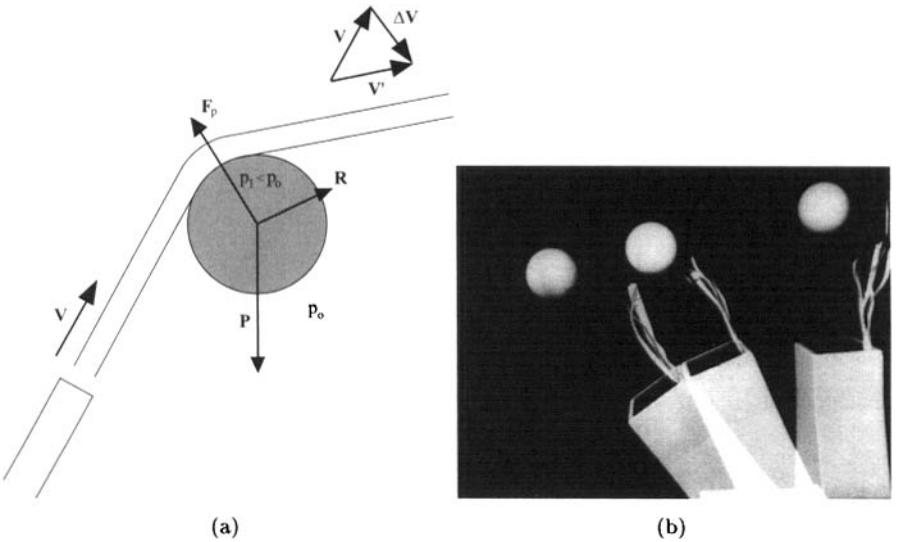


FIG. 5.7 – *Maintien en lévitation d'une balle dans un jet d'air ; (a) schéma montrant l'équilibre des forces en présence et la déflexion du jet par l'obstacle ; (b) expérience réalisée avec une balle légère dans un jet d'air comprimé de vitesse modérée pour différents angles d'incidence (cliché C. Rousselin, Palais de la Découverte).*

5.4 Applications des équations de bilan de quantité de mouvement et d'énergie

Dans cette section, nous allons décrire quelques écoulements que l'on peut analyser en utilisant les équations de bilan de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie. On évite ainsi d'avoir à déterminer complètement le champ de vitesse du fluide, ce qui se révèle souvent impossible en pratique.

5.4.1 Jet incident sur un plan

Le problème que nous allons analyser se rapproche des observations simples que l'on peut faire lorsqu'un jet d'eau issu d'un robinet rencontre des obstacles de formes variées (verre de montre, cuillère ...). Considérons un jet de liquide bidimensionnel en forme de lame d'épaisseur h (Fig. 5.8), et de largeur unité dans la direction Oz perpendiculaire au plan de figure. La vitesse $\mathbf{U}$ du fluide est supposée uniforme à travers la section. Ce jet se divise, en arrivant sur le plan, en deux lames d'épaisseurs et de vitesses respectives h_1 et h_2, $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$.

Dans tout le problème, on négligera les effets de la viscosité en supposant qu'on a un fluide parfait en écoulement potentiel. Nous négligerons aussi les

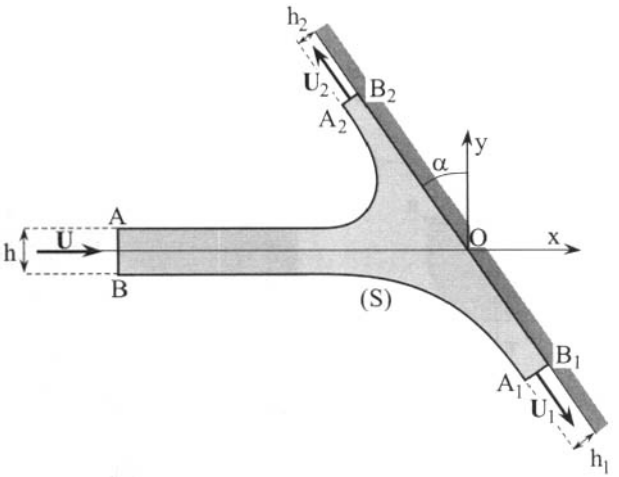


FIG. 5.8 – *Schéma de la répartition de fluide et du volume de contrôle pour un jet bidimensionnel incident sur un plan.*

effets de la pesanteur, ce qui est justifié par les faibles épaisseurs des lames de liquide rencontrées en pratique.

La conservation de la masse, traduite en égalité des débits par unité de largeur de la lame liquide (suivant Oz), s'écrit :

$$hU = h_1U_1 + h_2U_2. \tag{5.54}$$

Si l'écoulement est potentiel, l'équation de Bernoulli (5.36) peut être utilisée dans tout le volume fluide avec :

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2. \tag{5.55}$$

Or, les lignes de courant sont parallèles dans les différentes sections AB, A_1B_1 et A_2B_2 de la lame liquide ; la pression p ne varie donc pas à travers ces sections, ce qui entraîne :

$$p = p_1 = p_2 = p_0 \qquad \text{(pression atmosphérique)}. \tag{5.56}$$

En combinant les équations (5.55) et (5.56), on en déduit que la vitesse garde la même valeur partout dans la lame liquide :

$$U = U_1 = U_2. \tag{5.57}$$

Reportons ce résultat dans l'équation (5.54) de conservation du débit : on obtient une première relation entre les épaisseurs des lames de liquide :

$$h = h_1 + h_2. \tag{5.58}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (Éq. (5.12)) permet de calculer la force exercée par le jet sur le plan. Choisissons le volume de contrôle limité par la ligne en gras à la figure 5.8 et de profondeur unité suivant Oz. En projetant cette équation vectorielle sur les deux axes Ox et Oy, nous obtenons (en négligeant les forces de pesanteur et les contraintes de viscosité) :

$$\rho(U_1^2 h_1 \sin\alpha - U_2^2 h_2 \sin\alpha - U^2 h) + \iint_{\text{plan}} (\delta p\, n_x)\mathrm{d}S = 0 \tag{5.59a}$$

$$\rho(-U_1^2 h_1 \cos\alpha + U_2^2 h_2 \cos\alpha) + \iint_{\text{plan}} (\delta p\, n_y)\mathrm{d}S = 0. \tag{5.59b}$$

Les deux intégrales de surface sont prises sur la portion du plan solide située entre les sections A_1B_1 et A_2B_2. Elles représentent les composantes F_x et F_y de la force totale $\mathbf{F}$ de pression sur le plan suivant les deux axes Ox et Oy. La pression atmosphérique p_0 intervient par des intégrales de la forme $\iint_{\mathcal{S}}(p_0 n_i)\mathrm{d}S$, avec $i = x$ ou y ($\mathcal{S}$ est la surface totale qui limite le volume de contrôle) ; ces intégrales sont identiquement nulles. En tenant compte de l'égalité des vitesses U, U_1 et U_2, les équations (5.59) deviennent :

$$F_x = \rho U^2 \left(h - (h_1 - h_2)\sin\alpha\right) \tag{5.60a}$$

et :

$$F_y = \rho U^2 (h_1 - h_2)\cos\alpha. \tag{5.60b}$$

Déterminons les épaisseurs h_1 et h_2 des deux lames liquides, en écrivant que la composante parallèle au plan de la force $\mathbf{F}$ est nulle (par hypothèse, en effet, on n'a pas de forces de frottement visqueux, mais simplement des forces de pression). On obtient la condition :

$$F_{\parallel} = F_x \sin\alpha - F_y \cos\alpha = 0. \tag{5.61}$$

En utilisant les équations (5.60a) et (5.60b), on en déduit :

$$\rho U^2 L \left(h - (h_1 - h_2)\sin\alpha\right)\sin\alpha - \rho U^2 L (h_1 - h_2)\cos^2\alpha = 0$$

d'où :

$$h_1 - h_2 = h \sin\alpha. \tag{5.62}$$

En combinant ce résultat avec l'équation (5.58), nous obtenons finalement :

$$h_1 = \frac{h}{2}(1 + \sin\alpha) \tag{5.63a}$$

et :

$$h_2 = \frac{h}{2}(1 - \sin\alpha). \tag{5.63b}$$

Enfin, le calcul de la composante de la force normale au plan par unité de largeur donne :

$$F_\perp = F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha = \rho U^2 h \cos\alpha. \tag{5.64}$$

Nous retrouvons bien la forme habituelle des forces de résistance dans le cas où les phénomènes de viscosité sont négligés, c'est-à-dire une force de résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

5.4.2 Jet sortant d'un réservoir par un orifice

On s'intéresse à un récipient qui se vide par un petit orifice circulaire situé dans sa partie inférieure (Fig. 5.9a). Si la section S_0 de l'orifice n'est pas trop petite, on pourra négliger les pertes par viscosité à ce niveau. Nous appellerons p_0 la valeur de la pression atmosphérique au-dessus de la surface dans le récipient et à l'extérieur du jet de sortie.

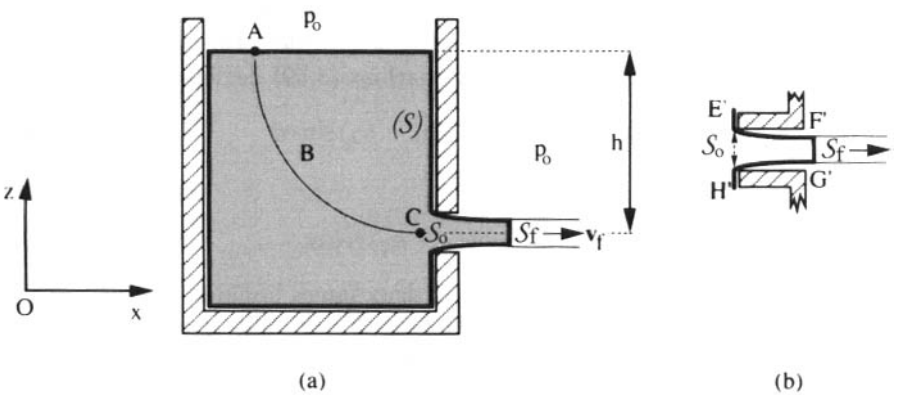


FIG. 5.9 – *(a) Jet émergeant d'un réservoir par un orifice circulaire ; (b) ajutage rentrant, dit ajutage de Borda, pour lequel la section finale du jet S_f est égale à la moitié de la section d'entrée S_0.*

Détermination de la vitesse dans le jet de sortie

L'expérience montre que le jet se contracte à partir de l'orifice, jusqu'à une valeur minimale que nous notons S_f. Au niveau de cette section minimale, les lignes de courant sont parallèles. La pression a donc, d'après les relations (5.37), la même valeur p_0 dans le jet qu'à l'extérieur (nous négligeons la variation de pression hydrostatique sur la largeur du jet). Par ailleurs, si la section du récipient est grande devant la section S_f, la vitesse de descente du niveau de liquide est très petite devant la vitesse dans le jet et peut être négligée (en raison de la conservation du débit, la vitesse varie en effet comme l'inverse du rapport des surfaces). Soit z_0 la cote correspondant au niveau du

fluide dans le récipient et h la différence de niveau par rapport à l'orifice. L'écriture de l'équation de Bernoulli le long de la ligne de courant ABC représentée à la figure 5.9a conduit donc à :

$$p_0 + \rho g z_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_f^2 + \rho g(z_0 - h). \tag{5.65}$$

La vitesse v_f au niveau de la section minimale vaut donc :

$$v_f = \sqrt{2gh}. \tag{5.66}$$

Calcul de la section contractée

Appliquons l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.12) à l'intérieur d'un volume de contrôle délimité par une surface $\mathcal{S}$ fixe. Celle-ci est constituée de la surface libre, des parois du récipient « mouillées » par le fluide, de la surface du jet jusqu'à sa section minimale S_f et enfin de S_f elle-même. La composante horizontale de la relation (5.12) s'écrit :

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho v_x (v_j n_j) \mathrm{d}S + \iint_{\mathcal{S}} p\, n_x \,\mathrm{d}S = 0. \tag{5.67}$$

La première intégrale vaut simplement $(\rho S_f v_f^2)$. La deuxième ne peut être calculée que dans le cas particulier d'un tube rentrant à l'intérieur du récipient (*ajutage de Borda*, représenté à la figure 5.9b). La pression p est partout égale à la pression hydrostatique, sauf au niveau de la surface latérale du jet et de sa section, où elle vaut p_0. Si p avait partout été égale à la pression hydrostatique :

$$p_{\text{hydro}} = p_0 + \rho g\,(z_0 - z)$$

on aurait obtenu une intégrale $\iint_{\mathcal{S}} p_{\text{hydro}}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ égale au poids $\mathbf{P}$ du fluide contenu dans $\mathcal{S}$ (z est la coordonnée verticale du point considéré). Donc, la composante suivant Ox de cette intégrale est nulle :

$$\iint_{\mathcal{S}} p_{\text{hydro}}\, n_x \,\mathrm{d}S = 0. \tag{5.68}$$

Comme p ne diffère de p_{hydro} que sur la partie $E'F'G'H'$ de la surface d'intégration où p est égal à p_0, on obtient :

$$\iint_{\mathcal{S}} p\, n_x \,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} p_{\text{hydro}}\, n_x \,\mathrm{d}S + \iint_{(E'F'G'H')} (p_0 - p_{\text{hydro}})\, n_x \,\mathrm{d}S$$

soit, en utilisant la relation (5.68) et l'équation donnant p_{hydro} :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} p\, n_x \,\mathrm{d}S &= p_0 S_0 - (p_0 + \rho g(z_0 - z))S_0 = p_0 S_0 - (p_0 + \rho g h)S_0 \\ &= -\rho g h S_0. \end{aligned} \tag{5.69}$$

La section S_0 de l'orifice est en effet égale à l'aire de la projection de la surface $E'F'G'H'$ sur un plan perpendiculaire à Ox ; on a supposé par ailleurs que la variation relative de $\rho\, g\,(z_0 - z)$ sur la section S_0 était négligeable. En reportant (5.69) dans l'équation (5.67), on obtient :

$$\rho\, S_f v_f^2 = \rho\, g h S_0. \tag{5.70}$$

Soit, en tenant compte de la valeur de la vitesse v_f donnée par la formule (5.66) :

$$S_f = \frac{S_0}{2}\cdot \tag{5.71}$$

Dans le cas d'un orifice percé directement dans la paroi (Fig. 5.9a), l'expérience montre que le rapport de la section contractée S_f à la section de l'orifice S_0 vaut environ 0,6. Cette valeur est plus grande que dans le cas du jet rentrant ; cela est dû au fait qu'il existe une dépression sur la paroi au voisinage du point C dans le cas de la figure (a). La force de réaction est donc plus grande que dans le cas de l'ajutage de Borda, et le jet, dont le débit équilibre cette réaction et qui a la même vitesse, a une section plus large.

Force exercée par le fluide sur le récipient

La force F exercée par le fluide sur l'ensemble du récipient est égale à l'intégrale des forces de pression sur la surface « mouillée » par le liquide. Pour l'évaluer, nous utilisons l'équation (5.69) et nous soustrayons de l'intégrale la composante horizontale des forces de pression sur la partie $E'F'G'H'$ de (S) correspondant au jet libre.

$$F_x = \iint_{(\text{parois})} p\, n_x\, \mathrm{d}S = \iint_S p\, n_x\, \mathrm{d}S - \iint_{(E'F'G'H')} p_0 n_x\, \mathrm{d}S \tag{5.72}$$

soit :

$$F_x = -(\rho\, S_f v_f^2 + p_0 S_0) = -(\rho\, g h + p_0) S_0. \tag{5.73}$$

Il n'est pas surprenant de voir apparaître la pression p_0 dans cette force : en effet, la pression au-dessus de la surface libre intervient nécessairement. En revanche, cette pression extérieure n'apparaît plus dans l'écriture du bilan de toutes les forces exercées sur l'ensemble des parois du récipient, le fluide extérieur (de l'air par exemple) exerçant la pression antagoniste p_0 sur la face *extérieure* du récipient.

5.4.3 Force sur les parois d'une conduite de révolution de section variable

Supposons la conduite de révolution autour d'un axe horizontal Ox, et terminée à chaque extrémité par un tronçon où la vitesse d'écoulement $\mathbf{v}$ est

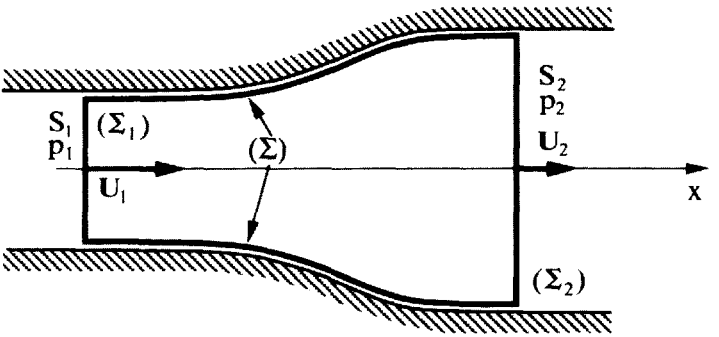


FIG. 5.10 – *Détermination de la force exercée sur les parois d'une conduite de révolution à partir du bilan de conservation de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle limité par l'ensemble des surfaces* Σ, Σ_1 *et* Σ_2.

parallèle à Ox (Fig. 5.10). Nous allons déterminer la composante, suivant Ox, des forces exercées sur les parois de la conduite. Choisissons un volume de contrôle fixe, limité par une surface de révolution (S) formée de deux sections normales à Ox (surfaces (Σ_1) et (Σ_2)) et de la portion de paroi située entre celles-ci (surface (Σ)).

Nous supposons l'écoulement stationnaire, ce qui permet d'utiliser la forme (5.12) de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. En projetant suivant l'axe Ox, nous obtenons :

$$\iint_S \rho\, v_x (v_j \cdot n_j)\, \mathrm{d}S + \iint_S p\, n_x \mathrm{d}S - \iint_S \sigma'_{xj} n_j\, \mathrm{d}S = 0. \tag{5.74}$$

Le terme de pesanteur a une projection nulle suivant la direction horizontale Ox et n'apparaît pas dans cette expression. L'intégrale contenant σ'_{xj} se réduit à la contribution de la paroi latérale (Σ) ; nous négligeons dans la suite ces contributions dues à la viscosité. Séparons, dans le terme $\iint_S p n_x\, \mathrm{d}S$, la contribution des parois du canal (surface (Σ)) de celle des sections (Σ_1) et (Σ_2). Notons $F_{px(\Sigma)}$ la composante suivant Ox de la résultante des forces de pression sur (Σ). On obtient :

$$F_{px(\Sigma)} - \iint_{\Sigma_1} p\, \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} p\, \mathrm{d}S - \iint_{\Sigma_1} \rho\, v_x^2\, \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} \rho\, v_x^2\, \mathrm{d}S = 0 \tag{5.75}$$

soit :

$$F_{px(\Sigma)} = \iint_{\Sigma_1} (p + \rho\, v_x^2) \mathrm{d}S - \iint_{\Sigma_2} (p + \rho\, v_x^2) \mathrm{d}S. \tag{5.76}$$

Dans cette expression, on peut remarquer qu'il apparaît, à côté des termes de pression p, des termes de la forme (ρv_x^2) qui correspondent à des contraintes

normales dues au mouvement du fluide ; elles représentent un flux dans la direction Ox, de la composante de la quantité de mouvement ρv_x suivant cette même direction, soit $v_x\,(\rho v_x)$. Pour achever la détermination de F, il suffit alors de connaître la répartition des pressions et des vitesses dans les sections (Σ_1) et (Σ_2).

Dans l'exemple de la conduite représentée par la figure 5.10, la section augmente progressivement de la valeur S_1 à la valeur S_2. On peut appliquer l'équation (5.37), et le gradient de pression transverse dans chacune des sections (Σ_1) et (Σ_2) se réduit au gradient de pression hydrostatique. Il ne contribue pas au mouvement du fluide et peut être négligé dans l'équation précédente. Supposons également les vitesses constantes et égales à U_1 et U_2 sur les sections, ce qui serait le cas pour un fluide de viscosité négligeable. L'équation (5.76) devient :

$$F = [p_1 S_1 + \rho U_1^2 S_1] - [p_2 S_2 + \rho U_2^2 S_2]. \tag{5.77}$$

On voit donc apparaître, en plus des forces de pression, un terme lié à la quantité de mouvement convectée par le fluide en écoulement. Écrivons maintenant la conservation de l'énergie en appliquant l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant. On obtient :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

soit :

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(U_1^2 - U_2^2\right). \tag{5.78}$$

Combinons les équations (5.77) et (5.78) avec la relation de conservation de la masse qui se traduit ici par :

$$U_2 = U_1 \frac{S_1}{S_2}\cdot \tag{5.79}$$

On obtient :

$$F = p_1(S_1 - S_2) - \frac{1}{2}\rho U_1^2 S_1 \left(2 - \frac{S_2}{S_1} - \frac{S_1}{S_2}\right) \tag{5.80}$$

soit :

$$F = p_1(S_1 - S_2) - \frac{1}{2}\rho U_1^2 S_1 \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right)^2 \cdot \tag{5.81}$$

Nous avons donc pu, en combinant les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, exprimer la force F simplement en fonction des variables p_1 et U_1, sans avoir besoin de calculer complètement le champ de vitesse de l'écoulement.

Le résultat précédent ne s'applique qu'approximativement aux fluides visqueux, car il néglige l'effet des forces de viscosité sur les parois. Une évaluation approchée reste toujours possible à condition de choisir comme vitesses U_1 et U_2 les valeurs sur l'axe du tube.

5.4.4 Ressaut hydraulique

Propriétés qualitatives des ressauts hydrauliques

Tout le monde a pu observer l'apparition d'un bourrelet d'eau de forme circulaire au fond d'un évier dans lequel coule l'eau d'un robinet. La figure 5.11a montre un exemple de ce type de bourrelet, appelé *ressaut*. Il sépare une zone centrale, où l'épaisseur du fluide est faible, d'une région périphérique, où la hauteur du fluide est plus importante. La limite entre les deux régions correspond au passage de la vitesse d'écoulement $U(x)$ d'une valeur supérieure à la vitesse locale des ondes de surface, à une valeur inférieure. Nous verrons au chapitre 6 que $c = \sqrt{gh}$ représente la vitesse locale de ces *ondes de gravité* à la surface d'un film de fluide d'épaisseur h ; dans le même temps, lorsque l'épaisseur croît, la vitesse du fluide décroît et celle des ondes augmente. La figure 5.11b représente le mascaret sur la Seine, à Quillebeuf, qui correspond à un ressaut hydraulique se formant lors de la rencontre du courant du fleuve avec la marée montante. La profondeur d'eau, assez peu importante dans le fleuve, est à l'origine du déferlement de l'onde de marée.

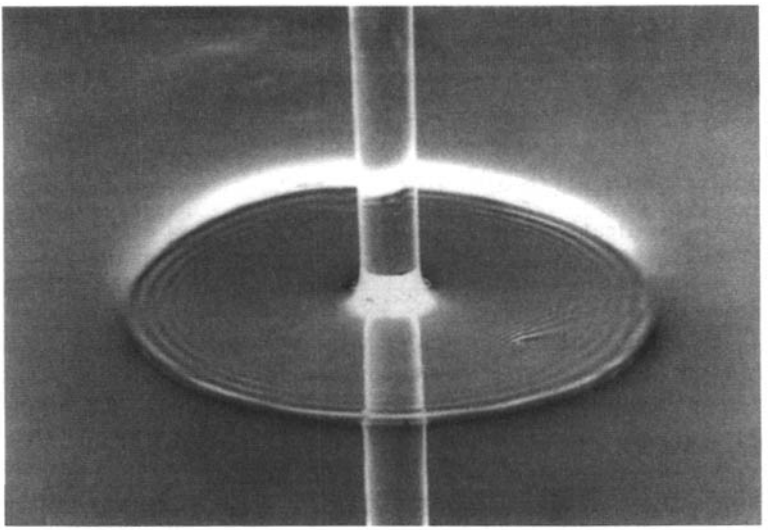
On caractérise quantitativement le phénomène par le rapport des vitesses du fluide et de celle de l'onde de surface, appelé *nombre de Froude* :

$$F_r = \frac{U(x)}{\sqrt{gh(x)}}.$$

Dans l'expérience de la figure 5.11a, le nombre de Froude passe d'une valeur supérieure à l'unité près du centre, à une valeur inférieure à la périphérie.

Ce phénomène est analogue à l'onde de choc qui se forme près d'un avion supersonique et qui correspond au passage de la vitesse de l'air d'une valeur supérieure à une valeur inférieure à celle du son. Le nombre de Mach, $M = v/c$, où c représente la vitesse du son, est l'analogue du nombre de Froude Fr. D'ailleurs, en plongeant une pointe dans la zone de faible épaisseur de la nappe liquide, on observe derrière l'obstacle la formation d'un « V » caractéristique ; l'angle de ce « V » dépend, comme pour les écoulements compressibles, du rapport entre la vitesse du fluide et celle des ondes de surface. Ainsi, on observe des ressauts hydrauliques liés aux ondes de gravité dans les déversoirs en aval des barrages (Fig. 5.12, cas n° II).

Enfin, une vague déferlante représente une version mobile de ce phénomène : le ressaut se déplace ici à la vitesse de la zone de déferlement ; il faut se placer dans un référentiel fixe par rapport à elle pour appliquer les modèles théoriques que nous allons développer.



(a)

Quillebeuf. – Le Mascaret

(b)

FIG. 5.11 – *(a) Formation d'un bourrelet de type « ressaut hydraulique » lorsqu'un jet d'eau rencontre un disque solide horizontal. La vitesse du liquide dans la partie centrale excède celle des ondes de surface, puis devient inférieure à celle-ci au-delà du bourrelet et jusqu'au bord du disque. On observe dans la partie centrale droite une ride en « V » ouvert vers l'extérieur, qui correspond à un effet d'onde de choc un peu comparable au « bang » supersonique d'un avion (document S. Middleman). (b) Observation du mascaret sur la Seine à Quillebeuf, résultant du ressaut hydraulique qui apparaît lorsque le courant d'un fleuve rencontre la marée montante. Ce phénomène n'est plus observable de nos jours.*

Couche liquide au-dessus d'un obstacle

Avant d'étudier la partie ressaut hydraulique de l'écoulement, représentons de façon simple l'écoulement au-dessus d'un barrage (Fig. 5.12).

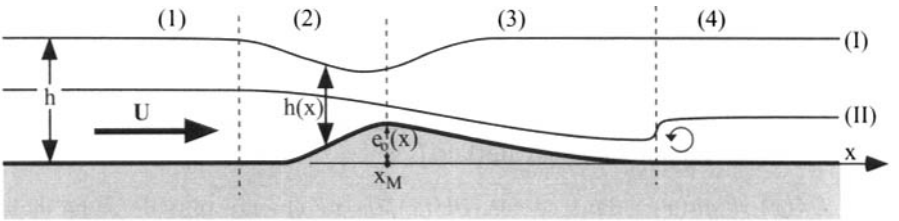


FIG. 5.12 – *Passage d'un écoulement liquide au-dessus d'un obstacle dans les deux cas du calcul. Cas I : nombre de Froude inférieur à 1 ; cas II : nombre de Froude supérieur à 1 : La zone (1) de faible vitesse est suivie d'une zone (2) d'accéleration, puis d'une zone (3) de grande vitesse en amant du ressaut et, enfin, d'une zone (4) de faible vitesse en aval du ressaut.*

Appelons h le niveau initial du fluide, $h(x)$ la variation avec la distance de l'épaisseur de la couche de fluide et $e_0(x)$ la hauteur du fond ; la pression à la surface est égale à la pression atmosphérique p_0. Supposons la vitesse uniforme dans toutes les sections verticales de l'écoulement ; on obtient les deux équations qui suivent en écrivant la conservation du débit et en appliquant l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant passant près de la surface :

$$Uh = U(x)\,h(x)$$

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2(x) + \rho g(h(x) + e_0(x)).$$

En dérivant ces deux équations par rapport à x, on obtient :

$$U(x)\frac{\partial h(x)}{\partial x} + h(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0$$

et :

$$\rho U(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x} + \rho g\frac{\partial h(x)}{\partial x} + \rho g\frac{\partial e_0(x)}{\partial x} = 0.$$

D'où :

$$\frac{1}{U(x)}\frac{\partial U(x)}{\partial x}(-gh(x) + U^2(x)) + g\frac{\partial e_0}{\partial x} = 0. \tag{5.82}$$

Supposons l'écoulement initialement assez lent et l'épaisseur assez grande pour que l'on ait :

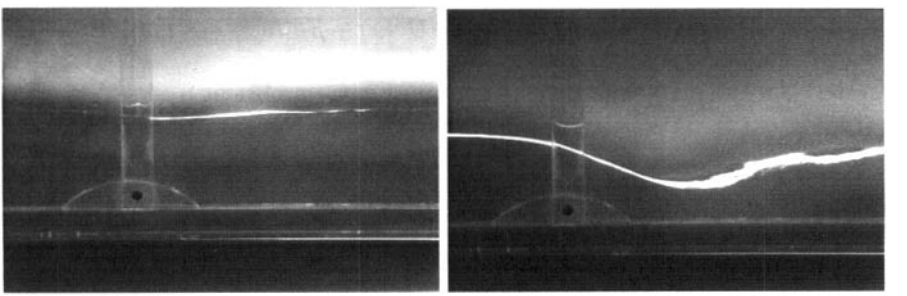
$$U^2 - gh < 0 \quad (\text{ou } Fr < 1).$$

On voit apparaître deux comportements possibles au moment où l'écoulement passe au-dessus du point x_M où la hauteur de fond atteint son maximum e_{oM} tel que $(\partial e_0/\partial x) = 0$. L'équation (5.82) peut en effet être vérifiée de deux manières :

(i) $\partial U(x)/\partial x = 0$; dans ce cas on a également $(\partial h(x)/\partial x) = 0$, d'après l'équation de conservation de la masse (cas n° I de la figure 5.12 et photo (a) de la figure 5.13). Après passage par le point de hauteur de fond maximale, l'épaisseur de la couche fluide augmente à nouveau, et la vitesse rejoint sa valeur initiale U ;

(ii) $U^2(x) = gh(x)$; dans ce cas, $\partial U(x)/\partial x$ ne change plus de signe et la vitesse continue d'augmenter (et l'épaisseur de fluide de diminuer), après passage par le point x_M. L'équation (5.82) peut donc continuer d'être vérifiée car $U^2(x) - gh(x)$ devient positif et $(\partial h_0/\partial x)$ change également de signe en passant par le point $x = x_M$ (cas n° II de la figure 5.12 et photo (b) de la figure 5.13).

On voit le rôle clé joué par le nombre de Froude dans ces phénomènes. Dans le cas (i), le nombre de Froude reste toujours inférieur à l'unité ; dans le cas (ii), il augmente et passe par la valeur 1 *exactement* au point x_M puis devient supérieur à 1 (écoulement supercritique). Le retour du fluide à un écoulement calme sous forte épaisseur se fait ensuite de manière brusque par un ressaut hydraulique comme le montrent les figures 5.12 et 5.13 (nous discuterons ce phénomène un peu plus loin). On peut observer le passage d'un comportement à l'autre en augmentant progressivement la vitesse du fluide à épaisseur constante jusqu'à ce qu'on atteigne la valeur $Fr = 1$ à l'abscisse x_M.



(a) (b)

FIG. 5.13 – *Écoulement d'un liquide au-dessus d'un obstacle dans un canal rectangulaire ; (a) cas où le nombre de Froude reste partout plus petit que 1 ; (b) cas où l'écoulement est supercritique en aval du point de hauteur maximale du fond (clichés M. Devillers, ENSTA).*

La discussion précédente suppose qu'il y a deux valeurs différentes possibles de vitesse et d'épaisseur de fluide, pour une même hauteur $e_0(x)$ du fond à débit fixé : l'une correspond à un nombre de Froude Fr supérieur à 1, l'autre à un nombre Fr' inférieur à 1. Dans le cas particulier $e_0 = 0$ (zone éloignée en aval de l'obstacle, où U' est la vitesse et h' l'épaisseur de liquide), on trouve une deuxième solution $Fr' \neq Fr$ telle que :

$$Fr^{1/3} Fr'^{1/3} (Fr^{1/3} + Fr'^{1/3}) = 2. \tag{5.83}$$

Si Fr est inférieur à 1, cette équation ne peut effectivement être vérifiée que si Fr' est supérieur à 1 ; en effet, dans le cas contraire, la somme est inférieure à 2 et les deux facteurs du produit sont plus petits que 1.

Démonstration Écrivons l'équation (5.82) en éliminant la hauteur $h(x)$ à l'aide de la relation $Q = U(x)h(x)$. On obtient :

$$gQ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{U(x)}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial [U(x)]^2}{\partial x} + g\frac{\partial e_0(x)}{\partial x} = 0$$

soit, après intégration entre deux points situés loin en amont et en aval de l'obstacle où les vitesses sont U et U' :

$$gQ\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{U'}\right) + \frac{1}{2}(U^2 - U'^2) = 0.$$

Cette équation est vérifiée lorsque $U = U'$, ou lorsque :

$$gQ = UU'\frac{U + U'}{2} \cdot \tag{5.84}$$

En récrivant cette dernière expression à l'aide des nombres de Froude mis sous la forme :

$$Fr = \frac{U^2}{gh} = \frac{U^3}{g\,(Uh)} \qquad \text{et} \qquad Fr' = \frac{U'^2}{gh'} = \frac{U'^3}{g\,(U'h')}$$

et en utilisant les relations $Q = Uh = U'h'$, on obtient l'équation (5.83) après simplification par gQ.

Au début de la section 5.4.4, nous avons souligné l'analogie étroite de ces problèmes avec les écoulements compressibles. Le dispositif équivalent au problème que nous venons de décrire est la tuyère convergente–divergente (dite de Delaval) représentée à la figure 5.14.

Pour les faibles débits, la vitesse de l'écoulement reste inférieure à la vitesse du son dans toute la tuyère, et est maximale au point de plus faible section – le col – (écoulement équivalent au cas (a) de la figure 5.13). À partir du moment où la vitesse devient égale à la vitesse du son en ce point ($M = 1$), elle continue à augmenter avec la distance, et devient supersonique en aval ; cette augmentation de vitesse est permise par une diminution continue de la pression du gaz qui permet de conserver le débit massique. Plus en aval, il apparaît une onde de choc qui permet d'effectuer la transition vers les zones de plus forte pression, après la sortie de la tuyère où le nombre de Mach est plus petit que 1. Cette onde de choc est l'analogue du ressaut hydraulique montré à la figure 5.13, et que nous allons étudier maintenant.

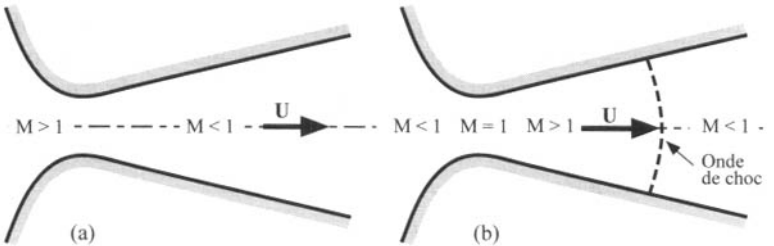


FIG. 5.14 – *Écoulement d'un fluide compressible dans une tuyère convergente–divergente ; (a) cas où l'écoulement reste subsonique dans toute la tuyère ; (b) cas où la vitesse de l'écoulement atteint la vitesse du son au point d'étranglement maximal. La ligne en tirets représente l'onde de choc.*

Ressaut hydraulique

L'utilisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement va nous permettre d'établir une relation entre les vitesses et les hauteurs en amont et en aval d'un ressaut. À la figure 5.15, on a schématisé le ressaut hydraulique avec deux sections où l'écoulement est parallèle et uniforme, de vitesse U et U' en amont et en aval respectivement. Nous négligerons dans ce problème l'effet de la viscosité.

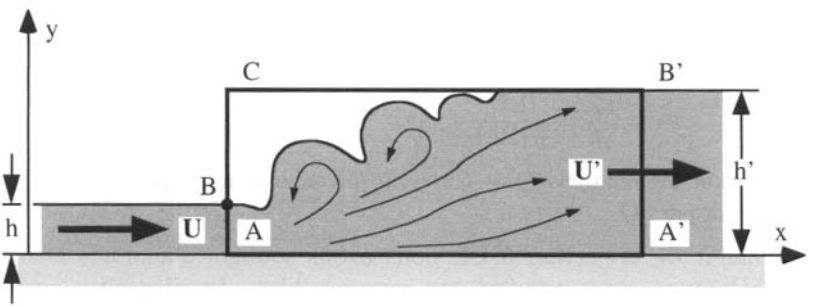


FIG. 5.15 – *Ressaut hydraulique. La vitesse du fluide en amont du ressaut est supérieure à la célérité $\sqrt{gh}$ des ondes de surface, tandis que la vitesse U' en aval lui est inférieure. On a représenté le volume de contrôle $ABCB'A'$ à travers lequel est évalué le bilan de la quantité de mouvement.*

Comme précédemment, nous utilisons l'équation (5.12) qui exprime la conservation de la quantité de mouvement en supposant l'écoulement stationnaire. Nous choisissons un volume de contrôle limité par la surface S de trace $ABCB'A'A$ dans le plan de figure, et d'épaisseur unité dans la direction perpendiculaire. Notons qu'une partie du volume de contrôle est dans l'air, et de ce fait qu'il est soumis à la pression atmosphérique p_0. Supposons la

vitesse d'écoulement uniforme et égale à U et U' dans les sections AB et $A'B'$ du contour, qui sont les seules à travers lesquelles le flux d'écoulement est non nul ; on obtient :

$$\iint_S \rho\, v_x (v_j n_j) \mathrm{d}S = \rho U'^2 h' - \rho U^2 h. \tag{5.85}$$

Comme précédemment, on détermine la pression p sur AB et $A'B'$ à partir des relations (5.37) :

$$p = p_0 + \rho\, g\, (h - z) \tag{5.86a}$$

$$p' = p_0 + \rho\, g\, (h' - z). \tag{5.86b}$$

En ajoutant un terme $-p_0\,(h' - h)$, correspondant à l'intégrale de p_0 sur la section BC, on obtient :

$$\iint_S p\, n_x\, \mathrm{d}S = p_0\,(h - h') - \int_0^h (p_0 + \rho\, g\,(h - z))\mathrm{d}z$$
$$+ \int_0^{h'} (p_0 + \rho\, g\,(h' - z))\mathrm{d}z = \frac{\rho\, g}{2}(h'^2 - h^2). \tag{5.87}$$

L'équation (5.12) s'écrit donc, compte tenu des équations (5.85) et (5.87), et en négligeant la viscosité :

$$(U'^2 h' - U^2 h) + \frac{g}{2}(h'^2 - h^2) = 0. \tag{5.88}$$

L'égalité des débits en amont et en aval du ressaut (conservation de la masse) donne, par ailleurs :

$$U' h' = U h. \tag{5.89}$$

En utilisant (5.89), pour éliminer U' (ou U) dans l'équation (5.88), on obtient :

$$U' = \sqrt{g \frac{h}{h'} \frac{(h + h')}{2}} \tag{5.90a}$$

$$U = \sqrt{g \frac{h'}{h} \frac{(h + h')}{2}}\,. \tag{5.90b}$$

Par une élévation au carré suivie d'une soustraction, on trouve que ces deux expressions vérifient les relations :

$$U' < \sqrt{g h'} \tag{5.91a}$$

et :

$$U > \sqrt{g h} \tag{5.91b}$$

dès lors que h est plus petit que h'. On vérifie donc bien que l'écoulement est supercritique (vitesse supérieure à la vitesse des ondes de surface) dans la partie du ressaut où l'épaisseur est la plus mince, et sous-critique dans l'autre. Physiquement, ce résultat signifie que le ressaut va être une structure stable. Les ondelettes qui s'en échapperaient vers l'amont dans la zone supercritique en emmenant une partie de l'énergie seront ramenées par l'écoulement, qui est plus rapide qu'elles. Celles qui seraient entraînées vers l'aval par l'écoulement seront assez rapides pour remonter le courant et retourner dans le ressaut.

Rapport entre les niveaux de fluide et les vitesses de part et d'autre du ressaut

Afin de déterminer le rapport h'/h, nous développons l'équation (5.90b) sous la forme :

$$gh'^2 + ghh' - 2U^2h = 0. \tag{5.92}$$

En prenant la racine positive de cette équation du second degré en h, on trouve :

$$\frac{h'}{h} = \frac{U}{U'} = \frac{-gh + \sqrt{(gh)^2 + 8U^2gh}}{-gh} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8Fr}}{2} \tag{5.93}$$

Fr est le nombre de Froude de l'écoulement amont. On vérifie de nouveau que, si h'/h est supérieur à 1, cela implique que Fr soit plus grand que 1, et que l'écoulement soit supercritique en amont du ressaut. Remarquons également que pour $Fr = 1$, on trouve $h' = h$, ce qui correspond à la limite d'un ressaut d'amplitude infiniment faible où les deux vitesses sont voisines de $\sqrt{gh}$.

5.4.5 Une autre application : vanne de décharge dans un canal

En intercalant une paroi dans un canal à surface libre de section rectangulaire (Fig. 5.16), la hauteur d'eau passe d'une valeur h à une valeur plus faible h'. On cherche la force exercée par le fluide sur la paroi. Ce problème est très proche du phénomène du ressaut hydraulique discuté précédemment : dans les deux cas, on a transition brusque entre deux canaux à surface libre où les niveaux sont différents. Cependant, alors qu'au passage par le ressaut hydraulique, on a conservation de la quantité de mouvement, une partie de celle-ci est transmise ici à la vanne de décharge sous la forme d'une force. On suppose de nouveau la vitesse uniforme en amont et en aval de la vanne avec des valeurs U et U'. On néglige également les forces de frottement visqueux sur le fond du canal. On utilise la même équation de conservation de la masse :

$$Uh = U'h'. \tag{5.94}$$

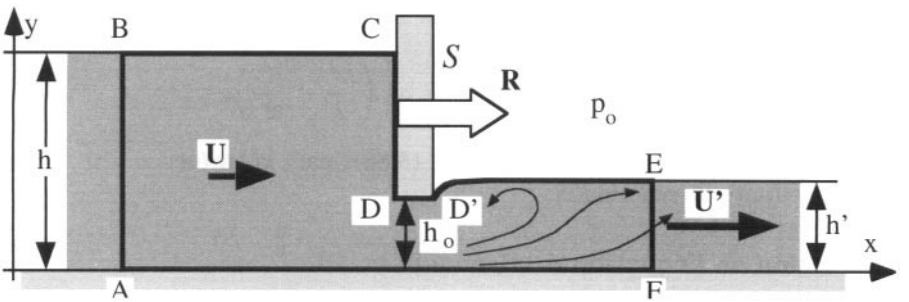


FIG. 5.16 – *Vanne de décharge dans un canal à surface libre.*

Force de réaction sur la vanne

Écrivons, sous forme intégrale, la conservation de la composante suivant Ox de la quantité de mouvement. Comme volume de contrôle, nous choisissons le cylindre de profondeur unité perpendiculairement à la figure, et dont la base est la courbe : $ABCDD'EFA$ (nous noterons $\mathcal{S}$ la surface de ce cylindre). À l'exception de deux sections (AB et EF) perpendiculaires à l'écoulement dans la zone où il est uniforme, le contour suit des lignes de courant au fond du canal (AF), le long de la vanne (CDD') et la surface libre (BC et $D'E$). Utilisons la composante suivant Ox de l'équation (5.12) : le terme convectif $\iint_{\mathcal{S}} \rho v_x (v_j n_j) \mathrm{d}S$ n'est différent de zéro que sur les portions de contour effectivement traversées par le courant fluide, c'est-à-dire sur AB et EF. On a donc :

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho\, v_x\, (v_j \cdot n_j) \mathrm{d}S = \rho\, U(-U)h + \rho\, U'(U')h'. \tag{5.95}$$

Calculons le terme de pression de l'équation (5.12), $\iint_{\mathcal{S}} p n_x \,\mathrm{d}S$. Les zones AF et BC ne contribuent pas à cette intégrale, car la force de pression est verticale. L'intégrale de p sur la zone CD est égale à la somme de la force R *globale* sur la vanne (par unité de longueur suivant Oz), et de l'effet de contre-pression $p_0(h - h_0)$ dû à la pression atmosphérique p_0, exercée du côté exposé à l'air. La composante horizontale correspondant à $D'E$ est le produit de $-p_0$ par l'extension verticale $(h' - h_0)$ de cette partie du contour. Calculons enfin les intégrales $-\int_A^B p\,\mathrm{d}S$ et $\int_E^F p\,\mathrm{d}S$. La pression p vérifie sur AB et EF les mêmes relations (5.86a & b) que dans le cas du ressaut hydraulique. La seule contribution non nulle au terme de contraintes visqueuses $-\iint_{\mathcal{S}} \sigma'_{xj} n_j \,\mathrm{d}S$ est la force de frottement sur le fond AF du canal. Nous la supposons négligeable. On en déduit :

$$\begin{aligned} &-\rho\, U^2 h + \rho\, U'^2 h' + R + p_0\,(h - h_0) - p_0\,(h' - h_0) \\ &\qquad - \int_0^h (p_0 + \rho g\,(h - y))\mathrm{d}y + \int_0^{h'} (p_0 + \rho g\,(h' - y))\mathrm{d}y = 0. \end{aligned} \tag{5.96}$$

Soit, après intégration et sommation :

$$R = \rho\,(U^2 h - U'^2 h') + \rho\, g \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h'^2}{2}\right) \cdot \tag{5.97}$$

Cette équation diffère de l'équation (5.88) par la présence du terme supplémentaire de réaction R.

Utilisation de l'équation de Bernoulli

Appliquons la relation de Bernoulli en supposant que la vitesse est uniforme et égale à U et U' dans les sections AB et EF. On utilise la ligne de courant proche du fond ($z = 0$), en utilisant pour la pression les valeurs données par les relations (5.86a et b) ; on obtient :

$$p_0 + \rho\, g h + \frac{1}{2}\rho\, U^2 = p_0 + \rho\, g h' + \frac{1}{2}\rho\, U'^2 \tag{5.98}$$

soit :

$$g\,(h - h') = \frac{U'^2 - U^2}{2} \cdot \tag{5.99}$$

En exprimant U' en fonction de U, h et h' à l'aide l'équation de conservation de la masse (5.94), on obtient la relation :

$$2gh'^2 - U^2 h' - U^2 h = 0. \tag{5.100}$$

En résolvant cette équation du second degré en h', et en ne conservant que la racine positive, on obtient :

$$\frac{h'}{h} = \frac{U^2}{4gh}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gh}{U^2}}\right) \cdot \tag{5.101}$$

Soit, en faisant intervenir le nombre de Froude $Fr = U^2/gh$ de l'écoulement amont :

$$\frac{h'}{h} = \frac{Fr}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{Fr}}\right) \cdot \tag{5.102}$$

L'écoulement présent dans la vanne de décharge correspond à un niveau aval h' plus faible que le niveau amont h ; en reportant cette condition dans l'équation (5.102), on obtient la condition :

$$Fr < 1. \tag{5.103}$$

On obtient de manière similaire la condition $Fr' > 1$ en éliminant U au lieu de U' de l'équation (5.99). Ainsi, cet écoulement n'est obtenu que si le nombre de Froude amont Fr est inférieur à l'unité et le nombre de Froude aval Fr' supérieur à l'unité. La vitesse de l'écoulement amont doit donc être inférieure à la vitesse des ondes de gravité à la surface du fluide.

Chapitre 6

Écoulements potentiels

L'ÉTUDE *du fluide idéal (ou parfait) « l'eau sèche », tel que le baptise R. Feynman dans son Cours de physique – est une partie essentielle de la mécanique des fluides. En mécanique du point matériel, les lois du mouvement peuvent s'exprimer, en l'absence de frottements, sous forme de lois de conservation. De même, l'absence de viscosité en mécanique des fluides a permis, au chapitre 5, de simplifier les lois de conservation pour l'énergie et la quantité de mouvement, et de résoudre directement des problèmes sans avoir recours à une connaissance détaillée des mouvements locaux. Cette absence de viscosité a pour conséquence indirecte la permanence du caractère irrotationnel du champ de vitesse qui décrit l'écoulement d'un fluide parfait. Nous justifions ce résultat dans l'introduction (section 6.1) de ce chapitre, où nous donnons également les cas dans lesquels la théorie potentielle des écoulements est applicable. Nous introduisons ensuite le potentiel des vitesses ainsi que ses propriétés (section 6.2) et nous en donnons quelques exemples. Puis, nous traitons de manière plus générale le problème de l'écoulement potentiel autour d'un obstacle de forme quelconque (section 6.3). Nous étudions ensuite le problème des ondes linéaires à la surface d'un fluide qui constitue un cas particulier d'écoulement potentiel (section 6.4). L'analogie des écoulements potentiels avec l'électromagnétisme est étudiée à la section suivante 6.5. Puis, nous introduisons le potentiel complexe (section 6.6) et nous l'illustrons par quelques exemples. Enfin, l'utilisation de la méthode de la transformation conforme pour la détermination d'écoulements est présentée à travers deux exemples.*

6.1 Introduction

Le mouvement des fluides parfaits (non visqueux) est décrit par l'équation d'Euler que nous avons établie à la section 4.2.3 du chapitre 4 (Éq. (4.31)) :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},\, t)}{\partial t} + \rho\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v}(\mathbf{r},\, t) = \rho\, \mathbf{f} - \mathbf{grad}\, p. \tag{6.1}$$

Une des propriétés clés de ces fluides est la possibilité d'y induire des écoulements qui restent en permanence irrotationnels, c'est-à-dire, tels que $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$ en tous points du fluide. Les écoulements caractérisés par cette relation sont dits *écoulements potentiels*, car le champ de vitesse dérive alors d'un *potentiel de vitesse* Φ avec :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,\Phi(\mathbf{r}). \tag{6.2}$$

En effet, nous montrerons au chapitre 7 (sections 7.2.1 et 7.3.1) que, si l'écoulement est irrotationnel à un instant donné (par exemple si le fluide est initialement au repos avec $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv 0$), il le restera ensuite à tout instant. Cette permanence du caractère irrotationnel du champ de vitesse d'un fluide parfait est une conséquence de l'absence de viscosité, assortie des hypothèses qui permettent d'appliquer le théorème de Bernoulli (forces extérieures en volume dérivant d'un potentiel, incompressibilité). Rappelons que nous avons établi ce théorème au chapitre 5 (section 5.3.2) avec, pour un écoulement potentiel :

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho\frac{v^2}{2} + p + \rho\,\varphi = \text{constante dans le volume de l'écoulement}$$

où φ est le potentiel dont dérivent les forces en volume. Cette équation décrit l'évolution temporelle du potentiel des vitesses Φ : elle suggère donc la permanence des écoulements potentiels. En effet, si on connaît le potentiel à un instant initial (par exemple, si le fluide est au repos), il sera possible de le déterminer à tout instant ultérieur par intégration. Remarquons que la détermination mathématique du champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ est analogue à celle du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dans un problème d'électrostatique, ou d'électrocinétique à fréquence suffisamment faible pour que $\mathbf{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. La relation (6.2) est ainsi analogue, au signe près, à la relation entre le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et le potentiel $V(\mathbf{r})$.

En fait, on peut appliquer les lois des écoulements potentiels même si la viscosité n'est pas rigoureusement nulle : les conditions sont les mêmes que celles que nous avons écrites au chapitre 4 (section 4.2.3).

Les solutions potentielles s'appliquent aussi à certains écoulements non stationnaires, même lorsque leur nombre de Reynolds est faible. Ce sont par exemple les écoulements induits par le mouvement alternatif à fréquence élevée ($\omega = 2\pi/T$) d'un objet de taille L ; ce sera également le cas dans la phase initiale de faible durée T du mouvement accéléré d'un objet lâché dans un liquide. Dans les deux cas, la diffusion de la vorticité reste limitée à une faible distance de l'objet (proportionnelle à $\sqrt{\nu T}$), et l'écoulement extérieur reste celui d'un fluide parfait. Nous avons décrit de tels exemples au chapitre 2 (section 2.1.2) et au chapitre 4 (section 4.5.4).

Enfin, un cas particulier d'écoulement potentiel est celui de l'hélium superfluide. En dessous d'une température critique $T_\lambda = 2,17$ K, la viscosité de l'isotope 4 de l'hélium liquide chute brusquement à zéro. Il est possible d'induire des écoulements permanents tels qu'aucune diminution de la vitesse

ne soit perceptible pendant plusieurs jours ! Nous donnons à la fin du présent chapitre quelques propriétés de ce fluide ; nous discuterons également, en annexe au chapitre 7, les caractéristiques des écoulements superfluides, qui satisfont la condition d'irrotationalité sauf au niveau de lignes singulières le long de l'axe de tourbillons.

6.2 Définitions, propriétés et exemples d'écoulements potentiels

6.2.1 Caractéristiques et exemples de potentiels de vitesse

Si on suppose l'écoulement incompressible (relation (3.12)), la relation (6.2) devient :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}[\mathbf{grad}\, \Phi(\mathbf{r})] = \Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0. \tag{6.3}$$

En électrostatique, ce cas correspond à un champ obtenu en l'absence de charges libres. La recherche du champ de vitesse vectoriel se ramène à celle des solutions potentielles scalaires de l'équation de Laplace ; nous bénéficions pour cela de tout l'arsenal des méthodes développées en électrostatique (nous avons déjà mentionné cette équivalence au chapitre 3 (section 3.3.3)).

Les *conditions aux limites* portent sur la composante normale $\mathbf{v}_n$ de la vitesse relative par rapport aux parois solides. L'absence de débit de fluide à travers une paroi immobile S impose la condition :

$$[v_n]_S = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right]_S = 0. \tag{6.4}$$

À l'interface S entre deux fluides parfaits 1 et 2, la condition aux limites $v_{n1} = v_{n2}$ s'exprime par :

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right]_S = \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right]_S. \tag{6.5}$$

Il n'y a pas de condition aux limites sur la composante tangentielle de la vitesse en raison de l'absence de forces de viscosité : c'est en effet la viscosité qui impose l'égalité de ces composantes dans les fluides réels, comme nous l'avons vu au chapitre 4 (section 4.3.1).

6.2.2 Unicité du potentiel des vitesses

Là encore, nous allons retrouver les démonstrations classiques d'électrostatique. Dans un volume de fluide *simplement connexe* (Fig. 6.1a), il existe un seul champ de vitesse, potentiel et incompressible, qui correspond à des composantes de vitesse normales données sur les surfaces solides et à une vitesse donnée à l'infini.

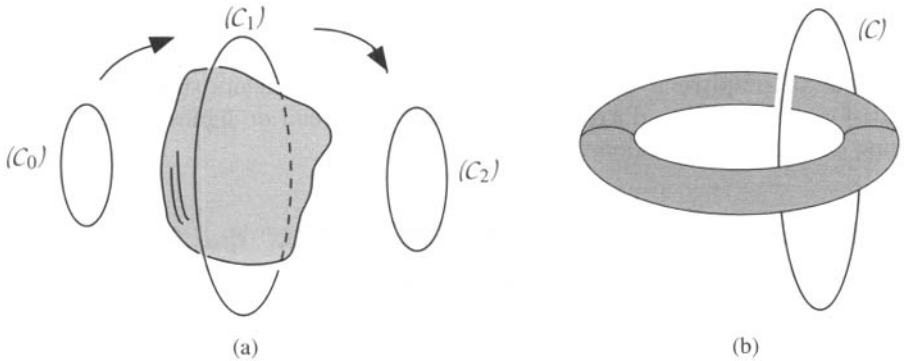


FIG. 6.1 – *(a) Exemple de volume de fluide simplement connexe : l'aire des courbes (C) peut être rendue nulle par déformation continue sans couper la surface solide. (b) Volume de fluide doublement connexe : on ne peut rendre nulle l'aire de la courbe (C) par déformation continue de celle-ci.*

Démonstration Soient deux champs de vitesse $\mathbf{v}_1 = \mathbf{grad}\,\Phi_1$ et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{grad}\,\Phi_2$ correspondant aux mêmes conditions aux limites. Montrons que l'intégrale $\iiint(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2\,\mathrm{d}\tau$ prise sur tout le volume de l'écoulement est nulle. Cela entraînera que les champs de vitesse $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont identiques. Notons $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ et $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2\,\mathrm{d}\tau &= \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{v}\cdot(\mathbf{grad}\,\Phi)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \iint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\mathbf{v}\Phi)\,\mathrm{d}\tau - \iiint_{\mathcal{V}} \Phi \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

La deuxième intégrale au second membre est nulle car $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. La première se transforme en intégrale de surface sur les parois solides et à l'infini :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\mathbf{v}\Phi)\,\mathrm{d}\tau = \iint_{\mathcal{S}} \Phi\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

L'intégrale est nulle sur les surfaces solides, d'après la condition aux limites sur la composante normale de la vitesse qui entraîne que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$. Elle est aussi nulle à l'infini car, comme nous le verrons à la section 6.3.2 du présent chapitre, l'influence sur le champ de vitesse de la présence des obstacles décroît comme $1/r^3$ avec la distance r à ceux-ci ; par suite, l'intégrale de ces termes sur une surface sphérique d'aire proportionnelle à r^2 tend vers 0 à grande distance.

Une méthode similaire à celle qui vient d'être utilisée permet de démontrer que le champ de vitesse de cet écoulement est celui qui minimise l'énergie cinétique totale, parmi ceux vérifiant $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, ainsi que les conditions aux limites pour la vitesse sur les parois et à l'infini.

Le volume de fluide sera *multiplement connecté* pour des parois solides dont une des dimensions est infinie (par exemple un cylindre infiniment allongé),

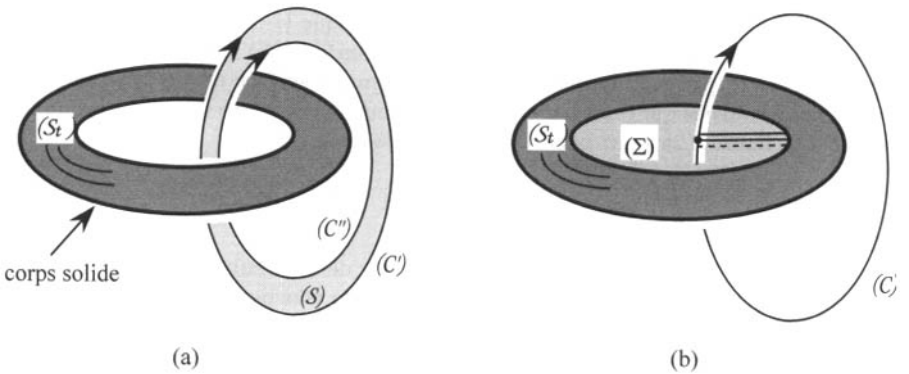


FIG. 6.2 – *Géométrie d'écoulement utilisée pour la démonstration de l'unicité des solutions de l'équation de Laplace, dans le cas d'un volume de fluide doublement connexe. (a) Égalité des circulations de la vitesse le long des courbes $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C}'')$. La surface $(\mathcal{S})$ s'appuie sur les deux courbes $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C}'')$. (b) Calcul de l'intégrale de $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2$ sur le volume du fluide dont on exclut le volume infinitésimal situé entre les deux surfaces Σ^+ et Σ^-, infiniment proches de part et d'autre de (Σ) (pour plus de clarté, on n'a représenté que les intersections de ces deux surfaces avec la surface s'appuyant sur le contour $(\mathcal{C})$.*

ou pour des parois de géométrie torique (Figs. 6.1b et 6.2). Dans ces deux cas, on peut tracer une courbe fermée $(\mathcal{C})$ *entièrement contenue dans le fluide*, dont on ne peut pas rendre nulle l'aire en la déformant continûment. Dans ce cas, on ne peut définir le potentiel de vitesse Φ de manière non ambiguë, car la circulation de la vitesse le long du contour $(\mathcal{C})$:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{grad}\, \Phi) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

peut prendre une valeur finie Γ quelconque.

Démonstration Limitons-nous à une géométrie telle que celle représentée à la figure 6.2. On suppose que le volume de fluide contient un solide en forme de tore de surface extérieure $(\mathcal{S}_t)$. Analysons le calcul de Φ à partir de l'intégrale de la vitesse le long d'une courbe fermée $(\mathcal{C})$ (Fig. 6.2b).

Montrons d'abord que, bien que l'écoulement soit potentiel et que la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide soit bien définie en tout point, sa circulation $\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dl}$ le long de la courbe $(\mathcal{C})$ n'est plus nécessairement nulle. Appliquons le théorème de Stokes sous la forme :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dl} = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{rot}\, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S.$$

Cette expression relie la circulation de la vitesse $\mathbf{v}$ le long de la courbe $(\mathcal{C})$ au flux de $\mathbf{rot}\, \mathbf{v}$ à travers une surface $(\mathcal{S})$ s'appuyant sur cette courbe. Pour que $(\mathcal{S})$ soit

complètement incluse dans le fluide, il faudra, soit que le chemin d'intégration $(\mathcal{C})$ n'entoure pas la surface torique $(\mathcal{S}_t)$, soit que la surface $(\mathcal{S})$ soit comprise entre les deux courbes $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C}'')$ entourant toutes les deux la surface $(\mathcal{S}_t)$ (c'est l'ensemble de ces deux courbes qui représente alors le contour $(\mathcal{C})$). C'est ce dernier cas qui est réalisé à la figure 6.2a pour la surface $(\mathcal{S})$. On a alors :

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{C}''} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dl} - \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dl} = 0.$$

On ne peut donc dans ce cas déterminer la valeur de la circulation $\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dl}$; on a seulement montré qu'elle était la même pour deux courbes telles que $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C}'')$ entourant une fois le tore $(\mathcal{S}_t)$ dans le même sens.

Si Γ est différent de zéro, on ne peut définir de fonction potentiel Φ univaluée. En effet, l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dl}$ vérifie :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dl} = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{grad}\,\Phi)\cdot\mathbf{dl} = \delta\Phi = \Gamma$$

où $\delta\Phi$ est la variation globale de Φ lorsqu'on parcourt complètement la courbe $(\mathcal{C})$ sur toute sa longueur. Le fait que $\delta\Phi$ soit différent de zéro signifie que la fonction Φ est multivaluée et définie à Γ près : on en tient compte en supposant qu'il y a sur la courbe $(\mathcal{C})$ un point où la fonction est discontinue et varie de $+\Gamma$ ou $-\Gamma$ suivant le sens de passage. Comme la position de ce point est arbitraire, on suppose que la discontinuité a lieu pour toutes les courbes à leur point d'intersection avec une même surface (Σ) bloquant le passage à l'intérieur du tore (la trace de (Σ) est représentée en gris léger sur la figure 6.2b). Cette approche est similaire à celle utilisée pour définir un angle polaire de repérage dans un plan.

Démontrons maintenant qu'il y a un seul champ de vitesse potentiel correspondant à une valeur de Γ donnée. Calculons pour cela l'intégrale $\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2\,\mathrm{d}\tau$ sur un volume $(\mathcal{V})$ *doublement connecté* (Fig. 6.2b), limité par la surface $(\mathcal{S}_t)$ et deux surfaces d'intégration supplémentaires (Σ^+) et (Σ^-) : (Σ^+) et (Σ^-) sont supposées infiniment proches de (Σ) et situées de part et d'autre. Reprenons la même démarche que pour le cas d'un volume simplement connecté, on a :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2\,\mathrm{d}\tau = \iint_{\mathcal{S}} (\Phi_1 - \Phi_2)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

La surface d'intégration limitant le volume $(\mathcal{V})$ est constituée des surfaces $(\mathcal{S}_1)$, (Σ^+) et (Σ^-). Comme $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ont une composante normale nulle sur $(\mathcal{S}_t)$, seules interviendront les intégrales sur les surfaces (Σ^+) et (Σ^-). $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont continues sur la surface (Σ) et ont donc la même valeur sur (Σ), (Σ^+) et (Σ^-). Donc :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2\,\mathrm{d}\tau = \iint_{\Sigma} (\Phi_{1+} - \Phi_{1-} - \Phi_{2+} + \Phi_{2-})(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

Par ailleurs la différence $\Phi_+ - \Phi_-$ entre les valeurs de Φ en deux points correspondants des surfaces (Σ^+) et (Σ^-), est égale à Γ. On a donc :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2\,\mathrm{d}\tau = \iint_{\Sigma} (\Gamma_1 - \Gamma_2)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = (\Gamma_1 - \Gamma_2)(Q_1 - Q_2)$$

où Q_1 et Q_2 représentent les flux des deux champs de vitesse à travers la surface (Σ). Il suffit donc d'imposer, en plus des conditions aux limites de vitesse normale nulle

aux parois, la valeur de la circulation Γ pour assurer l'unicité de la solution : en effet, si $\Gamma_1 = \Gamma_2$, on a $\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \, \mathrm{d}\tau = 0$ et $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Remarque Le problème de géométries doublement connexes se retrouve en magnétisme des courants. La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé qui entoure un fil infiniment long ou une boucle, parcourus par un courant, est indépendante du contour d'après le théorème d'Ampère (pour un nombre donné de tours autour du fil ou de traversées de la boucle dans une même direction).

6.2.3 Potentiels des vitesses des écoulements élémentaires et combinaison des fonctions potentiel

Nous allons maintenant étudier quatre écoulements élémentaires : l'écoulement uniforme, la source, le tourbillon et le dipôle. Nous analyserons ensuite comment les champs de vitesse de ces écoulements simples peuvent être combinés pour résoudre des problèmes plus complexes. Nous donnerons enfin quelques exemples de champs de vitesse autour d'objets de forme simple (section 6.2.4). Comme nous avons affaire à des fluides incompressibles, nous déterminerons également la fonction de courant de ces écoulements (elle a été définie à la section 3.4 du chapitre 3). Un tableau des potentiels des vitesses et des fonctions de courant pour les écoulements les plus classiques est présenté à la fin de ce chapitre.

Écoulement parallèle uniforme

Considérons l'écoulement uniforme de vitesse U dans la direction x (Fig. 6.3), dont les composantes de vitesse s'écrivent :

$v_x = U =$ constante,

$v_y = 0$ *dans le cas d'un écoulement à deux dimensions.*

et :

$v_z = v_y = 0$,

$v_x = U =$ constante *dans le cas d'un écoulement à trois dimensions.*

À *deux dimensions*, on a, d'après les équations (3.18) du chapitre 3 :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x = U \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_y = 0$$

d'où

$$\Phi = U\,x \tag{6.6a}$$

et :

$$\Psi = U\,y. \tag{6.6b}$$

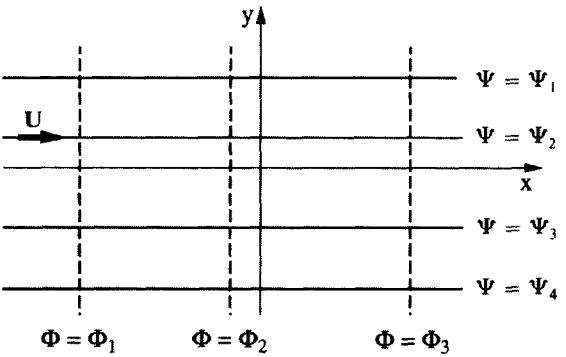


FIG. 6.3 – *Lignes de courant* (Ψ = constante) *et équipotentielles* (Φ = constante) *dans un écoulement parallèle, de vitesse U à deux dimensions.*

À *trois dimensions*, l'écoulement étant axisymétrique, on peut obtenir un résultat similaire en utilisant la fonction de courant de Stokes Ψ, comme nous l'avons vu au chapitre 3 (section 3.4.3). Nous supposons toujours l'écoulement dirigé suivant l'axe Ox.

♦ En coordonnées cylindriques (r, θ, x), on obtient, en utilisant les équations (3.21) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_x = U \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_r = 0$$

d'où :

$$\Phi = U\,x \tag{6.7a}$$

$$\Psi = -U\,\frac{r^2}{2}\cdot \tag{6.7b}$$

♦ En coordonnées sphériques (r, φ, θ), on a de même, à partir des équations (3.22) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = v_r = U\cos\varphi \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\varphi = -U\sin\varphi$$

d'où :

$$\Phi = U\,r\cos\varphi \tag{6.8a}$$

$$\Psi = \frac{1}{2}\,U\,r^2\sin^2\varphi. \tag{6.8b}$$

Rappelons que les lignes (ou surfaces) d'équation Ψ = constante sont des lignes (ou surfaces) de courant de l'écoulement ; elles ont pour équations r = cte, et $r \sin \varphi$ = cte, respectivement en coordonnées cylindriques et sphériques. Elles sont parallèles à la direction de la vitesse U. Les lignes équipotentielles à deux dimensions (ou les surfaces à trois dimensions) sont les droites (respectivement les plans) perpendiculaires à cette direction.

Tourbillon

L'écoulement plan tourbillonnaire (Fig. 6.4) est un écoulement autour d'un axe perpendiculaire en O au plan xOy. Le champ de vitesse est orthoradial (c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe et au rayon vecteur), et les composantes v_r et v_θ vérifient en coordonnées polaires :

$$v_r = 0, \qquad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

ou, d'après les équations (3.19a & b)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = v_r = 0.$$

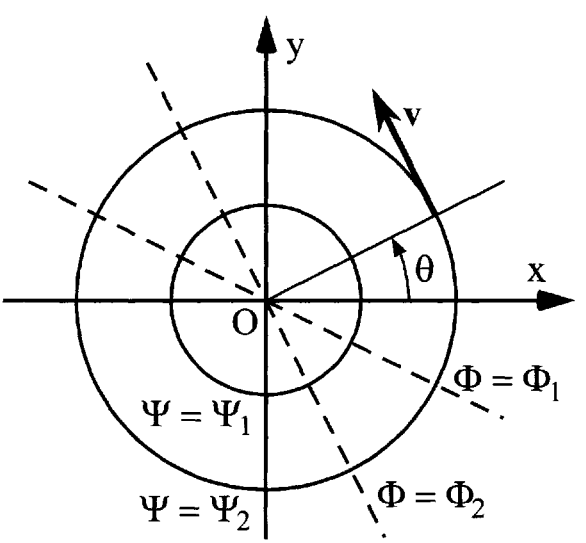


FIG. 6.4 – *Lignes de courant et lignes équipotentielles dans un écoulement plan tourbillonnaire autour d'un axe Oz.*

Calculons la circulation de la vitesse autour d'un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon r centré en O, on trouve :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dl} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r \, \mathrm{d}\theta = \Gamma$$

Γ représente donc la circulation sur toute courbe entourant une fois l'origine. On obtient :

$$\Phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \tag{6.9a}$$

et :

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \mathrm{Log} \frac{r}{r_0} \tag{6.9b}$$

où r_0 est une constante arbitraire (Ψ et Φ sont en effet définies à une constante additive près), qui permet de respecter l'absence d'unité de l'argument du logarithme.

Notons que nous avons ici un cas d'écoulement doublement connexe. La ligne singulière $r = 0$ (qui s'étend à l'infini dans la direction Oz) joue le rôle de la surface solide $\mathcal{S}_t$ mentionnée sur la figure 6.2 de la section 6.2.2, et autour de laquelle nous avions calculé la circulation de la vitesse (dans le cas présent, le rayon de courbure du tore est infini). Le potentiel des vitesses Φ n'est pas défini de manière univoque, car il contient la variable angulaire θ ; la circulation de la vitesse le long d'un contour entourant n fois la ligne $r = 0$ dans le sens direct sera égale à $n\Gamma$. Ce problème est analogue à celui du champ magnétique créé par un fil rectiligne infiniment long et de diamètre très petit, parcouru par un courant électrique.

Source

On appelle source et puits les écoulements potentiels élémentaires qui s'effectuent respectivement à partir de, et vers un point (on a $Q > 0$ pour la source, et $Q < 0$ pour le puits).

♦ À *deux dimensions*, l'écoulement à partir d'un point source s'exprime, en coordonnées cylindriques, par (Fig. 6.5) :

$$v_r(r) = \frac{Q}{2\pi r} \qquad\qquad v_\theta = 0.$$

En évaluant le flux de la vitesse à travers un cercle de rayon r centré à l'origine (qui représente simplement le débit Q), on obtient :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} r \, v_r \, \mathrm{d}\theta = Q.$$

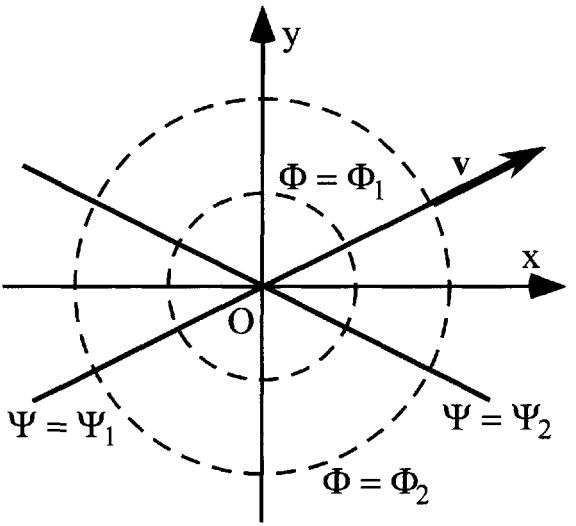


FIG. 6.5 – *Lignes de courant et équipotentielles d'un écoulement induit par une source centrée sur l'origine des axes de coordonnées correspondant respectivement aux équipotentielles et aux lignes de courant de la figure 6.4.*

On a pour l'écoulement ainsi défini, et en utilisant les équations (3.19a & b) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

soit :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi}\mathrm{Log}\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{6.10a}$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi}\,\theta. \tag{6.10b}$$

Comme précédemment, Φ et Ψ sont définis à une constante près. Notons la correspondance, dans le *cas bidimensionnel*, entre la solution de ce problème et celle du tourbillon présentée précédemment. Les fonctions Φ et Ψ sont échangées en gardant la même forme lorqu'on passe d'un problème à l'autre. Les lignes de courant radiales, dans le cas de la source, sont identiques aux équipotentielles de l'écoulement tourbillonnaire. Les lignes de courant du tourbillon, qui sont des cercles centrés autour de l'origine, correspondent aux équipotentielles de l'écoulement créé par la source. Cette correspondance sera analysée de façon plus directe à la section 6.6 relative à la notion de potentiel complexe des vitesses.

♦ À *trois dimensions*, le champ de vitesse autour d'un point source de débit volumique Q s'écrit en coordonnées sphériques :

$$v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \qquad v_\varphi = v_\theta = 0.$$

L'écoulement doit en effet être radial et tel que le flux sur une sphère de rayon r soit égal à Q. On a donc :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\varphi = 0.$$

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant s'écrivent alors :

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r} \tag{6.11a}$$

$$\Psi = -\frac{Q}{4\pi}\cos\varphi. \tag{6.11b}$$

Écoulement créé par un dipôle

Considérons une source S_2 et un puits S_1, dont les débits ont la même valeur absolue Q. En faisant tendre leur distance d vers 0, et en maintenant constant le produit $p = Q\,|\mathrm{d}|$, on obtient un dipôle d'écoulement de moment vectoriel $\mathbf{p} = Q\,\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$, orienté du puits vers la source (Fig. 6.6).

♦ À *deux dimensions*, les potentiels de vitesse induits au point $P(\mathbf{OP} = \mathbf{r})$ par la source S_2 (respectivement le puits S_1) situés en $\mathbf{OS}_2 = \mathbf{r}_2$ (respectivement $\mathbf{OS}_1 = \mathbf{r}_1$), s'expriment en coordonnées polaires par :

$$\Phi_2 = \frac{Q}{2\pi}\mathrm{Log}\,\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}{r_0}, \qquad \Phi_1 = -\frac{Q}{2\pi}\mathrm{Log}\,\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{r_0}.$$

On a donc, pour l'ensemble (source + puits) :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{Q}{2\pi}(\mathrm{Log}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| - \mathrm{Log}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|).$$

Évaluons cette différence en développant $\mathrm{Log}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|$ au voisinage de $|\mathbf{r}| = |\mathbf{OP}|$; $|\mathbf{r}|$ est beaucoup plus grand que $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{OS}_1|$ et $|\mathbf{r}_2| = |\mathbf{OS}_2|$ quand on rapproche la source du puits ($d \to 0$) en maintenant constant le moment $\mathbf{p}$ du dipôle. Développons le logarithme au voisinage de $\mathbf{r}$:

$$\Phi_2 = \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{\partial(\mathrm{Log}\,r)}{\partial r}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}|) + \cdots\right)$$

$$\Phi_1 = -\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{\partial(\mathrm{Log}\,r)}{\partial r}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}|) + \cdots\right)$$

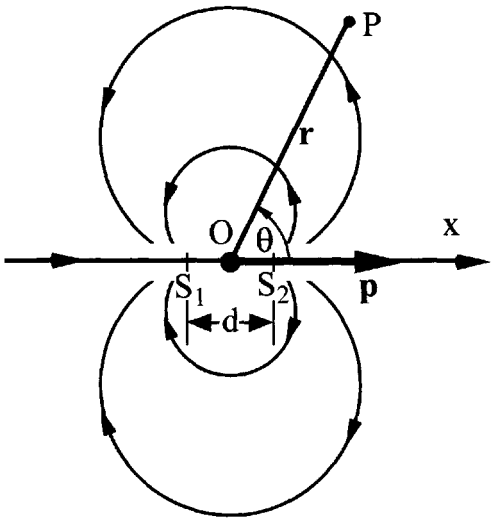


FIG. 6.6 – *Écoulement à deux dimensions créé par l'ensemble d'un puits S_1 et d'une source S_2, de même débit Q. Lorsqu'on fait tendre leur distance d vers 0, en maintenant constant le produit Qd, on obtient l'écoulement créé par un dipôle de moment $p = Qd$.*

soit, dans la limite où $d \longrightarrow 0$,

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{r}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|) = -\frac{Qd}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r} = -\frac{p}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r} \tag{6.12}$$

ou encore:

$$\Phi = -\frac{\mathbf{p}.\mathbf{r}}{2\pi\, r^2} \tag{6.13}$$

avec $\mathbf{p} = Q\,\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ ($|p| = Q\,d$) ; θ est l'angle entre $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ et le rayon vecteur $\mathbf{r}$ de module r. En prenant le gradient du potentiel Φ, on obtient les composantes de la vitesse :

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{p}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{6.14a}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{p}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\,. \tag{6.14b}$$

Le potentiel et le champ de vitesse ont donc la même forme que le potentiel et le champ électrique créés par un dipôle électrique de moment $\mathbf{p}$. À partir de ces composantes de la vitesse, on obtient la fonction courant Ψ à l'aide des relations (3.19) déjà utilisées plus haut :

$$\Psi = \frac{p}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\mathbf{p}\wedge\mathbf{r}}{2\pi\, r^2}\,. \tag{6.14c}$$

♦ En opérant de la même manière pour un écoulement à *trois dimensions*, on obtient le potentiel du dipôle en coordonnées sphériques :

$$\Phi = -\frac{p\cos\varphi}{4\pi\, r^2} = -\frac{\mathbf{p}.\mathbf{r}}{4\pi\, r^3}\,. \tag{6.15a}$$

Les composantes correspondantes v_r et v_φ du champ de vitesse sont :

$$v_r = \frac{p\,\cos\varphi}{2\pi\, r^3} \tag{6.15b}$$

et :

$$v_\varphi = \frac{p\,\sin\varphi}{4\pi\, r^3} \tag{6.15c}$$

et la fonction courant Ψ, obtenue à partir des équations (3.22), vérifie :

$$\Psi = \frac{p\,\sin^2\varphi}{4\pi\, r}\,. \tag{6.15d}$$

Résolution de l'équation de Laplace : additivité des solutions, séparation de variables

Par suite de la linéarité de l'équation de Laplace, des combinaisons linéaires de solutions de celle-ci la vérifieront également. On peut donc construire un champ de vitesse d'un problème potentiel en superposant des solutions simples, de façon à satisfaire aux conditions aux limites pour la fonction totale. Par ailleurs, comme en électrostatique dans le cas du potentiel créé par une distribution de charges électriques, on peut écrire le potentiel des vitesses d'un écoulement sous la forme d'un *développement multipolaire* ; celui-ci correspondra à la somme de potentiels élémentaires associés à des distributions de sources de fluide de plus en plus complexes (source unique, dipôle, quadrupôle, ...). Ainsi, nous verrons qu'à partir du potentiel de vitesse créé par un dipôle, on peut décrire des champs de vitesse simples, tels que ceux qui correspondent à l'écoulement autour d'une sphère ou d'un cylindre.

Une autre approche consiste à rechercher les solutions particulières de l'équation de Laplace sous forme d'un produit de fonctions de variables séparées : il est pour cela nécessaire d'utiliser des coordonnées qui respectent la symétrie du problème. Les problèmes à symétrie cylindrique conduisent à des solutions sous forme de fonctions de Bessel ; ceux à symétrie sphérique font intervenir les fonctions de Legendre, utilisées dans la résolution de l'équation de Schrödinger en mécanique quantique pour la détermination d'orbitales atomiques.

6.2.4 Exemple d'écoulements potentiels simples

Nous verrons apparaître dans les exemples qui suivent les écoulements élémentaires que nous venons d'étudier. Nous traiterons successivement l'écoulement plan autour d'un cylindre circulaire, l'écoulement à trois

dimensions autour d'une sphère placée dans un champ de vitesse uniforme à l'infini, l'écoulement autour d'un solide de Rankine et, enfin, la superposition des écoulements induits par un puits et par un tourbillon.

Écoulement autour d'un cylindre circulaire

Nous considérons un écoulement uniforme de vitesse **U**, perturbé par la présence d'un cylindre circulaire de rayon R et d'axe perpendiculaire à la vitesse. Compte tenu de la propriété d'invariance du problème dans la direction de l'axe du cylindre, nous le traiterons dans un espace à deux dimensions. Nous analyserons d'abord le cas où il n'existe pas de circulation de la vitesse autour du cylindre (i) ; ensuite, nous étudierons l'effet de la présence d'une circulation (ii), ce qui nous permettra de mettre en évidence l'effet de portance. Nous retrouverons cet effet de manière plus générale à la section 6.3.1, où nous discuterons le cas d'un obstacle bidimensionnel de forme quelconque.

(i) Cylindre circulaire sans circulation

Considérons, en coordonnées polaires à deux dimensions, le potentiel Φ des vitesses qui résulte de la superposition des potentiels correspondant à un écoulement uniforme de vitesse U orientée dans la direction $\theta = 0$ (relation (6.6a)) et à un dipôle de moment **p** orienté dans la même direction (relation (6.12)) ; on a :

$$\begin{aligned}\Phi = \Phi_{\text{écoulement uniforme}} + \Phi_{\text{dipôle}} &= U\,r\,\cos\theta - \frac{p\,\cos\theta}{2\pi r} \\ &= (U\,r - \frac{p}{2\pi r})\cos\theta. \qquad (6.16)\end{aligned}$$

Cette expression constitue une première approche logique : le potentiel du dipôle sera en effet le premier terme non nul du développement multipolaire, puisqu'on n'a pas supposé la présence d'une source de fluide dans l'écoulement. Compte tenu de l'unicité des solutions potentielles à circulation fixée, l'expression (6.16) sera la solution du problème si elle vérifie les conditions aux limites sur les parois. Dans le cas contraire, il faudra recourir à des termes d'ordre plus élevé du développement multipolaire. De l'expression (6.16) du potentiel, on déduit les composantes de la vitesse :

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi r^2}\right)\cos\theta \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\left(U - \frac{p}{2\pi r^2}\right)\sin\theta.$$

Cherchons maintenant s'il existe une valeur de p telle que ce champ de vitesse vérifie les conditions aux limites :

v= **U** à l'infini, et $v_r(r = R) = 0$ (composante de vitesse normale nulle à la surface du cylindre ($r = R$)).

La première condition est identiquement vérifiée, car le champ de vitesse créé par le dipôle décroit en $1/r^2$ avec la distance. La seconde entraîne :

$$\frac{p}{2\pi R^2} = -U \qquad \text{d'où :} \qquad \Phi = U\,r\,\cos\theta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

ce qui détermine la valeur p du moment du dipôle en fonction de la vitesse U. Le champ de vitesse s'écrit donc finalement :

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta \tag{6.17a}$$

$$v_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta. \tag{6.17b}$$

La solution de l'équation de Laplace étant unique, ce champ de vitesse, qui satisfait les conditions aux limites à l'infini et sur la surface du cylindre, est donc bien la solution de notre problème.

La fonction de courant Ψ de cet écoulement pourrait de même être construite à partir de celles de l'écoulement uniforme et du dipôle. Il est plus rapide de la déduire directement des équations (6.17a & b) du champ de vitesse obtenu plus haut, à partir des équations (3.22) de définition de Ψ. On obtient ainsi :

$$\Psi = U\,r\,\sin\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Les lignes de courant de cet écoulement sont représentées à la figure 6.7. On notera l'existence de la ligne de courant particulière correspondant à $\Psi = 0$; elle est constituée des deux demi-droites issues des *points d'arrêt* $r = 0$, et $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (points de vitesse nulle situés sur la circonférence du cylindre), ainsi que de la circonférence elle-même.

(ii) Cylindre circulaire avec circulation

Dans ce cas, le potentiel des vitesses est obtenu en ajoutant au potentiel précédent (Éq. (6.16)), le potentiel d'un tourbillon de circulation Γ (Éq. (6.9a)). En effet, le champ de vitesse du tourbillon est tangent aux cercles r = cte et s'annule à l'infini ; il vérifie donc automatiquement les deux conditions aux limites. Comme il y a un seul écoulement potentiel correspondant à une valeur de la circulation Γ donnée, la somme des deux potentiels de vitesse est donc la solution du problème. Ainsi, si nous appelons U la valeur algébrique de la vitesse supposée parallèle à l'axe Ox :

$$\Phi = \left(U\,r - \frac{p}{2\pi r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\,\theta.$$

On obtient de même les composantes de la vitesse à partir de la superposition de solutions :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{cylindre}} + \mathbf{v}_{\text{tourbillon}}$$

car chacun des deux champs de vitesse vérifie séparément les conditions aux limites. On en déduit :

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta \tag{6.18a}$$

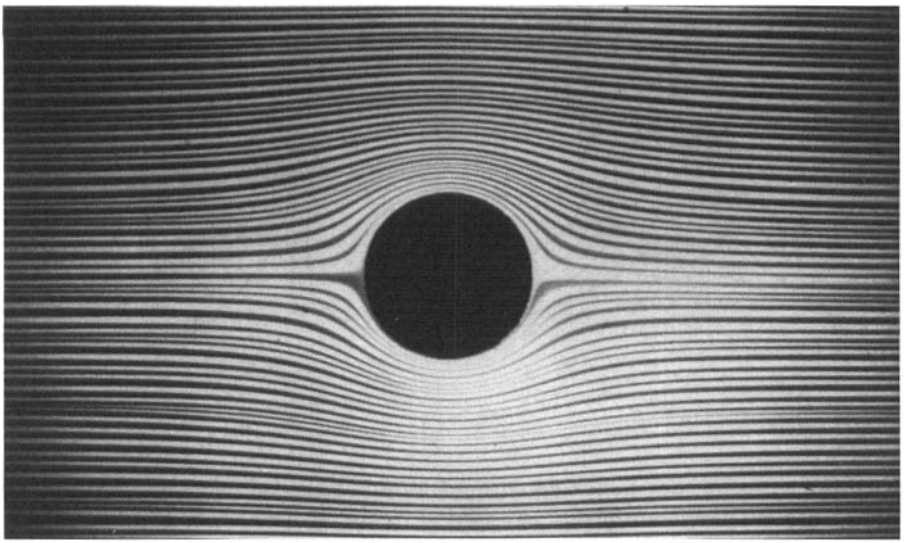


FIG. 6.7 – *Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini, dans le cas où la circulation de la vitesse autour du cylindre est nulle. Cette figure a été obtenue expérimentalement dans une cellule de Hele-Shaw, qui permet de simuler un écoulement plan et potentiel à partir de celui autour d'un obstacle placé entre deux plaques parallèles et très proches. Cette technique est discutée au chapitre 8 (section 8.6.3 et figure 8.21) (cliché H. Peregrine,* An Album of fluid motion*).*

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}\cdot \tag{6.18b}$$

Cherchons à présent s'il subsiste des points d'arrêt sur la surface du cylindre. Ils doivent être tels que :

$$v_\theta(r=R) = -U\left(1+\frac{R^2}{R^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \quad \text{soit :} \quad \sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi R U}\cdot \tag{6.19}$$

La relation (6.19) amène à distinguer deux régimes, suivant les valeurs relatives des valeurs absolues $|\Gamma|$ et $|U|$ de la circulation et de la vitesse :

♦ pour $0 < |\Gamma| < 4\pi R|U|$, il existe deux points d'arrêt P_1 et P_2, symétriques par rapport à l'axe y (Fig. 6.8a) : leur position est définie par les angles θ donnés par la relation (6.19). P_1 et P_2 se déplacent à partir de deux positions diamétralement opposées pour $\Gamma = 0$ (cas précédent), en se rapprochant jusqu'à se confondre en un point unique P sur la surface du cylindre pour $|\Gamma| = 4\pi R|U|$.

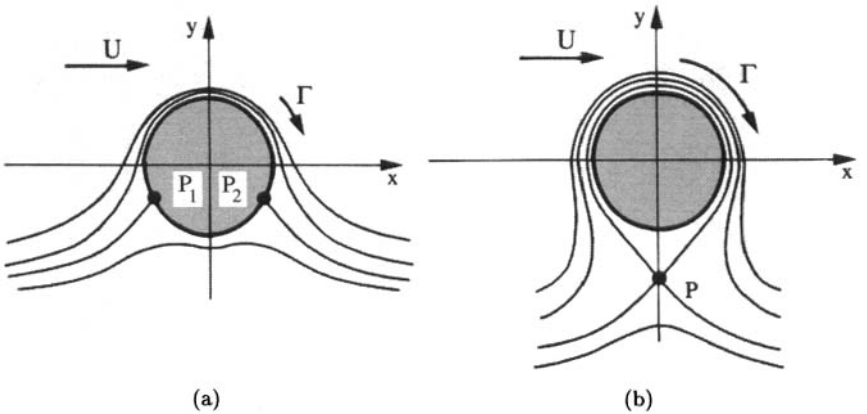


FIG. 6.8 – *Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini. Cas où la circulation* Γ *de la vitesse autour du cylindre est non nulle (elle est négative dans le cas de la figure) ; (a) :* $0 < |\Gamma| < 4\pi R|U|$*; (b)* $|\Gamma| > 4\pi R|U|$.

♦ pour $|\Gamma| > 4\pi R|U|$, il n'existe plus de points d'arrêt sur la surface du cylindre. Il existe des trajectoires fermées qui l'entourent et des trajectoires ouvertes à plus grande distance (Fig. 6.8b). Le point d'arrêt unique P est défini dans ce cas par les conditions : $\sin\theta = \pm 1$ (suivant que Γ et U sont ou non de même signe) et :

$$-|U|\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{|\Gamma|}{2\pi r}=0\cdot$$

Ces deux conditions permettent de vérifier respectivement $v_r = 0$ et $v_\theta = 0$. La seule valeur de r supérieure à R, et solution de l'équation précédente, est :

$$r = R\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi R\,|U|}+\sqrt{\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi R\,|U|}\right)^2-1}\right)\cdot \tag{6.20}$$

La force qu'exerce le fluide sur le cylindre est perpendiculaire à l'axe et possède deux composantes : l'une, dans la direction de la vitesse U et de sens opposé est la *traînée*, l'autre dans la direction perpendiculaire est la *portance*. Pour déterminer les composantes de cette force, on calcule la résultante des forces de pression sur le cylindre à partir du champ de pression $p(r = R, \theta)$ à sa surface. La pression vérifie la relation de Bernoulli (5.36) : elle s'applique en effet à tout l'espace, car l'écoulement est potentiel. En prenant comme

référence un point à l'infini (pression p_0, vitesse U), nous obtenons :

$$p(r = R, \theta) + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 (r = R, \theta) = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\text{d'où :} \quad p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - \left(-2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U}\right)^2\right).$$

La portance par unité de longueur du cylindre est donnée par la composante F_p de la résultante des forces de pression suivant la direction y :

$$F_p = -\int_{\text{surface du cylindre}} p \sin\theta \, R \, \mathrm{d}\theta.$$

Le seul terme non nul dans l'intégration provient du terme proportionnel à $\sin\theta$ dans le développement de l'expression précédente de la pression, soit :

$$F_p = -\int_0^{2\pi} \frac{\rho U \Gamma}{\pi} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = -\rho U \Gamma \tag{6.21}$$

(ainsi, F_p est dirigée vers le haut dans les deux cas de la figure 6.8). Cette expression de la portance (appelée *force de Magnus*) sera établie dans un cas plus général à la section 6.3.1 (Éqs. (6.43b) et (6.44)).

Par ailleurs, la composante F_t suivant l'axe des x de la résultante des forces de pression (la traînée) est nulle. En effet, la norme de la vitesse en des points symétriques par rapport à l'axe des y est la même ; il en est donc de même de la pression. Il en résulte que les contributions en projection sur l'axe des x s'annulent deux à deux. Ce résultat s'applique à tous les écoulements stationnaires de fluides parfaits autour d'un obstacle : dans ce cas, la traînée est nulle car il n'existe pas de mécanisme de dissipation visqueuse.

Sphère dans un écoulement uniforme à l'infini

Nous traitons maintenant le cas d'un écoulement uniforme de vitesse $\mathbf{U}$, perturbé par une sphère de rayon R au repos centrée à l'origine (Fig. 6.9). Toujours par analogie avec l'électrostatique et comme dans le cas du cylindre, nous prenons comme fonction d'essai du potentiel des vitesses la superposition de ceux d'un écoulement uniforme (relation (6.8a)) et d'un dipôle (relation (6.15a)). On obtient, en coordonnées sphériques :

$$\Phi = U r \cos\varphi - \frac{p \cos\varphi}{4\pi r^2} = \left(U r - \frac{p}{4\pi r^2}\right)\cos\varphi. \tag{6.22}$$

Les composantes de la vitesse s'écrivent alors :

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi r^3}\right)\cos\varphi \quad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\left(U - \frac{p}{4\pi r^3}\right)\sin\varphi \quad v_\theta = 0. \tag{6.23}$$

Le moment p du dipôle est déterminé à partir de la condition aux limites sur la surface de la sphère :

$$v_r(r = R) = \left(U + \frac{p}{2\pi R^3}\right) \cos\varphi = 0.$$

D'où :

$$\mathbf{p} = -2\pi \mathbf{U} R^3 \tag{6.24a}$$

et :

$$\Phi = U r \cos\varphi \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \cdot \tag{6.24b}$$

La condition de vitesse égale à U à l'infini est identiquement vérifiée par suite de la forme choisie pour le potentiel Φ (la contribution du dipôle s'annule en effet à l'infini). On obtient, pour le champ de vitesse :

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\varphi \qquad v_\varphi = -U\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\sin\varphi \qquad v_\theta = 0. \tag{6.25}$$

La forme des lignes de courant est obtenue à partir de la fonction de courant déduite du potentiel des vitesses, par intégration des deux équations suivantes découlant des relations (3.22) :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = (r^2 \sin\varphi)\, v_r = U\left(r^2 - \frac{R^3}{r}\right)\sin\varphi\cos\varphi \tag{6.26a}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -r\sin\varphi\, v_\varphi = U\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right)\sin^2\varphi. \tag{6.26b}$$

Soit, à une constante près :

$$\Psi = \frac{U}{2}\left(r^2 - \frac{R^3}{r}\right)\sin^2\varphi. \tag{6.27}$$

La figure 6.9 montre la distribution des lignes de courant correspondantes. La surface $\Psi = 0$ est constituée de la sphère ($r = R$) et de l'axe de symétrie ($\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$). Remarquons que le module de la vitesse décroît comme $1/r^3$ aux grandes distances r.

Nous étudierons au chapitre 8 (section 8.4.1), l'écoulement d'un fluide autour d'une sphère à faible nombre de Reynolds, lorsque les forces de viscosité sont dominantes (au contraire du cas présent) : le module de la vitesse décroît alors comme $1/r$, c'est-à-dire beaucoup plus lentement que pour l'écoulement potentiel étudié ici.

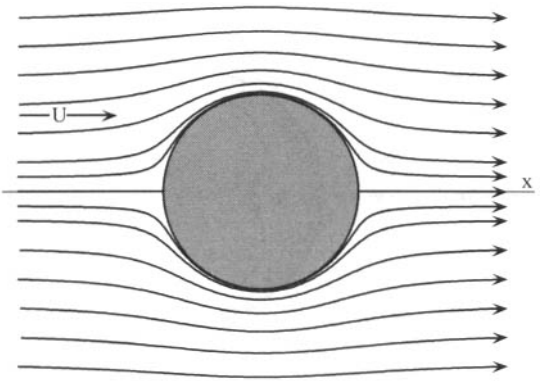


FIG. 6.9 – *Lignes de courant autour d'une sphère immobile placée dans un écoulement potentiel uniforme.*

Le solide de Rankine

Cet exemple correspond au cas d'une source placée dans un écoulement uniforme (Fig. 6.10). Nous allons montrer qu'il décrit l'écoulement autour d'un obstacle solide de forme particulière, appelé « solide de Rankine », qui a une symétrie de révolution autour de la direction de l'écoulement non perturbé.

On part d'un potentiel des vitesses et d'une fonction de courant qui correspondent à la superposition d'un écoulement uniforme (Éq. (6.8)) et d'une source placée à l'origine des coordonnées (Éq. (6.11)) :

$$\Phi = \Phi_{\text{écoulement uniforme}} + \Phi_{\text{source}}, \quad \text{et} \quad \Psi = \Psi_{\text{écoulement uniforme}} + \Psi_{\text{source}}.$$

Soit, en coordonnées sphériques :

$$\Phi = U\, r\, \cos\varphi - \frac{Q}{4\pi r} \tag{6.28a}$$

et :

$$\Psi = U\, \frac{r^2}{2}\, \sin^2\varphi - \frac{Q}{4\pi}\, \cos\varphi. \tag{6.28b}$$

De la relation (6.28a), on tire les composantes de la vitesse :

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = U\, \cos\varphi + \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -U\, \sin\varphi \qquad v_\theta = 0. \tag{6.29}$$

Il existe un point d'arrêt P_0 (point de vitesse nulle) sur l'axe des z ($\varphi = 0$ ou π suivant les signes relatifs de Q et U) pour :

$$r = r_0 = \sqrt{\frac{|Q|}{4\pi|U|}}\,. \tag{6.30}$$

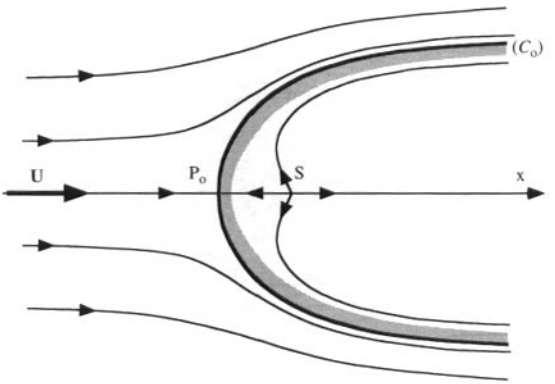


FIG. 6.10 – *Écoulement autour d'un solide de révolution, appelé solide de Rankine. Cet écoulement est obtenu par superposition d'un écoulement uniforme et d'un écoulement source (S).*

Les lignes de courant sont constituées de l'ensemble des sections avec les plans méridiens des surfaces de révolution autour de l'axe x, dont la méridienne a pour équation :

$$U\frac{r^2}{2}\sin^2\varphi - \frac{Q}{4\pi}\cos\varphi = \Psi = \text{constante}. \tag{6.31}$$

L'ensemble de ces lignes de courant est présenté à la figure 6.10.

La valeur Ψ_0 de la fonction de courant sur la ligne de courant (C_0) située dans le plan de figure et passant par le point d'arrêt P_0, déterminé ci-dessus $(r = r_0,\ \varphi = \pi)$ s'écrit :

$$\Psi_0 = \Psi(r = r_0,\ \varphi = \pi) = \frac{Q}{4\pi}\cdot$$

En reportant cette valeur dans la relation (6.31), on en tire l'équation de (C_0) :

$$r^2 = \frac{Q}{2\pi U}\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cdot \tag{6.32}$$

Cette ligne de courant comprend d'une part, l'axe Ox $(\varphi = 0,\ \pi)$ et, d'autre part, une courbe qui sépare l'espace en deux régions, où le fluide est apporté par chacun des deux écoulements de base (écoulement uniforme et écoulement induit par la source). On peut remplacer ce tube de courant par un obstacle solide, sans modifier l'écoulement déterminé. L'obstacle correspondant fait partie de la famille plus générale des ovoïdes de Rankine : ceux-ci sont obtenus par superposition des nappes de courant correspondant à un écoulement uniforme, et à l'ensemble d'une source et d'un puits de même débit. Le paramètre permettant de modifier la forme de l'ovale est la distance entre

la source et le puits. Lorsque cette distance tend vers zéro, on retrouve l'écoulement autour d'une sphère étudié dans l'exemple précédent. Dans le cas où cette distance tend vers l'infini (par exemple si le puits est rejeté à l'infini), on retrouve le cas particulier de l'obstacle semi-infini étudié ici : en effet le puits intervient alors uniquement comme une composante supplémentaire d'un écoulement uniforme.

Puits et tourbillon

Nous considérons la superposition des écoulements à deux dimensions créés par un puits de débit $-Q\,(Q > 0)$ et par un tourbillon de circulation Γ, tous deux centrés à l'origine. L'écoulement résultant correspond bien au cas d'un récipient cylindrique qui se vide par un orifice central (puits), en même temps qu'il se remplit tangentiellement à sa périphérie, ce qui entretient le mouvement tourbillonnaire. Seul le creusement de la surface libre qu'on observe en général dans la partie centrale du récipient n'apparaît pas dans le présent traitement qui est à deux dimensions. Le potentiel des vitesses et la fonction de courant de l'écoulement résultant s'écrivent :

$$\Phi = \Phi_{\text{puits}} + \Phi_{\text{tourbillon}} \qquad \text{et} \qquad \Psi = \Psi_{\text{puits}} + \Psi_{\text{tourbillon}}$$

soit, en coordonnées polaires (relations (6.9) et (6.10)) :

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi}\operatorname{Log}\frac{r}{r_0} + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{6.33}$$

et :

$$\Psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{Log}\frac{r}{r_0}\,. \tag{6.34}$$

On en déduit les composantes de la vitesse :

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r} \tag{6.35a}$$

et :

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\,. \tag{6.35b}$$

Les lignes de courant ont pour équation en coordonnées polaires :

$$\Psi = \text{constante} = K = -\frac{Q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{Log}\frac{r}{r_0} \qquad \text{soit :} \qquad r = r_1\,\mathrm{e}^{-(\frac{Q}{\Gamma})\theta}. \tag{6.36}$$

Ce sont donc des spirales logarithmiques (Fig. 6.11), paramétrées par le facteur r_1, qui dépend de la ligne de courant considérée. Elles correspondent à la trajectoire d'une particule qui tourne autour du puits en s'en rapprochant progressivement. L'angle φ constant que fait le vecteur vitesse avec le rayon vecteur $\mathbf{r}$ est tel que :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_\theta}{v_r} = -\frac{\Gamma}{Q}\,.$$

Il est nul (lignes de courant radiales) dans le cas où $\Gamma = 0$ (puits seul), et vaut $\dfrac{\pi}{2}$ lorsque $Q = 0$ (tourbillon seul).

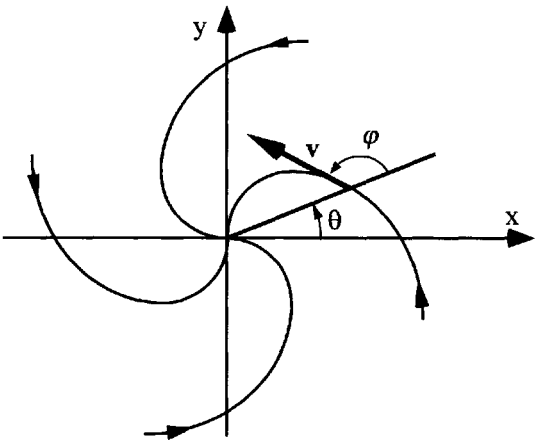


FIG. 6.11 – *Lignes de courant de l'écoulement créé par la superposition d'un puits et d'un tourbillon centrés à l'origine. La circulation du tourbillon a été choisie positive dans le cas de la figure.*

6.3 Forces exercées sur un obstacle dans un écoulement potentiel

Dans cette section, nous traitons le problème des forces exercées par un écoulement potentiel sur un obstacle solide de forme quelconque placé dans cet écoulement. L'étude est basée sur la possibilité, déjà évoquée plus haut (section 6.2.3), d'utiliser un développement multipolaire du potentiel des vitesses, solution de l'équation de Laplace ; on tient compte par ailleurs des conditions aux limites pour la vitesse normale, imposée sur la surface de l'objet (nulle pour un objet au repos). À grande distance r de l'objet, seule la contribution non nulle de la plus faible puissance en $1/r$, qui tend vers zéro le plus lentement, est prise en compte dans le calcul du champ de vitesse.

En utilisant les équations de conservation de la quantité de mouvement, nous déterminerons la force exercée à partir du champ de vitesse, assez loin du corps pour que l'approximation dipolaire précédente soit valable. À deux dimensions, nous prendrons de plus en compte l'existence d'une circulation qui est liée à la non-unicité des solutions potentielles discutée à la section 6.2.2.

6.3.1 Cas bidimensionnel

Potentiel des vitesses

Un cylindre circulaire, ou un profil d'aile infiniment allongé, est un exemple classique d'obstacle bidimensionnel. Nous supposerons ces objets fixes comme ce serait le cas dans une soufflerie imposant la vitesse d'écoulement $\mathbf{U}$,

uniforme à grande distance de l'obstacle et perpendiculaire à l'axe z du cylindre. Nous supposons, *a priori*, l'existence d'une circulation finie Γ autour de l'obstacle, sans indiquer pour l'instant la manière dont elle peut être créée. Nous le préciserons dans le chapitre 9, consacré à l'étude des couches limites (section 9.6.1).

♦ À une distance r de l'obstacle, grande devant ses dimensions dans le plan xy, le champ de vitesse et le potentiel des vitesses résultent de la combinaison linéaire des champs et potentiels qui correspondent à un écoulement uniforme de vitesse $\mathbf{U}$ et à un tourbillon (comme dans l'exemple (ii) de la section 6.2.4) :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{U} + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{U} + \mathbf{grad}\,\Phi_1(\mathbf{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{6.37}$$

avec : $\Phi_1(\mathbf{r}) = \Gamma/2\pi\theta +$ constante (Éq. (6.9a)). Ce dernier terme traduit l'influence de la circulation autour de l'obstacle sur le champ de vitesse.

♦ À distance *quelconque* de l'obstacle, on peut écrire le champ de vitesse sous la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{U} + \mathbf{grad}\,\Phi_1(\mathbf{r}) + \mathbf{grad}\,\Phi_2(\mathbf{r}). \tag{6.38}$$

Le potentiel $\Phi_2(\mathbf{r})$ traduit la modification du potentiel des vitesses due à la présence de l'obstacle. Écrivons alors Φ_2 sous la forme d'un développement multipolaire (source unique, dipôle, quadrupôle, ...). En général, l'écoulement ne comporte pas de source : le premier terme non nul est celui du dipôle, soit (relation (6.13)) :

$$\Phi_2 = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}}{r^2}$$

où $\mathbf{A}$ est un vecteur constant caractéristique du dipôle. Pour le cas particulier où l'obstacle est un cylindre circulaire, ce potentiel est la solution exacte du problème (section 6.2.4, exemple (i)) ; pour un obstacle de forme quelconque, il représentera simplement le terme correctif dominant à grande distance. Nous allons voir maintenant que ce développement suffit à déterminer les forces qui s'exercent sur l'obstacle.

Forces exercées sur un obstacle bidimensionnel

Nous allons calculer la portance $\mathbf{F}_p$ et la traînée $\mathbf{F}_t$, c'est-à-dire les forces exercées sur le corps respectivement dans les directions perpendiculaire et parallèle à l'écoulement. Évaluons pour cela les composantes, suivant les axes x et y, du bilan de quantité de mouvement (Éq. (5.10)) à l'intérieur d'un cylindre circulaire lié à l'obstacle, de rayon r grand devant ses dimensions dans le plan xy, et de longueur unité le long de son axe z (Fig. 6.12) ; on évite ainsi d'avoir à faire l'intégration du champ de pression sur toute la surface du cylindre. Nous allons voir que la forme exacte de la section du cylindre par

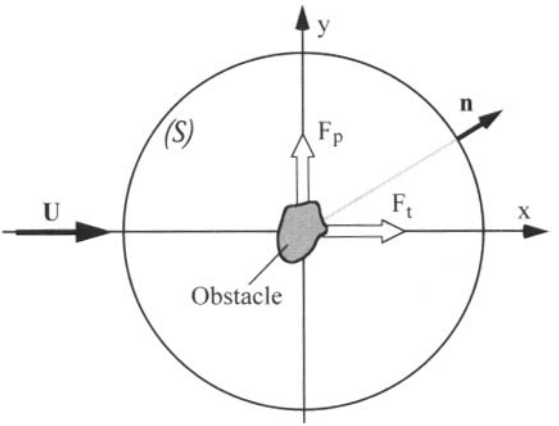


FIG. 6.12 – *Évaluation de la portance* $\mathbf{F}_p$ *et de la trainée* $\mathbf{F}_t$ *sur un obstacle cylindrique placé dans un écoulement uniforme, en présence d'une circulation de la vitesse autour de l'obstacle. (S) représente la surface du cylindre circulaire à l'intérieur duquel est effectué le bilan de quantité de mouvement.*

le plan de figure n'intervient pas dans le calcul de la portance $\mathbf{F}_p$. Cela vient du fait que seul le premier terme du développement multipolaire du potentiel des vitesses intervient pour déterminer $\mathbf{F}_p$.

Appliquons l'équation de bilan de quantité de mouvement (5.10) établie au chapitre précédent à un cylindre circulaire de rayon r, de surface $(\mathcal{S})$ et de profondeur unité dans la direction perpendiculaire au plan de figure. Comme l'écoulement est potentiel, on néglige l'influence des contraintes de viscosité σ'_{ij}.

$$-\iint_{\mathcal{S}} (\rho\, v_x\, (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + p\, n_x)\, \mathrm{d}S + (-F_t) = 0 \tag{6.39a}$$

$$-\iint_{\mathcal{S}} (\rho\, v_y\, (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + p\, n_y)\, \mathrm{d}S + (-F_p) = 0. \tag{6.39b}$$

Dans cette relation, $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à l'élément de surface $\mathrm{d}S = (r\,\mathrm{d}\theta)$ du cylindre ($\mathbf{n} = [\cos\theta,\, \sin\theta,\, 0]$, F_t et F_p représentent la traînée et la portance par unité de longueur suivant Oz. Dans ces expressions, F_t et F_p sont considérées comme des forces en volume, fictives, d'un type particulier : ce sont les forces qui doivent être appliquées, par un observateur ou une action extérieurs, pour maintenir le corps en place, en équilibrant la portance et la traînée exercées par le fluide. En séparant les termes de pression et d'inertie, on obtient :

$$F_t = -\int_0^{2\pi} \rho\,(v_x^2 \cos\theta + v_x\, v_y\, \sin\theta)\, r\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} (p\, \cos\,\theta)\, r\,\mathrm{d}\theta \tag{6.40a}$$

$$F_p = -\int_0^{2\pi} \rho\,(v_x\,v_y\,\cos\theta + v_y^2\,\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} (p\,\sin\,\theta)\,r\,\mathrm{d}\theta. \qquad (6.40b)$$

Le champ de pression est donné par la relation de Bernoulli : celle-ci est en effet valable dans tout l'espace, puisque l'écoulement est potentiel :

$$p + \frac{1}{2}\,\rho\,v^2 = p_0 + \frac{1}{2}\,\rho\,U^2 \qquad (6.41)$$

où p_0 est la pression uniforme à suffisamment grande distance de l'obstacle pour obtenir $|\mathbf{v}| = U$. En utilisant le développement de $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ donné par la relation (6.37), avec la notation $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{v}_1$, il vient :

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\,U^2 - \frac{1}{2}\rho\,(\mathbf{U} + \mathbf{v}_1)^2 = p_0 - \rho\,U\,v_{1x} - \frac{1}{2}\rho\,v_1^2. \qquad (6.42)$$

Dans cette expression, nous avons négligé les termes associés à la perturbation du champ de vitesse due à la présence du cylindre. En effet, le plus important de ces termes est la composante dipolaire qui décroît comme $1/r^2$ avec la distance r à l'obstacle (relations (6.14)) ; sa contribution aux intégrales (6.40) tend donc vers zéro comme $1/r$ loin du cylindre, car elle varie avec r comme le produit de $1/r^2$ par l'élément de surface $r\,\mathrm{d}\theta$. En reportant l'expression (6.42) dans les relations (6.40), et en remarquant que le terme constant p_0 dans la pression ne donne pas de contribution à l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
F_t = &-\int_0^{2\pi} \rho[(U + v_{1x})^2 \cos\theta \\
&+ (U + v_{1x})v_{1y} \sin\theta]r\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} \rho\left[(U v_{1x} + \frac{1}{2}v_1^2\right] r\cos\,\theta\,\mathrm{d}\theta \\
F_p = &-\int_0^{2\pi} \rho[(U + v_{1x})v_{1y} \cos\theta + v_{1y}^2 \sin\theta]r\,\mathrm{d}\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \rho\left[(U v_{1x} + \frac{1}{2}v_1^2\right] r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Nous pouvons négliger également les termes du second ordre, du type $v_{1x}\,v_{1y}$, v_{1y}^2 ou $v_1^2 \approx (1/r^2)$; ils donnent en effet, comme nous l'avons vu plus haut, une intégrale de surface qui tend vers zéro comme $1/r$ lorsque r tend vers l'infini. On obtient donc en développant les équations précédentes :

$$\begin{aligned}
F_t &= \int_0^{2\pi} \rho[-U\,v_{1x}\cos\theta - U\,v_{1y}\,\sin\theta]\,r\,\mathrm{d}\theta \\
F_p &= \int_0^{2\pi} \rho[-U\,v_{1y}\cos\theta + U\,v_{1x}\sin\theta]\,r\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

soit :

$$F_t = -\rho\,U\int_0^{2\pi} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})\,r\,\mathrm{d}\theta = -\rho\,U\int_0^{2\pi} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})\,\mathrm{d}S = 0 \qquad (6.43a)$$

$\mathbf{n}$ a pour composantes $\cos\theta$ et $\sin\theta$, et représente le vecteur unitaire normal à la surface d'intégration. La traînée F_t est donc proportionnelle au flux du champ de vitesse $\mathbf{v}_1$ à travers la surface $(\mathcal{S})$ et, par suite, elle est donc nulle. Ce résultat reflète l'absence de dissipation d'énergie dans les écoulements potentiels de fluides parfaits en régime stationnaire. On obtient également, en appelant $(\mathcal{C})$ la courbe représentant l'intersection de $(\mathcal{S})$ avec le plan de figure :

$$F_p = -\rho U \int_{\mathcal{C}} (v_{1x}\,\mathrm{d}x + v_{1y}\,\mathrm{d}y) = -\rho U \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dl} = -\rho U \Gamma. \tag{6.43b}$$

Ainsi, seul le terme $\Phi_1 = \Gamma\theta/2\pi$ dû à la présence d'une circulation de la vitesse autour de l'obstacle contribue à la portance F_p. Cette composante de portance, appelée *force de Magnus*, peut s'exprimer de façon vectorielle en utilisant un vecteur circulation axial $\mathbf{\Gamma}$ parallèle à la direction z. $\mathbf{\Gamma}$ sera orienté vers l'arrière du plan de figure, si la rotation se fait dans le même sens que sur la figure 6.13, et vers l'avant dans le cas contraire (cette représentation deviendra plus naturelle dans le chapitre suivant, où la circulation sera reliée au vecteur vorticité orienté lui aussi dans la direction z). La portance vérifie alors :

$$\mathbf{F}_p = \rho\,\mathbf{U}\wedge\mathbf{\Gamma}. \tag{6.44}$$

On peut retrouver qualitativement le signe de la force, en appliquant la relation de Bernoulli en deux points opposés situés au-dessus et au-dessous de l'obstacle (Fig. 6.13).

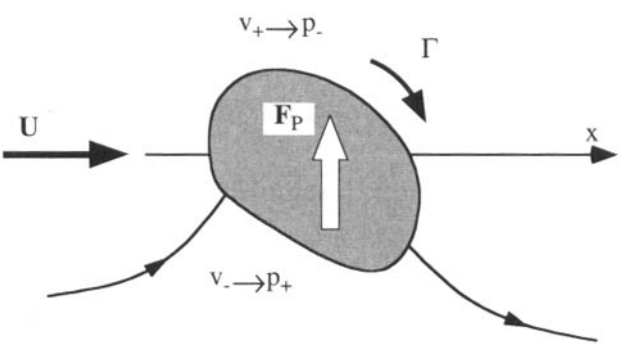


FIG. 6.13 – *Détermination du sens de la portance* $\mathbf{F}_p$ *en fonction du sens de la circulation* Γ *par application de la relation de Bernoulli.*

Avec le sens de circulation que nous avons choisi autour de l'obstacle, la vitesse absolue v_+ en un point au-dessus de l'obstacle est supérieure à la vitesse v_- en dessous. Il en résulte donc un déséquilibre de pression tel que la pression p_- au-dessus de l'obstacle (« l'extrados » de l'aile d'avion) est inférieure à la pression p_+ au-dessous, d'où une portance dirigée vers le haut.

La force de Magnus est responsable de la sustentation des avions ; en effet, la cambrure des ailes est à l'origine de l'apparition de la circulation à leur pourtour (voir section 6.6.3). Cette force est aussi à la base des mécanismes de propulsion ou de sustentation par hélice tournante (bateaux, avions, hélicoptères, ...). Elle est enfin également invoquée pour expliquer les effets de *lift* et de *coupe* d'une balle de tennis ou de ping-pong (Fig. 6.14), ainsi que le coup de pied *brossé* du football. Remarquons toutefois qu'il ne peut y avoir de circulation pour la vitesse d'un fluide parfait en écoulement potentiel autour de tels obstacles dont toutes les dimensions sont finies : quel que soit le contour d'intégration $(\mathcal{C})$ choisi, on peut en effet trouver une surface $(\mathcal{S})$ qui s'appuie sur $(\mathcal{C})$ et est située entièrement dans le fluide. La circulation de

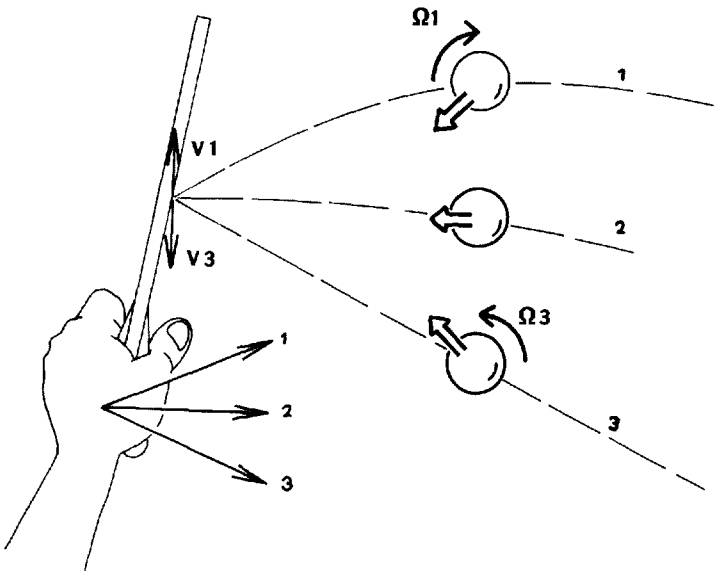


FIG. 6.14 – *Aérodynamique de la balle de ping-pong. Lors de la frappe, le joueur a sensiblement trois options pour influencer la courbure de la trajectoire future de la balle. (1) Le lift : en déplaçant sa main vers le haut au moment de l'impact, il induit sur la balle un mouvement à la vitesse V_1 dans la direction tangente à l'impact. Le non-glissement de la balle sur la raquette crée un mouvement de rotation à la vitesse $\Omega_1 \approx V_1/R$ (où R est le rayon de la balle) et, par suite, une portance sur la balle, proportionnelle à Ω_1. La trajectoire sera incurvée vers le bas, permettant une vitesse initiale plus forte tout en ne dépassant pas la limite permise pour le premier rebond. (2) Le coup plat : c'est le mouvement naturel du débutant qui « pousse » la balle. Le joueur n'a aucune influence sur la courbure de la trajectoire. (3) Le coupé : c'est le pendant du lift, avec une vitesse tangentielle V_3 qui crée une portance vers le haut ; la trajectoire sera plate.*

la vitesse **v** sur le contour $(\mathcal{C})$ est alors égale au flux de **rot v** à travers $(\mathcal{S})$, et elle sera identiquement nulle. C'est l'entraînement du fluide par les forces de viscosité au voisinage des parois des balles qui est responsable de l'effet de portance dans le cas de fluides réels : on peut alors appliquer le théorème de Bernoulli. On retrouve ainsi, comme pour une géométrie cylindrique, le sens des forces transverses à l'écoulement principal.

6.3.2 Cas d'un obstacle tridimensionnel

Développement du potentiel de vitesse et du champ de pression autour d'un obstacle à trois dimensions finies

On considère un corps fermé de forme quelconque et de volume $\mathcal{V}_0$ limité par une surface $\mathcal{S}_0$, se déplaçant à une vitesse **U** dans un fluide immobile loin du corps (Fig. 6.15).

Comme dans le cas à deux dimensions discuté précédemment, on peut développer, en puissances de $1/r$, le potentiel dont dérive la vitesse en un point M, à une distance r du corps très supérieure à la plus grande dimension de celui-ci. Il s'agit là encore de l'analogue d'un développement multipolaire d'une distribution de charges en électrostatique : les termes en $1/r$ correspondent à des charges libres, ceux en $1/r^2$ à des dipôles, ...

$$\Phi(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{\mathbf{p}}{4\pi} \cdot \mathbf{grad}\,\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \cdot \tag{6.45}$$

Le premier terme est un terme de source, tel que le flux du champ de vitesse à travers la surface d'une sphère $(\mathcal{S}_1)$ de grand rayon R entourant l'objet

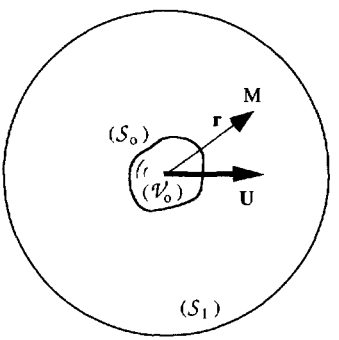


FIG. 6.15 – *Obstacle de forme quelconque se déplaçant à la vitesse* **U** *dans un fluide immobile loin de l'obstacle. La surface sphérique fictive* $(\mathcal{S}_1)$*, de grand rayon* R*, tracée autour de l'obstacle est utilisée pour le calcul de l'énergie cinétique du fluide.*

vérifie :

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \frac{A_1}{R^2} \, 4\pi \, R^2 = 4\pi \, A_1 .$$

Dans le cas présent, il n'y a pas de source de fluide et $A_1 = 0$. Le second terme de l'équation (6.45) est l'expression du potentiel créé par un dipôle établie à la section 6.2.3 (relation (6.15a)). Compte tenu du principe d'additivité discuté alors, la relation entre les composantes du moment $\mathbf{p}$ du dipôle et celles de la vitesse $\mathbf{U}$ est linéaire ; elle s'écrit :

$$p_i = \alpha_{ij} \, U_j \qquad \text{avec une sommation sur l'indice } j \tag{6.46}$$

où α_{ij} est un élément d'une matrice $\boldsymbol{\alpha}$ caractéristique de la forme du corps solide. Dans le cas particulier d'un objet sphérique par exemple, la relation ci-dessus prend la forme :

$$\mathbf{p} = 2\pi \, \mathbf{U} \, R^3 \tag{6.47a}$$

soit :

$$\alpha_{ij} = 2\pi \, R^3 \, \delta_{ij} . \tag{6.47b}$$

Nous avons déduit cette valeur de l'équation (6.24a) en changeant le signe de la valeur du moment dipolaire $\mathbf{p}$: en effet l'écoulement autour d'une sphère en mouvement à une vitesse U est, dans le référentiel lié à la sphère, le même que pour une sphère immobile dans un écoulement de vitesse $-\mathbf{U}$.

Une caractéristique essentielle du problème potentiel est l'effet d'entraînement du fluide par l'objet en mouvement lorsque celui-ci est accéléré ; cet effet n'est pas dû aux frottements internes entre particules de fluide, comme ce serait le cas pour un fluide visqueux, mais à un entraînement par effet inertiel du fluide incompressible déplacé par le solide. En effet, lorsque le solide est accéléré, le fluide qu'il déplace doit aussi être accéléré. C'est ce phénomène d'*habillage* du solide par le fluide environnant qui cause l'augmentation de l'effet d'inertie.

Nous allons calculer successivement l'énergie cinétique du fluide mis en mouvement par l'objet, ainsi que l'impulsion qui lui est communiquée en réponse à une accélération de l'objet, et enfin la force qui s'exerce sur ce dernier. Cela nous permettra d'introduire la notion de masse ajoutée.

Énergie cinétique du fluide

Nous évaluons l'énergie E_c pour un grand volume $(\mathcal{V}_1)$ de fluide entourant l'objet limité par la sphère $(\mathcal{S}_1)$ de rayon R ; nous utilisons la décomposition suivante qui nous permettra de nous affranchir des effets du volume $\mathcal{V}_0$ de

l'objet :

$$\frac{E_c}{\rho/2} = \iiint_{\mathcal{V}_1} \mathbf{v}^2 \,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}_1} \mathbf{U}^2 \,\mathrm{d}V + \iiint_{\mathcal{V}_1} (\mathbf{v}-\mathbf{U})(\mathbf{v}+\mathbf{U}) \,\mathrm{d}V = I_1 + I_2 \tag{6.48}$$

avec :

$$I_1 = U^2 \left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \mathcal{V}_0\right]. \tag{6.49}$$

Pour calculer I_2, on part de l'identité vectorielle :

$$\operatorname{div}(f\,\mathbf{v}) = (\mathbf{v}.\cdot\mathbf{grad})\,f + f \operatorname{div}\mathbf{v}.$$

En choisissant $f = \Phi + \mathbf{U}.\mathbf{r}$, et en utilisant l'équation d'incompressibilité $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, on obtient :

$$(\mathbf{v}-\mathbf{U})(\mathbf{v}+\mathbf{U}) = \operatorname{div}\left[(\mathbf{v}-\mathbf{U})(\Phi + \mathbf{U}\cdot\mathbf{r})\right].$$

On transforme alors l'intégrale de volume en deux intégrales de surface, l'une sur la surface $(\mathcal{S}_0)$ du corps et l'autre sur la surface $(\mathcal{S}_1)$ de la sphère de rayon R ; on obtient alors :

$$I_2 = \iint_{\mathcal{S}_0} \left[(\mathbf{v}-\mathbf{U})(\Phi + \mathbf{U}\cdot\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{\mathcal{S}_1} \left[(\mathbf{v}-\mathbf{U})(\Phi + \mathbf{U}\cdot\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

Le premier terme est identiquement nul car, à la surface du corps, $(\mathbf{v}-\mathbf{U})\cdot\mathbf{n} = 0$. En décomposant le produit sous la deuxième intégrale, on trouve :

$$I_2 = \iint_{\mathcal{S}_1} \left[\Phi\,\mathbf{v} - \Phi\,\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{U}\cdot\mathbf{r})\mathbf{U}\right]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{6.50}$$

Le premier terme est de l'ordre de $(1/R^2)\cdot(1/R^3)$ et son intégrale sur la surface s'annule lorsque R tend vers l'infini. Le champ de vitesse induit par le potentiel $\Phi = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})/4\pi\,r^2$ du dipôle (relation (6.15a)) s'écrit :

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\,r^3} + 3\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}}{4\pi\,r^3}\right)\mathbf{n} \qquad \left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}\right).$$

D'où la forme suivante de I_2 :

$$I_2 = \iint_{\mathcal{S}_1} \left[(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}) + (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} + 3\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}) - 4\pi(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})^2 R^3\right]\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}$$

où $\mathrm{d}\Omega$ est l'élément d'angle solide sous lequel est vu l'élément de surface $\mathrm{d}S$ depuis le centre de la sphère $(\mathcal{S}_1)$ de rayon $R\,(\mathrm{d}S = R^2\,\mathrm{d}\Omega)$.

Pour évaluer I_2, on utilise la relation vectorielle générale suivante, valable pour des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ constants :

$$\int (\mathbf{An})(\mathbf{Bn})\mathrm{d}\Omega = A_i B_j \int n_i n_j \,\mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi}{3} A_i B_j \delta_{ij} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

On obtient :

$$I_2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - \frac{4\pi}{3} U^2 R^3. \tag{6.51}$$

En reportant les relations (6.49) et (6.51) dans l'équation (6.48), on obtient :

$$E_c = \frac{\rho}{2}(I_1 + I_2) = \frac{\rho}{2}\left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - \mathcal{V}_0 U^2\right]. \tag{6.52}$$

L'énergie cinétique totale E_c du fluide est donc une forme quadratique de la vitesse U, car $\mathbf{p}$ varie linéairement avec U, suivant la relation (6.46). Donc :

$$E_c = \frac{\rho}{2}(\alpha_{ij} U_i U_j - \mathcal{V}_0 U_i U_i). \tag{6.53}$$

Impulsion

Appelons $\mathbf{P}$ la quantité de mouvement du fluide associée au mouvement induit par le déplacement du corps solide (ne pas confondre $\mathbf{P}$ avec le moment dipolaire $\mathbf{p}$). Pour une variation $\delta\mathbf{U}$ de la vitesse de l'objet, l'augmentation d'énergie cinétique du fluide entraîné est reliée à $\mathbf{P}$ par :

$$\delta E_c = \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{U}. \tag{6.54}$$

Utilisons l'équation (6.53) qui donne l'énergie cinétique, et supposons que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (ce qu'on peut toujours obtenir en symétrisant l'équation). On obtient alors :

$$\delta E_c = \frac{\rho}{2}\left[\alpha_{ij} 2U_j \delta U_i - 2\mathcal{V}_0 U_i \delta U_i\right] = \rho\left[\alpha_{ij} U_j - \mathcal{V}_0 U_i\right] \delta U_i.$$

Par identification avec (6.54), on trouve :

$$\mathbf{P} = \rho\,\mathbf{p} - \rho\mathcal{V}_0 \mathbf{U}. \tag{6.55}$$

La signification de ces deux termes est la suivante : supposons qu'on supprime le corps et qu'on le remplace par le dipôle de moment $\mathbf{p}$. Le champ de vitesse induit sur la surface $(\mathcal{S}_1)$ sera le même dans les deux cas. Le terme $\rho\,\mathbf{p}$ représente donc la quantité de mouvement associée au dipôle seul, et $\rho\,\mathcal{V}_0\,\mathbf{U}$ sa variation due à la présence du corps solide.

Force sur le corps solide

De l'expression de l'impulsion, on déduit celle de la force que le fluide exerce sur le corps :

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = -\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} + \rho\mathcal{V}_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\cdot \tag{6.56}$$

La force est donc nulle lorsque l'objet se déplace à vitesse constante. Puisqu'on a négligé les effets de frottement dus à la viscosité, il est naturel que la

traînée (composante de la force dans la direction de **U**) soit nulle quand **U** est constante. Mais la portance (composante perpendiculaire à **U**) est elle aussi nulle : cela diffère du cas de la géométrie cylindrique, et résulte de l'absence de circulation de la vitesse d'un écoulement potentiel autour d'un objet dont les dimensions, dans les trois directions de l'espace, sont finies.

Cas particulier d'un objet sphérique

Comme l'énergie cinétique dépend de la vitesse **U** de déplacement du corps, il est nécessaire d'appliquer une force supplémentaire qui compense cette variation d'énergie lors des variations de **U**. Dans le cas où l'objet est une sphère de rayon R, le moment **p** du dipôle s'exprime en fonction de **U**, selon l'expression (6.47a). On obtient alors, pour l'énergie cinétique du fluide :

$$E_c = \frac{\pi}{3}\rho R^3 U^2. \tag{6.57a}$$

De même, on obtient la valeur de la force **F** à partir des équations (6.47) et (6.56) :

$$\mathbf{F} = -\frac{\rho \mathcal{V}_0}{2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.57b}$$

L'effet du fluide sur l'accélération de la sphère est donc le même que si on avait ajouté à la masse de la sphère la moitié de la masse du fluide déplacé par celle-ci. Cette masse fictive, appelée *masse ajoutée*, représente l'habillage de la sphère par le fluide environnant.

6.4 Ondes linéaires à la surface d'un fluide parfait

Une classe importante de problèmes, où la description en termes de fluide parfait s'applique, est celle des ondes de surface, tant que l'on ne s'intéresse pas aux effets de l'atténuation des ondes due à la viscosité. Elle met en jeu le couplage entre les déformations de la surface et les écoulements en volume, qui résultent des premières. Les mécanismes qui conduisent au retour à l'équilibre de la surface libre, lorsque l'onde se propage, sont : la gravité qui s'oppose à la déviation de la surface à partir de l'horizontale, et la tension superficielle qui s'oppose à la courbure de l'interface.

6.4.1 Houle, risée et déferlantes

Commençons par présenter les différents régimes d'ondes qui peuvent exister à la surface d'un fluide. La figure 6.16 montre la variation de la vitesse de propagation c d'une onde, en fonction de son vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$. On remarque une variation non monotone avec, en particulier, une valeur minimale pour une valeur k_c de k ; nous verrons plus bas que k_c est égal

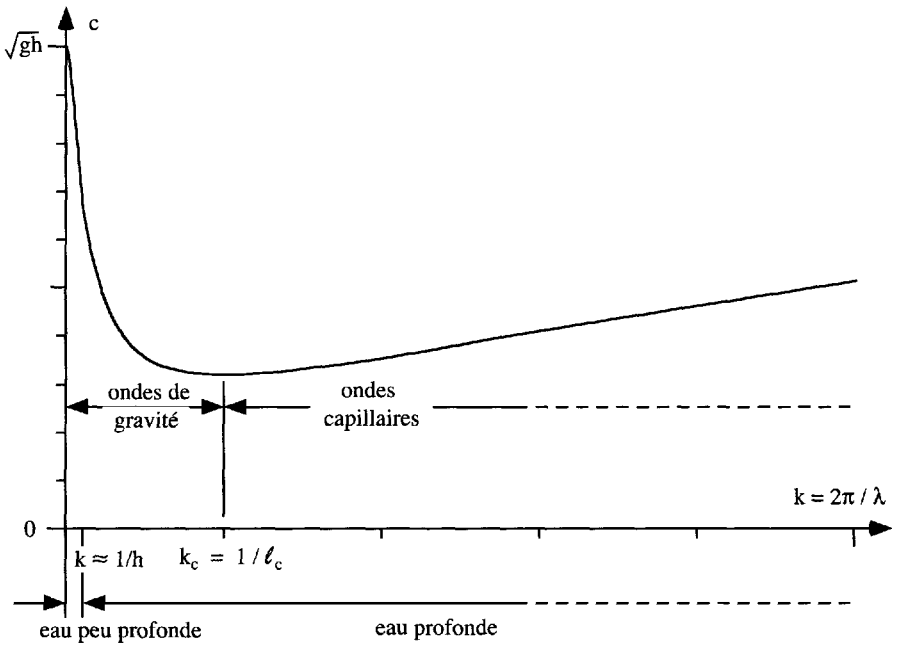


FIG. 6.16 – *Forme des variations de la vitesse de phase d'une onde de surface en fonction du vecteur d'onde k, pour une couche liquide d'épaisseur h grande devant la longueur d'onde capillaire $\ell_c = 1/k_c$. Sur l'axe horizontal inférieur, on a indiqué le domaine de transition progressive vers le régime d'onde en eau peu profonde lorsque la longueur d'onde devient supérieure à l'épaisseur h.*

à l'inverse de la longueur capillaire $\ell_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ du fluide, introduite au chapitre 1 (section 1.4.2, équation (1.61)). Pour une onde de pulsation ω, se propageant à la surface d'une couche de liquide d'épaisseur h, de masse volumique ρ et de tension superficielle γ, la vitesse c vérifie :

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh)\left(1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g}\right) \cdot \tag{6.58}$$

Nous démontrons ce résultat à la fin de cette section. Il peut être aisément généralisé au cas de l'onde qui peut exister à l'interface entre deux liquides superposés. Nous discuterons ce problème dans le cadre des instabilités d'interface au chapitre 10 (section 10.4.1).

Évaluons l'importance respective des différents termes de la relation (6.58). Nous pouvons l'écrire en faisant apparaître explicitement la longueur capillaire ℓ_c :

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh)\left(1 + k^2\ell_c^2\right). \tag{6.59}$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas où l'épaisseur h de la couche de fluide est nettement plus importante que la longueur capillaire ℓ_c : dans le cas de l'eau, cette dernière vaut environ 3 mm, ce qui justifie le domaine d'étude choisi.

Dans la relation (6.59), le terme multiplicatif en $\tanh(kh)$ est voisin de l'unité pour des ondes à la surface d'une couche d'épaisseur h grande devant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, dites ondes en *eau profonde*. Dans ce cas, l'expression (6.59) devient :

$$c^2 \approx \frac{g}{k}\left(1 + k^2\ell_c^2\right). \tag{6.60}$$

♦ Le premier terme du membre de droite, qui domine aux longueurs d'onde grandes devant la longueur capillaire ℓ_c ($k\ell_c \ll 1$), correspond à une *onde de gravité*. Sa vitesse de phase :

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{6.61}$$

décroît lorsque le vecteur d'onde croît. Cette onde correspond à la *houle* à la surface de la mer.

♦ Dans l'autre limite des courtes longueurs d'onde ($k\ell_c \gg 1$), le second terme domine. La vitesse de phase de l'*onde capillaire* est donnée par :

$$c \approx \sqrt{gk}\,\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma\,k}{\rho}}\,. \tag{6.62}$$

Le minimum de vitesse de l'onde correspond au cas où les effets de la capillarité et de la gravité sont du même ordre : la longueur d'onde λ_c correspondante est égale à $2\pi\,\ell_c$. La longueur capillaire sépare donc approximativement les domaines où la gravité et la capillarité sont respectivement dominants.

$$\lambda_c = 2\pi\,\ell_c = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{\rho\,g}}\,. \tag{6.63}$$

Dans le cas où la longueur d'onde est grande, à la fois devant l'épaisseur h et la longueur capillaire ℓ_c (c'est-à-dire $kh \ll 1$ et $k\ell_c \ll 1$), l'expression (6.59) prend la forme approchée :

$$c \approx \sqrt{gh}. \tag{6.64}$$

Pour ces ondes, dites en *eau peu profonde*, l'épaisseur de la couche de liquide contrôle la vitesse. C'est là l'origine du *déferlement* des vagues, qui est dû à ce que la vitesse de propagation est plus grande à la crête d'une vague qu'à sa base.

Démonstration de l'équation de dispersion des ondes de surface

Soit une couche liquide limitée inférieurement par le plan $y = 0$ et d'épaisseur moyenne h (Fig. 6.17). On cherche des ondes bidimensionnelles caractérisées par le

potentiel des vitesses $\Phi(x, y, t)$. On suppose, d'une part que l'amplitude de l'onde est assez faible pour que les termes $(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}$ soient négligeables et que, d'autre part, la courbure de l'interface reste faible.

Cela se traduit par : $\mathrm{d}y_0(x, t)/\mathrm{d}x \ll 1$ où $y_0(x, t)$ est la position instantanée de la surface. L'équation de Bernoulli (relation (5.36)) pour un tel problème instationnaire s'écrit (en prenant $\varphi = gy$ ou g est l'accélération de la pesanteur et en négligeant le terme en $v^2/2$) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy = \text{constante}. \tag{6.65}$$

La pression à la surface du liquide est donnée par la relation de Laplace (Éq. (1.58) avec $R' \to \infty$) :

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{R} \tag{6.66}$$

où p_0 est la pression extérieure au-dessus de l'interface, γ le coefficient de tension superficielle, et $R = \left(\partial^2 y/\partial x^2\right)^{-1}$ la courbure locale instantanée de la surface. Au fond du récipient (en $y = 0$), la vitesse normale à la surface est nulle et :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \tag{6.67}$$

Sur l'interface, on exprime l'égalité de la composante verticale de la vitesse du fluide et de la vitesse de l'interface, soit :

$$v_y(y = y_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=y_0} = \frac{\partial y_0}{\partial t}\cdot \tag{6.68}$$

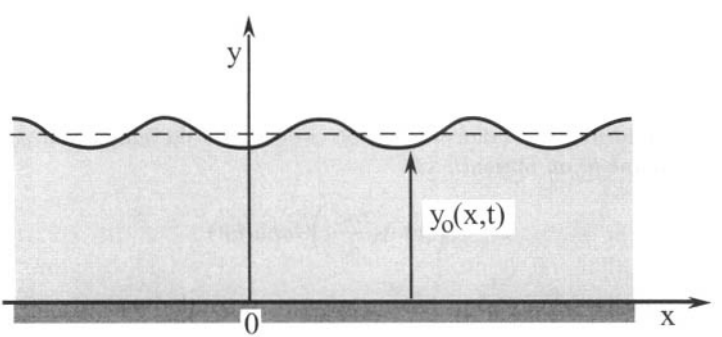


FIG. 6.17 – *Géométrie de la couche de liquide pour l'étude de la propagation des ondes de surface.*

En fait, cette expression n'est exacte qu'au premier ordre, car il existe un terme d'ordre supérieur dont nous discuterons la nature au chapitre 10 (section 10.4.1) et qui traduit l'effet du mouvement convectif horizontal sur le déplacement de l'interface. Le potentiel des vitesses cherché est solution de l'équation de Laplace

$\Delta\Phi = 0$, compte tenu des conditions aux limites énoncées plus haut. On résout cette équation par la méthode de séparation des variables. À cet effet, on recherche des solutions sous la forme du produit d'une fonction f de la variable $u = x - ct$, représentant une onde progressive de célérité c dans la direction de l'axe x , par une fonction g dépendant de la coordonnée verticale y, soit :

$$\Phi(x,\, y,\, t) = f(u)\, g(y) \tag{6.69}$$

(ne pas confondre la fonction g avec l'accélération de la pesanteur introduite plus haut). En reportant cette forme dans l'équation de Laplace, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} g + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ou :} \qquad \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\,.$$

Chacun des deux membres de l'équation ci-dessus dépend séparément de chacune des deux variables u et y. Il doivent donc être séparément constants, soit :

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \text{constante} = -k^2. \tag{6.70}$$

Nous avons directement choisi une constante négative pour le terme dépendant de x, car nous cherchons une solution de comportement sinusoïdal en $\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$ dans la direction x. La solution de l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses s'écrit donc, compte tenu des conditions aux limites de (6.67) et (6.68) :

$$\Phi(x,\, y,\, t) = f(x - ct)\, g(y) = A\, \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}\, \mathrm{ch}(ky) \tag{6.71}$$

où A est une constante qui dépend de l'amplitude de l'onde. La dépendance avec la coordonnée y correspond à une atténuation avec la profondeur. En dérivant l'équation (6.65) par rapport au temps, et en se servant à nouveau de la condition (6.68), on obtient la relation :

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y=y_0} = 0. \tag{6.72}$$

En reportant la forme (6.71) dans l'équation ci-dessus, et en remplaçant $y_0(x,\, t)$ par sa valeur moyenne h, on obtient :

$$\omega^2 = \left(g\, k + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right) \tanh(kh) \tag{6.73}$$

qui conduit à l'expression (6.58) de la vitesse de phase de l'onde $c = \dfrac{\omega}{k}$ écrite au début de cette section.

6.4.2 Trajectoires des particules de fluide lors du passage de l'onde

Utilisons la forme du potentiel de vitesse :

$$\Phi(x,\, y,\, t) = A\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}\mathrm{ch}(ky)$$

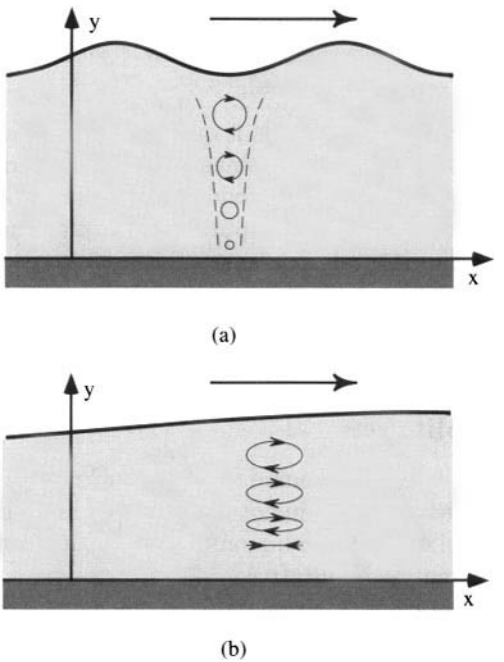


FIG. 6.18 – *Trajectoires des particules de fluide au passage d'une onde ; (a) en eau profonde ; (b) en eau peu profonde. La flèche horizontale donne le sens de propagation de l'onde.*

établie précédemment (Éq. (6.71)). Intégrons par rapport au temps le champ de vitesse obtenu par la relation $\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{grad}\,\Phi$: on obtient alors l'équation (paramétrée par le temps) des trajectoires des particules de fluide dans le plan (x, y) :

$$\Delta x(t) = A\frac{k}{\omega}\cos(\omega t - kx)\mathrm{ch}(ky) \qquad \Delta y(t) = A\frac{k}{\omega}\sin(\omega t - kx)\,\mathrm{sh}(ky)$$

x et y sont les coordonnées de la position moyenne de chaque particule ; $\Delta x(t)$ et $\Delta y(t)$ sont les composantes du déplacement de chaque particule à l'instant t par rapport à cette position. En éliminant le temps entre ces deux relations, on obtient l'équation d'une ellipse :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\mathrm{ch}^2(ky)} + \frac{(\Delta y)^2}{\mathrm{sh}^2(ky)} = \frac{4\,A^2\,k^2}{\omega^2}\,. \tag{6.74}$$

♦ En *eau profonde* et loin du fond, $ky \gg 1$ et donc :

$$\mathrm{ch}^2\,(ky) \approx \mathrm{sh}^2\,(ky) \approx \frac{\mathrm{e}^{2ky}}{4}\,.$$

Les trajectoires sont alors circulaires; l'amplitude du déplacement décroît exponentiellement et devient négligeable dès que la profondeur dépasse quelques longueurs d'onde (Fig. 6.18a).

♦ En *eau peu profonde*, on a : $ky \ll 1$, quel que soit y. Les trajectoires sont donc des ellipses, très allongées au voisinage de la surface, qui deviennent des segments de droite horizontaux vers le fond. Le rapport des longueurs des axes de l'ellipse est de l'ordre de ky. L'amplitude du déplacement des particules dans la direction x (horizontale) reste sensiblement constante (Fig. 6.18b). L'approximation d'*eau peu profonde* revient en fait à négliger la composante de vitesse v_y quel que soit y et à supposer que la composante de vitesse v_x est indépendante de y.

6.4.3 Ondes solitaires

Nous parvenons ici au domaine riche et complexe des ondes non linéaires. Les ondes de surface donnent l'illustration la plus simple des effets correspondants ; aussi, nous en indiquons quelques éléments tout en restant dans le cadre d'une analyse qualitative.

Nous nous intéressons à la propagation d'une perturbation à la surface libre d'une couche de fluide d'épaisseur h, d'amplitude A non négligeable devant h, et localisée sur une largeur Δ (Fig. 6.19). Nous allons montrer que, par un effet de compensation, une telle perturbation peut se propager sans se déformer, et constitue ce qu'on appelle une *onde solitaire*.

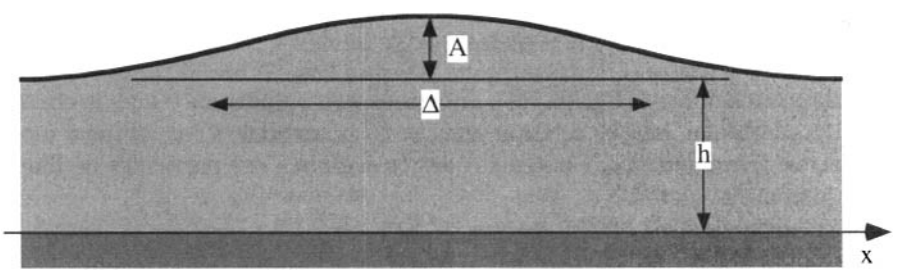


FIG. 6.19 – *L'onde solitaire, d'amplitude A non négligeable devant l'épaisseur h d'une couche de liquide, peut se propager sans se déformer à la surface du liquide.*

Deux effets concourent à modifier le profil de la perturbation au cours de son déplacement.

♦ Un effet d'étalement dû à la dispersion : la perturbation de largeur Δ peut être considérée comme la superposition d'ondes sinusoïdales de fréquences voisines. Supposons que kh reste modéré et développons, à l'ordre le plus bas, la relation (6.58) qui donne la vitesse de l'onde de gravité.

En négligeant le terme dû à la capillarité, nous obtenons :

$$c(k) \approx \sqrt{gh}\left(1 - \frac{k^2\,h^2}{6}\right) \cdot \tag{6.75}$$

On remarque que les composantes de plus petites longueurs d'onde de la perturbation (vecteur d'onde plus grand) se propagent plus lentement. Or, si l'extension spatiale de l'onde est Δ, son spectre de vecteurs d'onde s'étendra entre $k = 0$ et $k \approx 1/\Delta$. La différence de vitesse δc entre ces deux extrêmes a donc pour ordre de grandeur :

$$|\delta c| \approx \sqrt{gh}\frac{h^2}{\Delta^2} \cdot \tag{6.76}$$

Cette différence de vitesse entre les composantes du spectre de l'onde tend à étaler le paquet d'onde : c'est le phénomène classique de dispersion.

♦ Un effet de raidissement du front de l'onde, dû aux effets de non-linéarité : comme la vitesse des ondes croît avec l'épaisseur h, le sommet et la partie basse de la déformation tendent à se déplacer avec des vitesses respectives :

$$c' = \sqrt{g\,(h + A)} \qquad \text{et :} \qquad c = \sqrt{g\,h}.$$

La crête se déplace donc plus rapidement que la base, ce qui tend à causer un raidissement du front, éventuellement suivi d'un déferlement. La variation correspondante de vitesse est de l'ordre de :

$$c' - c \approx \sqrt{\frac{g}{h}}\frac{A}{2} \cdot \tag{6.77}$$

Les effets de dispersion et de non-linéarité se compensent lorsque les différences de vitesse de propagation dues à la dispersion de l'onde (relation (6.76)) et au raidissement de son front (relation (6.77)) sont du même ordre de grandeur, soit lorsque :

$$\sqrt{g\,h}\frac{h^2}{\Delta^2} \approx \sqrt{\frac{g}{h}}A \qquad \text{ou :} \qquad A \approx \frac{h^3}{\Delta^2} \cdot \tag{6.78}$$

L'onde se propagera sans déformation si la compensation se fait en tout point du profil. Par un calcul plus complet, on peut montrer que cela est réalisé pour un profil bien déterminé de la forme :

$$y = h + \frac{A}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{x}{\Delta}\right)} \tag{6.79}$$

avec :

$$A\,\Delta^2 = \frac{4}{3}\,h^3 \tag{6.80}$$

et une vitesse de propagation :

$$c = \sqrt{g\,(h + A)}. \tag{6.81}$$

La propagation de telles ondes, appelées ondes solitaires, peut être observée dans des canaux sur plusieurs kilomètres. On rapporte l'histoire de Scott Russell qui a observé, en 1838, une telle onde solitaire, créée par l'arrêt d'une péniche sur un canal, et l'a suivi pendant plusieurs kilomètres.

6.5 Analogie électrique des écoulements potentiels bidimensionnels

Au chapitre 3 (section 3.3.3), nous avons signalé la correspondance qui pouvait être faite entre la vitesse, dans le cas de l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible, et le champ électrique en électromagnétisme des régimes quasi-permanents. Nous traitons ici plus en détail ce type d'analogie.

Considérons un écoulement plan, potentiel et incompressible d'un fluide. Le champ de vitesse dérive du potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$ et de la fonction de courant $\Psi(x, y)$ par les équations (3.18) et (6.2) avec :

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,. \tag{6.82}$$

Comme div $\mathbf{v}$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ sont tous les deux nuls, on en déduit que les fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ satisfont chacune l'équation de Laplace :

$$\Delta\Phi = 0 \tag{6.83a}$$

$$\Delta\Psi = 0. \tag{6.83b}$$

De façon analogue, le potentiel électrique V créé dans le vide par une distribution de charges statiques ou quasi-statiques vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0. \tag{6.84}$$

En rapprochant les équations (6.83) et (6.84), il est possible d'établir la correspondance entre le potentiel électrique V et le potentiel des vitesses Φ (*analogie directe*), ou bien la fonction de courant Ψ (*analogie inverse*). Dans ce dernier cas, nous allons voir qu'il suffit d'imposer une équipotentielle électrique ayant la géométrie des parois solides; les autres équipotentielles décrivent alors les lignes de courant. Cette correspondance est mise en pratique dans les modèles analogiques d'études d'écoulements plans de fluides parfaits, réalisés en utilisant une feuille de papier graphité parcourue par un courant électrique, ou encore une cuve remplie d'un électrolyte (cuve rhéo-électrique).

6.5.1 Analogie directe

Dans ce cas, on fait correspondre le potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$ au potentiel électrique $V(x, y)$, et le champ de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\Phi$ à la densité de courant $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = -\sigma\,\mathbf{grad}\,V$, σ représentant la conductivité du milieu conducteur. Les lignes de courant du problème hydrodynamique étant tangentes à un obstacle solide, il faut remplacer cet obstacle par une zone isolante de même géométrie que dans le problème électrique. Les équipotentielles du problème électrique (faciles à déterminer expérimentalement) correspondent alors aux équipotentielles des vitesses. Les lignes de courant du problème hydrodynamique pourraient être déterminées ensuite, en traçant les trajectoires orthogonales des équipotentielles obtenues. C'est une méthode peu commode, et on préfère utiliser l'analogie inverse.

6.5.2 Analogie inverse

Dans ce cas, on fait correspondre directement les équipotentielles électriques aux lignes de courant de fluide. Cette fois, il faut remplacer l'obstacle hydrodynamique par un conducteur parfait : la ligne de courant particulière, qui limite l'obstacle dans le problème hydrodynamique, correspond à la ligne équipotentielle du potentiel de l'obstacle du problème électrique.

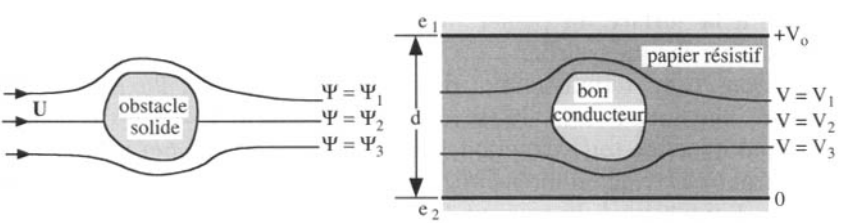


FIG. 6.20 – *Représentation d'un écoulement uniforme de vitesse U, perturbé par un obstacle rigide (a). Dans l'analogie électrique inverse (b) l'écoulement uniforme loin de l'obstacle est simulé par application d'une différence de potentiel V_0 entre les deux électrodes rectilignes parallèles e_1 et e_2 distantes de d et dessinées à l'aide d'une peinture très conductrice sur un papier de résistivité élevée. La forme de l'obstacle est peinte, elle-aussi, avec une peinture de conductivité très supérieure à celle du papier métallisé (condition pour que le champ électrique soit perpendiculaire à l'obstacle dans son voisinage immédiat). Dans cette analogie, les équipotentielles électriques représentent les lignes de courant de l'écoulement.*

Dans la pratique, on utilise un papier de faible conductivité électrique sur lequel on peint, à l'aide d'une peinture très conductrice, un contour de forme identique à celle de l'obstacle du problème hydrodynamique. Les conditions d'écoulement loin de l'obstacle sont reproduites par application d'un potentiel électrique entre des électrodes de position appropriée (Fig. 6.20). Les

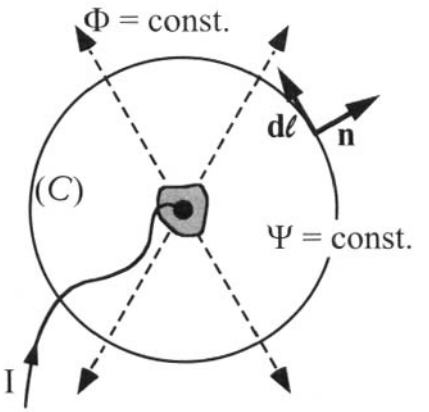


FIG. 6.21 – *Simulation d'une circulation de la vitesse autour d'un obstacle, par application d'un courant entre une électrode conductrice reproduisant la forme de l'obstacle et une feuille résistive. Les équipotentielles ont la même géométrie que les lignes de courant autour de l'obstacle.*

équipotentielles de vitesse sont relevées point par point, en déplaçant une électrode à la surface du papier, de manière à ce que son potentiel reste constant pour chaque courbe.

Montrons pour terminer que, dans l'analogie inverse, l'existence d'une circulation non nulle Γ de la vitesse autour de l'obstacle ($\Gamma = \int \mathbf{v}\cdot\mathbf{dl}$) peut être simulée par injection (ou extraction, suivant le signe désiré pour la circulation) d'un courant électrique d'intensité I, de l'obstacle conducteur vers le papier métallisé. L'intensité I du courant émis s'écrit :

$$I = \int \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,(h\,\mathrm{d}l) = \sigma h \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}l \tag{6.85}$$

où h représente l'épaisseur de la feuille métallisée, σ sa conductivité élecrique, et $\mathbf{j}$ la densité de courant ; $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal au contour $(\mathcal{C})$ le long duquel est évaluée la circulation (Fig. 6.21) et $\mathrm{d}l$ est un élément de longueur sur ce contour. Mais dans l'analogie inverse, on fait correspondre les lignes de champ électrique aux équipotentielles de vitesse, donc aux trajectoires orthogonales des lignes de courant de fluide. On a ainsi :

$$\mathbf{E} = \mathbf{grad}\,\Psi. \tag{6.86}$$

La relation (6.85) s'écrit alors, en remarquant que $\mathbf{n}\,\mathrm{d}l = (-\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}x,\ 0)$ et en

utilisant les relations (6.82) :

$$I = \sigma h \int_{(C)} (\mathbf{grad}\,\Psi \cdot \mathbf{n})\,\mathrm{d}l = \sigma h \int_{(C)} (-v_y)(-\mathrm{d}y) + v_x\,\mathrm{d}x$$
$$= \sigma h \int_{(C)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dl} = (\sigma h)\Gamma \tag{6.87}$$

ce qui montre que l'intensité du courant circulant de l'obstacle vers le liquide est l'analogue de la circulation au facteur σh près. Rappelons que nous avions déjà signalé la correspondance entre les fonctions de courant et de potentiel des vitesses associées à une source et à un tourbillon bidimensionnels à la section 6.2.3. de ce chapitre.

6.6 Potentiel complexe des vitesses

6.6.1 Définition du potentiel complexe

Les potentiels conjugués Φ et Ψ obéissent aux relations de Cauchy définies par les relations (6.82). On peut définir dans le plan complexe une fonction *potentiel complexe* $f(z)$, telle que :

$$f(z) = \Phi(x, y) + \mathrm{i}\Psi(x, y). \tag{6.88}$$

La fonction $f(z)$ est une fonction analytique qui ne dépend que de la variable complexe $z = x + \mathrm{i}y$. Considérons la fonction dérivée, appelée *vitesse complexe* :

$$w(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\cdot \tag{6.89}$$

En évaluant la dérivée pour un accroissement $\mathrm{d}z$ réel de la variable complexe, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$ (l'affixe de z se déplace le long de l'axe des réels), on trouve :

$$w(z) = \frac{\partial(\Phi + \mathrm{i}\Psi)}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = v_x - \mathrm{i}\,v_y.$$

Un déplacement le long de l'axe imaginaire ($\mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$) donne le même résultat :

$$\frac{\partial(\Phi + \mathrm{i}\Psi)}{\mathrm{i}\partial y} = -\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} = -\mathrm{i}\,v_y + v_x = w(z).$$

Plus généralement, quelle que soit la direction de l'accroissement de l'affixe de z, on a toujours :

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = v_x - \mathrm{i}\,v_y = w(z). \tag{6.90}$$

Déterminons la signification de la circulation complexe $\overline{\Gamma}(z)$ sur un contour fermé $(\mathcal{C})$.

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}(z) = \int_{(\mathcal{C})} w(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{(\mathcal{C})} (v_x - \mathrm{i}\,v_y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \\ &= \int_{(\mathcal{C})} (v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_{(\mathcal{C})} (v_x\,\mathrm{d}y - v_y\,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Soit :

$$\overline{\Gamma}(z) = \int_{(\mathcal{C})} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dl} + \mathrm{i}\int_{(\mathcal{C})} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}l = \Gamma + \mathrm{i}\,Q \tag{6.91}$$

où $\mathbf{n}$ représente le vecteur unitaire normal à l'élément de contour $\mathbf{dl}$. Le premier terme représente la circulation, le second, le débit de fluide (mesuré par unité de longueur perpendiculaire au plan de l'écoulement), à partir de sources situées à l'intérieur du contour $(\mathcal{C})$. Pour un écoulement dans un domaine simplement connexe en l'absence de source, $\overline{\Gamma}(z) = 0$: sur un contour fermé, la fonction $f(z)$ est parfaitement définie en chaque point.

6.6.2 Potentiel complexe de quelques écoulements

Aux écoulements plans étudiés aux sections 6.2.3 et 6.2.4, on peut faire correspondre les potentiels complexes suivants :

(i) Écoulement uniforme

$$f(z) = U\,z.$$

En utilisant un paramètre complexe $U = U_x - \mathrm{i}\,U_y$, on décrit un écoulement dans une direction quelconque du plan.

(ii) Tourbillon et source

Nous avons vu aux sections 2.3.2 et 2.3.3 la correspondance entre les lignes de courant d'un de ces écoulements et les lignes équipotentielles de l'autre. Ces deux écoulements peuvent être décrits par l'expression commune du potentiel complexe :

$$f(z) = a_0 \log z \tag{6.92}$$

où le coefficient a_0 est complexe. On calcule la vitesse complexe par dérivation du potentiel complexe ; on déplace pour cela l'affixe de z le long de l'axe polaire, donc à angle polaire constant ; on a alors :

$$\mathrm{d}z_{(\text{à } \theta \text{ constant})} = \mathrm{d}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{d'où :} \qquad w(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Avec $f(z) = a_0 \log z$, on trouve :

$$w(z) = \frac{a_0}{z} = \frac{a_0}{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

d'où, en coordonnées polaires,

$$v_r - \mathrm{i}\, v_\theta = \frac{a_0}{r}.$$

♦ Si a_0 est réel $\left(a_0 = \dfrac{Q}{2\pi}\right)$, alors :

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} \qquad v_\theta = 0$$

et on retrouve le champ de vitesse créé par une source de débit Q.

♦ Si a_0 est imaginaire pur $\left(a_0 = -\mathrm{i}\dfrac{\Gamma}{2\pi}\right)$, alors :

$$v_r = 0, \qquad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

ce qui représente le champ de vitesse créé par un tourbillon de circulation Γ.

(iii) Dipôle

Le potentiel complexe d'un dipôle à deux dimensions et le champ de vitesse correspondant s'écrivent respectivement :

$$f(z) = -\frac{p}{2\pi\, z} \tag{6.93}$$

et :

$$w(z) = \frac{p}{2\pi\, z^2}\,.$$

D'où :

$$v_r = \frac{p}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} \qquad v_\theta = \frac{p}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r^2}$$

résultats identiques à ceux obtenus aux relations (6.14).

(iv) Écoulements autour d'un dièdre ou près d'un point d'arrêt

Comme dernière application de la méthode du potentiel complexe, nous allons traiter maintenant cette classe d'écoulements, très importants dans la pratique. Ils sont définis par des potentiels complexes de la forme

$$f(z) = C\, z^{m+1} \tag{6.94}$$

correspondant à des écoulements autour d'un dièdre formé par l'intersection de deux lignes. En effet, le potentiel des vitesses et la fonction de courant en coordonnées polaires s'écrivent respectivement :

$$\Phi = C\, r^{m+1} \cos(m+1)\theta \qquad \Psi = C\, r^{m+1} \sin(m+1)\theta.$$

On déduit, par dérivation de Φ, les composantes de la vitesse :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (m+1)\, C\, r^m \cos(m+1)\theta \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (m+1)\, C\, r^m \sin(m+1)\theta. \end{aligned} \tag{6.95}$$

Les droites d'équation $\theta = 0$ et $\theta = n\pi/(m+1)$, avec n entier positif ou négatif, sont donc des lignes de courant pour lequelles $\Psi = 0$ quel que soit r. Elles représentent l'intersection de parois planes et rigides avec le plan de l'écoulement. Examinons à présent les différentes formes des dièdres, suivant la valeur du paramètre m (Fig. 6.22).

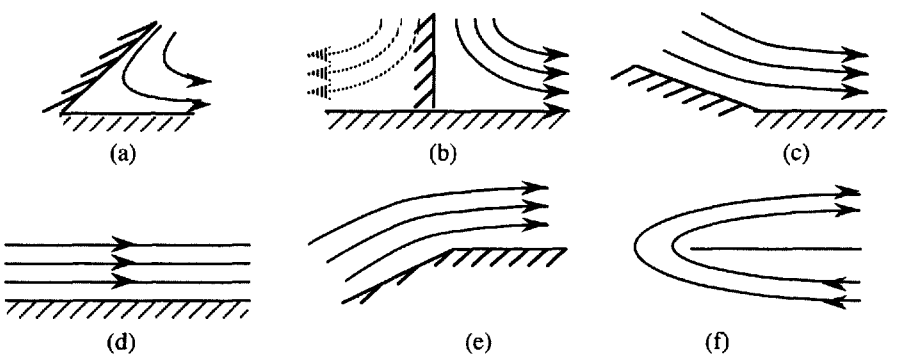


FIG. 6.22 – *Écoulements dont le potentiel des vitesses est de la forme* $f(z) = C\, z^{m+1}$. *(a)* $m > 1$; *(b)* $m = 1$; *(c)* $0 < m < 1$; *(d)* $m = 0$; *(e)* $-1/2 < m < 0$; *(f)* $m = -1/2$.

♦ Le cas $m > 1$, représente un écoulement à l'intérieur d'un dièdre formant un angle aigu (Fig. 6.22a). Dans ce cas, le module de la vitesse tend vers zéro à l'origine comme r^m.

♦ Pour $m = 1$, on a $f(z) = Cz^2$; cela correspond à l'écoulement à l'intérieur d'un angle droit ou autour d'un point d'arrêt sur une plaque plane (à condition alors de superposer l'écoulement symétrique par rapport à l'axe y) (Fig. 6.22b). Il existe dans ce cas une ligne de courant perpendiculaire à la plaque, qui se termine avec une vitesse nulle à un point de stagnation sur la paroi.

♦ Pour $0 < m < 1$, la fonction $f(z)$ représente l'écoulement à l'intérieur d'un dièdre d'angle obtus $\alpha = \pi/(m+1)$, délimité par les plans solides $\theta = 0$ et $\theta = \pi/m + 1$ correspondant à $n = 0$ et à $n = 1$ (Fig. 6.22c).

♦ Pour $m = 0$, on a un écoulement parallèle à un plan (Fig. 6.22d).

♦ Pour $-1/2 < m < 0$, on a, en considérant toujours les valeurs $n = 0$ et $n = 1$ pour les parois, un écoulement à l'extérieur d'un dièdre d'angle obtus ($m > -1/3$), ou aigu ($m < -1/3$) (Fig. 6.22e).

♦ $m = -1/2$ correspond à un écoulement autour d'une demi-plaque plane (Fig. 6.22f).

Lorsque m est négatif, le module de la vitesse à l'origine tend vers l'infini comme r^m parce que l'écoulement est extérieur au dièdre, et non plus intérieur comme dans le cas où m était positif.

Nous verrons plus loin, au chapitre 9 (section 9.5.2), que ces résultats sont à reconsidérer lorsqu'on tient compte de la viscosité du fluide : celle-ci entraîne que la vitesse doit diminuer continûment jusqu'à zéro lorsqu'on s'approche de parois solides immobiles. Les solutions que nous avons étudiées s'appliquent suffisamment loin des plaques ; elles se raccordent à la condition de vitesse nulle à la paroi par une zone de transition appelée couche limite.

6.6.3 La transformation conforme

Méthode de la transformation conforme

Considérons les variables complexes $z = x + \mathrm{i}y$ et $Z = X + \mathrm{i}Y$. Supposons que la variable complexe Z soit une fonction analytique de z :

$$Z = g(z). \tag{6.96}$$

Alors, on peut faire correspondre au réseau des lignes de courant et équipotentielles, $\Psi(x, y) =$ constante et $\Phi(x, y) =$ constante dans le plan (x, y), un réseau correspondant de lignes dans le plan (X, Y) (Fig. 6.23).

La propriété fondamentale de la transformation conforme ainsi définie est qu'elle conserve les angles. En effet, considérons le point d'affixe z_0 et son image Z_0 (Fig. 6.23). Les accroissements δz_1 et δz_2 le long de deux arcs de courbes (C_1) et (C_2) se coupent en z_0, et les accroissements correspondants δZ_1 et δZ_2 s'écrivent :

$$\delta Z_1 = g'(z_0)\,\delta z_1 \qquad \text{et} \qquad \delta Z_2 = g'(z_0)\,\delta z_2.$$

Si $g'(z_0)$ reste fini, on en déduit :

$$\frac{\delta Z_2}{\delta Z_1} = \frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg\,\delta Z_2 - \arg\,\delta Z_1)} = \frac{|\delta z_2|}{|\delta z_1|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg\,\delta z_2 - \arg\,\delta z_1)}$$

soit :

$$\frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|} = \frac{|\delta z_2|}{|\delta z_1|} \qquad \text{et} \qquad \arg\delta Z_2 - \arg\delta Z_1 = \arg\delta z_2 - \arg\delta z_1.$$

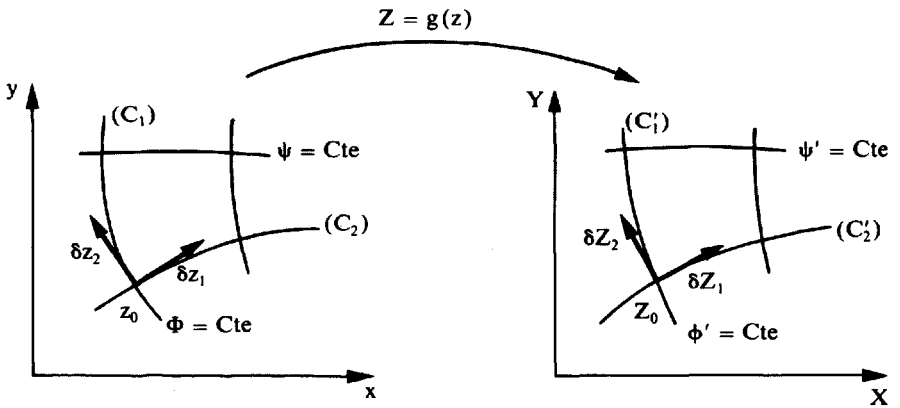


FIG. 6.23 – *Image des réseaux d'équipotentielles et des lignes de courant par une transformation conforme $Z = g(z)$. Les angles entre ces deux réseaux orthogonaux sont conservés dans la transformation dès lors que la fonction $g(z)$ ne présente pas de singularité.*

Ainsi, le facteur de variation des longueurs des segments, lors de la transformation, est indépendant de leur direction. L'angle des courbes (C_1) et (C_2) est d'autre part égal à l'angle des courbes images, sauf aux points d'affixe z_0 tels que $g'(z_0)$ soit égal à zéro ou à l'infini.

De cette propriété de conservation des angles, on déduit que les réseaux images des réseaux $\Phi(x, y)$ = constante et $\Psi(x, y)$ = constante sont des réseaux orthogonaux comme les réseaux de départ eux-mêmes.

Les points singuliers de la transformation conforme correspondent aux points où $g(z)$ est nul ou infini. En ces points, les angles ne se conservent pas, et nous montrons ci-dessous que le rapport des angles objets et images est égal à l'ordre du zéro de la fonction g'.

Démonstration Appelons n l'ordre de la première dérivée non nulle de la fonction $g(z)$ au point z_0. On développe la fonction $g(z)$ à l'ordre n autour de z_0 avec :

$$\delta Z \approx \frac{(\delta z)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n g(z)}{\partial z^n} \right)_{z=z_0}.$$

Le rapport de deux acroissements δz_1 et δz_2 et de leurs transformés δZ_1 et δZ_2 vérifient donc :

$$\frac{\delta Z_2}{\delta Z_1} = \frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|} e^{i(\arg \delta Z_2 - \arg \delta Z_1)} = \frac{(\delta z_2)^n}{(\delta z_1)^n} = \frac{|\delta z_2|^n}{|\delta z_1|^n} e^{i\, n\, (\arg \delta z_2 - \arg \delta z_1)}.$$

On a donc bien : $\arg \delta Z_2 - \arg \delta Z_1 = n\,(\arg \delta z_2 - \arg \delta z_1)$.

Supposons que le potentiel complexe $f(z)$ caractérise un écoulement dans un domaine du plan (x, y) et que $h(Z)$ représente la transformation inverse

de la transformation conforme $Z = g(z)$ définie par la relation (6.96). La fonction :

$$f(h(Z)) = F(Z) \tag{6.97}$$

décrit un écoulement dans le plan (X, Y) dont les équipotentielles et les lignes de courant sont respectivement les images obtenues par la transformation des équipotentielles et des lignes de courant dans le plan (x, y). En particulier, aux obstacles dans le plan objet, correspondent, par la loi de transformation, des obstacles dans le plan image, transformés des précédents. Il est ainsi possible d'obtenir directement la vitesse et le potentiel complexe par la transformation $g(z)$.

Transformation d'un plan en un dièdre

À la section 6.6.2 (iv), nous avons étudié l'écoulement d'un fluide à l'intérieur ou à l'extérieur d'un dièdre, en utilisant la méthode du potentiel complexe. Une manière équivalente d'étudier ce type d'écoulement est de transformer l'écoulement uniforme parallèle à un plan à l'aide de la transformation conforme suivante :

$$z = h(Z) = Z^{m+1}. \tag{6.98}$$

Dans cette transformation, le potentiel complexe $f(z) = U\,z$ de l'écoulement de départ est transformé en un potentiel :

$$F(Z) = U\,Z^{m+1} \tag{6.99}$$

qui décrit précisément le type d'écoulement à étudier, comme nous l'avons montré au paragraphe 6.6.2 (iv). On peut remarquer que le fait que le plan soit transformé en un dièdre est justement dû à la singularité de la fonction inverse de $h(Z)$ à l'origine ; en ce point, les angles ne sont pas conservés, et l'angle plat dans le plan objet est transformé en un angle aigu, ou obtus, suivant la valeur du paramètre m.

La transformation de Joukovski – Modélisation d'une aile d'avion dans un écoulement potentiel

Cette transformation est la première d'une série de transformations conformes qui permettent de passer de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à l'écoulement autour d'un profil d'aile à deux dimensions. Grâce à elle, nous pourrons déterminer le champ de vitesse d'écoulement autour d'un élément de plaque plane, placée dans un écoulement uniforme à l'infini et incliné par rapport à la plaque.

(i) Définition

La transformation de Joukovski est définie par la relation :

$$Z = g(z) = z + \frac{R^2}{z} \tag{6.100}$$

où R est un nombre réel. Elle transforme un cercle, centré à l'origine et de rayon r dans le plan (x, y), en une ellipse dans le plan (X, Y). En effet, pour $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ (équation polaire d'un cercle), on a :

$$Z = X + \mathrm{i}\,Y = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \frac{R^2}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = \left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta + \mathrm{i}\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta.$$

En éliminant l'angle θ entre les expressions de X et Y, on obtient :

$$\frac{X^2}{\left(r + \dfrac{R^2}{r}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r - \dfrac{R^2}{r}\right)^2} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse dont les deux foyers P_1 et P_2 sont situés sur l'axe OX, aux points d'abscisses $X = \pm\,2R$ (Fig. 6.24).

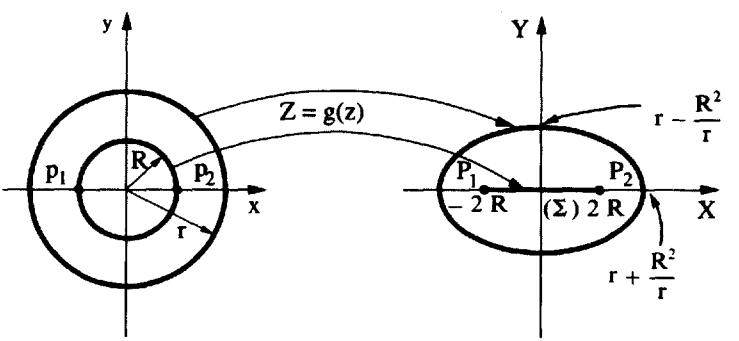


FIG. 6.24 – *Image d'un cercle dans la transformation de Joukovski. L'ellipse obtenue se réduit à un segment de droite* $[-2R, +2R]$ *lorsque le rayon du cercle objet coïncide avec le paramètre* R *de la loi de transformation.*

Lorsque $r = R$ (le rayon du cercle est égal au paramètre de la transformation de Joukovski), on a :

$$Z = 2\,R\cos\theta.$$

L'ellipse devient alors le segment de droite (Σ), limité par les points de coordonnées $Y = 0$ et $X = \pm\,2R$. Dans ce dernier cas, lorsqu'un point objet décrit une fois le cercle, son image dans la transformation décrit deux fois le segment ; elle parcourt une fois la partie « supérieure » (pour θ variant de 0 à π), et une fois la partie « inférieure » (θ variant de π à 2π). On remarque la non conservation des angles aux points P_1 et P_2, transformés des points p_1 et p_2 d'affixe $z = \pm\,R$. En effet, la dérivée $g'(z) = 1 - R^2/z^2$ de la fonction $g(z)$ qui définit la transformation conforme, s'annule aux points p_1 et p_2.

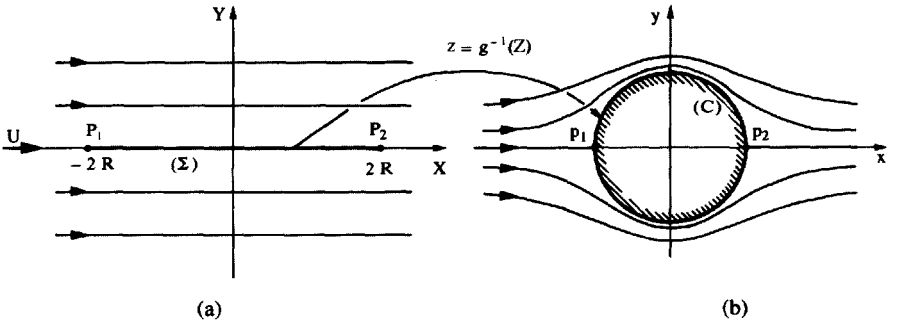


FIG. 6.25 - *Écoulement autour d'un plan en l'absence d'incidence (a) et son image (b) dans la transformation inverse de Joukovski (relation (6.100)).*

(ii) Transformation inverse d'un écoulement parallèle à un élément de plaque plane

Considérons à présent dans le plan *image* (X, Y) un écoulement uniforme parallèle à un plan (Π), dont la trace par le plan de figure est précisément le segment (Σ) considéré plus haut (Fig. 6.24). Le potentiel complexe de cet écoulement est :

$$F(Z) = U\,Z.$$

Dans le plan *objet* (x, y), il lui correspond l'écoulement autour d'un cercle $(\mathcal{C})$, de rayon R centré à l'origine, avec une vitesse U uniforme loin du cercle (Fig. 6.25b). Le potentiel complexe correspondant s'écrit directement :

$$f(z) = F[g(z)] = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \tag{6.101}$$

En prenant la partie réelle de $f(z)$, nous retrouvons le potentiel des vitesses Φ, que nous avions déjà déterminé à la section 6.2.4.

Au voisinage du point d'arrêt p_1 du cercle $(\mathcal{C})$, on a localement le même écoulement que vers un plan perpendiculaire (Fig. 6.22b) ; dans la transformation, il lui correspond un écoulement autour du bord d'attaque du plan (Σ) et parallèle à celui-ci (Fig. 6.22f).

(iii) Potentiel complexe d'un écoulement arrivant obliquement sur un élément de plaque plane

Étudions à présent l'écoulement autour de l'élément plan (Σ) dans l'espace (X, Y) lorsque la direction de (Σ) fait un angle d'incidence α avec la direction de la vitesse U, et qu'il existe en plus une circulation Γ de la vitesse autour de (Σ). Ce problème simule de façon simplifiée l'écoulement autour d'une aile. Nous commençons par établir le potentiel complexe dans l'espace (x, y). Il

suffit pour cela d'effectuer une rotation des axes d'un angle α (Fig. 6.26a), en transformant z en $z_1 = z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ dans le potentiel donné par l'équation (6.101). On ajoute ensuite le potentiel complexe associé à l'écoulement de circulation Γ autour du cylindre (Éq. (6.92)). On obtient ainsi :

$$f_2(z) = U\left(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + \frac{R^2}{z^{-i\alpha}}\right) + \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Log}\left(\frac{z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{R}\right). \tag{6.102}$$

La transformation conforme conserve les angles en dehors des points où la dérivée s'annule, et l'angle d'incidence dans le plan (X, Y) sera donc lui aussi égal à α. On peut montrer par ailleurs que la transformation conforme conserve également la circulation. Le potentiel complexe :

$$F_2(Z) = f_2(g^{-1}(z))$$

obtenu à partir de l'équation (6.102) par la transformation inverse de $g(z)$ représente donc le potentiel de l'écoulement autour de l'élément de plaque (Σ) (Fig. 6.26b).

En fait, la transformation inverse de $g(z)$ n'est pas une fonction analytique et on ne peut pas exprimer directement le potentiel correspondant F_2. Cependant, seule la vitesse complexe nous est nécessaire, et elle peut être déterminée aisément.

(iv) Vitesse complexe sur le plan solide

Nous avons :

$$W(z) = \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}Z} = \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z} = \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}z}\frac{1}{g'(z)} \tag{6.103a}$$

soit :

$$W(z) = U\frac{z^2}{z^2 - R^2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - \frac{R^2}{z^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} + \mathrm{i}\,\frac{\Gamma}{2\pi\,z}\right). \tag{6.103b}$$

Nous allons limiter notre étude au calcul de la vitesse complexe sur la surface de l'élément plan (Σ). Comme celui-ci est l'image du cercle (C), il suffit de prendre $z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ dans l'équation précédente, soit :

$$W(z) = \frac{U}{1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha - 2\theta)} + \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi\,R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right).$$

On remarque que la vitesse W dans le plan image est ainsi exprimée en fonction du rayon R du cercle, et de l'angle polaire θ dans le plan objet de la figure 6.26a. Rappelons que $Z = X + \mathrm{i}Y$ et θ sont reliés par la formule (6.100) ; sur le cercle d'équation $r = R$, elle conduit à : $X = 2R\cos\theta$ et $Y = 0$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ on obtient, pour la variation de W sur la surface de l'élément plan (Σ) :

$$W(\theta) = \frac{U\sin(\theta - \alpha) + \dfrac{\Gamma}{4\pi\,R}}{\sin\theta}. \tag{6.104}$$

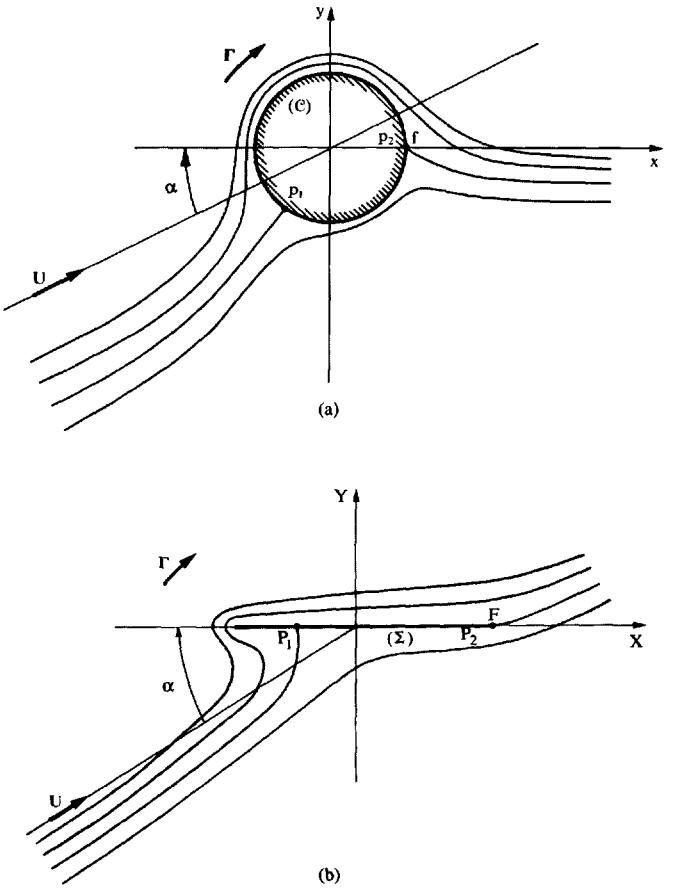


FIG. 6.26 – *(a) Écoulement autour d'un cylindre circulaire sous incidence α et avec une circulation Γ ; (b) image de cet écoulement par la transformation de Joukovski.*

Comme on pouvait le prévoir, l'expression obtenue est réelle puisque la composante de vitesse perpendiculaire au plan doit être nulle. Le tracé des lignes de courant dans les plans (x, y) et (X, Y) est donné par les figures 6.26a et 6.26b respectivement. On remarque en particulier les deux points d'arrêt P_1 et P_2 sur la plaque (Σ). Ces deux points correspondent à des valeurs de θ telles que :

$$\sin(\theta - \alpha) = -\frac{\Gamma}{4\pi R U}$$

qui sont placés dissymétriquement lorsqu'il y a une circulation. Ces points seront ceux où $W = 0$, et ils existeront seulement si la circulation Γ est inférieure à $4\pi R U$ en valeur absolue.

(v) Condition de Kutta

Cherchons à présent la valeur particulière de la circulation qui permet de localiser le point P_2, image du point d'arrêt p_2, juste sur le bord de fuite F (c'est-à-dire sur l'arête aval de la plaque) la figure 6.26. On montre que cela correspond à la configuration stable de l'écoulement autour d'un profil d'aile sous incidence : la circulation autour de l'aile s'ajuste à la valeur qui permet de satisfaire cette condition. Le point p_2 est alors confondu avec le point du contour (C) dont l'image est le bord de fuite F dans le plan (X, Y). Le point appelé f correspond à $\theta = 0$, et on doit donc avoir :

$$w(\theta = 0) = 0 \qquad \text{soit :} \qquad 0 = -U \sin\alpha + \frac{\Gamma}{4\pi R}.$$

D'où :

$$\Gamma = 4\pi R U \sin\alpha. \tag{6.105}$$

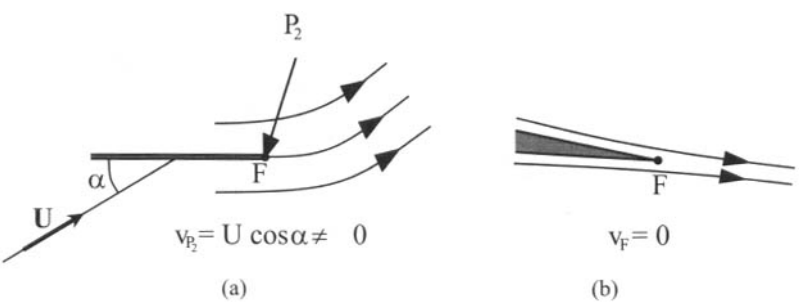


FIG. 6.27 – *Comparaison des vitesses sur le bord de fuite d'un dièdre d'angle nul (a), et d'angle fini (b).*

Cette relation constitue la *condition de Kutta.* Notons cependant qu'au point P_2, image du point d'arrêt p_2, la vitesse n'est pas nulle car le dénominateur de la vitesse complexe W s'annule également (Fig. 6.27a) ; le bord de fuite est en effet un point singulier de la transformation. La vitesse vaut, en ce point (en tenant compte de la condition (6.105) et en développant l'expression (6.104) au voisinage de $\theta = 0$) :

$$W(\theta = 0) = U \cos\alpha = V_{P_2} = V_F.$$

La vitesse est nulle sur le bord de fuite (Fig. 6.27b), si l'angle entre les faces inférieure et supérieure de la surface portante est fini, comme pour des profils réels (dans les cas de la figure 6.26 et de la figure 6.27a, cet angle est nul). En effet, nous avons vu au moment de l'étude des écoulements au voisinage de l'arête d'un dièdre (6.2 (iv)) que la vitesse s'annule sur l'arête d'un dièdre d'angle inférieur à 180°(cas des figures 6.22a, b et c).

(vi) Estimation de la portance sur une aile

L'expression obtenue plus haut pour la circulation va nous permettre d'évaluer l'ordre de grandeur de la portance qui s'exerce sur une aile d'avion au décollage. Elle s'exprime en effet sous la forme (relation (6.44)) :

$$\mathbf{F}_p = \rho\,\mathbf{U} \wedge \Gamma.$$

Compte tenu de la relation (6.105), nous trouvons, pour l'ordre de grandeur de la portance par unité de longueur dans la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement :

$$F_p \approx \pi\,\rho\,U^2\,(4R)\sin\alpha.$$

Notons L l'envergure de l'aile et $\ell = 4R$ sa largeur, appelée corde. On obtient finalement, pour la portance sur la totalité de l'aile :

$$F_p \approx \pi\,\rho\,U^2\,(L\ell)\sin\alpha. \tag{6.106}$$

Des ordres de grandeur, pour trois types d'avion, sont les suivants :

	Vitesse U au décollage	Corde ℓ	Envergure	Angle de cabrage	Portance F_p	Masse de l'appareil
Avion de ligne type Boeing 747	300 km/h	9 m	60 m	10°	$3 \cdot 10^7$ N	300 t
Avion de tourisme type Cessna	100 km/h	1,70 m	9 m	13°	10^4 N	900 kg
Avion de chasse type Mirage F1	350 km/h	5 m	9 m	20°	$6 \cdot 10^5$ N	16 t

On remarque que l'avion de ligne décolle grâce à une surface de voilure importante, mais avec des angles de cabrage modérés, pour des impératifs de confort. L'avion de tourisme peut se contenter d'une plus faible portance, de par sa masse plus faible. Enfin, l'avion de chasse décolle avec des angles de cabrage très élevés et une vitesse assez importante, pour compenser une surface de voilure plus réduite.

Le plan portant n'est qu'une approximation grossière du profil d'une aile réelle. Il contient cependant la physique des mécanismes qui sont à l'origine de la sustentation, par l'effet conjugué d'un écoulement incident et de la présence d'une circulation de la vitesse autour du profil. Par ailleurs, en décentrant progressivement le cercle auquel on applique la transformation de Joukovski (Fig. 6.24), on obtient des images qui se rapprochent très fortement des profils d'ailes réelles.

Notons toutefois, pour terminer, que ces études bidimensionnelles de l'aile négligent les effets importants liés à la tridimensionnalité. Il apparaît en particulier une structure tourbillonnaire qui se prolonge à partir des bouts d'aile, dont nous dirons quelques mots au chapitre 9 (section 9.6.1).

Annexe A-1

Potentiels des vitesses et fonctions de courant d'écoulements plans

Type d'écoulement	Potentiel des vitesses	Fonction de courant
écoulement uniforme à deux dimensions	$\Phi = U\,x$	$\Psi = U\,y$
écoulement uniforme à trois dimensions de vitesse U (coordonnées cylindriques)	$\Phi = U\,x$	$\Psi = -U\dfrac{r^2}{2}$
écoulement uniforme à trois dimensions de vitesse U (coordonnées sphériques)	$\Phi = U\,r\cos\varphi$	$\Psi = \dfrac{1}{2}U\,r^2\sin^2\varphi$
tourbillon (coordonnées cylindriques)	$\Phi = \dfrac{\Gamma\theta}{2\pi}$	$\Psi = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Log}\,\dfrac{r}{r_0}$
source ponctuelle 2D (coordonnées cylindriques)	$\Phi = \dfrac{Q}{2\pi}\mathrm{Log}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)$	$\Psi = \dfrac{Q}{2\pi}\theta$
source ponctuelle 3D (coordonnées sphériques)	$\Phi = -\dfrac{Q}{4\pi r}$	$\Psi = -\dfrac{Q}{4\pi}\cos\varphi$
dipôle de courant 2D (coordonnées cylindriques)	$\Phi = -\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{2\pi\,r^2}$	$\Psi = -\dfrac{p}{2\pi}\,\dfrac{\sin\theta}{r}$
dipôle de courant 3D (coordonnées sphériques)	$\Phi = -\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\,r^3}$	$\Psi = \dfrac{p\sin^2\varphi}{4\pi\,r}$
écoulement autour d'un cylindre circulaire	$\Phi = U\,r\,\cos\theta\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right)$	$\Psi = -U\,r\,\sin\theta\left(1-\dfrac{R^2}{r^2}\right)$
écoulement autour d'une sphère (coordonnées sphériques)	$\Phi = U\,r\,\cos\varphi\left(1+\dfrac{R^3}{2r^3}\right)$	$\Psi = \dfrac{U}{2}\left(r^2-\dfrac{R^3}{r}\right)\sin^2\varphi$
dièdre d'angle $\alpha = \dfrac{\pi}{m+1}$	$\Phi = C\,r^{m+1}\cos(m+1)\theta$	$\Psi = C\,r^{m+1}\sin(m+1)\theta$

Annexe A-2

Relation fonction de courant – composantes des vitesses

Écoulement à deux dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}$	$v_y = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$
Écoulement à deux dimensions (coordonnées polaires)	$v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta}$	$v_\theta = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial r}$
Écoulement de révolution (coordonnées cylindriques)	$v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$	$v_x = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial r}$
Écoulement de révolution (coordonnées sphériques)	$v_r = \dfrac{1}{r^2 \sin\varphi}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$	$v_\varphi = -\dfrac{1}{r \sin\varphi}\dfrac{\partial \Psi}{\partial r}$

Relation potentiel des vitesses – composantes des vitesses

Ces relations sont simplement les expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques de la relation générale $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\Phi$.

Écoulement à deux dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$	$v_y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$	
Écoulement à deux dimensions (coordonnées polaires)	$v_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}$	
Écoulement à trois dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$	$v_y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$	$v_z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}$
Écoulement à trois dimensions (coordonnées cylindriques)	$v_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}$	$v_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$
Écoulement à trois dimensions (coordonnées sphériques)	$v_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$	$v_\theta = \dfrac{1}{r \sin\varphi}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}$

Annexe A-3

Un fluide presque parfait : l'hélium superfluide

1 Généralités

À une temperature de transition $T_\lambda = 2{,}172$ K, l'isotope de nombre de masse 4 de l'hélium liquide, pompé sous une pression de 37 mm de mercure, subit une transition de phase de deuxième espèce et passe dans l'état

superfluide. Comme les atomes d'hélium 4 sont des bosons (le noyau a un nombre pair de nucléons), on a rapproché cette transition d'une condensation de *Bose-Einstein*. Effectivement, on peut considérer qu'une fraction finie du fluide peut être représentée par une fonction d'onde quantique macroscopique ; mais les interactions entre atomes sont importantes et une représentation de type gaz parfait, comme celle du modèle de Bose-Einstein, n'est pas valable. La condensation est à l'origine de la possibilité d'observer des écoulements sans viscosité, qui fait de l'hélium à basse température un modèle de fluide parfait. L'isotope 3 de l'hélium subit une transformation similaire à une température de l'ordre de 10^{-3} K. On a alors condensation de paires de fermions en interaction (qui sont des bosons), comme dans le cas des paires d'électrons responsables de la supraconductivité. Notons que le passage du courant dans les supraconducteurs peut se décrire par des équations analogues aux équations de mouvement de l'hélium superfluide avec, en plus, présence du champ électromagnétique.

2 Modèle à deux fluides de l'hélium superfluide

À température finie, on peut considérer qu'il y a coexistence entre deux fluides : un superfluide sans viscosité et un fluide normal visqueux qui peut interagir avec les parois (il correspond aux excitations thermiques – rotons et phonons – du fluide). On peut définir, pour chaque phase fluide, une vitesse ($\mathbf{v_s}$ et $\mathbf{v_n}$) et une densité partielle (ρ_s et ρ_n) telle que $\rho_s + \rho_n = \rho$ (densité de l'hélium liquide), et $\rho_s \mathbf{v_s} + \rho_n \mathbf{v_n} = \rho \mathbf{v}$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse globale du liquide.

Le superfluide peut être décrit par l'existence d'un fonction d'onde macroscopique $\sqrt{\rho_s} e^{i\varphi(r)}$ commune à tous les atomes. La fonction $\varphi(x, y, z, t)$ s'interprète comme la phase de cette « fonction d'onde macroscopique ». En l'absence d'écoulement superfluide, il existe un ordre à grande distance caractérisé par le fait que la phase est la même en tous points (comme la direction de l'aimantation pour un système magnétique). La vitesse superfluide $\mathbf{v}_s$ dérive du potentiel $\varphi(x, y, z, t)$ comme dans un courant quantique ordinaire par :

$$\mathbf{v}_s = \frac{h}{2\pi\, m} \mathbf{grad}\, \varphi \tag{A-6.1}$$

(où h est la constante de Planck et m la masse de l'atome d'hélium). Cette formule implique bien que l'écoulement superfluide est irrotationnel. Nous verrons, en fin de chapitre 7, que cet écoulement coexiste avec des tourbillons quantiques qui prennent en compte la vorticité éventuelle.

Suivant les cas, on observe les propriétés de l'un ou l'autre fluide :

♦ Lorsqu'une pile de disques plans distants de quelques millimètres oscille dans un bain d'hélium, ils entraînent le fluide normal, qui est le seul à se déplacer. On peut ainsi mesurer la densité relative du fluide normal, qui varie de la densité totale ρ à T_λ à 0 à basse température, où les excitations sont négligeables.

♦ En revanche, seul le superfluide peut passer sans difficulté par des filtres poreux très fins (de 10^2 à 10^4 Å), à travers lesquels le débit de fluide normal sera négligeable.

3 Mise en évidence expérimentale de l'existence d'une composante superfluide s'écoulant sans aucune dissipation d'énergie

3.1 Films d'hélium superfluide

Au-dessus d'une surface liquide, apparaît sur les parois d'un récipient un film très mince (100 Å) de molécules retenues à la paroi par les forces de Van der Waals. Dans le cas d'un fluide normal, les forces visqueuses sont trop fortes et empêchent tout écoulement. En revanche, dans l'hélium superfluide, le film, appelé film de Rollin, peut s'écouler avec un débit suffisant pour que le récipient se vide dans un autre placé en dessous.

3.2 Écoulement à travers des trous de petite dimension

On peut observer un écoulement mesurable dans l'hélium superfluide, même sous une différence de pression nulle (donc sans dissipation) jusqu'à une vitesse critique, souvent d'autant plus grande que les pores sont plus petits (typiquement 10 microns ou moins) et qui peut atteindre plusieurs mètres par seconde à basse température.

3.3 Courants permanents

Dans des tores de matériau poreux, on peut lancer des courants permanents de fluide, d'une durée pratiquement infinie, analogues à ceux observés dans les supraconducteurs. On les met en évidence, soit en mesurant le moment cinétique associé par une expérience basée sur l'effet gyroscopique, soit en mesurant l'effet Doppler du son qui se propage dans le matériau poreux. Ce dernier (appelé quatrième son) est une onde sonore, où seule la composante superfluide du liquide oscille ; les mouvements de la composante normale sont bloqués par les forces de viscosité, très importantes dans les petits pores du milieu. Le quatrième son se propagera en effet à une vitesse différente dans le sens de la vitesse V_s du fluide et en sens inverse : la mesure de la vitesse du son dans ces deux directions permet donc de déterminer V_s. La décroissance de V_s suit une loi logarithmique avec le temps. Ainsi, après une phase initiale de variation plus rapide, on observe seulement une décroissance de quelques pour-cent sur plusieurs jours.

Chapitre 7

Vorticité, dynamique du tourbillon, écoulements en rotation

L'ÉTUDE DES *déformations d'un élément liquide du chapitre 3 (section 3.2), a fait apparaître un terme de rotation locale, qui est la partie antisymétrique du tenseur des gradients de vitesse. Le vecteur vitesse de rotation locale correspondant est égal à la moitié du vecteur vorticité défini alors comme le rotationnel du champ de vitesse. Ainsi, la vorticité sera un outil privilégié pour décrire les mouvements de rotation locale à l'intérieur d'un fluide. Dans certains cas, elle peut être localisée, comme dans les tourbillons, ou bien être continûment distribuée dans l'espace, comme c'est le cas dans un fluide en rotation uniforme.*

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler la définition de la vorticité, puis nous analyserons l'analogie de la vitesse avec un champ d'excitation magnétique et de la vorticité avec le courant électrique qui lui donne naissance (section 7.1). Nous étudierons ensuite le transport de la vorticité dans le cas d'un fluide parfait, d'une part à partir de la dynamique de la circulation (théorème de Kelvin) (section 7.2), d'autre part, en établissant directement une équation d'évolution de la vorticité (section 7.3). Le théorème de Kelvin nous permettra de justifier, a posteriori, l'étude des écoulements potentiels que nous avons effectuée au chapitre 6 ; nous montrerons en effet que, pour un fluide parfait et sous réserve d'autres conditions, un écoulement initialement potentiel le reste ensuite. Nous décrirons ensuite la dynamique d'un ensemble de vortex, qui correspond à des écoulements dans lesquels toute la vorticité est concentrée sur des lignes singulières (section 7.4). Enfin, nous nous intéresserons (section 7.5) à l'étude des écoulements en rotation, où l'effet de la rotation d'ensemble se superpose à la vorticité existante dans le repère tournant. Cette étude joue un rôle considérable pour les phénomènes atmosphériques et océanographiques.

7.1 La vorticité et son analogue en électromagnétisme

7.1.1 Le vecteur vorticité

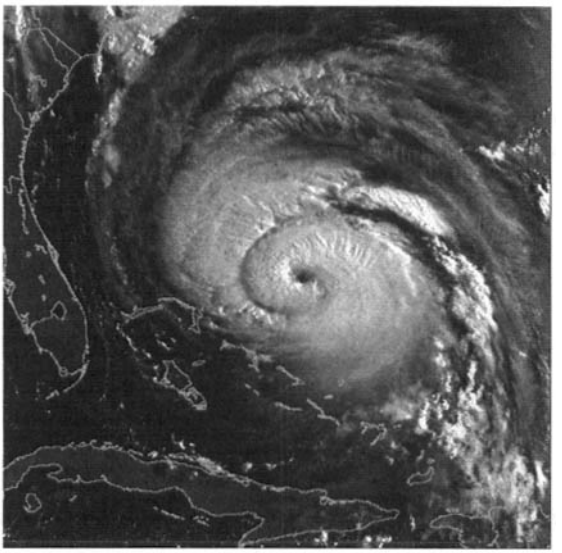
Au chapitre 3 (section 3.2.3), nous avons défini le pseudo-vecteur vorticité en un point $\mathbf{r}$ par :

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot}\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) \tag{7.1}$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ est le champ de vitesse de l'écoulement. La vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ correspond à la partie antisymétrique du tenseur $\mathbf{G}$ des gradients de vitesse de composantes $G_{ij} = \partial v_i/\partial x_j$. Comme nous l'avons vu au même chapitre (section 3.2.1), ce tenseur peut être décomposé sous la forme $G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij}$, où $e_{ij} = 1/2\,(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ est le terme symétrique de déformation pure, et le terme $\omega_{ij} = 1/2\,(\partial v_i/\partial x_j - \partial v_j/\partial x_i)$ est relié au pseudovecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ par $\omega_k = -\varepsilon_{ijk}\ \omega_{ij}$ (ε_{ijk} vaut zéro si deux indices sont égaux, 1 si la permutation $i \to j \to k$ est directe, et -1 si elle est inverse). Enfin, nous avons démontré que $\boldsymbol{\omega}$ est égale au double du vecteur rotation locale du fluide (vecteur tourbillon).

La vorticité interviendra chaque fois que l'écoulement n'est pas potentiel et, par suite, dans les fluides visqueux. Elle joue un rôle particulièrement important dans les écoulements turbulents, qu'on peut souvent considérer comme la superposition d'une translation moyenne et de mouvements de rotation locale, d'échelles de tailles très variables. Dans certains cas, l'écoulement est potentiel en dehors d'une ligne (ou « cœur ») de diamètre ξ faible par rapport à la taille globale de l'écoulement : la rotation du fluide s'effectue alors autour de ce cœur, à l'intérieur duquel est localisée la vorticité. On rencontre de tels écoulements tourbillonnaires (aussi appelés *vortex*) dans les trombes atmosphériques (Fig. 7.1a) et, à une toute autre échelle, dans les tourbillons de l'hélium superfluide ($\xi \approx 10^{-10}$ m), que nous examinerons dans l'annexe (A1) de ce chapitre, ou, plus prosaïquement, dans les tourbillons de vidange des lavabos ou des baignoires. Dans d'autres cas, la vorticité est moins concentrée, mais des structures d'écoulement en rotation du fluide restent bien identifiables ; c'est le cas des couches de cisaillement entre fluides de vitesses différentes qui seront discutées à la section 7.3.2. Enfin, des structures de ce type sont nettement visibles sur plusieurs centaines de kilomètres sur les photos satellites des ouragans et des cyclones (Fig. 7.1b), ou dans l'atmosphère de Jupiter, à une échelle de plusieurs dizaines de milliers de kilomètres. Au chapitre 2 (section 2.4.1), nous avons également rencontré l'émission périodique de structures tourbillonnaires dans les sillages en arrière d'obstacles.

(a)



(b)

FIG. 7.1 – *(a) Trombe atmosphérique au-dessus de la mer. On observe aussi un écoulement secondaire à la surface de l'eau (document V. Golden, NOAA) ; (b) cliché satellite GOES8 du cyclone Fran, au large de la Floride (à gauche) le 4 septembre 1996 (document NOAA).*

7.1.2 Analogie avec l'électromagnétisme

La relation (7.1) entre les champs de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ et de vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ est similaire à la relation $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{r})$ en régime stationnaire (ou quasi stationnaire), entre le champ d'excitation magnétique dans le vide $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ et la distribution statique de densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.

Précisons cette analogie (déjà signalée au chapitre 3 (sections 3.3.3 et 3.4.1), lors de l'introduction de la fonction de courant). Tout d'abord, les deux champs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{H}$ sont à flux conservatif (lorsque le fluide est incompressible et en l'absence de milieu magnétique), car ils vérifient :

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{7.2a}$$

et :

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{7.2b}$$

De même, on peut faire correspondre au théorème d'Ampère, qui relie la circulation du champ $\mathbf{H}$ le long d'un contour $(\mathcal{C})$ entourant un conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité I :

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{7.3}$$

l'équation :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{rot}\,\mathbf{v})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \Gamma. \tag{7.4}$$

Cette relation exprime le théorème de Stokes : la circulation d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}$ sur un contour fermé $(\mathcal{C})$ est égale au flux du rotationnel de $\mathbf{A}$ à travers une surface $(\mathcal{S})$ qui s'appuie sur ce contour (Fig. 7.2) :

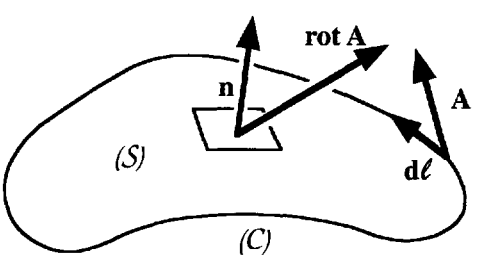


FIG. 7.2 – *Calcul de la circulation d'un champ de vecteurs* $\mathbf{A}$ *le long d'une courbe* $(\mathcal{C})$*, à partir du flux de son rotationnel à travers une surface* $(\mathcal{S})$ *qui s'appuie sur cette courbe.*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\,\mathbf{A}\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{7.5}$$

n représente la normale en tous points de la surface ; son orientation est définie en appliquant la règle du tire-bouchon, dans le sens de circulation le long de la courbe $(\mathcal{C})$.

La circulation du vecteur vitesse $\mathbf{\Gamma}$ apparaît donc comme l'analogue du courant électrique I.

On peut donc établir une correspondance entre l'excitation magnétique $\mathbf{H}$ et la vitesse $\mathbf{v}$, sous réserve que les conditions aux limites se correspondent également. En hydrodynamique, la composante normale de la vitesse s'annule à la surface d'un corps solide immobile ($\mathbf{v}_\perp = \mathbf{0}$) : cette condition, discutée au chapitre 4 (section 4.3.1), rend les lignes de courant parallèles à la surface du corps à son voisinage immédiat. Une condition aux limites similaire ne se rencontre en électromagnétisme que dans le cas très particulier des supraconducteurs, qui excluent le flux magnétique de leur intérieur. Dans la suite, nous utiliserons donc uniquement l'analogie champ de vitesse–champ d'excitation magnétique lorsque ce dernier est produit par un ensemble de fils conducteurs placés dans le vide. Ce cas est équivalent à celui d'un volume de fluide infini, où on n'a pas à respecter de conditions aux limites sur des parois. Maintenant, nous précisons quantitativement les résultats précédents, dans le cas d'un tube de vorticité rectiligne et d'un fil conducteur linéaire.

7.1.3 Tubes de vorticité rectiligne et analogie avec le champ magnétique produit par un fil conducteur

Champ d'excitation magnétique créé par un conducteur rectiligne et champ de vitesse créé par un tourbillon rectiligne

Nous considérons en parallèle l'effet d'une densité de courant $\mathbf{j}$, continue et uniforme, et d'une vorticité uniforme $\boldsymbol{\omega}$ à l'intérieur d'un tube cylindrique de rayon r_0, infiniment allongé dans la direction z (Fig. 7.3) (pour r supérieur à r_0, la densité de courant et la vorticité sont supposées nulles). Cet exemple va nous permettre de préciser la correspondance entre ces deux champs.

Le premier problème correspond au champ d'excitation magnétique autour d'un fil rectiligne parcouru par un courant électrique de densité uniforme à l'intérieur du fil ; le second représente approximativement le tourbillon que l'on peut observer lors de la vidange d'un récipient par un orifice circulaire (vidange d'une baignoire par exemple). Au champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}$ dans la direction azimutale dans le cas du fil, correspond le champ de vitesse $\mathbf{v}$ du fluide, de même symétrie dans le cas du tourbillon. À l'intensité du courant $I = \int_0^{r_0} 2\pi\, j\, r\, \mathrm{d}r$ pour le fil, correspond l'intégrale $\int_0^{r_0} 2\pi\, \omega\, r\, \mathrm{d}r$ de la vorticité ω sur la section du tube de vorticité.

Ainsi, les deux intégrales de surface de la densité de courant et de la vorticité sont égales respectivement à la circulation du champ d'excitation magnétique et de la vitesse du fluide sur des courbes entourant le tube central de rayon r_0. Appliquons l'équation (7.5) à la vitesse d'écoulement sur un cercle de rayon $r > r_0$ centré sur l'axe du tube et de plan perpendiculaire à

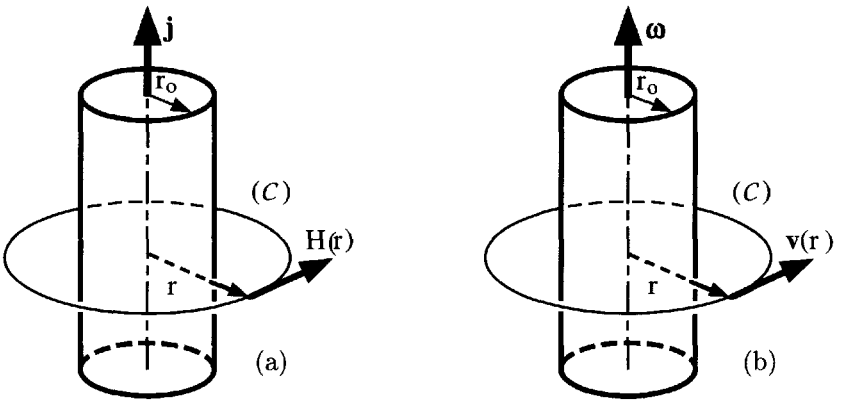


FIG. 7.3 – *Champ d'excitation magnétique (respectivement champ de vitesse) créé par un conducteur (respectivement un filament de vorticité) rectiligne.*

celui-ci ; on trouve, en utilisant le fait que $\omega = (\mathrm{rot}\, v_\theta)_z$ est nul pour $r > r_0$:

$$2\,\pi\, r\, v_\theta(r) = \int_0^{r_0} 2\pi\,\omega\, r\,\mathrm{d}r = \omega\,\pi\, r_0^2 = \Gamma \tag{7.6}$$

soit :

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi\, r}\cdot \tag{7.7}$$

La quantité $\Gamma = \omega\,\pi\, r_0^2$ (appelée *circulation du vecteur vitesse*) est donc indépendante de r, tant que r reste supérieur à r_0. Elle caractérise la force du tourbillon, et correspond au courant total dans l'exemple de la figure 7.3a. Plus généralement, la circulation a la même valeur pour tous les contours fermés de forme quelconque qui entourent une fois la ligne : on le vérifie simplement en appliquant le théorème de Stokes à ces contours. Ces résultats resteront valables dans le cas particulier où le cęur du tourbillon est réduit à une ligne de rayon nul, avec une densité infinie de vorticité (ce qui correspond en magnétisme des courants à une ligne parcourue par un courant d'intensité I). Si l'intégrale de cette distribution singulière de vorticité reste finie, elle continuera à représenter la circulation de la vitesse autour du cœur du tourbillon.

Cette décroissance de v_θ en r^{-1} est caractéristique de tout champ de vitesse azimutal de rotationnel nul. En effet, si seule la composante v_θ est non nulle, et si elle ne dépend que de r, la condition $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ devient :

$$(\mathbf{rot}\, v_\theta)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) = 0. \tag{7.8}$$

Donc v_θ est proportionnel à $1\,/\,r$. La variation de la pression p autour du tourbillon est obtenue dans ce cas en appliquant la relation de Bernoulli

(Éq. (5.36)) dans la partie irrotationnelle du champ de vitesse du vortex. La pression p diminue lorsqu'on s'approche du centre de la ligne de telle façon que :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p + \frac{1}{2}\rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^2} = \text{constante}. \tag{7.9}$$

Si la pression est suffisamment basse dans la zone centrale du tourbillon, il pourra y avoir vaporisation du liquide en rotation. Nous avons discuté ce phénomène de cavitation au chapitre 5 (section 5.3.2). Une autre conséquence de cette baisse de pression, dans la région centrale du tourbillon, est qu'un objet solide de taille finie, placé près de l'axe d'une ligne de tourbillon, se trouve soumis à une force radiale dirigée vers le centre de la ligne (en effet, d'après la relation (7.9), la pression est plus forte sur la face de l'objet la plus éloignée du cęur du tourbillon). Ainsi, la zone centrale du filament de tourbillon pourra être une région où viennent se rassembler des particules solides collectées par le tourbillon. Ce dernier effet est souvent observé dans la vidange des récipients. Pour la même raison, les lignes de tourbillon peuvent se piéger sur les aspérités des parois matérielles solides.

Un exemple de filament rectiligne de tourbillon : le vortex de Rankine

Le vortex de Rankine est une modélisation approchée d'un tourbillon de vidange ; il nous aide à mieux comprendre le paradoxe apparent de la présence d'un écoulement potentiel dans la partie extérieure du tourbillon. Il apparaît comme un écoulement potentiel dans une géométrie multiconnectée, déjà rencontré au chapitre 6 (section 6.2) ; à cet écoulement se superpose à une rotation en bloc dans la région centrale de « cœur » du tourbillon, qui joue alors le rôle de l'obstacle autour duquel apparaît la circulation du fluide. Le tourbillon de Rankine donne une image simple de ce que peut être la turbulence dans des écoulements tridimensionnels (chapitre 11, section 11.3.2).

Pour reproduire expérimentalement ce phénomène de manière approchée, on utilise un récipient rempli d'eau à niveau constant, alimenté avec un débit volumique Q ; le récipient se vidange dans le même temps par une ouverture centrale circulaire située au fond du récipient. L'observation de la surface libre (Fig. 7.4) permet de distinguer une région extérieure convexe (I) qui se raccorde à une région intérieure parabolique (II). Par la suite, nous allons faire l'hypothèse que la vorticité est presque nulle dans la région (I), et est concentrée dans la zone (II). Nous justifierons ce résultat (qui n'est qu'approché, car il n'y a pas de limite franche entre les deux zones) à la section 7.3.2.

♦ **Région (I)** L'écoulement correspond au champ de vitesse irrotationnel $v_\theta = \Gamma/(2\pi r)$ que nous venons de décrire. Le profil $h(r)$ du niveau de la surface libre est obtenu en utilisant l'équation de Bernoulli (chapitre 5,

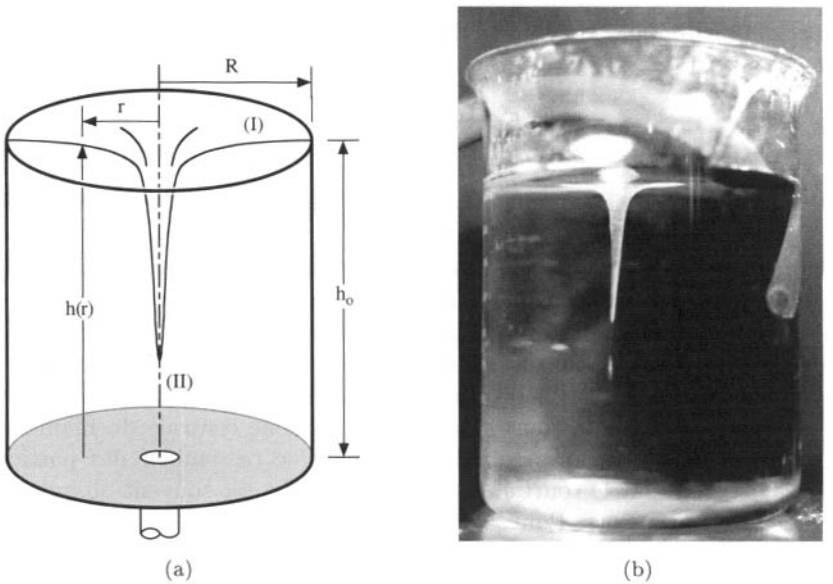


FIG. 7.4 – *(a) Tourbillon créé par la vidange d'un récipient à travers un orifice circulaire. (b) Réalisation expérimentale : l'alimentation continue par le tuyau permet d'étudier le tourbillon en régime stationnaire.*

section 5.3), qui s'applique alors en tout point du fluide car l'écoulement est potentiel. On a donc, en négligeant dans toute cette discussion l'effet de capillarité dû à la courbure de la surface, mais en faisant intervenir la pesanteur :

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v_\theta^2 = p_0 + \rho g h_0 \tag{7.10}$$

où h_0 est le niveau de l'interface à une distance suffisamment grande de l'axe de rotation. À la surface, par ailleurs, p est égale à la pression atmosphérique p_0. En écrivant l'équation (7.10) à l'interface $z = h(r)$, on obtient :

$$p_0 + \rho g h(r) + \frac{1}{2} \rho v_\theta^2 = p_0 + \rho g h_0 \tag{7.11}$$

soit :

$$h(r) = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2} + h_0.$$

La surface libre a donc un profil d'allure hyperbolique.

♦ **Région (II)** Les effets de la viscosité augmentent au fur et à mesure que r décroît et que le gradient de vitesse $\partial v_\theta / \partial r$ augmente. En dessous

d'un rayon ξ, ils sont tels que seuls les mouvements de rotation en bloc sont possibles ; dans ce cas, la vitesse angulaire Ω est constante et $v_\theta = \Omega r$. L'existence de cette région (le « *cœur* » *du tourbillon*) traduit le fait que, dans tous les cas physiques, le profil de vitesse en $1/r$ ne peut subsister jusqu'à la valeur $r = 0$, mais seulement jusqu'à un rayon fini. En utilisant la relation (7.8), on trouve :

$$\omega = (\mathbf{rot}\, v_\theta)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\Omega\, r^2) = 2\Omega. \tag{7.12}$$

La vorticité a une valeur finie et constante dans le cęur. Le fluide est au repos dans le repère tournant à la vitesse Ω ; aussi, en tout point du liquide, le gradient de pression équilibre les forces appliquées (centrifuge + hydrostatique). Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\, \Omega^2\, r \tag{7.13}$$

et :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g. \tag{7.14}$$

On obtient alors :

$$p(r,\, z) = \frac{1}{2}\rho\, \Omega^2\, r^2 - \rho\, g\, (h\,(r) - h_1) \tag{7.15}$$

où h_1 est une constante d'intégration qui se détermine en écrivant que, à une distance ξ égale au rayon du cœur (*i.e.* à la limite entre les régions (I) et (II)), les pressions calculées par les formules (7.10) et (7.15) ont la même valeur.

On obtient alors le profil $h(r)$ de la surface libre, en écrivant que la pression est égale à p_0. D'après la relation plus haut, le niveau $h(r)$ varie linéairement avec r^2 : la surface a donc un profil parabolique dans cette région. De nombreuses notions, que l'on rencontrera dans les distributions plus générales de vorticité, sont contenues dans cet exemple. La vorticité est en effet très souvent concentrée sous forme de filaments, dans des zones localisées de l'espace. Nous verrons plus loin (7.3.2) comment une telle concentration peut apparaître dans un écoulement élongationnel de révolution (qui représente, de façon simplifiée, le champ de vitesse de vidange d'un récipient).

Énergie cinétique par unité de longueur d'une ligne de tourbillon rectiligne

Calculons l'énergie cinétique e_c par unité de longueur de tourbillon, en nous plaçant tout d'abord dans le cas d'un tourbillon réduit à une ligne singulière. On obtient :

$$e_c = \frac{1}{2}\iint \rho\, v_\theta^2\, \mathrm{d}S = \frac{\rho}{2}\int \left(\frac{\Gamma}{2\pi\, r}\right)^2 2\pi\, r\, \mathrm{d}r. \tag{7.16}$$

Cette intégrale de la forme $\int \mathrm{d}r/r = \int \mathrm{d}(\log r)$ est singulière, à la fois lorsque r tend vers zéro, et vers l'infini. Cette deuxième singularité disparaît si on impose à r une limite supérieure correspondant à la taille L du récipient ($L = R$ dans l'exemple précédent). Par ailleurs, pour éviter une densité d'énergie cinétique infinie au voisinage de l'axe de la ligne ($r = 0$), il est nécessaire de supposer qu'il existe un rayon minimum $r = \xi$ au-dessous duquel la conservation de la circulation de la vitesse (impliquant $v_\theta\, r$ = constante) ne s'applique plus. Les distances $r < \xi$ correspondent ici à l'intérieur du cœur, dont l'énergie cinétique est égale à $J\,\Omega\xi^2/2$, où $J = \pi\,\rho\,\xi^4/2$ est son moment d'inertie et $\Omega_\xi = |\omega|/2 = \Gamma/(2\pi\,\xi^2)$ sa vitesse angulaire de rotation. On obtient alors, pour l'énergie cinétique totale par unité de longueur :

$$e_c = \rho\frac{\Gamma^2}{4\,\pi}\left(\log\frac{L}{\xi} + \frac{1}{8}\right)\cdot \tag{7.17}$$

7.1.4 Utilisation de l'analogie avec l'électromagnétisme, pour des distributions de vorticité quelconques

Analogie hydrodynamique de la loi de Biot et Savart

En électromagnétisme, le champ magnétique $\mathrm{d}\mathbf{B}$ induit en un point O (choisi comme origine) par un élément $\mathrm{d}\mathbf{l}$ de ligne situé autour d'un point de rayon vecteur $\mathbf{r}$ et parcouru par un courant I vérifie :

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,I\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}\wedge\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\cdot \tag{7.18}$$

De même, le champ créé par une densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ répartie dans un volume $(\mathcal{V})$ vérifie :

$$\mathbf{B} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\wedge\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathrm{d}V. \tag{7.19}$$

Nous obtenons des relations identiques pour le champ de vitesse $\mathbf{v}$, créé par un élément $\mathrm{d}\mathbf{l}$ de filament de tourbillon de circulation Γ, ou par une distribution de vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ dans un volume $(\mathcal{V})$ (Fig. 7.5). Il suffit pour cela d'utiliser les équivalences $\mathbf{B}/\mu_0 \leftrightarrow \mathbf{v}$ et $I \leftrightarrow \Gamma$. Nous obtenons ainsi les relations qui correspondent à (7.18) et (7.19) pour la vitesse induite à l'origine $\mathbf{r} = \mathbf{0}$:

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi}\Gamma\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}\wedge\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{7.20}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})\wedge\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathrm{d}V. \tag{7.21}$$

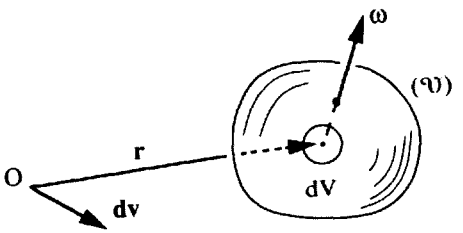


FIG. 7.5 – *Champ de vitesse induit par une répartition de vorticité avec une densité* $\boldsymbol{\omega}(r)$. *Nous obtenons des relations identiques pour le champ de vitesse* $\mathbf{dv}$, *créé par un élément* $\mathbf{dl}$.

Application : champ de vitesse induit sur lui-même par un filament de tourbillon incurvé

L'ordre de grandeur de la norme du champ de vitesse $\mathbf{u}_l$ induit par la ligne sur elle-même est, comme nous allons le montrer plus bas :

$$|\mathbf{u}_l| = \frac{|\Gamma|}{4\pi R}\log\left(\frac{R}{\xi}\right) \tag{7.22}$$

où R est le rayon de courbure de la ligne, ξ le rayon du cœur, et Γ la circulation. La vitesse $\mathbf{u}_l$ est perpendiculaire au plan du filament et elle est due, pour une large part, aux éléments de ligne très proches du point considéré. La composante $\mathbf{u}_l$ est responsable du mouvement des tourbillons courbes en l'absence d'écoulement extérieur. En effet, nous démontrerons à la section 2 qu'un élément de ligne de tourbillon dans un fluide parfait se déplace à une vitesse égale à la vitesse locale du fluide (théorème de Kelvin) ; cette vitesse est la somme du champ de vitesse extérieur et des vitesses induites par les autres éléments de la ligne.

Démonstration Évaluons le champ de vitesse au point O, le long de l'axe d'une ligne de tourbillon (le rayon de courbure R est supposé très supérieur au rayon ξ du cœur). Nous considérons uniquement la contribution locale $\mathbf{u}_l$ due aux points M voisins du point de mesure O, qui est donnée par l'intégrale sur l'élément de ligne entre les points M et M', symétrique de M par rapport au plan yOz. La vitesse $\mathbf{u}_l$ est orientée dans la direction perpendiculaire au plan de l'anneau (direction Oz) :

$$\mathbf{u}_l = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}\wedge\mathbf{r}}{r^3}.$$

Dans le référentiel rapporté au point O, $\mathbf{r}$ a pour composantes : $\mathbf{r} = [R\ \sin\theta, R(1-\cos\theta), 0]$. D'où :

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = [R\ \cos\theta\,\mathrm{d}\theta, R\ \sin\theta\,\mathrm{d}\theta, 0].$$

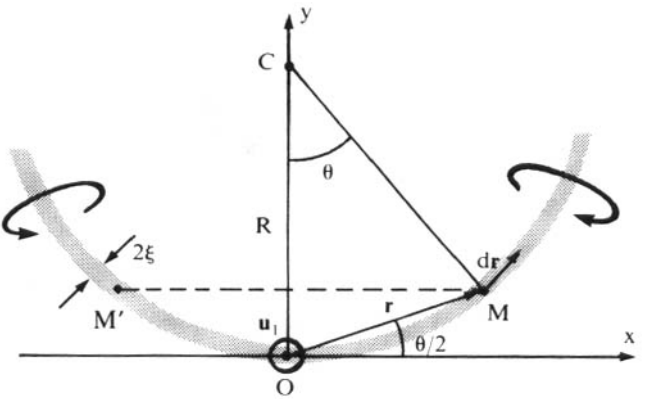


FIG. 7.6 – *Champ de vitesse induit sur elle-même par une ligne de tourbillon courbe. Le vecteur vitesse* $\mathbf{u}_l$ *induit par la ligne au point O est dirigé vers l'avant de la figure pour le sens de la circulation du tourbillon indiqué ici.*

En utilisant la symétrie du problème par rapport au plan yOz, on trouve :

$$|\mathbf{u}_l| = \frac{\Gamma}{4\pi}\left|\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}\wedge\mathbf{r}}{r^3}\right| = 2\left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{2R^2\,\sin^2\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta}{8R^3\,\sin^3\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\Gamma}{8\pi\,R}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

La vitesse induite en chaque point du tourbillon varie donc comme l'inverse du rayon de courbure du filament. On vérifie en particulier que, dans le cas d'un tube tourbillon rectiligne ($R \to \infty$), la vitesse u_l est nulle, comme on pouvait le prévoir par symétrie.

L'intégrale qui apparaît dans le résultat précédent diverge aux faibles valeurs de θ dire comme $\int 2\,\mathrm{d}\theta\,/\,\theta$, c'est-à-dire comme $2\log\theta$. Cela est dû au fait que le calcul précédent traite le tube comme une ligne infiniment fine, et ne s'applique donc pas aux faibles valeurs de θ qui correspondent à des distances $|r|$ de l'ordre du rayon du cœur. Cette divergence signifie qu'une large part de la vitesse induite au point O est due à des éléments de ligne très proches de ce point. Le traitement correct du problème nécessiterait de faire intervenir le rayon ξ du cœur du tourbillon comme limite inférieure de la variable r. Nous nous contentons ici d'évaluer un ordre de grandeur de l'intégrale en prenant comme borne inférieure d'intégration $\theta_{\min} \approx \xi/R$. L'influence de la borne supérieure se réduit à une constante additive supplémentaire. On arrive bien ainsi à la formule (7.22).

7.2 Dynamique de la circulation

Après cette introduction des distributions continues de vorticité et des lignes de tourbillons, nous allons étudier ici la dynamique de la vorticité, en examinant comment varie la circulation sur un contour fermé quelconque

« tracé » dans le fluide et entraîné avec lui. À la section suivante, nous utiliserons une autre approche en établissant directement la loi d'évolution de la vorticité à partir de l'équation de Navier Stokes.

Les résultats que nous obtiendrons dans ces deux sections s'appliqueront aussi bien aux distributions continues de vorticité qu'aux cas où celle-ci est localisée sur des lignes singulières.

7.2.1 Le théorème de Kelvin : conservation de la circulation

Établissement du théorème de Kelvin

Le théorème de Kelvin exprime que la circulation sur un contour fermé, dont chacun de ses points se déplace avec la vitesse qu'a le fluide en ce point, reste constante si les conditions suivantes sont vérifiées :

- la viscosité est nulle (fluide parfait) : $\eta = 0$;
- les forces extérieures dérivent d'un potentiel φ : $\mathbf{f} = -\,\mathbf{grad}\,\varphi$;
- la masse volumique ρ est constante ou, plus généralement, n'est fonction que de la pression : $\rho = f\,(p)$.

Ces conditions sont les mêmes que celles qui ont été utilisées dans l'établissement du théorème de Bernoulli au chapitre 5 (section 5.3.2). Le théorème de Kelvin s'exprime par la relation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_C \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{l}\right] = 0 \tag{7.23}$$

$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ est une dérivée convective calculée en suivant le déplacement des particules de fluide. L'intégrale est prise sur un contour fermé (C) (nous avons utilisé la notation $\delta\mathbf{l}$ pour différencier cet élément de longueur des variations temporelles de $\mathbf{l}$). La courbe sur laquelle s'effectue l'intégration suit le déplacement du fluide comme indiqué sur la figure 7.7 :

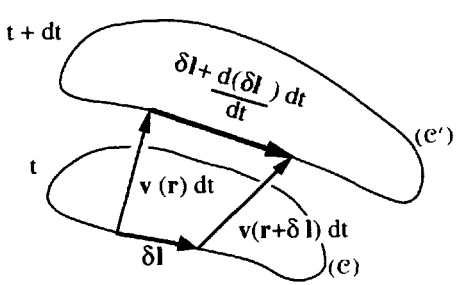


FIG. 7.7 – *Variation des éléments d'une courbe matérielle (C) suivant le mouvement d'un fluide.*

La variation de la circulation est la somme de deux contributions : l'une est due à la variation temporelle de la vitesse des points du contour, et l'autre à la déformation du contour $(\mathcal{C})$ pendant son déplacement. La séparation entre ces deux effets s'effectue en décomposant l'intégrale (7.23) sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{l}\right] = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\mathbf{l} + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}(\delta\mathbf{l})}{\mathrm{d}t}\cdot \tag{7.24}$$

La première intégrale est calculée en utilisant l'équation d'Euler, qui peut s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{grad}\,\varphi - \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p. \tag{7.25}$$

Si la masse volumique ρ ne dépend que de la pression ($\rho = f(p)$), le second terme de la relation (7.25) sera également le gradient d'une fonction $g(p)$ (égale à l'intégrale $\int \mathrm{d}p/f(p)$) ; la circulation de ces deux gradients et, par suite, du vecteur $\mathrm{d}\mathbf{v}/dt$ le long de la courbe fermée $(\mathcal{C})$, sera donc nulle. La seconde intégrale de l'équation (7.24) vérifie la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\,.\,\frac{\mathrm{d}(\delta\mathbf{l})}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v_i}\cdot\mathrm{d}\frac{\delta l_i}{dt} = \int_{\mathcal{C}} v_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta l_j\right)\\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\cdot\delta l_j = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\cdot\delta\mathbf{l} = 0.\end{aligned}$$

En effet, la variation temporelle $\mathrm{d}(\delta\mathbf{l})/dt$ de l'élément de ligne de contour de longueur $\delta\mathbf{l}$ est due à la différence $\delta\mathbf{v}$ des vitesses entre les deux points situés aux extrémités de cet élément de ligne (Fig. 7.7), chaque composante $\mathrm{d}(\delta l_i)/\mathrm{d}t$ est donc égale au produit $(\partial v_i/\partial x_j)\delta l_j$. La combinaison de ces deux résultats démontre bien l'équation (7.23). En utilisant l'équation (7.5), le théorème de Kelvin peut être écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega}\cdot\delta s\right) = 0. \tag{7.26}$$

Ainsi, le flux du vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}$, à travers une surface s'appuyant sur un contour matériel $(\mathcal{C})$ qui se déplace avec le fluide (représentant la vorticité totale dans $(\mathcal{C})$), reste constant pendant l'écoulement).

Signification physique et conséquences du théorème de Kelvin

Le résultat précédent exprime la conservation du moment cinétique pour un fluide parfait, il complète ainsi notre présentation des lois de conservation du chapitre 5. Cela peut être justifié par le raisonnement qui suit, appliquable, comme précédemment aux fluides sans viscosité. Considérons un tube élémentaire de vorticité de longueur $\delta\mathbf{l}$ qui s'appuie sur un cercle de rayon r perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 7.8). Nous avons montré précédemment que $\boldsymbol{\omega}/2$ est égal au vecteur vitesse angulaire locale $\boldsymbol{\Omega}$ de l'élément de fluide. Comme

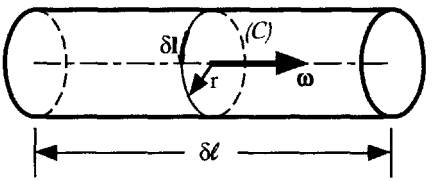


FIG. 7.8 – *Calcul du moment cinétique pour un élément de tube de vorticité.*

la circulation Γ de la vitesse le long du cercle $(\mathcal{C})$ de rayon r est égal au flux total de la vorticité à travers ce cercle, Γ est reliée au module ω de la vorticité par :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l} = \pi\, r^2\, \omega. \tag{7.27}$$

Le produit $\pi\, r^2\, \omega$ peut être récrit de façon à faire apparaître le module Ω de la vitesse de rotation locale $\mathbf{\Omega} = \omega/2$, et le moment d'inertie J du cylindre de longueur δl, sous la forme :

$$\pi\, r^2\, \omega = \frac{\delta m\, r^2}{2}\, \frac{\omega}{2}\, \frac{4\pi}{\delta m} = K\, J\, \Omega \tag{7.28}$$

$\delta m = \rho\, \pi\, R^2\, \delta l$ est la masse de fluide de densité ρ contenue dans l'élément de cylindre, $J = \delta m\, r^2/2$ est le moment d'inertie associé à ce fluide, et $K = 4\pi/\delta m$. Ainsi, comme la masse δm de fluide dans l'élément matériel de tube de vorticité est nécessairement constante, la conservation de la circulation Γ au cours du temps est équivalente, d'après les équations (7.27) et (7.28), à la conservation du moment cinétique $J\, \Omega$ du fluide dans l'élément de tube de vorticité.

Il est possible de tirer plusieurs conséquences physiques du théorème de la circulation :

(i) Si, à un temps initial, la circulation autour de n'importe quel contour fermé est nulle, elle le restera par la suite. En particulier, un fluide inviscide (c'est-à-dire de viscosité η nulle), mis en mouvement à partir de l'état de repos, aura un écoulement irrotationnel (c'est-à-dire tel que le vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ est identiquement nul quel que soit $\mathbf{r}$) aux temps ultérieurs. En effet, la circulation le long de toute courbe matérielle fermée, tracée dans le fluide, est initialement nulle et le restera par la suite. Comme on peut prendre des courbes aussi petites qu'on veut, il en résulte, par application du théorème de Stokes, que $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ est partout nul. Ce résultat, énoncé au chapitre 6 (section 6.1) nous a permis de faire le lien entre l'étude des écoulements potentiels et celle des fluides parfaits. Une application de cette propriété est la présence d'un tourbillon de démarrage, en aval du bord de fuite d'une aile sous incidence. Cet exemple sera discuté au chapitre 9 (section 9.6.1).

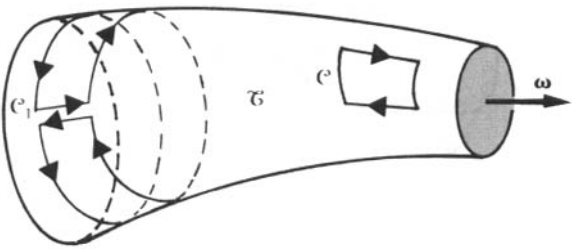


FIG. 7.9 – *Variation du flux de vorticité à travers des contours matériels tracés sur un tube de vorticité.*

(ii) Dans un écoulement où le vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ n'est plus identiquement nul, les lignes (et les tubes) de vorticité se déplacent en suivant exactement le mouvement des lignes (et des surfaces) constituées de particules de fluide. En effet, si on trace un contour *matériel* fermé quelconque $(\mathcal{C})$ sur la surface d'un tube de vorticité $(\mathcal{T})$ (Fig. 7.9), le flux du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ tangent à travers ce contour est nul. Il le restera aux temps ultérieurs, après convection de ce contour matériel par l'écoulement. Le tube matériel convecté par le fluide à partir de la position initiale $(\mathcal{T})$ est donc un tube de vorticité, puisque le flux de $\boldsymbol{\omega}$ reste nul à travers un élément de surface quelconque des parois latérales du tube.

(iii) Choisissons un contour $(\mathcal{C}_1)$, qui entoure deux fois le tube $(\mathcal{T})$ en sens contraire, à l'exception de deux éléments de liaison parallèles infiniment proches, parcourus en sens inverse (Fig. 7.9). La circulation totale de la vitesse sur ce contour est nulle, comme pour tout contour fermé tracé sur $(\mathcal{T})$. Comme les circulations sur les deux éléments parallèles voisins s'annulent, on en déduit que la circulation sur les deux boucles fermées entourant le fluide et parcourues dans le même sens est la même. Ainsi, le flux de la vorticité se conserve tout le long du tube de vorticité (tout comme le flux du vecteur vitesse dans un tube de courant en l'absence de terme de source).

(iv) À la section 7.3 plus bas, nous analyserons le mouvement de filaments de tourbillons pour lesquels la vorticité est concentrée sur des lignes singulières (cœurs). Dans ce cas, les résultats précédents montrent que les cœurs de ces tourbillons se déplaceront toujours à la vitesse locale du fluide (qui est la somme de la vitesse de l'écoulement extérieur et de la vitesse induite par les autres éléments de filaments de tourbillons, comme nous l'avons montré à la section 7.1.4). En effet, si un contour matériel, aussi petit soit-il, entoure le cœur du tourbillon à un instant donné, il l'entourera toujours par la suite, après s'être déplacé en suivant le mouvement du fluide : la circulation de la vitesse sur ce contour doit en effet rester constante et elle est donc égale au flux de la vorticité à

l'intérieur du cœur du tourbillon. Par ailleurs, les cœurs de ces filaments de tourbillons doivent être refermés sur eux-mêmes (tourbillons en anneaux), ou se terminer sur une paroi solide ; ils ne peuvent pas avoir d'extrémité libre dans un fluide parfait. Supposons en effet qu'une telle extrémité existe, et déterminons la circulation Γ de la vitesse du fluide le long d'un contour $(\mathcal{C})$ entourant le tourbillon : Γ est égale au flux de la vorticité ω à travers une surface $(\mathcal{S})$ qui s'appuie sur $(\mathcal{C})$. Suivant la position de $(\mathcal{S})$ par rapport à l'extrémité libre, $(\mathcal{S})$ couperait ou non le cœur du tourbillon et la valeur de l'intégrale serait différente : ce qui serait contraire à l'existence d'une valeur bien définie de la circulation de la vitesse du fluide le long de $(\mathcal{C})$.

7.2.2 Sources de circulation dans les écoulements de fluides visqueux ou compressibles, ou en présence de forces non conservatives

Reprenons la démonstration du théorème de la circulation à partir de l'équation (7.24). Lorsque les trois conditions exprimées au début de la section 7.2.1 ne sont pas vérifiées, la circulation de la vitesse le long d'un contour matériel n'est plus constante. Le deuxième terme de cette équation reste nul et on évalue le premier en exprimant $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ à partir de l'équation de Navier–Stokes (4.30) (à la place de l'équation d'Euler (4.31) utilisée à la section 7.2.1) :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p + \nu\,\Delta\mathbf{v}. \tag{7.29}$$

L'équation (7.24) devient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \left[\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{l}\right] = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\mathbf{l} = \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{l}}_{\mathbf{I}} - \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho}(\mathbf{grad}\,p)\cdot\delta\mathbf{l}}_{\mathbf{II}} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \nu\,\Delta\,\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{l}}_{\mathbf{III}}. \tag{7.30}$$

Nous allons examiner successivement la signification physique des trois termes **I**, **II** et **III**.

Forces en volume non conservatives (terme I de l'équation (7.30))

Les forces $\mathbf{f}$ (par unité de volume), qui ne dérivent pas d'un potentiel, et qui sont donc telles que leur circulation sur un contour fermé est non nulle, créent de la circulation. Deux exemples importants se rencontrent en hydrodynamique :

♦ *(Pseudo) forces de Coriolis*

Elles apparaissent sous la forme d'un terme $[-2\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{v}]$, lorsqu'on écrit l'équation de mouvement d'un fluide dans un référentiel tournant à une vitesse

angulaire $\mathbf{\Omega}$ (le terme « pseudo » indique que ces forces n'ont pas d'origine physique réelle, mais qu'elles résultent simplement du changement de repère, la vitesse $\mathbf{v}$ étant mesurée dans le référentiel mobile). Ainsi, les effets de la rotation de la Terre se traduisent par la formation de mouvements cycloniques dans l'atmosphère, dont le sens (comme celui de $\mathbf{\Omega}$) dépend de l'hémisphère considéré.

Remarque En laboratoire, on peut observer des effets similaires en vidangeant un récipient cylindrique de grand diamètre (de l'ordre de 2 m) à partir d'un trou situé au centre. La présence d'une composante de vitesse radiale dirigée vers le trou de vidange crée une force de Coriolis, qui dépend de la valeur locale de Ω et induit un mouvement cyclonique. Ce résultat est similaire à celui de l'écoulement autour d'une zone de faible pression atmosphérique. Des conditions expérimentales bien contrôlées sont indispensables ; il faut en particulier laisser reposer longtemps le fluide, pour éliminer la vorticité initiale résiduelle. Dans les cas usuels de vidange de lavabos ou de baignoires, ce sont les effets d'amplification de la vorticité résiduelle (voir section 7.3.2) qui sont responsables de l'apparition de tourbillons ; le sens de rotation final n'est plus lié au sens de Ω, mais est aléatoire.

Le rôle des forces de Coriolis sera détaillé à la fin de ce chapitre où il est question des écoulements en rotation.

♦ *Forces magnétohydrodynamiques*

La vorticité peut aussi être créée par les forces magnétohydrodynamiques qui sont produites par l'action d'un champ magnétique $\mathbf{B}$ sur un fluide conducteur électrique. En effet, ces forces sont des forces de Laplace de la forme $q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, si q est la charge électrique et $\mathbf{v}$ la vitesse des charges entraînées par le fluide ; elles communiquent au fluide une composante de mouvement de rotation comme elles le font dans les accélérateurs de particules du type synchrotron ou cyclotron. Deux exemples de ces fluides sont le sodium liquide, utilisé comme fluide porteur de la chaleur dans les réacteurs nucléaires surrégénérateurs, et le plasma du noyau terrestre. Dans ce dernier cas, la circulation induite par des mouvements convectifs radiaux créés dans le noyau est à l'origine du magnétisme terrestre ; on a en effet couplage entre le champ magnétique créé par le mouvement du fluide conducteur et l'entraînement de ce fluide par lui-même (effet dynamo).

Fluides non barotropes (terme II de l'équation (7.30))

Un fluide *barotrope* est tel que $\rho = f(p)$, c'est-à-dire tel que les *isobares* (surfaces sur lesquelles p = constante) sont confondues avec les *isostères* (surfaces où ρ = constante). Dans le cas contraire, le terme $(-\mathbf{grad}\, p)/\rho$ ne dérive pas d'un potentiel et ne peut donc pas être écrit sous la forme d'un gradient d'une fonction scalaire, et l'intégrale correspondante de l'équation (7.30) n'est pas nulle.

Démonstration Si $(\mathbf{grad}\, p)/\rho$ dérive d'un potentiel, on doit avoir $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\, p/\rho) = 0$. En utilisant l'identité vectorielle générale :

$$\mathbf{rot}\,(\alpha\,\mathbf{A}) = \alpha\,\mathbf{rot}\mathbf{A} + (\mathbf{grad}\,\alpha) \wedge \mathbf{A} \tag{7.31}$$

nous obtenons :

$$\mathbf{rot}\,\frac{\mathbf{grad}\, p}{\rho} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, p - \frac{1}{\rho^2}(\mathbf{grad}\,\rho) \wedge (\mathbf{grad}\, p) = -\frac{1}{\rho^2}(\mathbf{grad}\,\rho) \wedge (\mathbf{grad}\, p) = 0.$$

Ainsi, $(\mathbf{grad}\, p)\,/\,\rho$ ne peut dériver d'un potentiel que si les vecteurs gradients de p et ρ sont parallèles en tout point, c'est-à-dire si les surfaces isostères et isobares qui leur sont perpendiculaires coïncident.

Dans ce cas, si on isole un élément de fluide de volume $\mathcal{V}'$, son centre de gravité G ne coïncide pas avec le centre P de la poussée d'Archimède, déterminé par les lignes isobares du fluide extérieur (Fig. 7.10). Il y a donc apparition d'un couple, qui tend à faire tourner localement le liquide et induit une circulation de la vitesse.

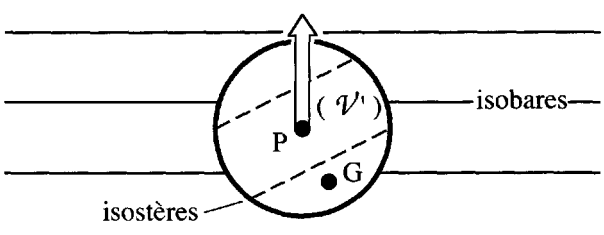


FIG. 7.10 – *Équilibre des forces de pression et de gravité dans un fluide non barotrope.*

Exemples de fluides non barotropes

Un premier exemple de fluide non barotrope est celui d'un fluide placé entre deux plaques verticales portées à des températures différentes. Nous étudierons cette situation au chapitre 10 (section 10.1.2) et montrerons qu'il apparaît un écoulement du fluide, dit de convection thermique. Cet écoulement est induit par les variations de masse volumique avec la température.

Un second exemple, étudié ici, correspond au cas où des variations de masse volumique sont associées à des variations de concentration. C'est le cas d'une solution d'un liquide de concentration variable avec l'altitude, obtenue, par exemple, en remplissant lentement un récipient avec une solution d'eau sucrée dont la concentration C diminue avec la distance verticale au fond du récipient (Fig. 7.11). Cette solution est en équilibre stable, puisque la densité décroît avec l'altitude. La concentration C est alors constante dans un plan horizontal donné. Comme le fluide est au repos, le seul transport de masse se fait par diffusion moléculaire avec un flux $\mathbf{j} = -D_m\mathbf{grad}\; C$ qui, dans ce cas, est vertical.

Si une plaque inclinée est placée en position fixe dans cette solution, il ne peut y avoir de flux de diffusion massique à travers la surface solide ; aussi, d'après

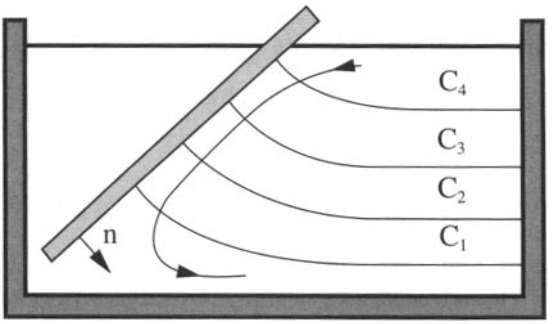


FIG. 7.11 – *Mouvement de convection d'un fluide présentant un gradient de densité vertical en présence d'une surface solide oblique* ($C_1 > C_2 > C_3 > C_4$).

l'équation précédente, on doit avoir $(\mathbf{grad}\ C)_n = 0$ à la paroi ($\mathbf{n}$ est la direction normale à la plaque). Les isostères ne peuvent donc plus rester partout horizontales, car elles doivent arriver perpendiculairement à la plaque inclinée. On voit donc apparaître un gradient horizontal, de concentration (et, par suite, de densité), analogue à celui de l'exemple précédent. Sur une horizontale donnée, la densité est plus forte près de la surface oblique solide. Il en résulte un déséquilibre de pression hydrostatique qui crée un mouvement de convection. Son sens est tel qu'il tend à réduire les gradients de concentration. Il y a donc, là aussi, création de circulation du vecteur vitesse.

De façon quantitative, le terme **II** de l'équation (7.30) peut être récrit en utilisant la formule de Stokes, qui relie flux et circulation :

$$-\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p \cdot \delta\mathbf{l} = -\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\left(\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p\right) \cdot \delta\mathbf{s}. \tag{7.32}$$

L'intégrale du deuxième membre est prise sur une surface $(\mathcal{S})$ qui s'appuie sur une courbe fermée $(\mathcal{C})$ située à l'intérieur du fluide ; le vecteur $\delta\mathbf{s}$ est normal à la surface $(\mathcal{S})$. Combinons l'égalité (7.32) avec la relation vectorielle générale (7.31) pour obtenir la formule :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{l}\right] &= -\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p \cdot \delta\mathbf{l} \\ &= -\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\rho}\,\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,p)\cdot\delta\mathbf{s} - \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{grad}\left(\frac{1}{\rho}\right) \wedge \mathbf{grad}\,p \cdot \delta\mathbf{s}.\end{aligned} \tag{7.33}$$

Le premier terme de l'intégrale est identiquement nul, et nous retrouvons ainsi le résultat déjà discuté plus haut : le second terme et, par suite $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\left[-\int_{\mathcal{C}}[\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{l}\right]$, sont non nuls si les isostères (ρ = constante) et les isobares (p = constante) sont distinctes. En effet, dans ce cas, les deux gradients qui sont perpendiculaires à ces courbes auront des orientations différentes en un point donné.

Effet de la viscosité (terme III de l'équation (7.30))

La viscosité fait apparaître des gradients de vitesse au voisinage des parois et crée donc de la circulation : l'intégrale sur un contour fermé du terme **III** de l'équation (7.30) des forces dissipatives de viscosité est non nulle. Nous avons déjà rencontré cet effet au chapitre 2 (section 2.1.1) dans l'exemple de la mise en rotation d'un cylindre rempli de fluide : dans l'état initial, le fluide est au repos alors que, en régime stationnaire, il est animé d'un mouvement de rotation solide qui correspond à une densité de vorticité uniforme ; c'est le transport diffusif de vorticité associé à la viscosité qui crée cette distribution.

Analysons l'exemple d'un fluide qui s'approche de l'arête d'une plaque semi-infinie parallèle à l'écoulement (Fig. 7.12).

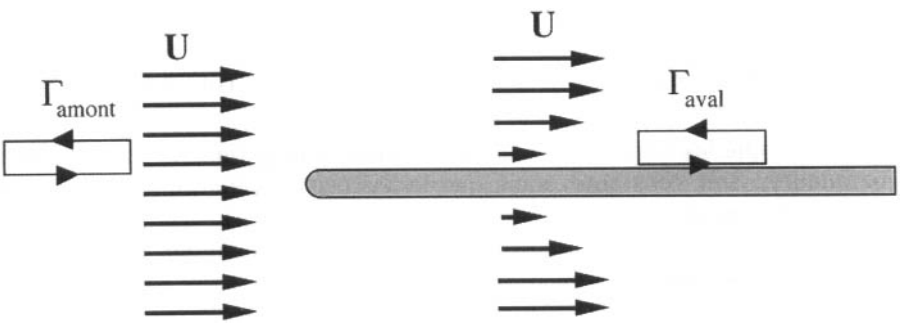


FIG. 7.12 – *Création de vorticité associée aux forces de viscosité dans un fluide incident sur une plaque plane.*

La circulation est créée au voisinage immédiat du bord d'attaque de la plaque. En amont de celle-ci, on a un champ de vitesse uniforme **U**, et la circulation de la vitesse sur un contour fermé du type de (Γ_{amont}) représenté sur la figure 7.12 est nulle. En aval du bord d'attaque, au contraire, il apparaît un gradient de vitesse, car la vitesse doit être nulle sur la paroi alors qu'elle redevient égale à **U** à une distance suffisante. La circulation sur un contour fermé (Γ_{aval}), limité sur un côté par la plaque, est donc non nulle en aval de l'arête. La création et le développement de la couche limite qui est la zone proche de la plaque où existent des gradients de vitesse, seront traités au chapitre 9. Un exemple encore plus saisissant d'une création de vorticité due à la viscosité est l'apparition de tourbillons en aval d'un cylindre placé dans un écoulement (Figs. 2.8 et 2.11).

7.3 Dynamique de la vorticité

7.3.1 Équation de transport de la vorticité et conséquences

Équation de Helmholtz pour un fluide incompressible

Nous allons retrouver et généraliser les résultats précédents en considérant directement l'évolution du champ vectoriel de vorticité $\boldsymbol{\omega}$. Nous partons de l'écriture de l'équation de Navier–Stokes sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p + \nu\,\Delta\,\mathbf{v} \tag{7.34}$$

où le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ a été remplacé par l'expression équivalente $-\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{grad}\left(1/2\,v^2\right)$ (relation (5.34)). Prenons maintenant le rotationnel de cette équation ; on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\ \mathbf{v}) - \mathbf{rot}\ (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{rot}\ \left(\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p\right) + \nu\,\mathbf{rot}\,(\Delta\,\mathbf{v}). \tag{7.35}$$

Supposons que les forces $\mathbf{f}$ en volume dérivent d'un potentiel, que la masse volumique ρ soit constante, mais que la viscosité cinématique ν soit non nulle : ces hypothèses reviennent à négliger les termes de type I et II dans l'équation d'évolution de la vorticité (7.30). Nous montrerons plus bas que l'équation (7.35) peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\ v + \nu\ \Delta\,\boldsymbol{\omega}. \tag{7.36}$$

Cette relation est l'équation fondamentale d'évolution de la vorticité et joue, pour $\boldsymbol{\omega}\,(\mathbf{r}, t)$, un rôle similaire à l'équation de Navier–Stokes pour $\mathbf{v}(\mathbf{r},\, t)$. En regroupant les deux premiers termes du premier membre sous la forme d'une dérivée convective, on obtient la forme équivalente :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\ \mathbf{v} + \nu\ \Delta\,\boldsymbol{\omega}. \tag{7.37}$$

Notons que cette équation de transport de la vorticité s'applique à tous les écoulements, qu'ils soient laminaires ou turbulents. La description d'un écoulement à partir du champ de vorticité est toujours une alternative possible à la description par l'intermédiaire du champ de vitesse. C'est sur des considérations pratiques liées à la configuration particulière de l'écoulement que se fera le choix de l'une ou l'autre approche.

Démonstration de l'équation (7.36) On décompose $\mathbf{rot}\,(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega})$ en utilisant la relation vectorielle générale suivante, valable pour des champs de vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ quelconques :

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\ \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad})\ \mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}. \tag{7.38}$$

Compte tenu de ce que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, car le fluide est supposé incompressible, et de ce que $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div}(\mathbf{rot}\ \mathbf{v})$ est identiquement nul pout tout champ de vecteur, on obtient :

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\boldsymbol{\omega}. \tag{7.39}$$

Évaluons maintenant le dernier terme $\nu\,\Delta\,\boldsymbol{\omega}$, en utilisant l'identité vectorielle :

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\ \mathbf{A}) = \mathbf{grad}\,(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \tag{7.40}$$

Choisissant $\mathbf{A} = \mathbf{v}$, on obtient :

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{grad}\,(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\ \mathbf{v}) = -\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}. \tag{7.41}$$

En prenant le rotationnel des deux membres, cette équation devient :

$$\mathbf{rot}\,(\Delta\,\mathbf{v}) = -\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}).$$

Soit, en utilisant à nouveau la relation (7.40) :

$$\mathbf{rot}\,(\Delta\,\mathbf{v}) = \Delta\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{grad}\,(\operatorname{div}\ \boldsymbol{\omega}) = \Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{7.42}$$

On vérifie bien ainsi l'identité entre les deux derniers termes des équations (7.35) et (7.36).

Dans l'équation (7.36), les deux premiers termes décrivent l'effet de l'instationnarité de l'écoulement et de la convection de la vorticité ; le dernier terme décrit l'amortissement de $\boldsymbol{\omega}$ par viscosité. En l'absence du terme $(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$, cette équation serait très semblable aux équations de transport de la chaleur (équation de Fourier (1.17)) ou de diffusion de la masse (Éq. (1.26)) ; la viscosité cinématique ν représente ici le coefficient de diffusion de la quantité vectorielle $\boldsymbol{\omega}$.

Une conséquence importante de cette équation est la persistance de l'irrotationalité de fluides parfaits ($\eta = 0$) initialement au repos. En effet, si $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},\, \mathbf{t} = 0)$ est initialement identiquement nul, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = 0. \tag{7.43}$$

Alors, quel que soit t, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},\, t)$ reste identiquement nul. Nous avions déjà énoncé cette propriété au début du chapitre 6 consacré aux écoulements potentiels, et nous l'avons également justifiée à la section précédente à partir du théorème de Kelvin (section 7.2.1 (i)).

Étirement et basculement des tubes de vorticité

Le terme additionnel $(\boldsymbol{\omega}\ \cdot\ \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ de l'équation (7.36) fait intervenir les variations du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ dans la direction du vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}$, puisqu'il contient la projection du gradient sur la direction du vecteur $\boldsymbol{\omega}$. Notons que ce terme existe même dans un fluide parfait, dans un cas où la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ serait non nulle à l'instant initial. Dans toute cette section, nous négligerons d'ailleurs l'effet de la viscosité, que nous examinerons ensuite.

Nous allons représenter les variations de $\boldsymbol{\omega}$ à partir des déformations d'un élément de tube de vorticité de longueur δl, de section S parallèle à $\boldsymbol{\omega}$. Nous avons vu précédemment (section 7.2.1) que les tubes de vorticité sont convectés par le fluide, exactement comme s'il s'agissait de lignes matérielles. Le terme d'étirement $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ peut être décomposé suivant deux directions : l'une parallèle à la direction du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ (que nous supposerons dans la suite dirigé suivant l'axe Oz), l'autre (que nous noterons « $\perp$ ») dans le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$. Nous pouvons alors écrire l'équation (7.37) sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \omega \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{e}_z + \omega \frac{\partial v_\perp}{\partial z}\mathbf{e}_\perp \tag{7.44}$$

où $\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{e}_\perp$ représentent les vecteurs unitaires, respectivement dans la direction Oz et dans le plan perpendiculaire à Oz.

- Le terme $\omega \partial v_z / \partial z$ représente l'effet d'étirement de l'élément de tube de tourbillon. Quand δl augmente (Fig. 7.13a), la section S décroît, et le module de la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ augmente.
- Le terme $\omega \partial v_\perp / \partial z$ traduit le basculement du tube de vorticité en présence d'un gradient de vitesse, sans changement de la longueur du tube (Fig. 7.13b) ni de la norme de $\boldsymbol{\omega}$.

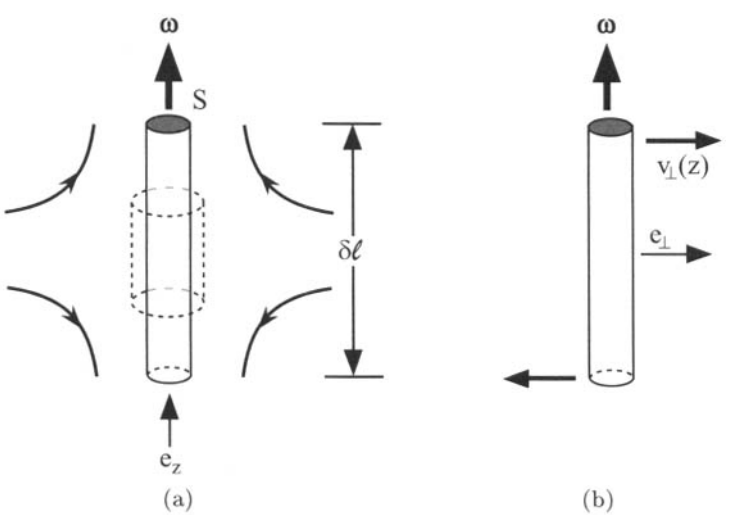


FIG. 7.13 – *(a) Variation de la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ associée à la déformation d'un tube de vorticité par étirement ; (b) variation de $\boldsymbol{\omega}$ par basculement d'un tube de vorticité.*

Physiquement, le terme d'étirement reflète directement la conservation de la norme du moment cinétique discutée plus haut (section 7.2.1), associée à la conservation de la circulation autour d'un tube de vorticité. En effet, l'étirement de l'élément matériel de tube de courant s'accompagne d'une réduction de sa section pour conserver constante la masse $S\,\delta l$ de l'élément. Par conséquent, le moment d'inertie J du tube diminue (J est proportionnel à $S^2\,\delta l$). On doit donc avoir augmentation de la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ – et donc de la vorticité – pour conserver constant le moment cinétique $J\,\Omega$. En raisonnant en termes de conservation de la circulation de la vitesse, plutôt que de conservation du moment cinétique, on écrit que la quantité $\Gamma = \omega S$ est constante (Γ est en effet – d'après le théorème de Stokes – la circulation de la vitesse autour du tube de vorticité). En utilisant la condition $S\,\delta l =$ constante, on en déduit que ω (donc Ω) et δl sont proportionnels et que le rapport $\omega/\delta l$ doit rester constant.

On met clairement en évidence cet effet en créant une ligne de tourbillon verticale dans une couche horizontale de liquide en écoulement. La vorticité du tourbillon est visualisée par la rotation d'une balle flottant à la surface du liquide (Fig. 7.14). La présence d'une bosse au fond du récipient entraîne une diminution de la longueur du tube de tourbillon et donc, un ralentissement de la rotation de la balle (ω et δl diminuent en même temps pour rester de rapport constant).

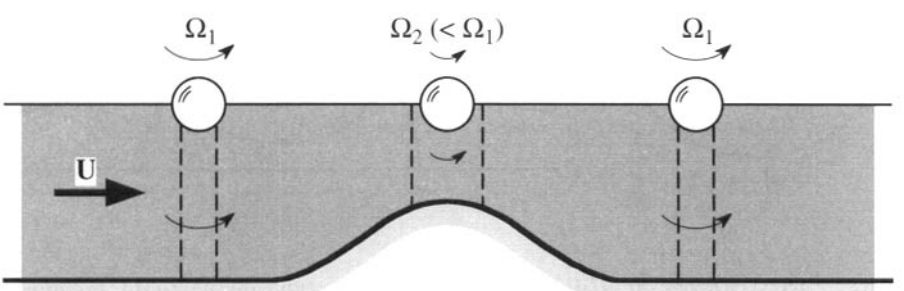


FIG. 7.14 – *La variation de la vorticité induite par la variation d'épaisseur d'une couche de fluide est matérialisée par la variation de la vitesse de rotation d'une bille placée à la surface du liquide qui s'écoule avec une vitesse* **U** *(d'après le film* Vorticity *du NCMF).*

Nous verrons à la section 7.5, qui traite des écoulements en rotation, l'importance de ces effets d'étirement pour les phénomènes atmosphériques en présence de reliefs.

Un exemple d'application des équations de conservation de la vorticité : le vortex de Hill

Le vortex de Hill représente un cas limite dans lequel la vorticité est distribuée en volume à l'intérieur d'une sphère de rayon R (l'autre limite correspond aux répartitions de vorticité filamentaires que nous avons déjà rencontrées). Les composantes de $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\omega_\theta = Ar, \quad \omega_r = \omega_x = 0 \quad \text{à l'intérieur de la sphère} \tag{7.45a}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{à l'extérieur de la sphère.} \tag{7.45b}$$

Les lignes de vorticité sont donc des cercles centrés sur l'axe de révolution Ox et sont perpendiculaires à celui-ci (Fig. 7.15). On suppose le fluide parfait et incompressible (la vorticité est préétablie en tant que condition initiale).

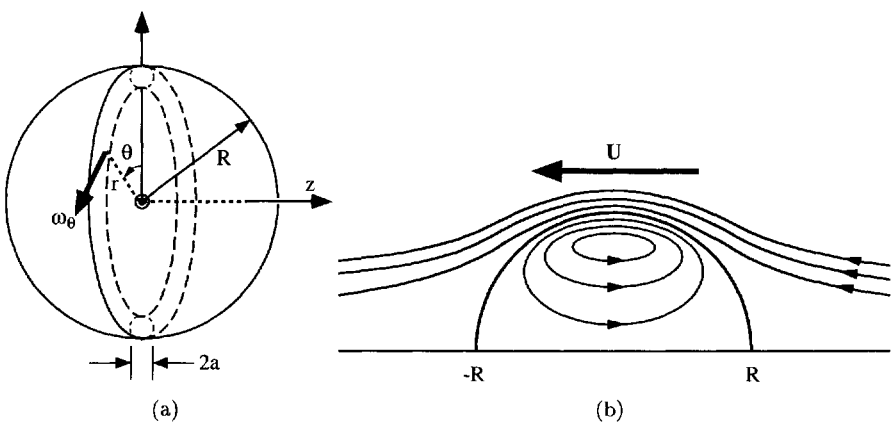


FIG. 7.15 – *Vortex de Hill ; (a) schéma d'un tube de vorticité torique à l'intérieur du vortex ; (b) forme des lignes de courant à l'intérieur et autour de ce vortex dans un référentiel se déplaçant à la vitesse de mouvement d'ensemble du vortex.*

La signification de la forme de cette distribution peut se comprendre si on analyse l'évolution d'un tube de vorticité formé d'un tore de rayon moyen r, et dont la section a pour rayon a (Fig. 7.15) ; la circulation autour de ce tore a pour valeur $(\pi a^2\, \omega_\theta(r))$. Si, lors du mouvement, le tube de vorticité se déforme lorsqu'il est entraîné par le mouvement du fluide, son volume $(2\pi^2\, r(t)\, a^2(t))$ doit rester constant pour vérifier la condition d'incompressibilité. La conservation de la circulation dans le tube entraîne donc que la quantité $a^2\, \omega_\theta(r) \propto \omega_\theta(r)/r(t)$ est conservée lors du déplacement du tube (point de vue lagrangien). Le choix de $\omega_\theta = Ar$ correspond donc à une distribution de vorticité qui vérifie à tout instant la condition précédente.

Pour retrouver quantitativement ce résultat, écrivons la composante azimutale de l'équation d'évolution de la vorticité (Éq. (7.37)) ; appelons $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ les vecteurs unitaires dans les directions radiale et azimutale respectivement. En coordonnées cylindriques, cette équation n'a qu'une composante non nulle, celle dans la direction θ. Utilisant le développement de $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}\,\mathbf{v})$ en coordonnées cylindriques, on trouve, à l'aide de la relation : $\partial \mathbf{e}_r / \partial\theta = \mathbf{e}_\theta$ et de la propriété d'invariance du problème par rotation autour de l'axe Ox (ce qui entraîne que $\partial v_r / \partial\theta = 0$) :

$$\frac{\mathrm{d}\omega_\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\theta = \omega_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_r\,\mathbf{e}_r) = \frac{\omega_\theta\, v_r}{r}\,\mathbf{e}_\theta.$$

Il en résulte que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\omega_\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}\omega_\theta}{\mathrm{d}t} + \omega_\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\,\frac{\omega_\theta\, v_r}{r} - \frac{\omega_\theta}{r^2}\,v_r = 0. \tag{7.46}$$

On vérifie ainsi que la distribution de vorticité $(\omega_\theta / r) = A$ (avec $A =$ constante) du vortex de Hill subsiste pendant tout le mouvement du vortex, car elle vérifie à tout instant l'équation d'évolution. On peut également montrer plus précisément que, dans un *référentiel suivant le déplacement moyen du vortex*, les distributions de la vorticité et de la vitesse sont stationnaires : les particules de fluides situées à l'intérieur de la sphère de rayon R suivent des trajectoires fermées représentées sur la figure 7.15b. On peut calculer le champ de vitesse qui en résulte en appliquant la loi de Biot et Savart (Éqs. (7.21)) à cette distribution de vorticité.

Fonction de courant du vortex de Hill

Appelons $\mathbf{U}$ la vitesse de déplacement moyen du vortex et placons nous dans un référentiel en mouvement à la vitesse $\mathbf{U}$. On peut montrer que la fonction de courant Ψ définie, dans ce référentiel, en coordonnées cylindriques par les équations (3.21) vérifie à l'intérieur du vortex :

$$\Psi = -\frac{A}{10} r^2\,(R^2 - x^2 - r^2). \tag{7.47a}$$

La surface $x^2 + r^2 = R^2$ et l'axe $\mathrm{r} = 0$ sont donc bien des lignes de courant. Remarquons que, à l'extérieur du vortex, la vorticité est nulle : l'écoulement est donc potentiel et le même qu'autour d'une sphère de rayon R. La vitesse de déplacement globale du vortex dans un référentiel où le fluide est immobile à l'infini est reliée à A par :

$$U = \frac{2}{15} A\,R^2. \tag{7.47b}$$

Enfin, la composante tangentielle de la vitesse à la surface $r = R$ du vortex est égale à $-(1/5)A\,r\,R$.

7.3.2 Équilibre étirement-diffusion dans la dynamique de la vorticité

Un aspect important de l'équation de transport de vorticité (7.37) est la coexistence d'un terme de diffusion visqueuse, qui tend à uniformiser la distribution de vorticité, et d'un terme d'étirement qui tend au contraire à la concentrer et à augmenter son amplitude. L'équilibre entre ces deux termes est un élément fondamental des problèmes de turbulence qui sera étudiée au chapitre 11.

Évolution de la vorticité dans un écoulement élongationnel de révolution

Ce modèle représente de façon approximative la dynamique des échanges de vorticité dans l'écoulement moyen près d'un trou percé au fond d'un récipient cylindrique (vidange d'un récipient). Nous avons déjà analysé (section 7.1) le vortex de Rankine qui modélise le champ de vitesse d'un tourbillon créé par un tel écoulement. Il faut maintenant comprendre pourquoi, dans ce cas, la vorticité reste concentrée dans un cœur de petite dimension, au lieu de se répartir uniformément dans le fluide.

Considérons un écoulement incompressible irrotationnel avec une symétrie de révolution (Fig. 7.16), et dont les composantes de vitesse vérifient :

$$v_r = -a\,r, \qquad v_z = a\,z \qquad (a > 0). \tag{7.48}$$

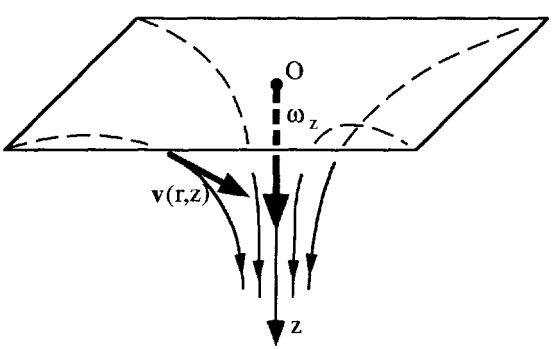


FIG. 7.16 – *Modèle d'écoulement d'étirement de révolution (voir Fig. 3.14a).*

Cet écoulement correspond à une élongation suivant l'axe Oz, compensée par un écoulement radial pour satisfaire la conservation de la masse et est assez semblable au champ de vitesse près d'un orifice au fond d'un récipient. Supposons que l'on *perturbe* cet écoulement en introduisant une distribution de vorticité de faible amplitude $\omega_z\,(r,\,t)$ (le tourbillon de vidange). Pour cette

distribution, écrivons l'équation de transport de la vorticité en coordonnées cylindriques (7.36) :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{a}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(\omega_z r^2) + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega_z}{\partial r}\right) \tag{7.49}$$

où le premier terme du membre de droite correspond à la somme des termes d'étirement et de convection de l'équation (7.36). En régime stationnaire, le premier terme est nul ($\partial\omega_z/\partial t = 0$) et l'équation (7.49) devient, après intégration par rapport à r :

$$\frac{a}{2}\omega_z r^2 + \nu r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} = \text{constante}. \tag{7.50}$$

La constante qui apparaît dans cette intégration est nécessairement nulle ; en effet, si tel n'était pas le cas, la vorticité ω_z divergerait logarithmiquement à faible distance. D'autre part, elle décroîtrait en $1/r^2$ à grande distance jusqu'à l'infini, et la vorticité totale intégrée sur tout le volume de l'écoulement divergerait ; or, elle doit rester finie et constante, car il n'existe dans ce problème aucun mécanisme de création de vorticité. La distribution de vorticité vérifie donc :

$$\omega_z = \omega_1 \, \mathrm{e}^{-ar^2/4\nu}. \tag{7.51}$$

Ce résultat correspond à l'équilibre sur une distance caractéristique $\delta_D \approx \sqrt{\nu\,/\,a}$, entre les effets d'étirement de la vorticité sous l'effet du champ élongationnel $\mathbf{v}$ et d'étalement par diffusion. Dans le cas de l'écoulement à travers un orifice de diamètre d avec une vitesse caractéristique U, on a :

$$a \approx \frac{U}{d} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_D}{d} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U\,d}} \approx \sqrt{\frac{1}{Re}} \tag{7.52}$$

où $Re = U\,d/\nu$ est le nombre de Reynolds. Ainsi, plus le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement est élevé, plus la vorticité sera concentrée dans un cœur de faible diamètre. Le modèle du vortex de Rankine ne représente qu'une approximation de la structure de tels tourbillons (on n'a pas de limite nette du cœur), mais il décrit correctement le fait que la plus grande partie de la vorticité de l'écoulement est concentrée sur un très faible rayon de cœur. La variation de ce rayon en $1/\sqrt{Re}$ traduit l'équilibre convection–diffusion. Nous rencontrerons une variation identique au chapitre 9, dans l'étude des couches limites où des équilibres du même type sont observés. Ce résultat présente également des analogies avec la turbulence homogène et isotrope, que nous étudierons au chapitre 11. Dans ce modèle, l'énergie est transférée, par des mécanismes convectifs non dissipatifs, des structures turbulentes de grande taille vers des tourbillons de plus en plus petits, où est concentrée la vorticité (*cascade d'énergie de Kolmogorov*). L'étirement des tubes de vorticité joue un rôle essentiel tout au long de ce processus. En revanche, la viscosité n'intervient qu'à l'échelle des tourbillons de plus petite taille de la même manière que, dans le présent problème, elle n'intervient qu'à l'échelle du cœur.

Création et destruction de vorticité dans un écoulement turbulent

Dans l'exemple précédent, la position et la géométrie du tourbillon étaient bien définies ; cependant, on observe des mécanismes similaires dans les écoulements turbulents désordonnés (chapitre 11, section 11.2.6). Le mécanisme décrit par le terme d'étirement–rotation $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ est en particulier une étape essentielle dans la compréhension de la turbulence d'écoulements tridimensionnels. Ceux-ci peuvent-être considérés à partir d'un ensemble de tubes de vorticité dont le diamètre (représentant la plus petite échelle spatiale – le « grain » – des variations de la vitesse d'écoulement) est d'autant plus petit que l'effet de la viscosité est limité (ou le nombre de Reynolds plus grand).

Au contraire, dans les écoulements bidimensionnels où le champ de vitesse $\mathbf{v}$ est indépendant d'une des coordonnées (la verticale par exemple), le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ est identiquement nul. Cette propriété caractérise, aux grandes échelles de longueur, la turbulence d'écoulements atmosphériques et océanographiques. Elle est due à l'extension verticale limitée de ces écoulements (l'épaisseur des couches océaniques ou atmosphériques) et surtout à l'influence de la rotation $\boldsymbol{\Omega}$ de la Terre qui tend à découpler les composantes du mouvement perpendiculaire et parallèle à la surface de la Terre, comme nous le verrons à la section 7.5 dans l'étude des écoulements en rotation.

Nous avons analysé précédemment la dynamique des lignes de tourbillons isolées et soumises à un champ de vitesse extérieur. Dans les écoulements à deux comme à trois dimensions, il faut de plus tenir compte de l'interaction entre les différents tubes de tourbillons ; pour les tourbillons courbes, il faut également faire intervenir le champ de vitesse induit sur le tourbillon lui-même (section 7.1.4). Nous analysons ce facteur à la section suivante consacrée à la dynamique des tourbillons filamentaires.

7.4 Quelques exemples de répartition de vorticité concentrée sur des lignes singulières : ensembles de lignes de tourbillons

7.4.1 Quelques cas de répartition de vorticité concentrée sur des lignes

Au début de ce chapitre (section 7.1.1), nous avons présenté un certain nombre d'exemples d'écoulements dans lesquels la vorticité est concentrée en filaments. Nous pouvons encore citer les tourbillons rectilignes émis de façon alternée en aval d'un obstacle cylindrique placé perpendiculairement à un écoulement. Ils forment alors deux rangées en quinconce (l'allée de *tourbillons de Bénard-von Karman*), comme nous l'avons vu au chapitre 2 (section 2.4.1). Une rangée de tourbillons similaire (cette fois-ci unique) est

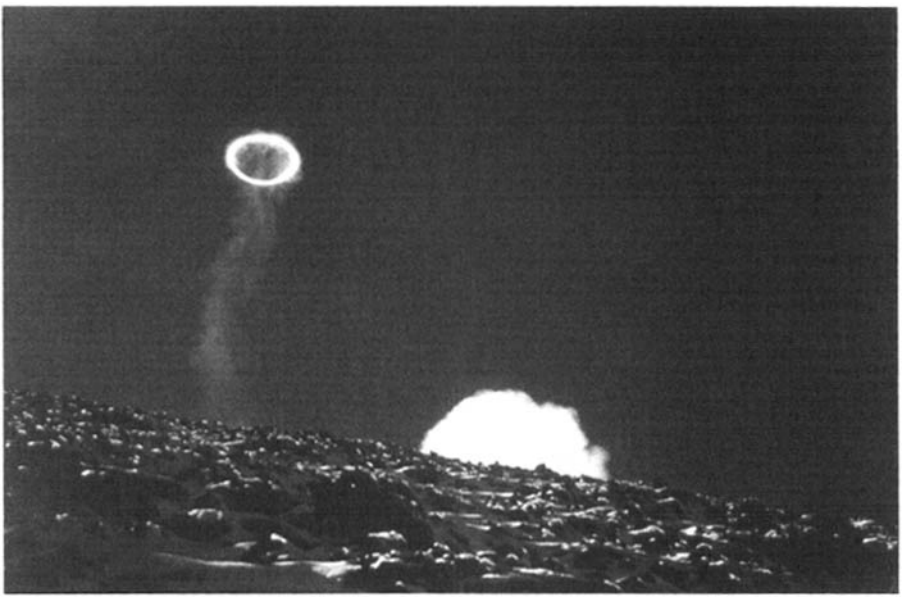


FIG. 7.17 – *Observation d'un tourbillon en anneau au-dessus d'un cratère de l'Etna (cliché F. le Guern).*

observée au niveau de la *couche de mélange* entre deux écoulements parallèles et de vitesses différentes, d'un même fluide ou de deux fluides différents (voir chapitre 10, section 10.4.1). Dans ces deux cas, la taille relative du cœur par rapport à la taille totale de cette structure est plus grande, mais la rotation autour d'une zone centrale est clairement identifiable.

Dans d'autres cas, les lignes de tourbillons sont refermées sur elles-mêmes (anneaux tourbillons). Citons par exemple les anneaux de fumée émis à la sortie de tuyaux ou d'orifices cylindriques, comme ceux issus de la bouche des fumeurs ou, à plus grande échelle, des cratères des volcans tels que l'Etna (Fig. 7.17). Un autre exemple est celui des anneaux de tourbillons d'une taille inférieure au micron, qui ont été mis en évidence dans l'hélium superfluide (voir annexe à la fin de ce chapitre).

Dans la suite de cette section, nous modéliserons ce type d'écoulements par des « lignes de vorticité » de rayon de cœur très petit. Nous envisagerons le cas des tourbillons rectilignes, puis celui des anneaux tourbillons.

7.4.2 Dynamique d'un ensemble de lignes de vorticité rectilignes parallèles

Nous considérerons des distributions de filaments rectilignes d'axes parallèles correspondant à plusieurs des cas décrits plus haut. En l'absence

de viscosité, chaque élément des cœurs de tourbillon se déplace à la vitesse locale du fluide en ce point. Cette vitesse est la somme du champ de vitesse extérieur et de la vitesse induite par les autres tourbillons, puisqu'un tourbillon rectiligne n'induit pas de vitesse sur lui-même. Ce résultat est, comme nous l'avons vu (section 7.2.1), une conséquence directe du théorème de Kelvin, valable pour les fluides parfaits.

Ensemble de deux tourbillons rectilignes et parallèles

Commençons par l'exemple le plus simple de deux tourbillons filamentaires d'axes parallèles et de circulation Γ_1 et Γ_2 (Fig. 7.18a). Le champ de vitesse au cœur des lignes O_1 et O_2 est dû uniquement à la vitesse induite par l'autre tourbillon ; elle est dirigée suivant la normale au segment O_1O_2 et a un module égal respectivement à : $v_1 = \Gamma_2 / 2\pi d$ et $v_2 = \Gamma_1 / 2\pi d$ où d est la distance entre les cœurs des tourbillons.

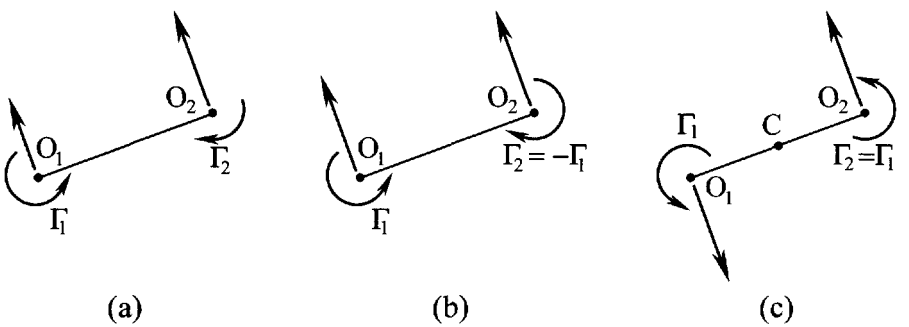


FIG. 7.18 – *Champ de vitesse associé à deux tourbillons parallèles rectilignes de circulations Γ_1 et Γ_2 ; (a) cas général ; (b) $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, la ligne O_1O_2 se déplace parallèlement à elle-même ; (c) $\Gamma_1 = \Gamma_2$, la ligne O_1O_2 tourne autour de son centre C.*

Deux cas particuliers sont importants en pratique :

- $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \mathbf{0}$ (le doublet de lignes ; Fig. 7.18b). L'ensemble des deux lignes se déplace à la même vitesse dans la direction perpendiculaire aux lignes. Dans ce cas, la vitesse commune est égale en norme à $\Gamma/(2\pi d)$, où Γ est la valeur absolue des circulations. On retrouvera une propriété de même nature pour les anneaux de tourbillons dans lesquels les circulations des vitesses du fluide en deux points diamétralement opposés sont de signes opposés.
- $\Gamma_1 = \Gamma_2$ (Fig. 7.18c). L'ensemble des deux lignes tourne autour du milieu C de O_1O_2 avec une vitesse angulaire $\Gamma/\pi d^2$.

Plus généralement, dans le cas d'un rapport Γ_1 / Γ_2 quelconque, les lignes tournent autour de leur barycentre (on leur affecte respectivement des

coefficients Γ_1 et Γ_2) avec une vitesse angulaire $(\Gamma_1 + \Gamma_2)/(2\pi\, d^2)$. Dans l'exemple du doublet, le barycentre est rejeté à l'infini.

Les résultats vus pour deux lignes expriment indirectement des lois de conservation pour la quantité de mouvement, et le moment cinétique pour le fluide parfait dans lequel se déplacent ces lignes. Ainsi, plus généralement dans le cas d'un nombre quelconque de lignes :

- la circulation totale $\sum \Gamma_i$ reste constante au cours du mouvement ;
- le barycentre G de l'ensemble des lignes défini par $\sum \Gamma_i \,.\, \mathbf{GO_i} = \mathbf{0}$ reste fixe.

Discutons maintenant des distributions particulières de vorticité qui représentent, de façon approchée, des écoulements réels.

Les nappes continues et discrètes de tourbillons

Une discontinuité de vitesse tangentielle (une couche de cisaillement libre) peut être produite par deux couches de fluide superposées (identiques ou non), initialement séparées par une paroi fine qui entrent en contact tangentiellement à des vitesses différentes indépendantes des coordonnées :

$$u_x = U_1 \ (y > 0), \quad u_x = U_2 \ (y < 0).$$

À cet écoulement correspond une nappe de vorticité, infiniment mince et continue dans le plan $y = 0$ avec une densité uniforme γ_1 par unité de longueur suivant Ox :

$$\gamma_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega \ \mathrm{d}y \right] \cdot \tag{7.53}$$

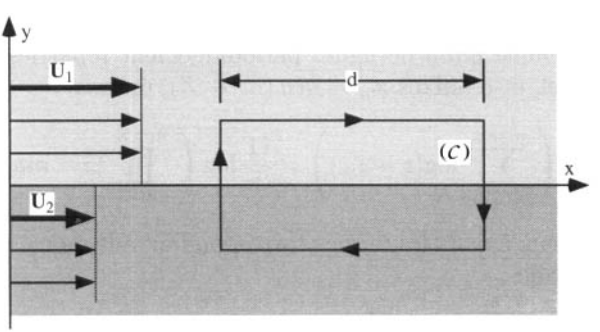


FIG. 7.19 – *Circulation le long d'un contour (C), associée à un écoulement présentant une discontinuité de vitesse tangentielle.*

On peut évaluer γ_1 à partir du théorème d'Ampère appliqué au contour $(\mathcal{C})$ (Fig. 7.19).

$$(U_1 - U_2)d = \gamma_1 \, \mathrm{d} \tag{7.54}$$

d'où :

$$\gamma_1 = (U_1 - U_2)$$

(notons qu'ici γ_1 est homogène à une vitesse : il s'agit en effet d'une circulation par unité de longueur). En pratique, une telle nappe de vorticité est instable. La vorticité se rassemble en des cœurs de tourbillons disposés selon une rangée périodique suivant la direction Ox de l'écoulement. Cette instabilité sera étudiée au chapitre 10 (section 10.4.1).

Allées de tourbillons

On considère maintenant un très grand nombre de tourbillons rectilignes, répartis sur une ou deux ligne(s) (allée simple ou double). On peut calculer aisément le champ de vitesse en un point quelconque, par superposition des champs de vitesse dus à chacun des tourbillons indépendamment. Nous avons vu au chapitre 6 (section 6.6.2) que le potentiel complexe des vitesses $w(z) = v_x - \mathrm{i}\, v_y$ en un point d'affixe $z = x + \mathrm{i}\, y$ est, pour un vortex isolé, centré au point de coordonnées x_i et y_i ($z_i = x_i + \mathrm{i}\, y_i$) et de circulation algébrique Γ (le signe de Γ, déterminé par l'une des règles classiques d'orientation de l'espace, est choisi ici négatif) :

$$f(z) = \frac{\mathrm{i}\,\Gamma}{2\pi} \log(z - z_i). \tag{7.55}$$

À ce potentiel, correspond un champ de vitesse orthoradial $v_\theta = -\Gamma / (2\pi\, r)$ dû au tourbillon centré au point d'affixe z_i.

(i) Allée simple

Pour un ensemble infini de lignes périodiquement réparties entre $-\infty$ et $+\infty$ sur l'axe réel, et d'affixes $z_m = m\, a\, (m \in Z)$, on a :

$$F(z) = \frac{\mathrm{i}\,\Gamma}{2\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \log[z - z_m] \right) = \frac{\mathrm{i}\,\Gamma}{2\pi} \log \left(\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} [z - ma] \right). \tag{7.56}$$

En regroupant deux à deux les termes correspondant à la même valeur absolue de m, sous la forme :

$$\log(z - m\, a) + \log(z + m\, a) = \log[z^2 - m\, a)^2] = \log(m\, a)^2 + \log \left[\frac{z^2}{m^2\, a^2} - 1 \right]$$

on obtient :

$$F(z) = -\frac{\mathrm{i}\,\Gamma}{2\pi} \log \left(z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2\, a^2} \right) \right) - \frac{\mathrm{i}\,\Gamma}{2\pi} \log \left(\prod_{m=1}^{\infty} (-1)^n\, (m\, a)^2 \right).$$

En notant F_0 le deuxième terme (indépendant de z qui apparaît dans cette expression, et en utilisant l'identité :

$$\sin x = x \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{m^2 \pi^2}\right)$$

on obtient :

$$F(z) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi} \log \left[\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right] - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi} \log \frac{a}{\pi} + F_0.$$

La vitesse complexe $w(z)$ s'en déduit alors par :

$$w(z) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2a} \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cdot \tag{7.57}$$

Pour obtenir la vitesse complexe $w_m(z)$ sur chaque tourbillon, d'affixe $z_m = m\,a$, il faut retrancher de $w(z)$ la contribution de ce tourbillon lui-même :

$$w_m(z) = \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2a} \left[\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \frac{1}{z - m\,a}\right] \cdot \tag{7.58}$$

On montre aisément, en développant la fonction cotangente au voisinage de l'affixe $z_m = m\,a$, que $w_m(z)$ s'annule pour $z = m\,a$ et que, par conséquent, la vitesse est nulle au centre de chaque tourbillon. Elle est donc immobile, ce qui pouvait être prévu par raison de symétrie.

(ii) Allée double de tourbillons alternés

L'intérêt du calcul précédent réside aussi dans son utilisation pour le cas d'une allée double de tourbillons alternés. Nous avons vu au chapitre 2 (section 2.4.1) qu'on observe, pour des nombres de Reynolds compris entre quelques dizaines et environ 200, une émission de tourbillons alternés derrière les obstacles cylindriques non profilés. Ces tourbillons constituent *l'allée de Bénard-von Karman* (Fig. 2.8). Nous allons déterminer ici le champ de vitesse dans cette double rangée de tourbillons, qui peut être représentée de façon simplifiée par deux allées simples du type que nous venons d'étudier (Fig. 7.20). Tous les tourbillons d'une même allée sont de même sens ; ils sont de sens opposé d'une allée à l'autre.

L'ensemble de l'allée double se déplace parallèlement à elle-même sous l'effet de l'écoulement imposé $\mathbf{U}$ et de la vitesse induite par les tourbillons de l'autre rangée (nous venons de voir que les contributions des tourbillons de la même rangée s'annulent par symétrie). Par ailleurs, seule subsiste la composante parallèle à la direction Ox de la vitesse ; en effet, les composantes perpendiculaires à cette direction, dues à des tourbillons symétriques par rapport au plan perpendiculaire à Ox et passant par le tourbillon, s'annulent deux par deux sur ce plan. Le calcul détaillé de la vitesse induite sur chaque tourbillon est donné plus bas. On peut montrer, par un calcul de stabilité linéaire, que la seule solution stable au premier ordre pour une allée de

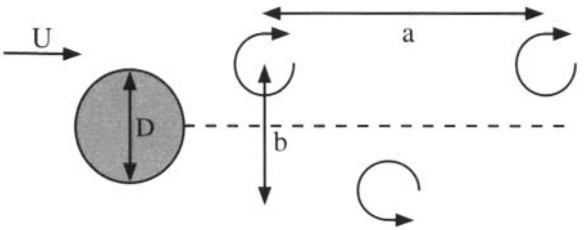


FIG. 7.20 – *Schéma de l'allée double de tourbillons de Bénard-von Karman produits derrière un cylindre pour un écoulement uniforme (voir aussi la photographie 2.8).*

longueur infinie est celle où les tourbillons sont disposés en quinconce avec un rapport $b/a \approx 0,3$ indépendant de la vitesse. Dans ce cas, la vitesse est la même pour tous les tourbillons, et l'allée se déplace sans déformation.

Calcul de la vitesse de déplacement de l'allée double de tourbillons

Notons W la vitesse complexe induite par les tourbillons de la rangée inférieure sur le tourbillon de la rangée supérieure situé au point d'affixe (0, b/2). En tenant compte du fait que la rangée supérieure n'induit pas de vitesse sur ce tourbillon, et en utilisant les relations (7.57) et (7.58) établies dans le cas de l'allée simple, on obtient :

$$W = -\frac{\mathrm{i}\,\Gamma}{2a}\,\mathrm{cotan}\,\left[\frac{\pi}{a}\left(z + \frac{a}{2} + \mathrm{i}\,\frac{b}{2}\right)\right]_{z=\mathrm{i}b/2}.$$

Soit :

$$W = -\frac{\mathrm{i}\,\Gamma}{2a}\tan\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi\,b}{b}\right) = -\frac{\Gamma}{2a}\tan h\left(\frac{\pi b}{a}\right). \tag{7.59}$$

On montre de la même manière que la vitesse induite par les tourbillons de la rangée supérieure sur ceux de la rangée inférieure a la même valeur, ce qui justifie la propriété de déplacement global à la vitesse W de l'allée double dans son ensemble.

Estimons maintenant la fréquence d'émission f des tourbillons dans le cas de la figure 7.20. La vitesse relative de l'allée par rapport à l'obstacle est proportionnelle à U, vitesse de l'écoulement incident sur le cylindre ; en effet, la vitesse W que nous venons de calculer varie elle-même linéairement avec la vitesse de l'écoulement extérieur. D'autre part, l'espacement transverse b est légèrement supérieur au diamètre D de l'obstacle. La fréquence f vérifie donc :

$$f \approx \frac{U+W}{a} \approx \alpha\frac{U}{D}$$

où α est un nombre réel de l'ordre de l'unité.

D'où :

$$Sr = \frac{f}{\left(\dfrac{U}{D}\right)} \approx \alpha. \tag{7.60}$$

Le nombre sans dimension Sr est le *nombre de Strouhal*, que nous avons déjà défini au chapitre 2 (section 2.4.1). Dans nos hypothèses, il est indépendant de la vitesse et de la nature du fluide pour un obstacle donné, et il constitue le paramètre sans dimension qui caractérise la périodicité de l'écoulement. Expérimentalement, on trouve que Sr est de l'ordre de $0,2$ pour un cylindre circulaire, et qu'il dépend peu de la nature du fluide et du nombre de Reynolds tant que celui-ci est suffisamment élevé (plus grand que quelques milliers, en prenant pour échelle de longueur la largeur de l'obstacle).

Ces caractéristiques ont permis la réalisation de vélocimètres qui mesurent la vitesse à partir de la fréquence d'émission de tourbillons : on utilise des obstacles à arêtes vives, pour lesquels l'émission de tourbillons est plus stable et la dépendance de Sr par rapport au nombre de Reynolds est plus faible. On peut, par exemple, détecter l'émission de tourbillons en analysant les oscillations de différence de pression entre deux faces d'un obstacle parallèles à l'écoulement.

L'émission périodique de tourbillons peut aussi avoir des conséquences néfastes, notamment sur les structures soumises au vent : des oscillations destructrices de grande amplitude peuvent apparaître lorsque la fréquence d'émission est égale à celle d'une résonance mécanique. L'effondrement du pont suspendu de Tacoma aux États-Unis en est un exemple classique.

7.4.3 Anneaux tourbillons

Les anneaux tourbillons sont formés par un tube de vorticité de petit diamètre, fermé sur lui-même, et assimilable à une ligne constituant le cœur du tourbillon (Fig. 7.21). La circulation Γ est constante le long de tout contour entourant une fois cette ligne. L'anneau tourbillon est une structure très stable de vorticité, qui est souvent associée à des obstacles ou des orifices à symétrie circulaire en hydrodynamique (Fig. 7.17).

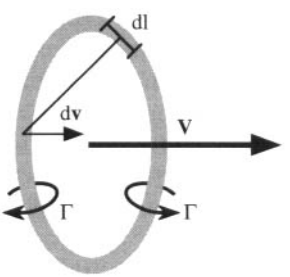


FIG. 7.21 – *Schéma d'un anneau tourbillon de circulation Γ se déplaçant à la vitesse uniforme V.*

Vitesse de déplacement d'un anneau tourbillon

Dans la suite, nous analysons le cas d'un anneau tourbillon plan circulaire, de rayon R, qui se déplace dans un fluide parfait sous l'action de la vitesse induite en chaque point M par les autres éléments $\mathrm{d}l$ du cœur du tourbillon (on suppose le champ de vitesse extérieur nul). Nous avons vu plus haut (section 7.1.4) que la vitesse $\mathrm{d}\mathbf{v}$ correspondante est perpendiculaire à la fois à l'élément de ligne et au vecteur joignant M à $\mathrm{d}\mathbf{l}$; $\mathrm{d}\mathbf{v}$ est donc perpendiculaire au plan du cœur du tourbillon. En raison de la symétrie du problème, la vitesse totale induite est la même en tous les points du cœur et perpendiculaire au plan de l'anneau ; ce dernier se propage donc sans se déformer à une vitesse $\mathbf{V}$ parallèle à son axe.

L'ordre de grandeur du module de $\mathbf{V}$ peut être calculé à l'aide de la formule (7.22), qui donne la vitesse induite par un arc de ligne de tourbillon en chacun de ses points :

$$V \approx \frac{\Gamma}{4\pi R} \ln\left(\frac{R}{\xi}\right)$$

où ξ représente l'ordre de grandeur de la taille du cęur du tourbillon. Lorsque ξ est très inférieur à R, la vitesse de déplacement est principalement associée à la contribution divergente des éléments de ligne les plus proches du point considéré ; cette dernière est dans ce cas supérieure d'un facteur $\mathrm{Ln}(R\,/\,\xi)$ à la vitesse induite par les éléments diamétralement opposés. Un calcul complet, supposant que le tourbillon a un cœur cylindrique en rotation uniforme, donne une valeur très proche :

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{\xi} - \frac{1}{2}\right). \tag{7.61}$$

Remarquons que, pour une même valeur de Γ, plus un anneau tourbillon est de grande taille plus il se déplace lentement. Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu pour deux lignes parallèles rectilignes de circulations Γ opposées distantes de d pour lesquelles la vitesse de déplacement, égale à $\Gamma\,/\,(2\pi\,d)$, varie également comme $1/d$. Par ailleurs, un anneau tourbillon possède une énergie cinétique et une quantité de mouvement qui représentent l'énergie cinétique et l'impulsion du fluide mis en mouvement dans cette structure : c'est pourquoi, on peut détecter un effet de choc lors de l'impact d'un anneau de fumée sur une surface solide. Évaluons maintenant directement ces quantités.

Énergie cinétique d'un anneau tourbillon

Nous partons de l'énergie e_c par unité de longueur d'une ligne de tourbillon rectiligne donnée par l'équation (7.17). Si le rayon de courbure R de la ligne est grand devant le rayon ξ du cœur, l'énergie cinétique totale E_c de l'anneau sera approximativement $(2\,\pi\,R\,e_c)$, soit :

$$E_c \approx \rho\,\Gamma^2 \frac{R}{2} \ln\frac{R}{\xi}.$$

Dans cette expression, nous négligeons la distorsion du champ de vitesse par les éléments de ligne lointains, et prenons $L = R$ comme échelle de longueur supérieure du rayon r dans l'intégrale ; en effet, à des distances plus grandes, la décroissance du champ de vitesse est beaucoup plus rapide (en $1/r^3$ comme celle d'un dipôle magnétique), et sa contribution à E_c devient faible. La valeur exacte de E_c obtenue par une intégration complète, est voisine de cette estimation :

$$E_c = \frac{\rho \Gamma^2 R}{2} \left(\ln \frac{8R}{\xi} - \frac{3}{2} \right) \cdot \tag{7.62}$$

Ainsi, la diminution de vitesse des anneaux, lorsque leur rayon augmente, s'accompagne dans le même temps d'une augmentation d'énergie cinétique.

Quantité de mouvement d'un anneau tourbillon

Évaluons maintenant la quantité de mouvement associée à l'anneau, en supposant que le cœur du tourbillon est soumis à une force $\mathbf{F}$ constante parallèle à l'axe et orientée dans le sens de son mouvement : l'expérience a été effectivement réalisée dans l'hélium superfluide, en piégeant des charges électriques dans le cœur du tourbillon et en les accélérant par un champ électrique. Le vortex réagit à cette force par une augmentation de son rayon, ce qui lui permet d'emmagasiner sous forme d'énergie cinétique le travail de la force $\mathbf{F}$. Cette variation de rayon induit une force de Magnus $\mathbf{F}_p$ (voir chapitre 6, section 6.3.1), parallèle à $\mathbf{F}$ car perpendiculaire en tout point au cœur du tourbillon et à la vitesse radiale. D'après l'équation (6.44), $\mathbf{F}_p$ est égale à $\rho(\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t) \wedge \mathbf{\Gamma}$ (par unité de longueur) et de sens contraire à $\mathbf{F}$; $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ s'ajuste donc pour que $\mathbf{F} + \mathbf{F}_p = \mathbf{0}$ avec :

$$F = 2\pi \rho \Gamma r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \cdot \tag{7.63}$$

L'impulsion P du tourbillon de rayon R est égale à l'intégrale $\int F \, \mathrm{d}t = \int 2\pi \rho \Gamma r \, \mathrm{d}r$ entre une valeur nulle du rayon et la valeur R. On obtient donc :

$$P = \pi \rho \Gamma R^2. \tag{7.64}$$

Cette variation linéaire de l'impulsion avec Γ traduit le fait que, lorsque le sens de la circulation change, les vitesses en tous les points et, donc, l'impulsion changent aussi de sens. À partir des équations (7.62) et (7.64) donnant l'énergie E_c et la quantité de mouvement $\mathbf{P}$ de l'anneau, on peut déterminer la vitesse de groupe $V_g(R)$ de l'anneau à partir de la relation classique :

$$V_g(R) = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}P} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}R}}{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R}} = \frac{\rho \Gamma^2}{2} \left(\frac{\ln \dfrac{8R}{\xi} - \dfrac{3}{2} + 1}{2\pi \rho \Gamma R} \right) = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{\xi} - \frac{1}{2} \right) = V \tag{7.65}$$

V_g est donc égale à la vitesse V de déplacement du tourbillon, qui représente bien la vitesse de transport de l'énergie par celui-ci.

Ce comportement est très différent de celui des systèmes physiques matériels. Pour ceux-ci, une augmentation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'accompagne en général d'une augmentation simultanée de la vitesse de déplacement. Au contraire, pour les tourbillons en anneau, la vitesse diminue, alors que le rayon, l'énergie et la quantité de mouvement augmentent.

Les lois de la dynamique des anneaux tourbillons que nous venons de discuter ont été vérifiées avec précision dans l'hélium superfluide. Ces expériences sont décrites en annexe à la fin de ce chapitre.

Interactions entre anneaux tourbillons ou avec une paroi

La dynamique d'un ensemble d'anneaux tourbillons peut être traitée comme celle de lignes parallèles, en considérant l'effet induit par une ligne sur l'autre.

- Impact d'un anneau de tourbillon sur un plan solide

  On peut décrire le comportement d'un anneau qui s'approche perpendiculairement à un plan en remplaçant ce plan par un anneau image, symétrique par rapport au plan (Fig. 7.22). La présence de l'image assure que la composante de vitesse normale au plan est nulle sur celui-ci (la composante tangentielle n'a pas besoin d'être nulle, car on est dans le cas d'un fluide parfait). Comme résultat de cette interaction, le rayon du vortex augmente indéfiniment, mais il reste à une distance fixe de la paroi (il ne rebondit pas sur elle !). En effet, son image induit sur l'anneau une composante de vitesse radiale dirigée vers l'extérieur, d'autant plus forte que l'anneau et son image sont rapprochés. Aussi, la taille du tourbillon incident augmente d'autant plus vite qu'il est plus proche du plan.

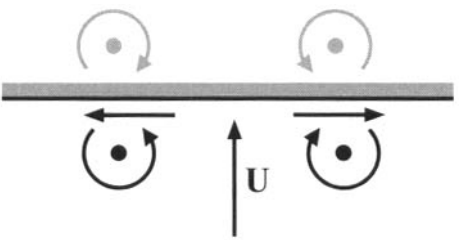


FIG. 7.22 – *L'impact d'un anneau tourbillon sur un plan solide peut être décrit en ajoutant symétriquement, au-dessus du plan, un anneau image de circulation opposée. Il en résulte que le tourbillon ne rebondit pas mais s'ouvre indéfiniment par suite de son interaction avec le tourbillon image.*

- Anneaux de tourbillons de même axe et de même circulation

  L'interaction de deux tels anneaux tourbillons, produits par exemple à la sortie d'un jet circulaire, conduit à un amusant phénomène de type saute-mouton (Fig. 7.23). Chaque anneau passe à l'intérieur de l'anneau qui le précède, tandis que son rayon diminue. Il est alors à nouveau dépassé, et ainsi de suite. Le champ de vitesse induit par l'anneau A_2 le plus en avant sur l'anneau A_1, induit en effet sur celui-ci une composante de vitesse radiale V_{r1} dirigée vers l'axe : elle fait diminuer le rayon de A_1 et, ainsi, augmente sa vitesse U_1. Dans le même temps, l'anneau A_1 crée sur A_2 une composante radiale V_{r2} dirigée vers l'extérieur qui, au contraire, augmente son rayon et le ralentit. Ce processus continuera jusqu'à ce que l'anneau A_1 ait rattrapé l'anneau A_2.

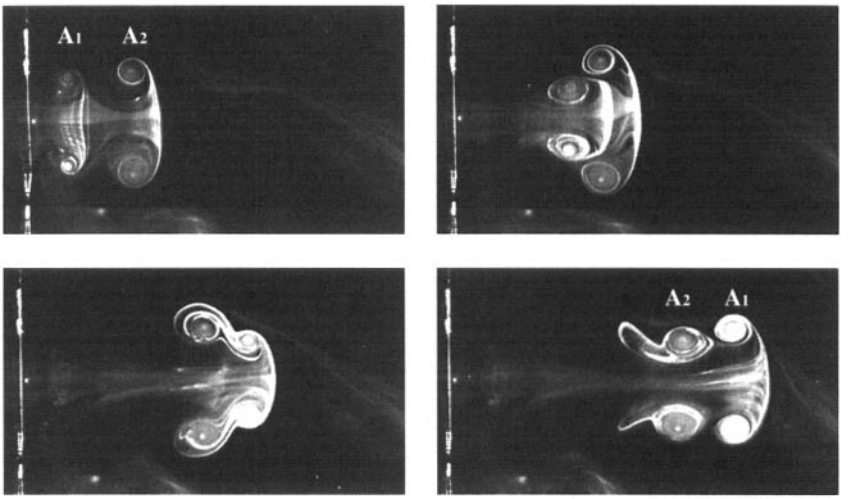


FIG. 7.23 – *Le mouvement relatif « en saute-mouton » de deux anneaux tourbillons coaxiaux est décrit par cette séquence de quatre photos (extraite de* An Album of Fluid Motion *de M. Van Dyke).*

7.5 Fluides en rotation

L'étude des fluides en rotation est particulièrement importante pour la compréhension des écoulements atmosphériques et océaniques. En effet, les écoulements dans l'atmosphère et les océans, observés par rapport à la surface de la Terre, s'effectuent dans un repère tournant à la vitesse angulaire Ω locale de rotation de celle-ci ; ils sont donc fortement influencés par cette rotation. La figure 7.24 rappelle le sens de la rotation terrestre

de vitesse angulaire $\Omega_0 \simeq 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$. La rotation locale Ω varie avec la latitude α suivant $\Omega = \Omega_0 \sin\alpha$, comme le montre l'expérience du pendule de Foucault, dont la période de rotation par rapport à l'observateur terrestre est $T = 2\pi / (\Omega_0 \sin\alpha)$. La quantité 2Ω est appelée *vorticité planétaire* par les géophysiciens.

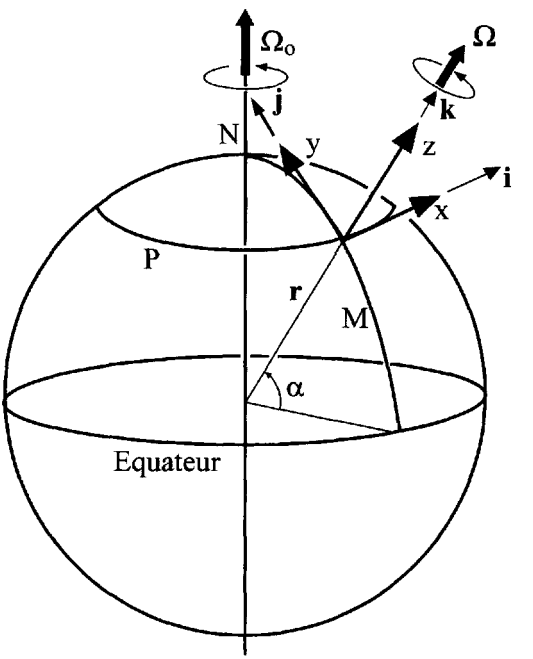


FIG. 7.24 – *Schéma de définition des coordonnées locales utilisées pour décrire un écoulement en rotation.*

Les écoulements en rotation interviennent aussi dans de nombreux processus industriels, et sont également observables à l'échelle du laboratoire. La structure des écoulements dans des récipients en rotation est fortement influencée par celle-ci, en particulier au niveau des couches limites. Des expériences de laboratoire montées sur des plateaux tournants sont par ailleurs très utilisées pour modéliser l'influence de la rotation de la Terre sur l'écoulement de l'atmosphère et de l'océan, et donnent lieu à des effets spectaculaires.

Nous nous intéresserons principalement au cas – le plus important en géophysique – où les déviations relatives de la vitesse du fluide par rapport au mouvement de rotation d'ensemble sont faibles.

7.5.1 Mouvement d'un fluide dans un repère en rotation

Équation de mouvement du fluide dans un repère tournant

On part de l'équation de mouvement classique dans des axes fixes (équation de Navier–Stokes) pour en déduire l'équation de mouvement dans un repère tournant à la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ ($\mathbf{\Omega}$ est parallèle à l'axe de rotation). On note $\mathbf{v}_a$ la vitesse du fluide dans le repère absolu, et $\mathbf{v}_r$ dans le repère en rotation : les vitesses sont mesurées en un point M avec $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ (O est l'origine des axes de coordonnées, supposée située sur l'axe de rotation) .

Les variations temporelles, dans le repère absolu et dans le repère tournant pour un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ quelconques, sont reliées par la relation :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_a = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right)_r + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{A} \tag{7.66}$$

où $\mathrm{d}\,\mathbf{A}/\mathrm{d}t$ représente une dérivée lagrangienne. En particulier, si on a un vecteur $\mathbf{A}$ constant dans un fluide en rotation, sa variation dans le repère fixe est $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{A}$.

Appliquons tout d'abord l'équation (7.66) au rayon vecteur $\mathbf{r}$ dont les dérivées temporelles sont les vitesses $\mathbf{v}_a$ et $\mathbf{v}_r$; on obtient :

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}. \tag{7.67}$$

En appliquant de nouveau l'équation (7.66) à l'expression précédente de $\mathbf{v}_a$, on obtient :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}_a}{\mathrm{d}t}\right)_a = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_a}{\mathrm{d}t}\right)_r + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}_a = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_r}{\mathrm{d}t} + 2\,\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \tag{7.68}$$

or, $\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})$ est égal à $\frac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2$, puisque seule la composante $\mathbf{r}_\perp$ de $\mathbf{r}$ normale à $\mathbf{\Omega}$ intervient et que les deux expressions sont égales à $-\mathbf{\Omega}^2\,\mathbf{r}_\perp$. Partons de l'équation de Navier–Stokes, dont la forme normale dans un repère absolu, est :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}_a}{\mathrm{d}t}\right)_a = \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t} + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_a = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,p + \nu\,\Delta\mathbf{v}_a + \mathbf{grad}\,\varphi \tag{7.69}$$

(φ représente le potentiel des forces en volume par unité de masse, tel que $\varphi = gz$ pour la gravité). En lui appliquant la relation (7.68), on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_r}{\mathrm{d}t}\right)_r &= \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}_r \\ &= -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p + \nu\,\Delta\mathbf{v}_r - \mathbf{grad}\,\varphi - 2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r + \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2.\end{aligned} \tag{7.70}$$

En effet, remplaçons dans l'équation (7.69) $\Delta\mathbf{v}_a$ par son expression en fonction de $\Delta\mathbf{v}_r$ obtenue à partir de l'expression (7.67) : ces deux termes ne diffèrent

que par $\Delta(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})$, qui est identiquement nulle puisque $\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}$ est une fonction linéaire des composantes de $\mathbf{r}$. En regroupant les gradients, l'équation (7.70) devient, dans le cas particulier d'un fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$) :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_r}{\mathrm{d}t}\right)_r = \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}_r = \\ -\,\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \varphi - \frac{1}{2}(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2\right) + \nu\,\Delta\mathbf{v}_r - 2\,\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r. \tag{7.71}$$

Le terme $\frac{1}{2}\,\mathbf{grad}(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2$ est associé à la *force centrifuge* et intervient comme une force en volume. La composante $-2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r$ est appelée « *force de Coriolis* » et est normale au mouvement des particules de fluide : c'est cette même force qui explique la rotation des pendules de Foucault et la déviation vers l'est des corps en chute libre. Nous verrons qu'elle est aussi responsable d'importants phénomènes atmosphériques. Dans toute la suite de ce chapitre, on supprimera l'indice r et on supposera toujours que sont utilisées les composantes de vitesse mesurées dans le repère en rotation.

Effets de la force centrifuge dans un fluide en rotation

Les forces centrifuges peuvent induire des écoulements : c'est par exemple le cas pour une goutte liquide posée sur un disque en rotation. Une application importante est représentée par les pompes centrifuges, où un fluide est injecté sur un axe, mis en mouvement par des pales, et finalement rejeté sur le côté par le gradient de pression dû à la rotation. Les effets de la force centrifuge sont également cruciaux au sein des cyclones et des typhons. Nous verrons à la section 6 que ces forces peuvent faire apparaître des *écoulements secondaires*, qui se superposent dans certaines géométries d'écoulement (les tuyaux ou les parois courbes par exemple) aux écoulements principaux.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons au contraire au cas – très fréquent – où les forces centrifuges ne génèrent pas d'écoulements. Supposons par exemple un récipient en rotation à vitesse constante : après un temps assez long, le fluide prend la vitesse angulaire des parois du récipient si aucun dispositif n'induit d'écoulement par rapport à celles-ci (voir chapitre 2, section 2.1). Dans ce cas, on obtient en prenant, $\mathbf{v}_r \equiv 0$ dans l'équation (7.71) :

$$\left(\frac{p}{\rho} + \varphi - \frac{1}{2}(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2\right) = \frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2}(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 = \frac{p}{\rho} + gz - \frac{\mathbf{\Omega}^2\,\mathbf{r}^2}{2} = \text{cte} \tag{7.72}$$

(r est la distance à l'axe de rotation). Le seul effet de la force centrifuge est alors d'induire un gradient de pression supplémentaire, uniquement fonction de la distance à l'axe de rotation : dans la suite du chapitre, nous n'en tiendrons pas compte, en utilisant implicitement une valeur de la pression corrigée de cet effet en lui ajoutant le terme $-\rho\,\Omega^2\,r^2/2$ (Ω est le module de $\mathbf{\Omega}$).

La force centrifuge a cependant un effet visible de déformation de la surface du fluide si celle-ci est libre. En effet, la pression y est constante et égale à la pression atmosphérique (on peut négliger l'effet de la tension superficielle si la taille du récipient est supérieure à quelques millimètres (chapitre 1, section 1.4)). Le niveau $z(r)$ de la surface vérifie alors : $gz(r) - \Omega^2 r^2 / 2 = \text{cte}$. On retrouve le résultat bien connu de la forme parabolique de la surface libre, avec un niveau minimum sur l'axe de rotation ($r = 0$). Le terme de pression de type hydrostatique supplémentaire dû à la rotation est ici compensé par des déformations de la surface libre.

Équation de mouvement de la vorticité

On procède comme pour établir l'équation de la vorticité dans le repère absolu (section 7.3) en prenant le rotationnel de l'équation (7.71), ce qui fait disparaître les termes en gradient. On obtient alors l'équation de transport de la vorticité dans un repère tournant :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\boldsymbol{\omega} = ((\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} + \nu\,\Delta\boldsymbol{\omega} \tag{7.73}$$

(avec $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}_r$). La seule différence entre cette équation et celle obtenue en l'absence de rotation, est la présence du terme de vorticité planétaire $2\,\boldsymbol{\Omega}$ à côté du terme de vorticité $\boldsymbol{\omega}$. La somme $\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}$ de ces deux termes est appelée *vorticité absolue*. En l'absence de rotation, le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ représente les variations de vorticité accompagnant les variations de longueur ou d'orientation des tubes de vorticité et la conservation du moment cinétique du fluide. La rotation ajoute une contribution supplémentaire du même type, qui peut être dominante pour des vitesses de rotation élevées.

Ordre de grandeur des différents termes de l'équation de mouvement – nombres de Rossby et d'Ekman

Appelons L l'échelle caractéristique des longueurs de l'écoulement (la taille du canal par exemple) et U une vitesse caractéristique (vitesse maximale ou vitesse moyenne par exemple). Écrivons maintenant l'équation (7.71) en la multipliant par $L / U2$ pour faire apparaître des variables sans dimensions :

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{grad}')\mathbf{v}' = -\mathbf{grad}'\,p' + \frac{\nu}{UL}\Delta'\,\mathbf{v}' - 2\frac{\Omega L}{U}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{|\Omega|} \wedge \mathbf{v}' \tag{7.74}$$

où $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/U$, $p' = (p - p_0)/(\rho U^2)$; p_0 est la pression en l'absence d'écoulement mais en présence de rotation et de forces en volume avec $\mathbf{grad}\,p_0 = \mathbf{grad}\left(\varphi + (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2/2\right)$. L'expression $\mathbf{grad}'$ correspond à des dérivées par rapport aux composantes du rayon vecteur sans dimension $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/L$; $\boldsymbol{\Omega}/|\Omega|$ est le vecteur unitaire dans la direction de l'axe de rotation. L'équation (7.74) ne fait intervenir, en dehors des variables sans dimension $\mathbf{r}', \mathbf{v}'$ et p', que les combinaisons sans dimensions $\nu/(UL)$ (inverse du nombre de Reynolds) et $\Omega L/U$ qui est l'inverse du nombre $Ro = U/(\Omega L)$,

appelé nombre de Rossby. Les solutions de l'équation (7.74) sont donc de la forme :

$$\frac{\mathbf{v}}{U} = \mathbf{v}' = \mathbf{f}\left(\frac{x}{L'}\frac{y}{L'}\frac{z}{L'}\,Re,\, Ro\right) \tag{7.75a}$$

$$\frac{p - p_0}{\rho U^2} = p' = g\left(\frac{x}{L'}\frac{y}{L'}\frac{z}{L'}\,Re,\, Ro\right). \tag{7.75b}$$

Deux écoulements de géométrie identique, mais avec des valeurs de U et L différentes, correspondent donc à des champs de vitesse et de pression similaires si les nombres de Reynolds et de Rossby sont les mêmes.

Le nombre de Rossby représente physiquement le rapport entre les ordres de grandeur du terme de transport convectif de l'équation de mouvement et du terme de force de Coriolis. On a en effet :

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} \approx \frac{U^2}{L} \qquad et \qquad 2(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{v}) \approx \Omega U.$$

Ainsi : nombre de Rossby $Ro = \dfrac{U}{\Omega L} \approx \dfrac{\text{terme de transport convectif}}{\text{terme de force de Coriolis}}$.

Les écoulements à faible nombre de Rossby sont ceux pour lesquels les effets de rotation et de force de Coriolis sont dominants. Le nombre de Rossby ne devient faible pour des vitesses d'écoulement normales que pour des mouvements à très grande échelle. Ainsi pour un écoulement atmosphérique avec $\Omega \simeq 10^{-4}$ s^{-1}, $U \approx 10$ m/s et $L \approx 10^3$ km, on trouve $Ro = 10^{-1}$. Cela explique pourquoi la rotation terrestre influence, sur de grandes distances, le sens des mouvements cycloniques qui sont d'un sens opposé dans les hémisphères nord et sud. Ce n'est plus le cas pour un typhon où, avec une vitesse de 100 m/s et une échelle de 10 km, on a $Ro = 10^2$ (et encore moins pour un tourbillon de vidange de baignoire !).

De même, on peut évaluer le rapport entre les termes de viscosité et de force de Coriolis de l'équation de mouvement avec :

$$\nu\,\Delta\mathbf{v} \approx \frac{\nu U}{L^2} \qquad \text{et} \qquad 2(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{v}) \approx \Omega\, U.$$

Le rapport de ces deux termes est appelé *nombre d'Ekman* et vérifie :

$$\text{nombre d'Ekman} = Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2} \approx \frac{\text{terme de forces visqueuses}}{\text{terme de force de Coriolis}}.$$

On verra intervenir le nombre d'Ekman et l'équilibre entre forces visqueuses et forces de Coriolis dans l'étude des écoulements transitoires près du fond d'un récipient ou d'une paroi en rotation.

Vorticité potentielle

Cette notion peut être comprise en étudiant le passage d'une ligne de vorticité au-dessus d'un obstacle bidimensionnel transverse à un écoulement imposé en l'absence de viscosité.

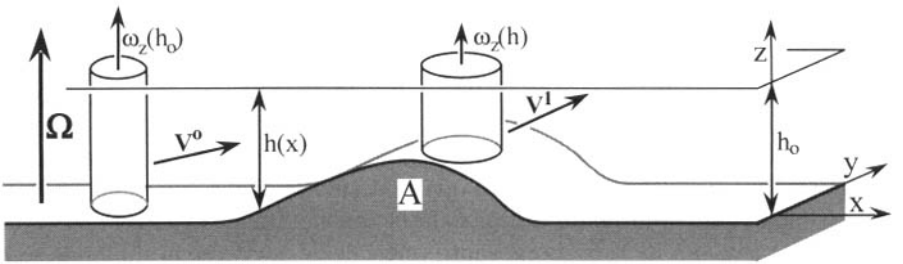


FIG. 7.25 – *Passage d'une couche de fluide d'épaisseur $h(x)$ sur un obstacle de grande longueur parallèlement à la direction Oy (l'ensemble est en rotation à une vitesse angulaire Ω). $\mathbf{V}^0$ est la vitesse initiale du fluide avant qu'il rencontre l'obstacle, $\mathbf{V}^1$ celle après l'obstacle : lors du passage sur celui-ci, la composante v_y subit une variation $v_y^1 - v_y^0$ négative qui représente une déviation anticyclonique de l'écoulement (dans l'hémisphère nord). La vorticité locale $\omega_z(h)$ varie avec l'épaisseur h de la couche, comme l'indique la formule (7.80).*

Ce problème représente par exemple la déviation d'un vent dominant passant au-dessus d'une chaîne de montagne de grande longueur et de hauteur relativement uniforme. Il peut être rapproché de l'effet de variation de longueur des tubes de vorticité verticaux de la figure 7.14, mais ici, c'est la vorticité absolue $\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}$ qui intervient, et non plus celle $\boldsymbol{\omega}$ du seul écoulement.

On suppose une couche mince de fluide perpendiculaire à l'axe de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ dirigé suivant Oz, et s'écoulant initialement avec une vitesse $\mathbf{V}^\circ(v_x^o, v_y^o)$ uniforme et constante (Fig. 7.25). La couche de fluide passe sur un obstacle de longueur infinie dans la direction Oy et de hauteur $h_0 - h(x)$ (h_0 étant l'épaisseur initiale de la couche de fluide) ; sa surface supérieure reste cependant horizontale. Nous nous intéressons à la variation de la composante ω_z de la vorticité. On conserve donc l'ensemble des termes contenant ω_z (à l'exception des termes contenant la viscosité, négligés dans tout ce paragraphe). En revanche, on suppose que les composantes de vitesse horizontales sont uniformes dans l'épaisseur de la couche avec : $\partial v_x/\partial z = \partial v_y/\partial z = 0$. En dérivant par rapport à Oz la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, on trouve $\partial^2 v_z/\partial z^2 = 0$. La dérivée $\partial v_z/\partial z$ est donc une constante avec :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \tag{7.76}$$

puisque $v_z = 0$ pour $z = h_0$ et $v_z = -\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ pour $z = (h_0 - h)$.

Compte tenu de ces approximations, on utilise l'équation de transport de la vorticité (7.73) sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{v} \tag{7.77}$$

ou :

$$\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} = (\omega_z + 2\Omega)\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{7.78}$$

$\mathrm{d}\omega_z / \mathrm{d}t$ est une dérivée au sens lagrangien, qui représente la variation de vorticité dans un élément de fluide que l'on suit pendant son déplacement. Remarquons que, si la pente du fond de la couche fluide est très faible avec $|\partial h/\partial x|$, et $|\partial h/\partial y| \ll 1$, la composante verticale de la vitesse v_z du fluide sera très faible devant v_x et v_y. Par contre la dérivée $\partial v_z / \partial z$, qui fait intervenir un facteur multiplicatif 1/h , est du même ordre de grandeur que les dérivées de v_x et v_y suivant x et y, ce qui explique le rôle important qu'elle joue dans le problème. En combinant les équations (7.76) et (7.78), on trouve :

$$\frac{1}{\omega_z + 2\Omega}\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \tag{7.79a}$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\omega_z + 2\Omega}{h}\right) = 0. \tag{7.79b}$$

Ainsi, on obtient finalement :

$$\frac{\omega_z + 2\Omega}{h} = \text{constante}. \tag{7.80}$$

La quantité ainsi conservée est appelée *vorticité potentielle.* L'équation (7.80) joue un rôle fondamental en géophysique : elle généralise l'équation de conservation du moment cinétique d'un élément matériel, exprimée par le théorème de Kelvin dans un repère sans rotation ($\Omega = 0$). Dans ce cas, l'équation (7.80) se réduit à la condition ω_z/h =cte que nous avons déjà rencontrée plus haut (section 7.3.1).

Prenons un cylindre matériel de liquide de section initiale S_0 avant d'arriver sur l'obstacle ($h = h_0$) ; quand il arrive dans une zone où l'épaisseur de la couche de liquide est h, sa section $S(h)$ vérifie $S(h)h = S_0 h_0$ (conservation du volume de fluide supposé incompressible). La condition (7.80) devient donc :

$$(\omega_z(h_0) + 2\Omega)S_0 = (\omega_z(h) + 2\Omega)\,S(h). \tag{7.81}$$

D'après le théorème de Stokes, $\omega_z(h_0)\,S_0$ et $\omega_z(h)\,S(h)$ représentent la circulation de la vitesse autour du cylindre matériel avant et pendant le passage sur l'obstacle : l'équation (7.81) généralise donc le théorème de Kelvin, et les deux termes supplémentaires en 2Ω correspondent à la rotation.

On peut également utiliser l'équation (7.80) pour déterminer la déviation de la vitesse horizontale de la couche de fluide due à son passage sur l'obstacle. Pour cela, calculons les composantes de la vitesse du fluide après le passage sur l'obstacle.

Compte tenu de la symétrie de l'obstacle, le champ de vitesse est indépendant de la coordonnée y et $\partial v_x/\partial y = \partial v_y/\partial y = 0$. La composante ω_z de la vorticité se réduit à $\omega_z = \partial v_y/\partial x$, et ω_z est initialement nulle dans la région où $h = h_0$. L'équation (7.80) peut donc être récrite sous la forme :

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{2\Omega\,(h_0 - h)}{h_0} \tag{7.82}$$

d'où, par intégration sur x :

$$v_y^1 = v_y^o - \frac{2\Omega}{h_0}\,A \tag{7.83}$$

où $A\,(> 0)$ est l'aire $\int (h_0 - h)\,\mathrm{d}x$ de la section transversale de l'obstacle (Fig. 7.25). Par ailleurs, comme le débit de fluide à travers les plans $x =$ cte traversant l'obstacle est conservé, on doit avoir $v_x^1 = v_x^o$. Ainsi, dans l'hémisphère nord, le vent est dévié dans le sens des aiguilles d'une montre (anticyclonique). Cela ne sera observé en pratique que si la montagne est assez longue ; sinon, et surtout si $Ro \ll 1$, le vent l'évitera simplement comme dans les expériences discutées plus loin (section 7.5.2).

7.5.2 Écoulements à bas nombre de Rossby

Écoulements géostrophiques

Reprenons l'équation (7.71) en supposant, comme nous l'avons discuté plus haut, que l'effet de la force centrifuge et des forces en volume se résume à un simple gradient de pression hydrostatique, que nous soustrairons de la pression totale. Supposons que le nombre de Rossby Ro est $\ll 1$, ce qui permet de négliger le terme de transport convectif $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ (ainsi que les termes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\boldsymbol{\omega}$ et $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ de l'équation de conservation de la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ qui doit aussi vérifier $\boldsymbol{\omega} \ll \boldsymbol{\Omega}$). Supposons enfin que les forces de viscosité sont négligeables à l'échelle des écoulements analysés (nombre d'Ekman $\ll 1$). Les équations (7.71) et (7.73) se réduisent à :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad}\,\frac{p}{\rho} - (2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) \tag{7.84}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}. \tag{7.85}$$

Supposons de plus l'écoulement quasi stationnaire, ce qui permet de négliger les termes $\partial\mathbf{v}/\partial t$ et $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t$. Si τ est le temps caractéristique de variation de l'écoulement, cela équivaut à supposer que le produit $\Omega\tau$ est $\gg 1$. Un écoulement vérifiant toutes ces conditions est appelé *écoulement géostrophique*.

Supposons que l'axe de rotation est l'axe Oz, l'équation (7.84) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\rho\,\Omega\,v_y \tag{7.86a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\,\Omega\,v_x \tag{7.86b}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{7.86c}$$

En dérivant les deux premières équations par rapport à z, on en déduit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \tag{7.87}$$

Sous les mêmes conditions, l'équation (7.85) se réduit à :

$$\Omega\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{7.88}$$

En combinant ce résultat avec la relation d'incompressibilité div $\mathbf{v} = 0$, on obtient alors :

$$-\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{7.89}$$

On en déduit qu'un écoulement géostrophique a les trois caractéristiques suivantes :

- L'écoulement est la résultante d'un écoulement bidimensionnel $\mathbf{v}\,(x,\,y)$ et d'une translation parallèle à l'axe de rotation, avec une composante indépendante de la coordonnée z, parallèle à celui-ci. Si les conditions aux limites (parois, surface libre) imposent $v_z = 0$ en un des points des droites parallèles à l'axe de rotation (comme ce sera souvent le cas), on a $v_z \equiv 0$. Le mouvement est alors bidimensionnel, avec pour composantes de la vitesse $v_x\,(x,\,y)$ et $v_y\,(x,\,y)$.

- L'écoulement est normal au gradient de pression : les lignes de courant coïncident donc avec les isobares. Le fait que l'écoulement soit normal au gradient de pression (et, par suite, à la force appliquée sur un élément de volume) rappelle la force de Magnus (force perpendiculaire à la vitesse relative d'un tourbillon et d'un écoulement ainsi qu'à sa vorticité). Ce résultat peut être appliqué à la lecture des cartes météorologiques, où apparaissent les courbes isobares : les tangentes à celles-ci représentent bien la direction du vent moyen dans la zone considérée, à une altitude suffisante pour que l'influence de la couche limite près du sol soit réduite.

- Si le fluide est incompressible, on a $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$. La section d'une courbe plane normale à Ω qui suit le mouvement du fluide reste donc constante : en particulier, d'après le théorème de Kelvin, la section des tubes de vorticité reste constante.

L'ensemble de ces égalités représente le *théorème de Taylor–Proudman.*

Déplacement d'un solide perpendiculairement à Ω

Supposons que le fluide ait une surface libre quasi horizontale, et qu'on déplace un corps solide (une sphère par exemple) de dimensions finies, à une vitesse $\mathbf{U}$ parallèle à la surface. Si le module de la vitesse $\mathbf{U}$ est assez faible et constant, les conditions d'application du théorème de Taylor–Proudman resteront vérifiées. En tout point de la surface extérieure du solide, la vitesse locale du fluide doit être égale à $\mathbf{U}$, à cause des conditions aux limites sur la surface du solide : la vitesse du fluide doit donc être égale à $\mathbf{U}$ en tout point du cylindre vertical de fluide qui s'appuie sur le contour extérieur du solide et qui monte jusqu'à la surface supérieure. En dessous du solide, l'écoulement est un peu plus complexe car on a, au fond du récipient, une condition aux limites de vitesse locale nulle, ce qui empêche de vérifier la condition $\partial \mathbf{v}/\partial z = 0$.

En première approximation, tout se passe donc comme si l'intérieur du cylindre de fluide supérieur était séparé de l'extérieur tout en se déplaçant avec une vitesse uniforme à l'intérieur du cylindre. À l'extérieur du cylindre, on a le même écoulement que si on avait un fluide parfait en rotation s'écoulant autour d'un cylindre solide vertical. Ce cylindre représente une « *colonne de Taylor* ». De fait, on observe expérimentalement que du colorant injecté à l'intérieur du cylindre virtuel supérieur y reste très longtemps pendant l'écoulement (Fig. 7.26a) ; par contre, le colorant injecté à l'extérieur évite le cylindre.

Dans de telles expériences, l'écoulement n'est qu'approximativement géostrophique. Les conditions d'application du théorème de Taylor–Proudman ne sont, par exemple, pas vérifiées à la limite entre l'intérieur et l'extérieur du cylindre virtuel ; on a donc, quand même, un peu d'échange de fluide entre l'intérieur et l'extérieur de la colonne.

Déplacement d'un solide parallèlement à l'axe de rotation

Prenons maintenant un solide montant verticalement avec une vitesse U dans un récipient du type de celui de la figure 7.26b (la vitesse $\mathbf{U}$ est cette fois parallèle à $\mathbf{\Omega}$). Là encore, on n'a pas un écoulement purement géostrophique, car on ne peut plus vérifier rigoureusement les conditions du théorème de Taylor-Proudman, puisque la composante verticale de la vitesse du fluide ne peut plus être constante et nulle sur toute ligne verticale s'appuyant sur le solide. On observe tout d'abord que la force exercée sur le solide et s'opposant au mouvement est nettement plus forte qu'en l'absence de rotation. On observe également que l'influence du mouvement vertical du solide se transmet à de grandes distances au-dessus et au-dessous du solide (bien sûr, il doit exister une zone de transition près des surfaces inférieure et supérieure du récipient) : s'il n'y avait pas rotation, la perturbation de vitesse due à la mise en mouvement du solide s'amortirait sur une distance de l'ordre de sa dimension. On observe par ailleurs que le déplacement du solide induit des rotations du fluide de sens contraire en dessus et en dessous de celui-ci : ces rotations peuvent être visualisées par des injections locales de colorant. Évaluons maintenant quantitativement ces différents effets.

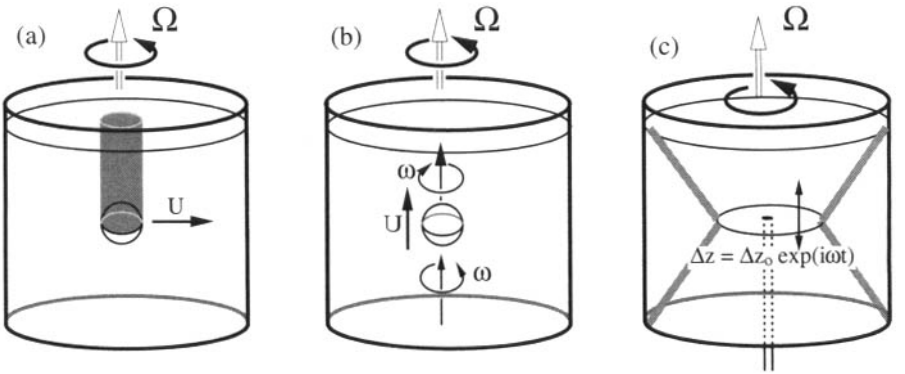


FIG. 7.26 – *Mouvement d'un corps solide dans un fluide en rotation. (a) La vitesse de déplacement U est perpendiculaire à l'axe de rotation et on a injecté du colorant dans la zone de fluide située juste au-dessus du solide ; (b) variations de vorticité locale induites par le déplacement du solide parallèlement à l'axe de rotation dans un récipient tournant ; (c) émission d'ondes inertielles par un disque oscillant parallèlement à l'axe de rotation.*

Prenons la divergence de l'équation (7.84). On obtient, en utilisant l'identité vectorielle :

$$\mathrm{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$$

$$2\,\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta p}{\rho} \tag{7.90a}$$

ou

$$2\,\Omega\,\omega_z = \frac{\Delta p}{\rho}\,. \tag{7.90b}$$

On peut combiner ce résultat avec la composante suivant Oz de l'équation de la vorticité (7.85) :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 2\Omega \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{7.91}$$

d'où :

$$4\,\rho\Omega^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta p). \tag{7.92}$$

Si on déplace le solide parallèlement à l'axe, les conditions de vitesse nulle à la surface libre et au fond du récipient imposent que $\partial v_z/\partial z$ soit non nul (< 0 au-dessus du solide, et > 0 en dessous pour $U > 0$). Il apparaît une vorticité ω_z, dont l'amplitude est initialement proportionnelle au temps et à Ω, et de signe contraire sur les parties supérieure et inférieure (Éq. (7.91)).

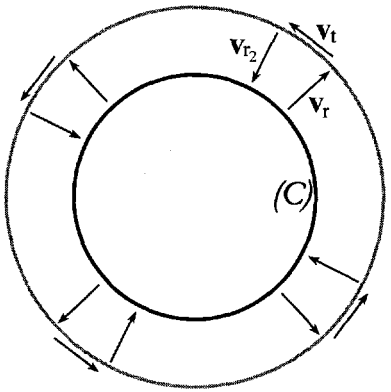


FIG. 7.27 – *Schéma de l'évolution d'une perturbation de vitesse tendant initialement à augmenter l'aire d'une courbe matérielle circulaire (C).*

D'après l'équation (7.92), le laplacien Δp de la pression augmente lui aussi proportionnellement au temps, avec un signe contraire au-dessus et en dessous du solide. Supposons le corps de révolution autour de la direction de l'axe de rotation, et $\partial p/\partial r = 0$ sur l'axe du corps (r étant la distance à l'axe) ; en utilisant le fait qu'on doit rejoindre la pression extérieure non perturbée à grande distance de l'axe, on trouve que, pour $U > 0$, on a une surpression proportionnelle à Ω^2 au-dessus du corps, et une dépression en dessous. De plus, pour des petites amplitudes, cette surpression augmente linéairement avec le déplacement ; et, si on relâche le corps après l'avoir déplacé rapidement suivant Ω, il revient légèrement en arrière et peut même effectuer quelques oscillations.

Tout se passe comme si le fluide en rotation possédait une certaine élasticité : celle-ci n'est, en aucune façon, associée à la compressibilité du fluide utilisé, mais seulement au caractère quasi–bidimensionnel des écoulements (Éq. (7.89)) imposé par la force de Coriolis. Supposons par exemple que, par un écoulement radial de vitesse v_r, on cherche à augmenter l'aire limitée par un cercle dans un plan normal à $\mathbf{\Omega}$ (Fig. 7.27). La force de Coriolis associée à ce champ de vitesse induit une composante de vitesse tangentielle v_t ; celle-ci, à son tour, crée une force de Coriolis, et une composante de vitesse radiale v_{r2} en sens inverse de la première qui tend à ramener la courbe à son aire initiale.

Remarque Un phénomène lié à la discussion précédente est le comportement, en l'absence de gradient de pression, d'une particule de fluide à laquelle on impose une petite vitesse initiale $\delta\mathbf{v}$ dans un fluide initialement au repos dans le repère tournant. L'évolution de la vitesse vérifie la forme simplifiée de l'équation (7.84) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -2(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v}). \tag{7.93}$$

Les composantes de vitesse sont donc de la forme :

$$v_x = A\,\cos\left(-2\,\Omega\,t + \varphi\right) \tag{7.94a}$$

$$v_y = A\,\sin(-2\,\Omega\,t + \varphi) \tag{7.94b}$$

$$v_z = \text{constante.} \tag{7.94c}$$

La particule ne se déplace pas en ligne droite comme en l'absence de rotation, mais au contraire elle décrit, dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{\Omega}$, des cercles avec une vitesse angulaire $-2\mathbf{\Omega}$ (deux fois la vitesse angulaire de rotation du pendule de Foucault) ; elle repasse donc périodiquement par son point de départ. 2Ω représente une sorte de fréquence propre du fluide en rotation, qui est effectivement observée dans certains cas en océanographie. Dans l'atmosphère, un tel mouvement peut se superposer à un écoulement géostrophique. On note l'analogie de ce mouvement avec celui d'une particule chargée de charge q et de masse m dans un champ magnétique $\mathbf{B}$. Le mouvement de la particule chargée dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$ est également circulaire et sa fréquence angulaire est la fréquence de Larmor $qB\,/\,m$. L'analogue de la force de Coriolis $-2(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v})$ est dans ce cas la force de Laplace $q\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$.

Quelques expériences simples

Les résultats des deux paragraphes précédents se prêtent à des expériences réalisables aisément, en utilisant une platine de disques vinyl tournant à trente-trois tours par minute, sur laquelle on fixe un récipient de verre cylindrique, bien centré, rempli d'eau. On peut ajouter des petites paillettes d'aluminium ou celles contenues dans certains shampoings ou poudres de lessive : ces particules s'alignent sous l'effet des gradients de vitesse du fluide et facilitent la visualisation des écoulements. En faisant tomber une goutte d'encre, on voit que le liquide, au lieu de s'étaler, forme des nappes verticales qui marquent les colonnes de Taylor. Plaçons maintenant un petit obstacle fixe, au fond du récipient et écarté par rapport à l'axe de rotation : en changeant légèrement la vitesse de rotation pour que, de façon transitoire, la vitesse du liquide ne soit pas égale à celle de l'obstacle, on voit se former, au-desssus de celui-ci, une colonne verticale montant jusqu'à la surface libre. On peut également – mais c'est un peu plus compliqué à mettre en place – observer les effets décrits plus haut avec une balle de ping-pong solidaire du récipient tournant et déplacée lentement par rapport à celui-ci au bout d'un fil ou d'une tige.

7.5.3 Ondes dans les fluides en rotation

Nous présentons ici plusieurs mécanismes de propagation d'ondes dans les fluides en rotation, tous associés à des déviations par rapport à des écoulements géostrophiques de base (ou apparaissant dans un fluide au repos). De telles ondes ne font jamais intervenir la compressibilité du fluide, mais sont associées à l'effet de la force de Coriolis. En général, on part d'équations telles que (7.84) et (7.85), dans lesquelles les termes du deuxième ordre en $\mathbf{v}$ et $\boldsymbol{\omega}$ ainsi que l'influence de la viscosité, de la pesanteur et de la force centrifuge, sont négligés, mais qui incluent les termes de non-stationnarité. Le fait que ces équations de mouvement, utilisables à faible nombre de Rossby,

soient linéaires, permet une étude simple de ces ondes, qui jouent un rôle très important dans l'atmosphère et les océans.

Ondes inertielles

L'« élasticité » des fluides en rotation déjà évoquée plus haut (section 7.5.2) peut être suffisante pour permettre la propagation d'ondes dites *ondes inertielles.*

On peut observer celles-ci à l'aide un dispositif expérimental du même type que celui de la figure 7.26b, en faisant osciller verticalement un solide avec une petite amplitude, à une fréquence σ (Fig. 7.26c) suffisamment élevée pour que les termes d'instationnarité $\partial \mathbf{v}/\partial t$ et $\partial \boldsymbol{\omega}/\partial t$ cessent d'être négligeables. On prend alors un rapport de fréquences σ/Ω de valeur finie, au lieu de supposer $\sigma/\Omega \ll 1$. En supposant qu'on propage une onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k}$, faisant un angle θ avec le vecteur de rotation $\boldsymbol{\Omega}$, on trouve que la relation de dispersion reliant σ et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de l'onde est :

$$\sigma = 2\,\Omega \cos\theta \tag{7.95}$$

La relation ne dépend pas du module du vecteur d'onde, mais seulement de son orientation. La fréquence des ondes inertielles a une valeur maximale 2Ω, qui est la fréquence propre de précession des particules de fluide déjà rencontrée à la section précédente ($\mathbf{k}$ est alors dirigé suivant l'axe de rotation). Dans la limite $\sigma \to 0$ (quasi-stationnarité), on retrouve au contraire les écoulements géostrophiques ($\theta = \pi/2$, ce qui correspond à une phase de l'onde invariante suivant z en accord avec la bidimensionnalité de ces écoulements).

Démonstration Nous utilisons l'équation (7.92) et nous la combinons avec la composante suivant Oz de l'équation (7.84) qui prend également en compte l'instationnarité :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\,. \tag{7.96}$$

On en déduit l'équation de propagation des fluctuations de pression :

$$4\Omega^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta p). \tag{7.97}$$

On obtient alors la relation (7.95), en supposant une variation de pression du type $p = p_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\sigma t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ qui correspond à une onde plane et en reportant cette expression dans l'équation (7.97)

Ondes de Kelvin

Contrairement au cas précédent, il s'agit d'ondes de surface du même type que celles que nous avons étudiées au chapitre 6 (section 6.4), mais modifiées par l'influence de la force de Coriolis. Les gradients de pression hydrostatique créés par le passage de l'onde sont en effet en partie équilibrés par cette

force. Nous examinons ici le cas où les ondes se propagent le long d'une paroi verticale ($x = 0$) et qui correspond à la situation d'une vague se déplaçant le long d'une côte : c'est seulement dans ce cas qu'on observe des ondes planes où la vitesse du fluide est partout parallèle à la direction de propagation. Nous nous plaçons dans la géométrie de la figure 7.28a.

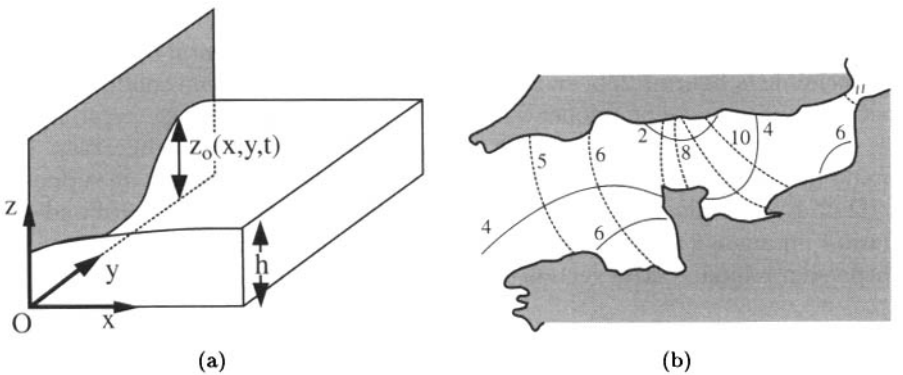


FIG. 7.28 – *(a) Vue schématique de la propagation d'une onde de Kelvin le long d'une paroi verticale ($x = 0$) ; (b) propagation des marées dans la Manche au cours du temps en heures (ligne pointillée) et lignes d'égale amplitude des marées en mètres (lignes continues), montrant un net maximum près de la côte française (d'après Proudman (1953) et Gill (1982)).*

L'épaisseur instantanée de la couche fluide est $z_0(x, y, t)$, et h est la hauteur du fluide au repos supposée constante (le fond est horizontal). On suppose d'autre part que les ondes sont de faible amplitude ($|z_0 - h| \ll h$). On suppose enfin, pour reprendre la terminologie du chapitre 6, qu'on est dans une situation d'ondes en eau peu profonde : la hauteur h est faible devant les distances caractéristiques de variation du niveau de la surface dans les directions x et y. Cette hypothèse permet d'écrire plus simplement l'équation de mouvement que dans le cas général du chapitre 6 car, en l'absence de viscosité, le gradient de pression dans les directions x et y est relié aux variations de niveau de la surface par :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial z_0}{\partial x} \tag{7.98a}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial z_0}{\partial y} \tag{7.98b}$$

(en effet, la pression près de la surface est égale à la pression atmosphérique et le gradient vertical de pression est uniquement d'origine hydrostatique).

L'équation (7.84) devient donc :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\Omega\, v_y = -g\frac{\partial z_0}{\partial x} \tag{7.99a}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\Omega\, v_x = -g\frac{\partial z_0}{\partial y}\cdot \tag{7.99b}$$

Par ailleurs, la condition d'incompressibilité div $\mathbf{v} = 0$ s'écrit, en évaluant $\partial v_z/\partial z$ comme nous l'avons fait pour établir l'équation (7.76) :

$$\frac{1}{h}\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{7.100}$$

(on a remplacé z_0 par h dans le premier facteur du premier membre, en se limitant à une approximation du premier ordre). La composante v_x de la vitesse normale à la paroi doit s'annuler sur celle-ci ($x = 0$) : nous allons maintenant supposer dans la suite de cette section que $v_x = 0$ dans tout le volume du fluide et vérifier qu'il est possible de résoudre les équations de mouvement sous cette hypothèse. Les équations (7.99 et 100) deviennent alors :

$$-2\Omega\, v_y = -g\frac{\partial z_0}{\partial x} \tag{7.101a}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -g\frac{\partial z_0}{\partial y} \tag{7.101b}$$

$$\frac{1}{h}\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{7.101c}$$

Éliminons z_0 entre les équations (7.101b et c) en les dérivant respectivement par rapport à t et y ; on obtient l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = gh\,\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = c^2\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \tag{7.102}$$

$c = \sqrt{gh}$ est la vitesse de propagation des ondes : elle est identique à celle des ondes de gravité en eau peu profonde en l'absence de rotation (Éq. (6.64)) et est indépendante de Ω. Nous allons voir maintenant que Ω intervient pour déterminer la variation de z_0 avec la distance à la paroi verticale (comme l'indique d'ailleurs l'équation (7.101a). Le champ de vitesse v_y et la hauteur z_0 peuvent se décomposer en deux composantes de sens de propagation opposés avec :

$$v_y(x,\, y,\, t) = v_{y1}\,(x,\, y + ct) + v_{y2}\,(x,\, y - ct) \tag{7.103a}$$

et

$$z_0\,(x,\, y,\, t) = \delta z_{o1}\,(x,\, y + ct) + \delta z_{o2}\,(x,\, y - ct) + h. \tag{7.103b}$$

En reportant ces expressions dans l'équation (7.101b), et en intégrant ensuite on trouve que :

$$z_0(x, y, t) = h - \sqrt{\frac{h}{g}}\left(v_{y1}(x, y+ct) - v_{y2}(x, y-ct)\right). \tag{7.103c}$$

En combinant les expressions (7.103a) et (7.103b) avec l'équation (7.101a), on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}v_{y1}(x, y+ct) - \frac{\partial}{\partial x}v_{y2}(x, y-ct) = -\frac{2\Omega}{\sqrt{gh}}\left(v_{y1}(x, y+ct) + v_{y2}(x, y-ct)\right). \tag{7.104}$$

Les composantes v_{y1} et v_{y2} varient donc exponentiellement, et avec des arguments opposés, en fonction de x, et on obtient finalement :

$$v_y(x, y, t) = v_1(y+ct)\,\mathrm{e}^{-x/R} + v_2(y-ct)\,\mathrm{e}^{x/R} \tag{7.105a}$$

avec :

$$R = \frac{\sqrt{gh}}{2\Omega} = \frac{c}{2\Omega}\cdot \tag{7.105b}$$

Dans la géométrie de la figure 7.28a (avec $\Omega > 0$), seule la solution en $\mathrm{e}^{-x/R}$ a un sens physique, car en s'éloignant de la paroi, l'autre correspondrait à une croissance exponentielle de la déformation. Un seul sens de propagation de l'onde est donc possible (celui-ci est inversé si on change le sens de la rotation) : ainsi, dans l'hémisphère nord, ces ondes ne peuvent se propager que dans une direction où la côte apparaît à droite (à gauche dans l'hémisphère sud). La longueur R est appelée *rayon de déformation* : c'est la distance sur laquelle relaxe la déformation induite par l'onde. Elle intervient aussi dans d'autres problèmes géophysiques qui font intervenir des mouvements verticaux de fluides. Il faut noter que, d'après les équations (7.103c, 104 et 5), le signe de la déformation de la surface dépend du sens de la rotation ainsi que de celui de l'écoulement.

On voit que l'onde est piégée le long de la paroi verticale, sur une distance d'autant plus faible que la vitesse de rotation est élevée : pour une profondeur de la mer de l'ordre de 100 m, on trouve, avec $\Omega = 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$, une valeur de R de l'ordre de 150 km. De telles ondes peuvent être associées aux marées, ou à l'action de vents parallèles aux côtes. Pour deux côtes assez proches, ces ondes peuvent induire une forte différence de l'amplitude des marées, comme c'est le cas entre les côtes anglaise et française de la Manche (Fig. 7.28b). La marée qui a pénétré d'ouest en est, peut en effet être considérée comme une onde de Kelvin qui s'appuie sur la côte française : elle joue le rôle de la paroi $x = 0$, et les marées y sont par conséquent plus fortes. C'est le le cas aussi bien pour la marée montante que pour la marée descendante, qui représentent des fronts de variation de niveau de sens contraires, mais se propageant toujours dans la même direction (le sens des courants étant au contraire inversé).

Remarques Des ondes analogues aux ondes de Kelvin peuvent se propager à cheval sur l'équateur – toujours d'ouest en est – sans que la présence d'une côte soit nécessaire. En effet, comme le sens de la composante locale de rotation de la Terre s'inverse au passage par l'équateur, il est possible de satisfaire les conditions aux limites des équations avec des composantes décroissant exponentiellement à la fois vers le nord et le sud tout en se propageant dans la même direction. De telles ondes apparaissent – ainsi que les ondes de Rossby que nous allons décrire maintenant – au cours du phénomène « El Niño » qui perturbe considérablement les conditions météorologiques au large des côtes d'Amérique du Sud dans le Pacifique. Dans ce cas, il s'agit aussi bien d'ondes côtières près du continent américain que d'ondes équatoriales. De telles ondes ont pu être détectées par des observations de satellites (Topex–Poseïdon) capables de détecter des variations centimétriques du niveau moyen de l'océan.

Ondes de Rossby dues aux variations de vitesse locale de rotation de la Terre

Ces ondes sont dues à un mécanisme très différent, fondé sur la variation de la vitesse locale de rotation de la Terre avec la latitude. On les appelle également *ondes planétaires*, parce que leur longueur d'onde est du même ordre que les échelles de taille caractéristiques de l'ensemble de la Terre. Elles se traduisent par des ondulations sinusoïdales se propageant dans la direction est-ouest dans les zones de moyennes latitudes. Les ondes de Rossby sont étroitement liées aux grandes circulations atmosphériques, et à l'alternance de zones cycloniques et anticycloniques sur des distances de quelques milliers de kilomètres. Elles jouent aussi un rôle important dans le rythme des variations climatiques liées aux grands mouvements océaniques (comme par exemple le phénomène « El Niño »).

La composante locale Ω de la rotation terrestre (projection du vecteur rotation terrestre Ω_0 sur la normale locale à la surface terrestre) vérifie l'équation :

$$\Omega = \Omega_0 \sin \alpha \tag{7.106}$$

(α est la latitude) (Fig. 7.24). Dans des coordonnées locales x orientée vers l'est et y orientée vers le nord, le développement limité de la relation (7.106) autour d'une latitude de référence $y = 0$ donne :

$$\Omega(y) = \Omega(y = 0) + \frac{\beta y}{2} \tag{7.107}$$

avec $\beta = 2\Omega \cos \alpha / R$ (R est le rayon de la Terre). On parle en géophysique de *modèle de plan* β pour rendre compte de l'effet de latitude qui crée un gradient de la vorticité potentielle définie dans l'équation (7.80). Dans ce qui suit (Fig. 7.29), nous analyserons la propagation des ondes de Rossby avec et sans écoulement moyen de composante V_0 suivant Ox. Nous supposons de plus que l'épaisseur h de la couche de fluide reste constante

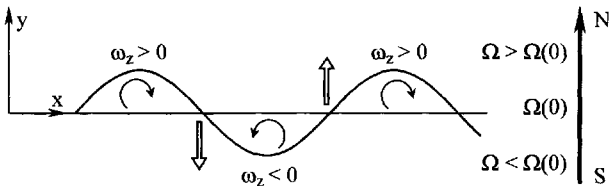


FIG. 7.29 – *Vue schématique du principe de la propagation des ondes de Rossby, d'est en ouest (vers les x négatifs).*

Remarque En pratique, ce n'est pas souvent le cas, et il faudrait faire intervenir des variations de h et, par suite de la vitesse $\sqrt{gh}$ des ondes de gravité. On peut également devoir tenir compte d'ondes internes déformant l'interface entre des masses fluides de densités différentes (dans l'océan par exemple). Nous n'en tiendrons pas compte dans le modèle développé ici, qui décrit bien l'essentiel du phénomène physique.

Supposons tout d'abord que $V_0 = 0$, et qu'on impose un déplacement oscillant $\delta y\,(t,\, x = 0) = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma t}$ dans la direction y (nord-sud) des particules de fluide du plan $x = 0$; on suppose que $v_x = 0$ et que la vorticité ω_z est nulle quand $\delta y = 0$. D'après l'équation (7.80), la vorticité totale $\omega_z + 2\Omega$ des particules de fluide doit rester constante. La variation $\beta\,\delta y$ de 2Ω doit donc être compensée par l'apparition d'une vorticité :

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\beta\,\delta y \tag{7.108}$$

de la particule de fluide. Le signe de cette vorticité dépend de la direction du déplacement. Les particules de fluides situées en dehors du plan $y = 0$ suivent le mouvement imposé mais avec un décalage des variations de vitesse donné par l'équation (7.108). Si on suppose (ce que nous démontrerons plus loin) qu'on génère ainsi une onde plane $\delta y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\sigma t)}$, l'équation (7.108) se réduit à $k\sigma = -\beta$ (en prenant $v_y = d\,(\delta y)/dt$) On a donc propagation des ondes dans la direction $x < 0$. Les ondes libres de Rossby observées sans écoulement imposé ($V_0 = 0$) sont donc des ondes transverses qui se déplacent *vers l'ouest* ($x < 0$).

Abordons maintenant le cas plus général où on a un déplacement global V_0 et où on prend en compte les variations de vitesse suivant Oy, tout en continuant de supposer constante l'épaisseur de la couche de fluide. La relation (7.80) de conservation de la vorticité potentielle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + \beta v_y = 0. \tag{7.109}$$

On suppose que le mouvement est la superposition d'un écoulement moyen de vitesse V_0 le long de la direction x, et d'une perturbation $\mathbf{v}'$ variant

sinusoïdalement suivant x et y, soit

$$v_x = V_0 + v'_{ox}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\sigma t)} \qquad v_y = v'_{oy}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\sigma t)}$$

$$\omega = \omega_0 + \omega'_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\sigma t)}.$$

On peut exprimer la perturbation de vitesse à l'aide d'une fonction de courant Ψ (chapitre 6, section 6.5) telle que

$$v'_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{7.110a}$$

$$v'_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\cdot \tag{7.110b}$$

L'équation (7.109) devient alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\Psi + \beta\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \tag{7.111}$$

On recherche des solutions de la forme $\Psi = \Psi_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly-\sigma t)}$. Par substitution dans l'équation précédente, on trouve :

$$-(-\sigma + k\,V_0)(k^2 + l^2) + k\beta = 0. \tag{7.112}$$

La vitesse de phase de l'onde le long d'un parallèle est donc :

$$c = \frac{\sigma}{k} = V_0 - \frac{\beta}{k^2 + l^2}\cdot \tag{7.113}$$

En l'absence d'écoulement ($V_0 = 0$), et pour $l = 0$, on retrouve bien la relation $c = -\beta\,/\,k^2$ obtenue plus haut. La vitesse augmente avec la longueur d'onde et lorsqu'on se rapproche de l'équateur. Aux latitudes intermédiaires, on rencontre souvent des vents d'ouest de vitesse V_0 supérieure à cette valeur. Il est alors possible d'observer un régime *stationnaire* ($c = 0$), où l'onde de Rossby est déclenchée, par exemple, par la déviation d'un vent d'ouest au-dessus d'une chaîne de montagne orientée transversalement (section 7.5.1). Les filets d'air se déplacent alors vers l'est avec une oscillation nord-sud de quelques centaines de kilomètres de longueur d'onde, mais la distribution du champ de vitesse reste invariante au cours du temps. En prenant $c = 0$ dans l'équation (7.113) :

$$k^2 = \frac{2\Omega_0 \cos\alpha}{R\,V_0} \tag{7.114}$$

En remplaçant $2\Omega_0 \cos\alpha$ par 10^{-4} s, et en supposant V_0 de l'ordre de 10 m/s, on trouve une longueur d'onde de l'ordre de 5 000 km, soit l'ordre de grandeur de celles observées.

Remarque Cependant, comme nous l'avons vu plus haut, le modèle qui aboutit à l'équation (7.113) n'est qu'approché, car il ne tient pas compte des variations

d'épaisseur de la couche de fluide et il ne s'applique non plus pas près de l'équateur, où l'approximation de Rossby n'est plus valable. Les vitesses de propagation des ondes sont plus élevées que celles qui sont ainsi prédites, en particulier près de l'équateur.

Ondes de Rossby dues aux variations d'épaisseur de couches de fluide

Le même phénomène peut être observé non par l'effet β mais par suite d'une variation progressive de la profondeur h des océans à partir de la côte. La variation de la vorticité potentielle est induite dans ce cas par la variation de h (Éq. (7.80)) : il en est ainsi au large du golfe du Mexique.

Reprenons l'approche précédente en supposant (Fig. 7.30) que l'épaisseur h de la couche de fluide est égale à h_0 sur l'axe $y = 0$ et qu'elle varie linéairement avec la distance avec $h(y) = h_0 - \gamma y (\gamma \ll 1)$. h est, par contre, supposée indépendante de x. L'écoulement de base non perturbé est uniforme, de vitesse V_0 parallèle à Ox. Supposons qu'on crée une petite perturbation en induisant une composante de vitesse v_y normale à l'écoulement moyen (on peut par exemple mettre un petit obstacle en $x = 0$, *en travers de l'écoulement*) : on s'intéresse ici à la distribution d'écoulement stationnaire induite par cette perturbation supposée constante. La vorticité initiale $\partial v_x / \partial y$ est supposée nulle.

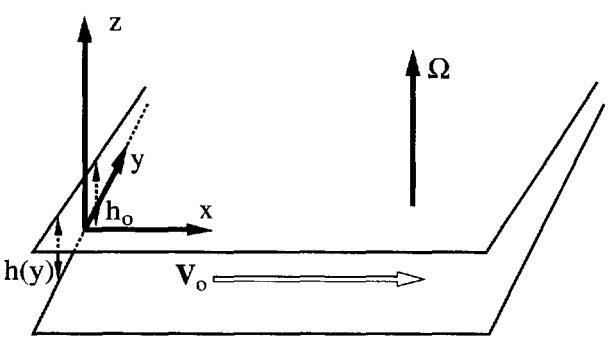


FIG. 7.30 – *Schéma de l'écoulement d'une couche de fluide en rotation sur un fond d'épaisseur variable dans la direction perpendiculaire à l'écoulement moyen.*

Suivons la trajectoire d'un élément de fluide parti du point $x = 0$, $y = 0$, à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale $(V_0,\ v_1)$ où v_1 est une petite perturbation. On applique à ce petit élément de fluide l'équation (7.80) entre l'instant initial et un instant quelconque, en supposant $\omega_z = 0$ pour $h = h_0$

sous la forme :

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega_z = 2\Omega\left(\frac{h}{h_0} - 1\right) = -\frac{2\gamma\,\Omega\,y}{h_0}\,. \tag{7.115}$$

Si γ et Ω sont du même signe et si V_0 est > 0, la composante suivant Oy de la vitesse du petit élément de fluide diminue au fur et à mesure qu'il s'éloigne du plan $y = 0$, en étant entraîné vers les $x > 0$ par l'écoulement moyen. v_y finit par s'annuler et devient négative. L'élément de fluide traverse ensuite le plan $y = 0$ et oscille ensuite de part et d'autre de celui-ci, au fur et à mesure qu'il est entraîné. Si, par contre, γ et Ω sont de signes contraires (toujours avec $V_0 > 0$), l'élément de fluide prend une composante de vitesse de plus en plus grande au fur et à mesure qu'il s'éloigne du plan $y = 0$: on n'a donc pas apparition d'une oscillation de la trajectoire. Si V_0 est < 0, les conditions sont inversées : pour que l'oscillation apparaisse, le produit $\Omega\,V_0\,\gamma$ doit être > 0.

Calculons la période spatiale de l'oscillation, en supposant que la composante suivant Oy de la vitesse de la particule de fluide varie sinusoïdalement le long de sa trajectoire avec

$$v_y = v_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,x} \tag{7.116}$$

où k est le vecteur d'onde de l'oscillation (on a supposé que la particule est à l'origine ($x = 0,\ y = 0$) pour $t = 0$ et que la position suivant Ox vérifie $x = V_0\,t$). La distance y de la particule par rapport au plan $y = 0$ doit alors être donnée par :

$$y = \mathrm{i}\frac{v_1}{k\,V_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,x} \tag{7.117}$$

(on déduit cette relation de l'équation (7.116) en remplaçant, dans l'intégrale par rapport au temps, $\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x/V_0$). En reportant cette expression dans l'équation (7.115), on obtient :

$$-\mathrm{i}k\,v_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,x} = -\frac{2\mathrm{i}\,\gamma\,\Omega}{h_0}\frac{v_1}{k\,V_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,x} \qquad \text{soit :} \qquad k^2 = \frac{2\,\gamma\,\Omega}{h_0\,V_0}\,. \tag{7.118}$$

On retrouve donc bien le fait qu'on a une oscillation périodique de la coordonnée y dans la trajectoire de la particule seulement si $\Omega\,V_0\gamma > 0$. Les équations (7.116, 117 et 118) prédisent alors des trajectoires oscillantes stables et stationnaires par rapport au repère tournant. On peut remplacer V_0 par σ/k où σ est la fréquence temporelle des oscillations d'une particule de fluide autour du plan $y = 0$ dans le référentiel (mobile) de celle-ci. On obtient :

$$\sigma = \frac{2\,\gamma\,\Omega}{h_0\,k}\,. \tag{7.119}$$

Pour mettre en évidence ce phénomène en laboratoire et modéliser l'effet de la variation locale de la vitesse de rotation de la Terre, on fait tourner une couche mince de fluide dont l'épaisseur est plus faible près de l'axe de rotation que vers

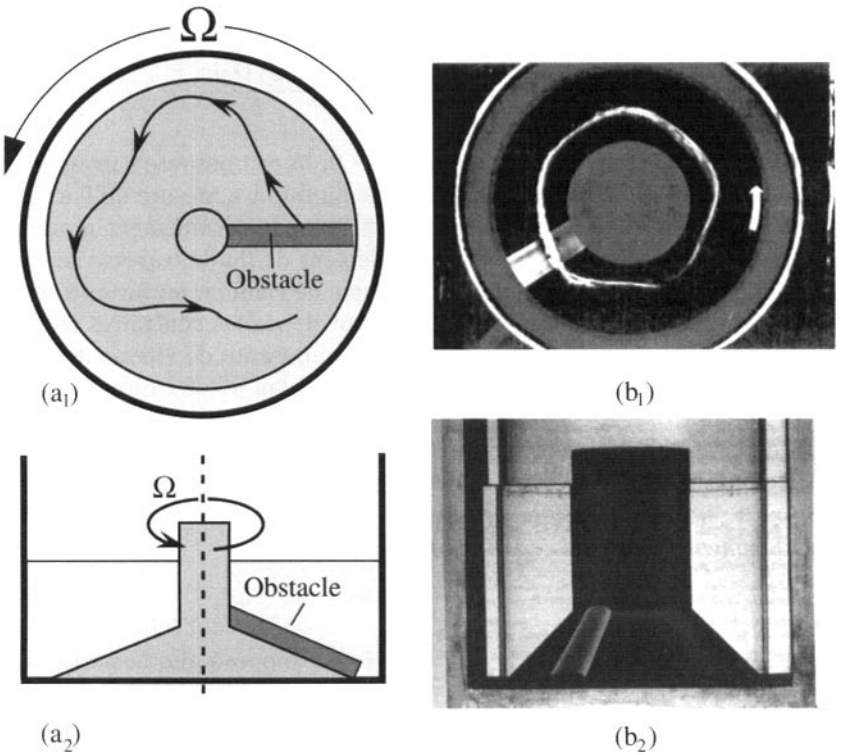


FIG. 7.31 – *Mise en évidence expérimentale des ondes de Rossby dans une couche de fluide en rotation sur un fond d'épaisseur variable ; a) principe du dispositif (vues de dessus (a_1) et en coupe (a_2)) ; b) observations expérimentales (vues de dessus (b_1) et de côté (b_2)) (document IEFM).*

l'extérieur (avec par exemple un fond conique comme dans la (Fig. 7.31a)). Un obstacle placé en travers de la couche fluide peut alors servir à induire une composante de vitesse transverse : on visualise les oscillations à l'aide de particules solides en suspension après avoir induit un mouvement relatif entre le fluide et le fond en faisant légèrement varier la vitesse de rotation (Fig. 7.31b).

Remarque Dans tout ce paragraphe, nous avons jusqu'à présent considéré des oscillations de vitesse et de trajectoires spatialement périodiques dans la direction d'un écoulement moyen, mais stationnaires dans le temps. Comme pour le cas des variations de rotation locale (section 7.5.3), on peut créer des ondes de même nature sans écoulement moyen, par une excitation périodique de fréquence angulaire σ. On retrouve alors une relation identique, au signe près, à l'équation (7.119) reliant σ et k ; elle permet de déterminer les vitesses de phase c_p et de groupe c_g de l'onde

avec :

$$c_p = \frac{\sigma}{k} = -\frac{h_0\,\sigma^2}{2\,\Omega\,\gamma} \tag{7.120a}$$

et

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}k} = \frac{h_0\,\sigma^2}{2\,\Omega\,\gamma}\,. \tag{7.120b}$$

Le cas que nous avons étudié plus haut correspond à la superposition d'une onde de ce type et d'un écoulement à vitesse $V_0 = -c_p$ ce qui donne une configuration d'écoulement stationnaire alors que l'énergie reste transportée à la vitesse $2c_g$.

7.5.4 Effet de la viscosité au voisinage de parois : couche d'Ekman

Dans toutes les sections précédentes, nous avons négligé les effets de la viscosité. Nous allons maintenant analyser comment la transition, entre un écoulement influencé par la viscosité près des parois et un écoulement géostrophique perpendiculaire au gradient de pression loin de celles-ci, s'effectue sur une couche d'épaisseur finie : la *couche d'Ekman*. Alors que les effets de la rotation de la Terre ne se font sentir qu'à grande échelle loin de parois (surface du sol ou de l'océan), les effets associés à cette couche limite sont importants à des échelles locales. Dans cette partie, nous utilisons l'équation (7.71) en supposant l'écoulement stationnaire ($\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$), et en négligeant les termes associés à la force de pesanteur et aux forces centrifuges :

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\frac{p}{\rho} - 2(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{v}) + \nu\,\Delta\,\mathbf{v}. \tag{7.121}$$

Mouvement d'un fluide en rotation près d'une paroi solide perpendiculaire à l'axe de rotation

Appliquons l'équation (7.121) à un écoulement stationnaire près d'une paroi solide coïncidant avec le plan $z = 0$ et perpendiculaire au vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$. On suppose que l'écoulement est partout parallèle au plan $z = 0$ et qu'il est uniforme et de composantes $v_x(z)$ et $v_y(z)$ dans un plan de cote z donnée : le terme $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ est donc nul et le gradient de pression est uniforme dans ce plan. Par ailleurs, la composante suivant Oz de l'équation (7.121) montre que $\partial p/\partial z = 0$: le gradient de pression est donc uniforme dans tout l'espace, et est égal à sa valeur à grande distance de la paroi. Pour simplifier, on le supposera dirigé dans la direction Oy avec $\partial p/\partial y = \text{cte}$ et $\partial p/\partial x = 0$. L'équation (7.121) devient donc :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\,\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - 2\,\Omega\,v_x = 0 \tag{7.122a}$$

et

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + 2\,\Omega\, v_y = 0. \tag{7.122b}$$

Nous admettrons (et nous vérifierons par la suite) que l'influence de la viscosité ne se fait plus sentir loin du plan $z = 0$: la vitesse du fluide est alors égale à la vitesse $\mathbf{V}_g$ de l'écoulement géostrophique, qui doit être dirigé suivant Ox (à angle droit avec le gradient de pression $\partial p/\partial y$), et vérifie :

$$V_g = -\frac{1}{2\,\Omega\,\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\,. \tag{7.123}$$

Passons maintenant en notation complexe en introduisant une vitesse complexe $w = v_x + i\, v_y$: on obtient alors :

$$2\,\Omega\,(w - V_g) + \mathrm{i}\,\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \tag{7.124}$$

on peut intégrer cette expression sous la forme :

$$w - V_g = A\,\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,z} \tag{7.125a}$$

soit

$$w = V_g\left(1 - \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,z}\right) \tag{7.125b}$$

(on n'a gardé que celle des deux exponentielles qui tend vers 0 quand $z \to \infty$, et, pour déterminer A, on a utilisé la condition aux limites de vitesse nulle $w = 0$ pour $z = 0$). Les composantes v_x et v_y de la vitesse du fluide vérifient donc finalement :

$$v_x = V_g\left(1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,z}\cos\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,z\right) \tag{7.126a}$$

et

$$v_y = V_g\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,z}\sin\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,z. \tag{7.126b}$$

Loin de la paroi, on atteint exponentiellement la vitesse géostrophique sur une distance de l'ordre de $\sqrt{\nu\,/\,\Omega}$. Cette distance représente l'épaisseur δ_E de la couche d'Ekman ; pour l'eau, où $\nu = 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ et, en prenant $\Omega = 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$, on trouve une distance de l'ordre de 10 cm. Aux très faibles distances de la paroi, v_x et v_y tendent vers 0, et sont du même ordre de grandeur avec :

$$v_x \simeq v_y \simeq V_g\,\frac{z}{\delta_E}\,. \tag{7.127}$$

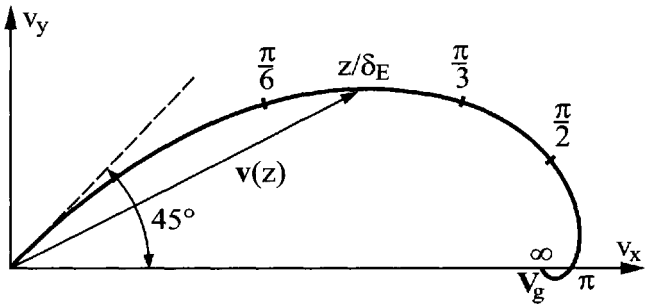


FIG. 7.32 – *Représentation paramétrée des variations relatives des composantes v_x et v_v de la vitesse du fluide en fonction de la distance à la paroi solide horizontale. A grande distance de la plaque ($z/\delta_E \longrightarrow \infty$) la vitesse devient égale à la vitesse géostrophique $\mathbf{V}_g$ orientée suivant Ox.*

La vitesse locale du fluide fait donc alors un angle de 45° avec le gradient de pression. Remarquons enfin que la vitesse géostrophique n'est pas la valeur maximale de la composante v_x ; celle-ci atteint en effet une valeur de l'ordre de 1,1 fois V_g, quand l'argument $z\,/\,\delta_E$ du cosinus devient de l'ordre de π (l'écoulement a cependant la même direction que V_g) .

La figure 7.32 représente de manière paramétrique la variation des composantes v_x et v_y en fonction de l'angle z/δ_E, dont quelques valeurs sont indiquées (*spirale d'Ekman*). On obtient des résultats similaires pour les écoulements atmosphériques turbulents mais les valeurs des angles à proximité des surfaces solides sont différentes. On observe effectivement que le vent souffle près du sol dans une direction légèrement différente de celle à une altitude plus élevée. Le sens de la déviation est opposé dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud.

Remarquons enfin que lorsque $\Omega \rightarrow 0$, l'épaisseur de la couche d'Ekman tend vers l'infini. Dans ce cas, il arrive fréquemment que les termes non linéaires $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ de l'équation de mouvement deviennent plus importants que la force de Coriolis, particulièrement près de la surface, et qu'ils équilibrent les forces de viscosité. On retrouve alors le phénomène de couche limite classique, avec un écoulement parallèle au gradient de pression.

Mouvement induit par des contraintes superficielles

Une couche d'Ekman peut également se développer sous la surface des océans en réponse à la friction induite par des vents qui lui sont parallèles. On suppose qu'à grande profondeur la vitesse devient constante et égale à une valeur $\mathbf{V}(V_x, V_y)$ indépendante de la présence du vent de surface. Comme

précédemment, les équations du mouvement se mettent sous la forme

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - 2\Omega(v_x - V_x) = 0 \tag{7.128a}$$

et

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + 2\Omega(v_y - V_y) = 0. \tag{7.128b}$$

Par ailleurs, si $\tau\,(\tau_x, 0)$ représente la contrainte à la surface de l'océan ($z = 0$), on obtient, en supposant l'écoulement laminaire, la condition aux limites :

$$\rho_0\, \nu\, \frac{\partial\, v_x}{\partial z} = \tau_x \tag{7.129a}$$

et

$$\rho_0\, \nu\, \frac{\partial\, v_y}{\partial z} = 0. \tag{7.129b}$$

En introduisant, comme précédemment, les vitesses complexes $w = v_x + \mathrm{i}\, v_y$ et $W = V_x + \mathrm{i}\, V_y$, en résolvant les équations et en appliquant les conditions (7.129), on obtient :

$$w = W + A\, \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\sqrt{\Omega\,/\,\nu}\, z} \tag{7.130}$$

et

$$A = \frac{\tau_x\,(1 - \mathrm{i})}{2\rho_0\,\sqrt{\nu\,\Omega}} = \frac{\tau_x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi\,/\,4}}{\rho_0 \sqrt{2\nu\,\Omega}}\,. \tag{7.131}$$

Seule la solution avec une exponentielle décroissant quand $z \to -\infty$ doit en effet être conservée. On en déduit les composantes de la vitesse :

$$v_x = V_x + \frac{\tau_x}{\rho_0 \sqrt{2\,\nu\,\Omega}}\, \mathrm{e}^{z/\delta_E}\, \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{\delta_E}\right) \tag{7.132a}$$

et

$$v_y = V_y - \frac{\tau_x}{\rho_0 \sqrt{2\,\nu\,\Omega}}\, \mathrm{e}^{z\,/\,\delta_E}\, \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{\delta_E}\right)\,. \tag{7.132b}$$

Ces équations sont très similaires aux équations (7.126). En particulier, on voit apparaître de nouveau l'épaisseur $\delta_E = \sqrt{\nu\,/\,\Omega}$ de la couche d'Ekman, qui représente ici l'épaisseur caractéristique de la couche de fluide sur laquelle l'écoulement induit par le vent (indépendant des courants existant en profondeur) sera observé. Son amplitude, inversement proportionnelle à δ, peut être très importante. On retrouve encore une spirale d'Ekman pour la

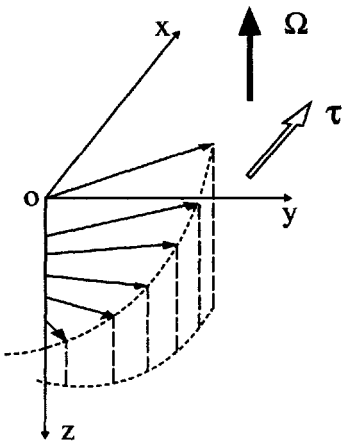


FIG. 7.33 – *Structure d'une couche d'Ekman de surface. La figure correspond à l'hémisphère nord ($\Omega > 0$) et la déviation s'opère à la droite de la contrainte de surface $\boldsymbol{\tau}$. La déviation est en sens inverse dans l'hémisphère sud.*

variation de la direction de l'écoulement avec la profondeur. Pour obtenir le courant total induit par le vent, il suffit de prendre l'intégrale de la vitesse par rapport à z sur le demi-espace inférieur. On trouve :

$$Q_x = \int_{-\infty}^{o} (v_x - V_x)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{7.133a}$$

et

$$Q_y = \int_{-\infty}^{o} (v_y - V_y)\,\mathrm{d}z = -\frac{\tau_x}{2\rho_0\,\Omega}\cdot \tag{7.133b}$$

L'écoulement moyen induit est donc orthogonal à la direction du vent, et est orienté à droite de celui-ci dans l'hémisphère nord (Fig. 7.33). On peut d'ailleurs le vérifier sur la dérive des grands icebergs, dont l'orientation est inverse dans l'hémisphère sud (à gauche de la direction du vent).

7.6 Vorticité, rotation et écoulements secondaires

Les *écoulements secondaires* sont des écoulements – généralement de plus petite amplitude – qui se superposent à un écoulement principal, souvent avec une orientation complètement différente de ce dernier. Une brève discussion sur ces écoulements a sa place dans ce chapitre, car nombre d'entre eux sont associés à la rotation des fluides, aux effets de force centrifuges créés par une courbure des lignes de courant, ou encore aux couches de vorticité à

proximité d'une paroi. La dynamique de la vorticité et du moment cinétique joue d'ailleurs un rôle essentiel dans ce type de phénomène. D'une certaine manière, les effets de couche d'Ekman que nous avons décrit plus haut (section 7.5.4) représentent déjà des écoulements secondaires, puisque la force de Coriolis induit des déviations de l'écoulement par rapport à la direction du vent près d'une surface libre (ou à celle l'écoulement géostrophique moyen près d'une paroi). Nous verrons plus loin que ces déviations de l'orientation de la vitesse induisent souvent, à leur tour, des écoulements secondaires verticaux. Décrivons maintenant quelques autres exemples (non limitatifs) d'écoulements secondaires et des mécanismes qui peuvent les induire.

7.6.1 Écoulements secondaires dus à la courbure de canalisations ou de canaux à surface libre

Dans les sections des canalisations courbes (Fig. 7.34), il apparaît deux cellules de recirculation (*cellules de recirculation de Dean*), symétriques par rapport au plan de courbure de la conduite : l'écoulement est dirigé à l'opposé du centre de courbure dans le plan de symétrie et vers celui-ci près des parois. Dans un canal courbe à surface libre (le méandre d'une rivière par exemple), il apparaît également une cellule de recirculation, où l'écoulement est dans la direction opposée au centre de courbure à la surface, et vers celui-ci au fond (Fig. 7.35a). On admet que ce mécanisme explique – au moins en partie – la forte dissymétrie souvent observée entre les pentes des deux rives des méandres d'une rivière ; dans la section de la rivière, l'écoulement secondaire est en effet de sens tel qu'il érode la berge externe et dépose des sédiments sur l'autre berge à l'intérieur de la courbure. La vitesse des écoulements secondaires augmente dans les deux cas avec la courbure et avec la vitesse de l'écoulement principal, mais ils sont toujours présents, même à très faible vitesse.

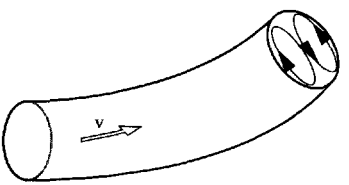
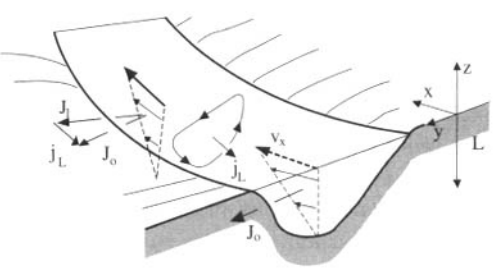


FIG. 7.34 – *Écoulement secondaire de type cellules de Dean dans un tube courbe.*

Nous allons maintenant analyser ces phénomènes de deux manières différentes : d'abord en termes de gradients de pression, puis en termes de vorticité. Nous avons vu à la section 7.1 de ce chapitre qu'il est possible de passer d'une description à l'autre, et qu'il s'agit en fait de deux points de vue différents sur le même phénomène.

La courbure des lignes de courant d'un écoulement fait apparaître un gradient de pression dans la direction opposée au centre de courbure du même type que celui qui est associé à la force centrifuge dans l'équation (7.72). En l'absence de parois, ou dans le centre d'une conduite (Fig. 7.34), ou encore près de la surface d'un canal (Fig. 7.35a), ce gradient de pression est équibré par un terme de force centrifuge de l'ordre de v^2/R (R étant le rayon de courbure). En revanche, près des parois, on retrouve par continuité le même gradient de pression (en supposant l'écoulement localement parallèle), mais il n'est plus équilibré par la force centrifuge car la vitesse est faible et le terme en v^2/R petit. On induit donc un écoulement local dirigé vers le centre de courbure ; celui-ci est compensé par un écoulement en sens opposé au centre de la conduite (ou à la surface du canal), pour assurer la conservation de la masse. On retrouve bien la direction de circulation observée.

(a)



(b)

FIG. 7.35 – *a) Circulation du fluide à l'intérieur du méandre d'une rivière (document NCFMF). b) Vue schématique des distributions de vitesse et de vorticité dans le méandre. Le moment cinétique* $\mathbf{j}_L$ *dû à cette circulation s'ajoute à celui associé au gradient de vitesse* $\partial v_x/\partial z$*, de façon à conserver le moment cinétique total :* $\mathbf{J}_1 + \mathbf{j}_L = \mathbf{J}_0$.

Remarques

- On a un effet un peu similaire pour la couche d'Ekman, où se retrouve le même gradient de pression près des parois solides et loin de celles-ci. À grande distance, le gradient de pression est équilibré par la force de Coriolis, mais près de la paroi, il induit un écoulement de direction perpendiculaire à l'écoulement extérieur.
- La géométrie de la section de l'écoulement, qu'il soit à surface libre ou non, peut être quelconque.

L'explication alternative de ces écoulements secondaires basée sur la dynamique de la vorticité utilise la rotation – due à la courbure – des couches de vorticité situées près des parois solides.

Considérons par exemple un écoulement dans une canalisation d'épaisseur h faible devant sa largeur (Fig. 7.35b), qui représente une rivière de faible profondeur ; dans une telle configuration, on a une composante de vorticité ω_y transverse à l'écoulement moyen (supposé initialement dirigé suivant Ox). ω_y est associée au gradient de vitesse $\partial v_x/\partial z$ entre le fond de la rivière, où la vitesse est nulle, et la surface, où elle est maximale. La vorticité $\boldsymbol{\omega}$ représente une rotation locale du fluide et, par conséquent, un moment cinétique $\mathbf{J}$. La courbure du méandre tend à faire tourner la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ (et donc $\mathbf{J}$) – qui restent toujours perpendiculaires à l'écoulement – d'un angle égal à celui du fluide entre des valeurs $\mathbf{J}_0$ et $\mathbf{J}_1$ avant et après la courbure. Si on suppose qu'on a conservation du moment cinétique, la différence de moment cinétique $\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_1 = \mathbf{j}_L$, qui est parallèle à l'écoulement moyen correspond à l'apparition d'une composante de vorticité longitudinale $\omega_x \propto j_L$. Elle correspond à l'écoulement secondaire de rotation dans le plan de la section de l'écoulement. On peut appliquer le même raisonnement pour la conduite courbe de la figure 7.34.

Remarque On peut associer l'apparition de cette composante ω_x au terme $(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ de l'équation de variation (7.37) de la vorticité (ce terme sert d'ailleurs, comme nous l'avons vu, à assurer la conservation du moment cinétique). En effet, comme nous avons supposé l'épaisseur de la couche de fluide faible devant sa dimension transverse, nous pouvons supposer que la composante ω_z de la vorticité est négligeable (elle est purement associée à des dérivées dans les directions Ox et Oy, dans lesquelles les distances caractéristiques de variation sont plus grandes que dans la direction Oz). Nous rencontrerons au chapitre 8 (section 8.3.5), un exemple similaire d'écoulement dans des cellules de très faible épaisseur formées de plaques parallèles (cellules de Hele–Shaw), où on peut considérer que l'écoulement moyen parallèle aux plaques est potentiel, et donc de vorticité nulle. Il doit donc y avoir égalité des dérivées $\partial v_x/\partial y$ et $\partial v_y/\partial x$. La composante $\omega_y\,\partial v_x/\partial y$ de $(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ suivant Ox est donc de l'ordre de $\omega_y\,\partial v_y/\partial x \approx \omega_y\,v_x/R$, où R est le rayon de courbure du méandre, $(\partial v_y/\partial x)$ est en effet de l'ordre de $v_x\,\partial\theta/\partial x$ tant que l'angle de déviation θ de la trajectoire par rapport à Ox est encore faible. On a donc bien apparition d'une composante longitudinale ω_x de la vorticité, qui varie avec le temps comme $\mathrm{d}\omega_x/\mathrm{d}t = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{grad})\,v_x = \omega_y\,v_x/R \approx v_x^2\,(Rh)$, si h est l'épaisseur de la couche de fluide (*i.e.* la profondeur de la rivière).

7.6.2 Écoulements secondaires dans des mouvements transitoires

Mettons par exemple en rotation le thé contenu dans une tasse, dans lequel subsistent quelques feuilles utilisées comme marqueur. Le liquide s'arrête de tourner au bout d'une vingtaine de secondes et on observe que les feuilles de thé à l'arrêt sont rassemblées au centre de la tasse. Cela est paradoxal à deux titres ! Si le ralentissement était simplement dû à la diffusion de quantité de mouvement par la viscosité, l'ordre de grandeur du temps d'arrêt attendu serait de 10 à 100 fois plus long ($R^2/\nu = 1\,600\,\mathrm{s}$, où $R = 4$ cm est le rayon de la tasse, et $\nu = 10^{-6}$ m^2/s pour l'eau). Par ailleurs, on pourrait penser que la force centrifuge, qui agit sur les feuilles plus denses que le liquide, repousserait celles-ci à la périphérie. Nous allons montrer, en étudiant le cas proche – mais mieux contrôlé – du « spin-up » (ou mise en rotation) que ce sont des écoulements secondaires qui se superposent à la rotation et déplacent les feuilles vers l'intérieur, tout en assurant des transferts de quantité de mouvement qui aident à ralentir plus rapidement le fluide que par simple diffusion (Fig. 7.36).

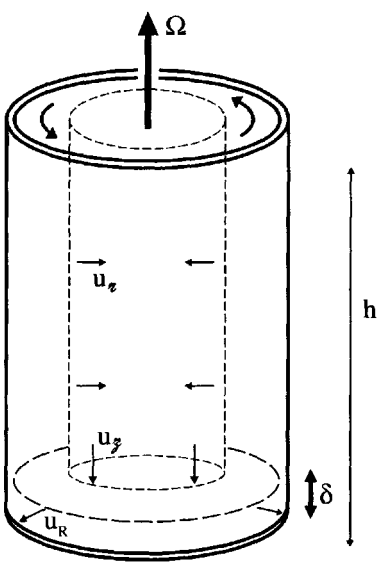


FIG. 7.36 – *Principe de l'effet de spin-up.*

On étudie l'évolution du mouvement d'un liquide à l'intérieur d'un récipient cylindrique mis en rotation à une vitesse Ω autour d'un axe vertical à partir d'un temps initial. Si le cylindre est infiniment long, nous avons vu au chapitre 2 que la mise en rotation uniforme de l'ensemble du liquide à partir du repos peut être traité formellement comme le problème de la mise en température uniforme d'un cylindre par diffusion radiale de la chaleur

(chapitre 1, section 1.2.1). En fait, la diffusion radiale de quantité de mouvement ne joue un rôle dominant que pendant les tous premiers instants de la rotation, tant que le liquide proche du fond du récipient (ou de sa paroi supérieure) n'a pas encore été mis en rotation sur une forte épaisseur.

Après cette mise en rotation, le gradient de pression radial reste par continuité à peu près le même dans les couches mises en rotation et dans le reste du fluide (en effet, comme les composantes de vitesses les plus importantes sont celles dans le plan perpendiculaire à l'axe, le gradient de pression parallèle à l'axe se réduit à la pression hydrostatique, et est constant dans la section). Dans la partie centrale du cylindre, où le fluide reste au repos, le gradient de pression radial $\partial p/\partial r$ est négligeable et il le sera donc également près des faces supérieure et inférieure. Ainsi, ce terme $\partial p/\partial r$ ne peut pas compenser le terme de force centrifuge $1/2\,\partial/\partial r\,(\Omega^2 r^2) = \Omega^2 r$ dans l'équation (7.71), qui induit un écoulement radial local vers l'extérieur. La masse de fluide, qui quitte cette région proche de l'axe et du fond (ou du haut) du récipient, doit donc être remplacée par du fluide venant des régions centrales. Dans ces régions, il en résulte un écoulement dirigé vers l'axe et vers la paroi horizontale la plus proche. Ces mouvements convectifs du liquide se substituent au phénomène de diffusion de la viscosité, et conduisent beaucoup plus rapidement que celle-ci à une égalisation de la quantité de mouvement du liquide et à sa rotation. En éclairant le cylindre transversalement par un plan lumineux laser, il est aisé de voir la frontière verticale, entre le liquide extérieur en rotation et le fluide intérieur fixe, se déplacer à vitesse relativement constante vers l'intérieur du cylindre et non plus de façon diffusive, à condition d'avoir ajouté quelques paillettes en suspension dans le liquide pour la visualisation.

Évaluation de l'effet Au lieu d'une variation de la vitesse de 0 à Ω, considérons une petite variation soudaine de vitesse angulaire de Ω à $\Omega(1+\varepsilon)$ (une petite variation se prête mieux à des évaluations d'ordre de grandeur des effets à l'aide de développements au premier ordre). L'augmentation de la vitesse angulaire au niveau de la surface inférieure est de l'ordre de $\Omega\,\varepsilon$. Le temps caractéristique τ_D de diffusion visqueuse sur la distance R est de l'ordre de R^2/ν : il représenterait le temps nécessaire pour que la variation de vitesse angulaire de rotation se propage dans tout le volume fluide, si aucun mécanisme d'écoulement secondaire n'agissait. Une seconde constante de temps naturelle $t_0 = 1/\Omega$ est l'inverse de la fréquence de rotation du cylindre. Le rapport $Ek = t_0/\tau_D = \nu/(R^2\,\Omega)$ de ces deux temps caractéristiques est le nombre d'Ekman, et est ici très inférieur à l'unité.

Initialement donc, seul le fluide situé près des parois supérieure et inférieure du cylindre est entraîné à la nouvelle vitesse de rotation par l'effet de la viscosité. L'épaisseur de la couche concernée peut être prise égale à $\delta \approx \sqrt{\nu\,t_0}$, qui représente la distance caractéristique de diffusion visqueuse pendant le temps t_0 et l'épaisseur de la couche d'Ekman discutée plus haut (section 7.5.4). Comme dans ce dernier cas, les composantes radiales et orthoradiales de la vitesse du fluide peuvent être du même ordre, et nous prendrons donc $u_R \approx \varepsilon\,\Omega\,R$ (seule la déviation de la vitesse par rapport à l'écoulement initial à la vitesse angulaire Ω – supposé établi – intervient). Cet écoulement radial est lui aussi localisé à des couches d'épaisseur δ près des parois supérieure et inférieure ; il est dirigé vers l'extérieur et doit être compensé par des

écoulements verticaux vers la partie centrale du cylindre, eux-mêmes compensés par des écoulements radiaux de vitesse u_r dirigée cette fois vers l'axe et distribuée sur la presque totalité de la hauteur globale H du cylindre en partant d'une distance de l'axe $r < R$. La conservation de la masse s'écrit donc, en estimant le débit dans la couche d'Ekman pour un cylindre de rayon de l'ordre de R :

$$2\pi\, r\, H\, u_r \cong 2\pi\, \delta\, R\, u_R \cong 2\pi\, \varepsilon\, \delta\, R^2\, \Omega. \tag{7.134}$$

Nous allons maintenant chercher à déterminer le temps caractéristique τ_r nécessaire pour atteindre un nouvel écoulement stationnaire. Évaluons tout d'abord la variation δ_r de la distance à l'axe des particules de fluide situées dans la région centrale et induite par la variation de vitesse : on en déduira alors τ_r qui doit être de l'ordre de $\delta r\,/\,u_r$. Dans la partie centrale, la viscosité n'intervient pas, et on doit donc conserver le moment cinétique des particules de fluide. Si on considère un anneau de masse M situé à une distance r de l'axe, la variation doit être telle que :

$$M\, r^2\, \Omega = M\, (r - \delta\, r)^2\, \Omega\, (1 + \varepsilon) \tag{7.135a}$$

où

$$\delta r = -\frac{\varepsilon\, r}{2}\,. \tag{7.135b}$$

De ces deux dernières équations, on déduit alors le temps caractéristique d'établissement de la nouvelle configuration de l'écoulement :

$$\tau_r \cong \frac{\delta r}{u_r} \cong \frac{\varepsilon r}{2}\, \frac{H\, r}{\Omega\,.\,R^2\,.\,\varepsilon\, \delta} \cong \frac{r^2}{R^2}\, \frac{H}{R}\, \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{R^2\, \Omega}{\nu}} \cong \frac{r^2}{R^2}\, \frac{H}{R}\, t_0\, \sqrt{Ek^{-1}}. \tag{7.136a}$$

Si le cylindre n'est pas trop allongé, les deux coefficients géométriques r^2/R^2 et $H\,/\,R$ sont de l'ordre de grandeur de l'unité, et on a donc

$$\tau_r \approx t_0\, \sqrt{Ek^{-1}}. \tag{7.136b}$$

Le temps τ_r est donc indépendant de ε et très supérieur à t_0 puisque Ek est petit devant 1, mais reste cependant, très inférieur au temps caractéristique τ_D de diffusion visqueuse qui est de l'ordre de $t_0\, Ek^{-1}$. L'apparition des écoulements secondaires permet donc bien d'atteindre beaucoup plus rapidement l'état de rotation stationnaire.

7.6.3 Écoulements secondaires associés à des effets de couches d'Ekman

Des exemples particulièrement importants de tels écoulements sont la remontée (« *upwelling* ») et la descente (« *downwelling* ») de masses d'eau observées près de certaines côtes et dans les régions équatoriales. Dans les deux cas, ces écoulements sont induits par les déviations locales de l'écoulement dans la couche d'Ekman créée par un vent dominant au-dessus de la mer (section 7.5.4).

« Upwelling et downwelling » côtiers

Les écoulements secondaires en relation avec la rotation de la Terre sont particulièrement importants au voisinage des côtes. Ainsi, dans l'hémisphère

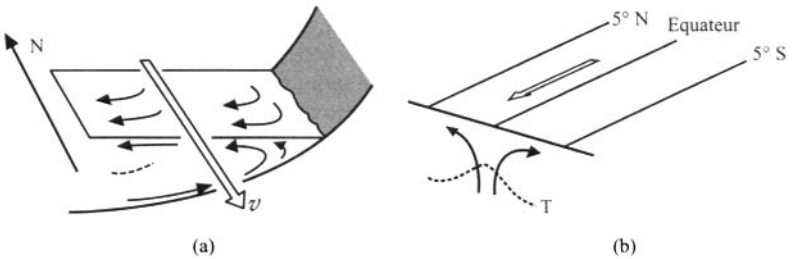


FIG. 7.37 – *(a) Effet d'upwelling associé à un vent près d'une côte ; (b) configuration des vents de surface et des composantes verticales et transverses de l'écoulement induit dans l'océan près de l'équateur (ces courants en profondeur induisent également une déformation de la couche thermocline.*

nord (Fig. 7.37a), un vent venant du nord et parallèle à une côte donne naissance sous l'effet de la force de Coriolis, à une composante perpendiculaire d'écoulement fluide qui s'éloigne de la côte. Ce courant est compensé par une montée locale d'eaux froides poissonneuses (*upwelling*) le long des côtes. Le phénomène inverse (*downwelling*) est observé si le sens du vent change, ou la composante de la rotation locale terrestre, ou encore l'orientation de la côte.

« Upwelling » équatorial

Une autre forme de *upwelling* se produit le long de l'équateur, où les vents alizés sont dirigés vers l'ouest (Fig. 7.37b). De part et d'autre de l'équateur, les contraintes induites par ces vents créent des écoulements en sens opposé (à cause du changement de signe de la composante de la rotation terrestre) qui éloignent les masses d'eau de l'équateur. Ces courants sont, là aussi, compensés par des remontées d'eau froide, localisées cette fois le long de l'équateur. Il en résulte une remontée de la thermocline (zone de fort gradient de température marquant en profondeur une limite entre des masses d'eau de températures différentes). Des déformations significatives (plusieurs dizaines de centimètres) de la surface de la mer peuvent également apparaître).

Annexe A. Les tourbillons dans l'hélium superfluide

A.1 Existence de filaments de tourbillons dans l'hélium superfluide

Nous avons vu à l'annexe du chapitre précédent que l'état superfluide de l'hélium pouvait être caractérisé par une fonction d'onde microscopique, dont la phase $\varphi(x, y, z, t)$ était reliée à la vitesse superfluide par la relation $\mathbf{v}_s = h/(2\pi m)\,\mathbf{grad}\,\varphi$ (où h est la constante de Planck et m la masse de l'atome d'hélium). Nous allons voir que l'écoulement potentiel correspondant coexiste avec des tourbillons quantiques qui prennent en compte la vorticité éventuelle. À très basse température ($< 1\,K$), la densité relative de fluide normal correspondant aux excitations thermiques devient très faible, et on pourrait penser observer des écoulements potentiels dans tout le volume du fluide. En fait, ils sont très difficile à réaliser expérimentalement, même dans un volume restreint, en raison de la présence de *tourbillons quantifiés*, de durée de vie illimitée, que nous allons étudier maintenant.

En effet, la phase $\varphi(x, y, z, t)$ est définie à un multiple entier de 2π près. Supposons, comme nous l'avons vu à la section 7.2.2 de ce chapitre, que le volume fluide contient un solide ayant une dimension infinie ou une ligne singulière : la circulation de **grad** φ autour du solide ou de la ligne n'est alors pas nécessairement nulle, et elle est égale à $2n\pi$ où n est entier. La circulation Γ de la vitesse superfluide $\mathbf{v}_s$ le long d'une courbe fermée (C) vérifie donc :

$$\Gamma = \int_C \mathbf{v}_s\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_C \frac{h}{2\pi\,m}\,\mathbf{grad}\,\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{nh}{m}\cdot \tag{7.137}$$

La circulation de la vitesse superfluide est donc quantifiée et multiple de la circulation élémentaire $h\,/\,m = 10^{-7}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ (où h est la constante de Planck et m la masse de l'atome d'hélium).

Le cas $n = 0$ correspond à un écoulement potentiel dans un volume d'hélium simplement connexe où n'existe pas de singularité de la fonction d'onde. Le cas $n \neq 0$ se rencontre lorsque le volume d'hélium n'est pas simplement connecté ou contient des lignes singulières de vorticité. Ce dernier cas est représenté en pratique par des filaments de tourbillons, dont le rayon ξ du cour est de l'ordre d'une taille atomique $\xi \cong 2\,\text{Å}$; la notion de vortex filamentaire présentée à la section 7.1.3 du présent chapitre est donc une excellente représentation de ces objets. L'énergie cinétique de ces tourbillons croît comme n^2, alors que la circulation associée croît seulement comme n : il est donc plus favorable énergétiquement de n'avoir que des tourbillons élémentaires pour lesquels $n = 1$, ce qui est effectivement le cas.

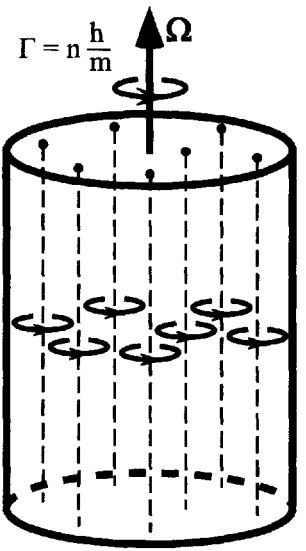


FIG. 7.38 – *Schéma de la distribution des filaments de tourbillons dans un récipient cylindrique en rotation rempli d'hélium superfluide. Le réseau périodique de tourbillons quantiques a été observé dans les expériences de la figure 7.39.*

A.2 Mise en rotation d'un volume d'hélium superfluide

Ces tourbillons quantifiés apparaissent, par exemple, dans un récipient rempli d'hélium superfluide mis en rotation. Si on conservait $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$ dans tout le volume fluide, l'hélium devrait rester stationnaire. Or, on constate que, au-dessus d'une très faible vitesse critique, il se met à tourner en moyenne comme un fluide ordinaire, et que la surface prend la forme parabolique correspondante. Le champ de vitesse moyen correspondant est créé par un ensemble de lignes, de direction moyenne parallèle à l'axe de rotation : la densité n_s de lignes par unité de surface est uniforme et est telle que $n_s\, h/m$ corresponde à la vorticité de l'écoulement global.

On peut détecter expérimentalement ces filaments, car ils ont la propriété de piéger les charges électroniques induites dans l'hélium à l'aide d'une petite source radioactive ; on peut alors les accélérer et les dévier par des champs électriques. On peut même les photographier en envoyant ensuite ces charges marquer, sur un écran fluorescent, le point de contact des lignes de tourbillons avec la surface, après focalisation par un dispositif d'optique électronique. La figure 7.39 montre le résultat d'une telle expérience, réalisée par Packard et Williams, dans un récipient cylindrique de taille millimétrique tournant autour de son axe. La vitesse de rotation est suffisamment faible pour qu'il n'y ait qu'un très faible nombre de tourbillons présents dans le récipient. Bien que la

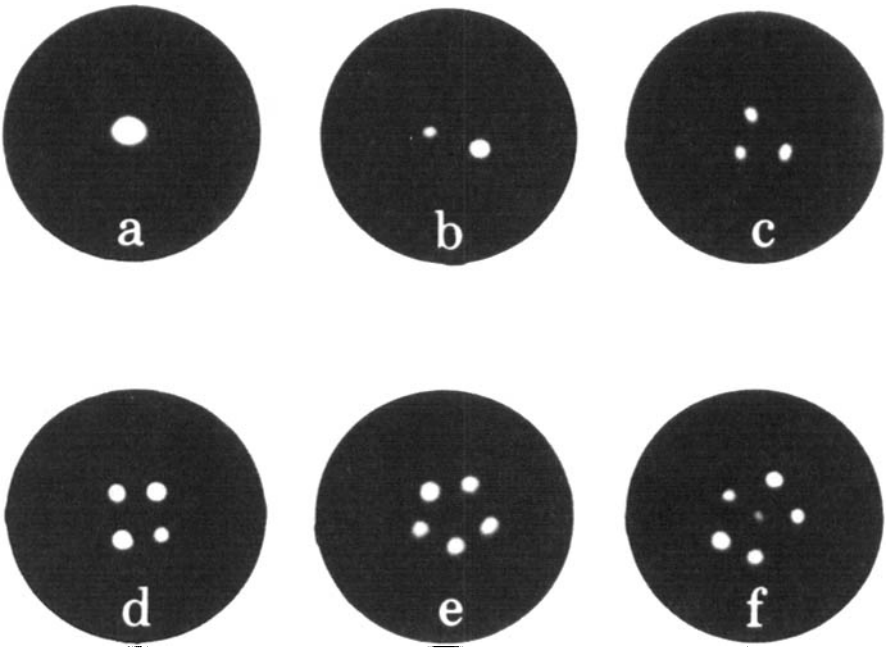


FIG. 7.39 – *Visualisation des tourbillons dans l'hélium superfluide à l'aide de charges électriques piégées dans les cœurs des tourbillons, et accélérées par un champ électrique parallèle à l'axe des lignes. Les taches qui apparaissent sur la photo correspondent à l'impact, sur un écran fluorescent, des charges émises par des tourbillons. Les différents clichés correspondent à des vitesses de rotation croissantes entraînant l'apparition successive de tourbillons quantifiés (clichés R. Packard et G. Williams).*

taille des cœurs soit de l'ordre de 10^{-10} m, le nombre de charges piégées est suffisant pour qu'elles soient détectables par une tache lumineuse (bien sûr considérablement plus grande).

A.3 Mise en évidence expérimentale de la quantification de la circulation dans l'hélium superfluide : expérience de Hall et Vinen

Dans cette expérience, un récipient contenant de l'Hélium superfluide est mis en rotation. Au centre de ce récipient, un fil magnétique tendu est mis en résonance par des bobines magnétiques extérieures avec des vibrations transverses de fréquence ω_0. Pour une vitesse de rotation suffisante, une ligne de tourbillon se piège sur le fil, c'est-à-dire que la région centrale de la zone du tourbillon (le cour) est confondue avec le fil, et que le champ de vitesse

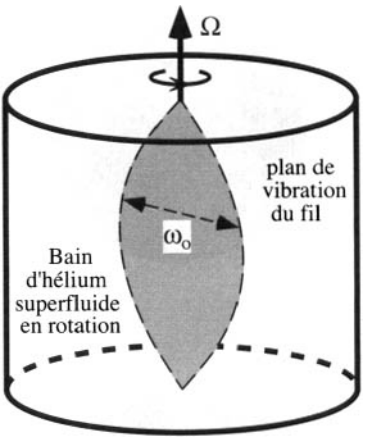


FIG. 7.40 – *Schéma de l'expérience de Hall et Vinen mettant en évidence la quantification de la circulation de la vitesse dans un récipient d'hélium superfluide en rotation*

varie en $1/r$ avec la distance à celui-ci. La circulation autour du fil induit une précession à fréquence Ω du plan de vibration de celui-ci : cette précession résulte de la force de Magnus, due au déplacement du fil par rapport au fluide. La fréquence de résonance du fil est alors dédoublée et devient $\omega_0 \pm \Omega$. Il s'agit d'un effet Doppler qui peut se comprendre si on se rappelle qu'un mouvement de vibration rectiligne peut se décomposer en deux mouvements circulaires de sens opposés.

L'expérience de Hall et Vinen donne une circulation de la vitesse pour l'hélium superfluide qui varie par paliers multiples avec une valeur de base $\Gamma = h/m = 10^{-7}$ m^2/s. C'est bien la valeur que nous avions prédite plus haut (A.1). Il s'agit en fait d'une manifestation spectaculaire de l'état quantique macroscopique de l'hélium superfluide, que nous avons déjà décrit haut.

A.4 Dynamique des anneaux tourbillons dans l'hélium superfluide

La dynamique des anneaux tourbillons peut être, elle aussi, suivie, en y piégeant des particules chargées et en imposant un champ électrique uniforme ; celui-ci communique une énergie cinétique bien définie à chaque anneau (et augmente son rayon). Le rayon des anneaux peut même être mesuré directement, en faisant passer les anneaux à travers des microgrilles calibrées.

Ainsi, on a pu vérifier directement, à mieux de quelques pourcent près, que la vitesse d'un anneau tourbillon variait proportionnellement à l'inverse de son énergie, comme les équations (7.61) et (7.62) le prédisent. On retrouve

bien $\Gamma = h/m$, et on obtient un rayon du cœur du tourbillon $\xi = 1,8$ Å. Dans l'hélium superfluide, il n'y a pas d'effet de diffusion visqueuse, et le cours des tourbillons reste toujours de très faible diamètre ; il existe cependant un autre mécanisme de perte d'énergie, car les anneaux sont soumis à une force de freinage qui se développent dans un sens opposé par rapport à la vitesse relative entre le cour et la vitesse locale du fluide. Ce freinage fait diminuer l'énergie et le rayon des tourbillons avec le temps. Comme cette force augmente avec la température, on réalise les expériences à une température de l'ordre de 0,5 K à laquelle la perte d'énergie des anneaux pendant leur déplacement est très faible.

Remarque À suffisamment basse température, les fonctions d'onde de Broglie d'un grand nombre (10^6) d'atomes (Rb, Na) groupés en paquet se recouvrent et forment un condensat de Bose-Einstein. Les propriétés hydrodynamiques de ce condensat sont semblables à celles de l'hélium superfluide. On y a observé en particulier des réseaux de tourbillons comparables à ceux de la figure 7.39.

Chapitre 8

Écoulements à petit nombre de Reynolds

LES ÉCOULEMENTS *aux petits nombres de Reynolds, notion introduite au chapitre 2, sont caractérisés par la prédominance des effets dus à la viscosité du fluide sur ceux liés à son inertie. L'équation de Stokes, qui régit ces écoulements, est linéaire, car le terme convectif non linéaire* $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ *peut alors être négligé. Dans le cas des écoulements parallèles, que nous avons étudiés au chapitre 4, ce terme convectif était rigoureusement nul ; dans ce chapitre, il ne s'agit plus que d'une approximation. Après avoir donné quelques exemples d'écoulements de ce type (section 8.1), nous étudierons à la section 8.2 un certain nombre de propriétés générales (réversibilité, additivité, minimum de dissipation) qui découlent de la forme linéaire de l'équation de Stokes et qui sont à l'origine de solutions simples ; ces propriétés démarquent totalement ces écoulements de ceux aux grands nombres de Reynolds. Les problèmes d'écoulements autour d'objets petits (ou de mouvements de ces objets dans un fluide au repos) constituent un ensemble important d'applications qui seront traitées à la section 8.3. L'écoulement autour d'une sphère (problème de Stokes) en est un exemple essentiel, dont la résolution est délicate (section 8.4). Enfin, nous considérerons le problème du mouvement d'un ensemble de particules (suspensions) (section 8.5) et celui d'un fluide autour d'un ensemble fixe de particules (milieu poreux) (section 8.6).*

8.1 Exemples d'écoulements à petit nombre de Reynolds

Nous rappelons tout d'abord l'expression du nombre de Reynolds que nous avons introduit au chapitre 2 (section 2.3.1) :

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta} \tag{8.1}$$

U et L représentent respectivement la vitesse et la taille caractéristiques de l'écoulement, et ρ et η sont respectivement la masse volumique et la viscosité du fluide. Physiquement, ce nombre représente le rapport du temps caractéristique τ_d de transport de quantité de mouvement par diffusion sur la distance L ($\tau_d = L^2/(\eta/\rho)$), au temps caractéristique τ_c de transport de quantité de mouvement par convection sur la distance L ($\tau_c = L/U$). Il représente aussi le rapport des contraintes associées à l'inertie du fluide (ρU^2) aux contraintes de frottement visqueux ($\eta U/L$).

Les écoulements à petit nombre de Reynolds, parfois appelés écoulements rampants, peuvent avoir des origines physiques très variées, puisque ce nombre est obtenu par combinaison de trois facteurs différents :

♦ *Déplacements d'objets microscopiques* (dans ce cas, la faible valeur de Re est associée à celle de L) :

- mouvements de bactéries (longueur de quelques micromètres). Pour des bactéries d'une longueur de 3 μm se déplaçant à une vitesse de 10 μm/s dans l'eau ($\rho = 10^3$ kg.m^{-3}, $\eta \approx 10^{-3}$ Pa.s), on trouve $Re \approx 3.10^{-5}$ (un exemple sera traité à la fin de la section 8.3.2). Pour de tels mouvements, les forces d'inertie jouent un rôle négligeable : quand la bactérie arrête son mouvement de propulsion, la vitesse s'annule en un temps de l'ordre de la microseconde ;

- dynamique des suspensions de particules de petite taille (cet exemple sera étudié à la section 8.5).

♦ *Déplacements à vitesse lente de matériaux géologiques* (dans ce cas, la grande échelle de taille de l'écoulement est compensée par la faible valeur du rapport $\rho U/\eta$). Citons deux exemples :

- déplacement des glaciers : on observe parfois l'allure parabolique de lignes transverses à l'écoulement (appelées bandes de Forbes) dans des langues glaciaires (Fig. 8.1). Cette forme est caractéristique des écoulements de Poiseuille étudiés au chapitre 4 (section 4.5.3). Précisons cependant que le profil de l'écoulement visualisé par ces bandes n'est pas strictement parabolique, par suite du caractère non newtonien de la glace. Les dimensions de l'écoulement sont dans ce cas de l'ordre du kilomètre et les vitesses de déplacement de l'ordre du mètre par an. Le nombre de Reynolds correspondant est de l'ordre de 10^{-11} ;

FIG. 8.1 – *Écoulement lent d'un glacier. L'écoulement du type écoulement de Poiseuille (profil d'allure parabolique) est bien visualisé par le déplacement de morceaux de roches entraînés par le glacier, qui forment des bandes, appelées bandes de Forbes. Bien qu'elles en aient l'allure, la forme de ces bandes n'est pas parabolique, comme c'est le cas pour un écoulement de Poiseuille, du fait que la glace n'est pas un fluide newtonien.*

- mouvement du manteau terrestre : avec des échelles de l'ordre de : $L \approx 100$ km, $U \approx 10^{-5}$ m/s, une masse volumique $\rho \approx 2.10^3$ kg/m^3 et une viscosité de l'ordre de $\eta \approx 10^{23}$ Pa.s, on trouve une valeur $Re \approx 10^{-20}$.

♦ *Écoulements de fluides très visqueux*, tels que les goudrons, les pâtes, le plastique, le miel. Certains pétroles lourds ont, à la température ambiante, une viscosité plusieurs millions de fois supérieure à celle de l'eau.

Remarque Il ne faut pas confondre le comportement newtonien de fluides très visqueux, pour lesquels la relation entre contrainte et gradient de vitesse reste linéaire, quelle que soit la fréquence de sollicitation, avec le comportement rhéologique de matériaux viscoélastiques ; dans ce dernier cas (qui a été discuté au chapitre 4, section 4.4.4), la réponse est celle d'un solide élastique à haute fréquence de sollicitation, et celle d'un fluide visqueux à basse fréquence.

8.2 Équation du mouvement à petit nombre de Reynolds

8.2.1 Équation de Stokes

Dans tous les cas que nous venons d'évoquer, le fluide en écoulement peut être considéré comme incompressible. La vitesse du fluide reste, en effet, très faible devant la vitesse du son dans le fluide (voir chapitre 3,

section 3.3.2) et on peut utiliser l'équation de Navier–Stokes valable pour les fluides newtoniens incompressibles (Éq. (4.30)) (précisons cependant que, une analyse plus rigoureuse dans le cas des écoulements à petits nombres de Reynolds, montre que la condition d'incompressibilité impose que le nombre de Mach soit petit, non plus devant l'unité, mais devant le nombre de Reynolds, ce qui est une condition plus restrictive ; en particulier, dans le cas de l'écoulement du manteau terrestre ou des glaciers, cette condition n'est pas largement satisfaite). L'équation de Navier–Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,p + \rho\,\mathbf{f} + \eta\,\Delta\mathbf{v}. \tag{8.2}$$

Les forces extérieures $\mathbf{f}$ par unité de masse qui dérivent d'un potentiel peuvent être définies par $\mathbf{grad}\,p_0 = \rho\,\mathbf{f}$ (dans le cas des forces de pesanteur, $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$, et $\mathbf{grad}\,p_0$ représente le gradient de pression hydrostatique).

L'hypothèse de base des écoulements à petit nombre de Reynolds est la petitesse des termes correspondant aux forces d'inertie ($\rho\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$) devant ceux qui représentent les forces de frottement visqueux par unité de volume ($\eta\,\Delta\mathbf{v}$).

Un autre nombre sans dimension prend en compte la comparaison entre le terme instationnaire $\rho\,(\partial\mathbf{v}/\partial t)$ et le terme de viscosité ; il est défini par :

$$N = \frac{|\rho\,\partial\mathbf{v}/\partial t|}{|\eta\,\Delta\mathbf{v}|} = \frac{\rho\,L^2}{\eta\,T} \tag{8.3}$$

où T représente le temps caractéristique des variations de la vitesse. Nous avons rencontré ce nombre au chapitre 4 (section 4.5.4), lors de l'étude de l'écoulement alternatif d'un fluide entre deux plans (formule (4.95)). La condition de petit nombre de Reynolds n'implique aucune hypothèse sur la stationnarité de l'écoulement, et donc sur la valeur de ce nombre ; cependant, nous nous limiterons dans presque tout ce chapitre à des écoulements pour lesquels les profils de vitesse sont quasi stationnaires et où ce nombre est, lui aussi, très petit devant l'unité. Cela signifie que, pendant le temps caractéristique T, les variations de vitesse peuvent se propager par diffusion visqueuse sur une distance bien supérieure à la taille L caractéristique de l'écoulement. Dans ces conditions, le terme en $\rho\,\partial\mathbf{v}/\partial t$ de l'équation du mouvement peut être négligé. En combinant les hypothèses précédentes, l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\mathbf{grad}\,(p - p_0) = \eta\,\Delta\mathbf{v}. \tag{8.4}$$

On ne fera pas intervenir les forces en volume lorsqu'elles n'échangent pas d'énergie avec l'écoulement. On tiendra compte des effets de la pression hydrostatique en incorporant dans la pression le terme de gravité $p_0 = \rho\,g\,h$. L'équation (8.4) prend alors la forme dite de l'*équation de Stokes* :

$$\mathbf{grad}\,p' = \eta\,\Delta\mathbf{v} \tag{8.5}$$

avec $p' = p - p_0$. On omettra le « prime » dans la suite.

8.2.2 Quelques formes équivalentes de l'équation de Stokes

L'équation de Stokes (8.5) peut être écrite de manière plus générale en faisant intervenir les composantes σ_{ij} des contraintes de surface dans le fluide. Rappelons la formule 4.7 :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\,\delta_{ij}$$

où σ'_{ij} représente le tenseur des contraintes de viscosité avec $\partial\sigma'_{ij}/\partial x_j = \eta\Delta v_i$. L'équation (8.5) devient ainsi :

$$\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad \textit{première forme.} \tag{8.6}$$

Nous avons vu au chapitre 7 (section 7.1) la possibilité de décrire les écoulements à partir de leur champ de vorticité $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$, plutôt qu'à partir de leur champ de vitesse $\mathbf{v}$. Pour les écoulements à petit nombre de Reynolds, en utilisant la condition d'incompressibilité div $\mathbf{v} = 0$ et l'identité :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\mathbf{A}) = \mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) - \Delta\,\mathbf{A} \tag{8.7}$$

valable pour un champ de vecteurs $\mathbf{A}$ quelconque, l'équation (8.5) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{grad}\,p = -\eta\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} \qquad \textit{deuxième forme.} \tag{8.8}$$

Cette relation implique en particulier que :

$$\Delta p = 0. \tag{8.9}$$

En prenant le rotationnel de l'équation (8.8), le premier membre s'annule ; en appliquant les identités (8.7) et div $\mathbf{rot} = 0$ au vecteur $\boldsymbol{\omega}$, on obtient :

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \qquad \textit{troisième forme.} \tag{8.10}$$

Cette relation est un cas particulier de l'équation d'évolution de la vorticité établie au chapitre 7 (Éqs. (7.36, 7.37)) dans le cas d'un écoulement stationnaire et à petit nombre de Reynolds. Le transport de vorticité par diffusion visqueuse y est représenté par le terme $\eta\,\Delta\boldsymbol{\omega}$. L'interprétation physique de la relation (8.10) est donc que, dans un écoulement stationnaire à petit nombre de Reynolds, les gradients de vitesse atteignent un profil d'équilibre : aucun transport de vorticité ne se produit à l'intérieur d'un écoulement stationnaire de ce type.

8.2.3 Propriétés des solutions de l'équation de Stokes

Unicité

Dans un canal d'écoulement, et pour des conditions aux limites données (à l'infini et, à distance finie, au niveau des parois solides), l'équation de

Stokes a une solution unique. Cette propriété essentielle est une conséquence de la linéarité de l'équation. En revanche, pour un écoulement d'un fluide réel à un nombre de Reynolds suffisamment élevé, il existe une infinité de solutions de l'équation de Navier–Stokes, qui évoluent dans le temps : les termes non linéaires convectifs et la présence de la vorticité sont à l'origine de la multiplicité des solutions et de leur évolution.

Démonstration Supposons qu'il existe deux champs $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{v}'(\mathbf{r})$ de vitesse solutions de l'équation de Stokes et qui vérifient les mêmes conditions aux limites sur les parois ou à l'infini. Montrons tout d'abord que toutes les dérivées des composantes vérifient en tout point :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \cdot \tag{8.11}$$

Il suffit ensuite d'intégrer par rapport aux x_j pour montrer que $v_i = v_i'$. Pour démontrer la relation (8.11) quels que soient i et j, nous allons établir que :

$$\iiint \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}V = 0 \tag{8.12}$$

(on somme sur i et j et l'intégrale est prise sur le volume qui limite l'écoulement). On peut écrire :

$$\iiint \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}V = \iiint \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(v_i - v_i')\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)\right] \mathrm{d}V$$
$$- \iiint (v_i - v_i')(\Delta v_i - \Delta v_i')\,\mathrm{d}V.$$

Le premier terme du second membre de cette équation se transforme en une intégrale de surface, qui est nulle car $v_i = v_i'$ sur les parois. En utilisant l'équation de Stokes, le second terme peut s'écrire :

$$\frac{1}{\eta}\iiint (v_i - v_i')\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial p'}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}V = \frac{1}{\eta}\iiint \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(v_i - v_i')(p - p')\right] \mathrm{d}V$$
$$- \frac{1}{\eta}\iiint (p - p')\frac{\partial}{\partial x_i}(v_i - v_i')\,\mathrm{d}V.$$

Le premier terme du second membre de cette égalité est nul, car il se transforme, lui aussi, en intégrale de surface, qui est nulle parce que $v_i = v_i'$ sur les parois. Le second terme est également nul, car $\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0$. L'identité (8.12) et, par suite, l'unicité du champ de vitesse, sont donc démontrées.

Réversibilité

La réversibilité est une conséquence directe de la linéarité de l'équation de Stokes. Supposons en effet connu un champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, solution de l'équation et correspondant à un champ de pression $p(x, y, z)$; $-\mathbf{v}(x, y, z)$ sera aussi solution à condition de changer aussi le signe des gradients de pression, ainsi que la vitesse de tous les points des parois solides et à l'infini.

L'équation (8.5) reste alors vérifiée car ses deux membres sont remplacés par leurs opposés et les conditions aux limites sont correctement modifiées. L'unicité des solutions assure alors qu'il s'agit bien du champ de vitesse effectivement réalisé.

♦ *Mise en évidence expérimentale de la réversibilité*

L'expérience présentée par G.I. Taylor dans le film « Écoulements aux petits nombres de Reynolds », et illustrée par la série de photos de la figure 8.2, utilise deux cylindres coaxiaux ; l'espace entre les cylindres est rempli d'un fluide très visqueux. Une goutte de colorant d'une taille de l'ordre de la distance entre cylindres est injectée localement dans le fluide.

Le cylindre intérieur est ensuite mis en rotation lente : les particules de colorant situées près de lui suivent exactement son mouvement, tandis que celles proches du cylindre extérieur restent pratiquement immobiles. La tache de colorant va donc se répartir dans la zone entre les deux cylindres et, si l'on effectue plus d'un tour, devenir progressivement invisible par étalement. On arrête ensuite la rotation, puis on la reprend en sens inverse à une vitesse toujours petite. La vitesse sur les surfaces solides et les forces exercées sont ainsi inversées, les particules de colorant prennent donc, d'après le principe de réversibilité, une vitesse opposée à la précédente et reparcourent en sens inverse le même trajet. Lorsqu'on a tourné le cylindre du même nombre de tours que dans le sens direct, toutes les particules retrouvent leur position initiale, et la tache réapparaît avec une géométrie identique à celle du départ ! Seule la diffusion moléculaire du colorant qui, elle, est irréversible, l'aura un peu étalée. Si on avait utilisé un fluide moins visqueux, ou si on opérait avec une vitesse de rotation assez rapide pour que les termes non linéaires en $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ ne soient pas négligeables, le colorant aurait été brassé par l'effet des gradients de vitesse des tourbillons, et sa dispersion aurait été irréversible.

Remarque Il existe cependant des écoulements à petits nombres de Reynolds, dans lesquels la propriété de réversibilité précédente n'est pas vérifiée. C'est par exemple le cas dans l'expérience décrite plus haut lorsque les deux cylindres ne sont pas tout à fait coaxiaux et qu'ils sont tournés alternativement l'un, puis l'autre, dans des sens successivement opposés. Ce type d'écoulement entraîne l'existence de trajectoires de fluide suivies par le colorant avec des points anguleux correspondant au renversement des sens de rotation des cylindres. Au niveau de ces points (qualifiés d'hyperboliques) il existe une très grande sensibilité des trajectoires à des modifications infinitésimales de position des particules. Ceci contraste avec le cas des cylindres concentriques où n'existent pas de tels points (on parle de trajectoires elliptiques, dans ce cas de trajectoires circulaires). Dans le cas des cylindres excentrés, après un certain nombre de va et vient tels que les rotations globales se compensent, deux particules de colorant initialement très proches finissent par suivre des trajectoires très différentes, et par s'écarter notablement l'une de l'autre, entraînant la non-réversibilité dans ce type d'écoulement. Ce phénomène a reçu le nom de *chaos lagrangien* parce que les trajectoires obtenues peuvent être mises en correspondance avec celles obtenues dans l'espace des phases qui décrivent le

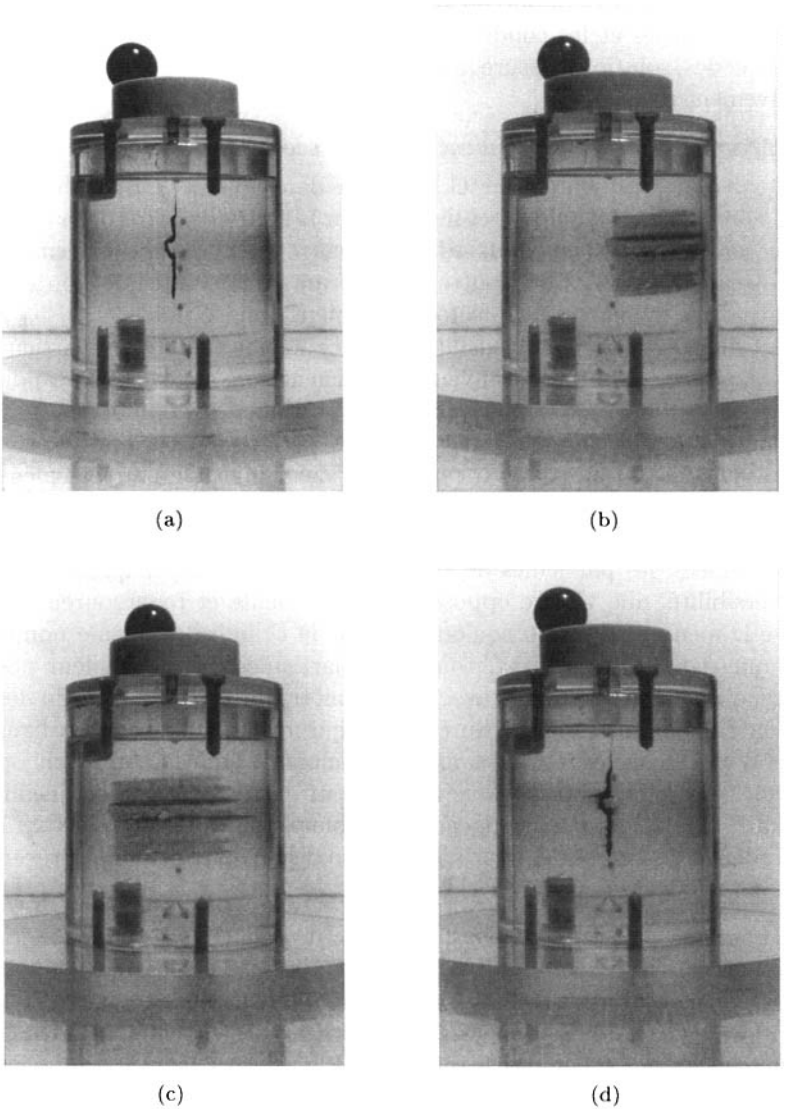


FIG. 8.2 – *Expérience montrant la réversibilité des écoulements aux petits nombres de Reynolds ; (a) situation initiale : (b) après une rotation de un tour du cylindre inférieur dans le sens des aiguilles d'une montre ; (c) après un tour un quart ; (d) retour à la position de départ (clichés des auteurs).*

comportement chaotique d'un système dynamique. La physique commune à ces deux problèmes très différents provient de la très grande « sensibilité aux conditions initiales » des trajectoires.

Examinons à présent quelques conséquences de la réversibilité.

♦ *Symétrie de l'écoulement à petit nombre de Reynolds autour d'un corps immobile de taille finie présentant un plan de symétrie*

Lorsque la vitesse **U** de l'écoulement loin du corps est perpendiculaire au plan de symétrie $x = 0$ de celui-ci, les lignes de courant en amont du corps sont symétriques de celles en aval. C'est le cas de la figure 2.8a du chapitre 2, qui correspond à un écoulement à nombre de Reynolds de 0,16.

Démonstration Opérons deux transformations qui aboutissent dans les deux cas à renverser la vitesse **U** de l'écoulement loin du corps, à partir d'un écoulement $\mathbf{v}_0(x, y, z)$ (Fig. 8.3). Opérons d'abord un renversement du sens de l'écoulement : le nouveau champ de vitesse vérifie en tout point $\mathbf{v}(x, y, z) = -\mathbf{v}_0(x, y, z)$ (réversibilité) et, en particulier, **U** devient égal à $-\mathbf{U}$ loin du corps. Une deuxième transformation à partir de l'écoulement initial consiste en une symétrie par rapport au plan $x = 0$. L'écoulement à l'infini est renversé ($\mathbf{U} \to -\mathbf{U}$) et le corps se transforme en lui-même à cause de sa symétrie.

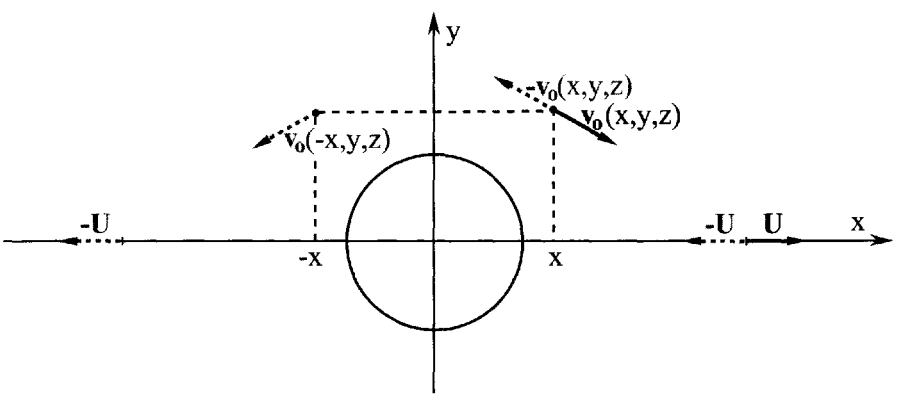


FIG. 8.3 – *La symétrie des lignes de courant entre l'amont et l'aval de l'écoulement autour d'un obstacle présentant un plan de symétrie (ici plan $x = 0$) peut être démontrée en remplaçant l'écoulement de vitesse* **U** *loin de l'obstacle par un écoulement de vitesse* $-\mathbf{U}$.

Les écoulements obtenus par les deux transformations sont identiques, car ils correspondent à la même vitesse à l'infini et aux mêmes conditions aux limites à la surface du corps. La première transformation (renversement du sens de l'écoulement) donne comme composantes de vitesse :

$$v_x(x, y, z) = -v_{ox}(x, y, z) \quad \text{et} \quad v_{y,z}(x, y, z) = -v_{oy,z}(x, y, z).$$

La seconde transformation (symétrie par rapport au plan $x = 0$) donne comme composantes de vitesse :

$$v_x(x, y, z) = -v_{ox}(-x, y, z) \quad \text{et} \quad v_{y,z}(x, y, z) = v_{oy,z}(-x, y, z).$$

Comme les champs de vitesse obtenus par ces deux transformations doivent être identiques, on a :

$$v_{ox}(-x, y, z) = v_{ox}(x, y, z) \quad \text{et} \quad v_{oy,z}(-x, y, z) = -v_{oy,z}(x, y, z).$$

On a bien symétrie des lignes de courant par rapport au plan $x = 0$.

Ce résultat est un test très sensible de la petite valeur du nombre de Reynolds. Comme nous l'avons vu au chapitre 2 (sections 2.4.1 et 2.4.2) dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre, dès que le nombre de Reynolds devient de l'ordre de l'unité, des zones de recirculation apparaissent sur la face aval ; pour des écoulements rapides, un large sillage turbulent est observé en aval alors que les lignes de courant restent stables en amont.

Si l'obstacle ne possède pas de plan de symétrie, l'écoulement à petit nombre de Reynolds n'est pas symétrique entre l'amont et l'aval. Cependant, si on renverse le sens de l'écoulement, le fluide suivra les mêmes lignes de courant en sens inverse, cette propriété étant due à la réversibilité des écoulements aux petits nombres de Reynolds, indépendamment des propriétés de symétrie des obstacles.

Imaginons un écoulement obtenu en soufflant ou en aspirant à travers un entonnoir. Aux petits nombres de Reynolds, les lignes de courant divergent à peu près radialement dans la partie évasée (Fig. 8.4a) et sont les mêmes que l'on souffle ou que l'on aspire ; seul change le sens de l'écoulement. En fait, ce n'est pas ce qui se passe dans la pratique, car on se trouve dans des conditions de grand nombre de Reynolds et la réversibilité de l'écoulement n'est plus du tout vérifiée : on peut toujours éteindre une bougie en soufflant à travers le tube étroit de l'entonnoir, jamais en aspirant ! Cela résulte du fait que, en soufflant, on forme un jet d'air qui n'occupe qu'une partie du tube (Fig. 8.4b), par suite du « décollement » du fluide des parois du tube dans sa partie évasée (on étudiera ce phénomène dans le chapitre suivant (section 9.5.4). Par contre, en aspirant, l'écoulement se fait sur

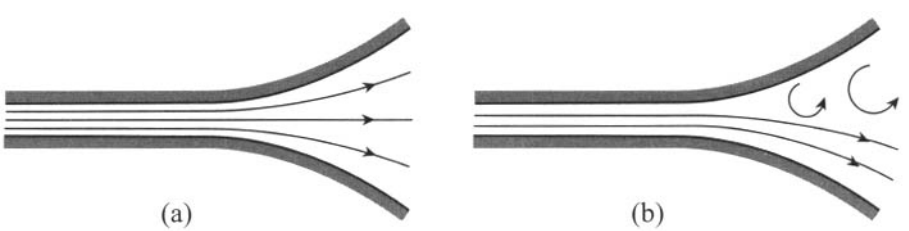


FIG. 8.4 – *(a) Aspect de l'écoulement à petit nombre de Reynolds dans un tube divergent ; l'écoulement est réversible, et les lignes de courant sont les mêmes que l'on aspire ou que l'on souffle par l'orifice. (b) Situation à grand nombre de Reynolds ; dans ce cas, une zone de recirculation apparait près d'une des parois du côté divergent du tube (le jet n'est, en général, pas symétrique par rapport à l'axe).*

toute la section de l'entonnoir, et la vitesse est moindre pour une même différence de pression.

♦ *Chute d'une sphère le long d'une paroi rigide*

Imaginons une sphère tombant sous l'effet de son poids (corrigé de la poussée d'Archimède) dans un liquide, au voisinage d'une paroi verticale. En utilisant la propriété de réversibilité, nous allons montrer que, en régime permanent, sa vitesse $\mathbf{U}$ est nécessairement verticale. En effet, supposons $\mathbf{U}$ oblique et orientée par exemple dans une direction qui rapproche la particule de la paroi (Fig. 8.5a). Supposons tout d'abord qu'on renverse en tout point la vitesse *locale* $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ d'écoulement du fluide ($\mathbf{v}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{v}(\mathbf{r})$), ce qui implique de renverser aussi l'accélération $\mathbf{g}$ de la pesanteur ; par suite des conditions aux limites sur les surfaces solides (Fig. 8.5b), la vitesse $\mathbf{U}$ de la sphère est remplacée par son opposée $\mathbf{U}_1 = -\mathbf{U}$. Un tel écoulement vérifie l'équation de mouvement du fluide, car les composantes des contraintes sur la sphère sont aussi remplacées en tout point par leurs opposées ; par conséquent, elles équilibrent bien la nouvelle valeur $-M\mathbf{g}$ du *poids* du corps. Revenons dans la configuration de départ (a) et opérons maintenant une symétrie par rapport au plan (P), plan diamétral de la sphère perpendiculaire à la paroi solide (cas (c)). On obtient une vitesse $\mathbf{U}_2$, si l'accélération de la pesanteur est également renversée, et un champ de vitesse correspondant au symétrique du précédent par rapport au plan (P). Les deux champs de vitesse correspondant à un mouvement du même corps sous l'effet de la même accélération doivent être identiques avec $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$. Cela impose que $\mathbf{U}$ soit parallèle au plan. Des arguments du même type expliquent pourquoi un cylindre tombe dans

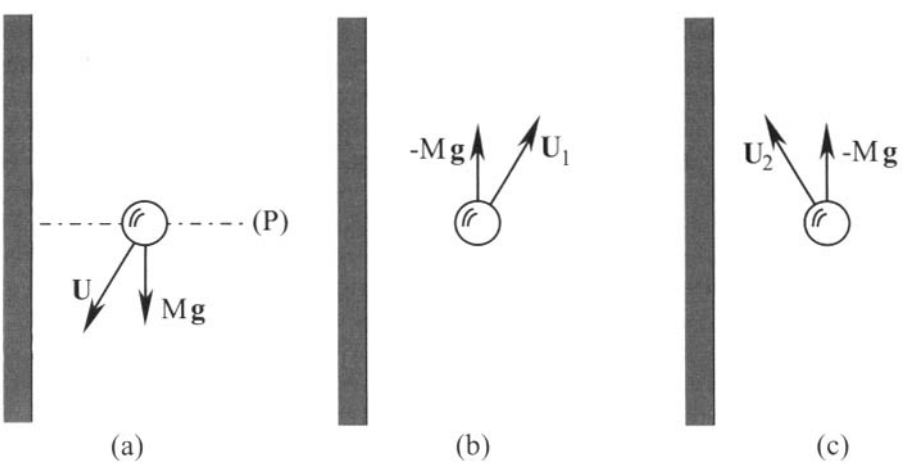


FIG. 8.5 – *(a) Chute d'une sphère dans un fluide visqueux au voisinage d'une paroi verticale ; (b) renversement du sens des écoulements en tout point ; (c) symétrie par rapport au plan diamétral de la sphère perpendiculaire à la paroi.*

un fluide visqueux sous l'effet de son poids en restant parallèle à lui-même, quelle que soit son orientation. De même, deux sphères identiques proches l'une de l'autre tombent sans mouvement relatif dans un liquide. Notons bien que ces résultats ne sont valables *exactement* que dans la limite où le nombre de Reynolds est nul (et pas seulement petit devant l'unité) ; à nombre de Reynolds fini, même petit, les effets cumulatifs des non-linéarités dues aux termes convectifs peuvent finir par détruire la propriété de réversibilité et ses conséquences. Par ailleurs, il est nécessaire de pouvoir négliger dans l'équation de Stokes le terme d'accélération $\partial \mathbf{v}/\partial t$.

♦ Invariance des lignes de courant lors d'une variation du débit d'un écoulement à petit nombre de Reynolds

Ce résultat est encore une conséquence de la linéarité de l'équation de Stokes ; en effet, si $\mathbf{v}$ est une solution, $\lambda\mathbf{v}$ est encore solution (λ étant un nombre réel), à condition de changer du même facteur λ les vitesses des surfaces solides et à l'infini et les forces extérieures. La solution initiale $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ est alors simplement multipliée en tout point par le facteur λ dont on a fait varier la vitesse (la réversibilité est un cas particulier de celui-ci dans lequel $\lambda = -1$). La direction de la vitesse en tout point restant la même, le profil des lignes de courant qui lui sont tangentes reste inchangé, et seul le module de la vitesse varie. Ainsi, dans un écoulement à parois immobiles, on aura toujours la même forme du profil d'écoulement, quelle que soit la vitesse, tant que la condition de petit nombre de Reynolds reste vérifiée.

Additivité des solutions de l'équation de Stokes

Cette propriété est aussi une conséquence immédiate de la linéarité de l'équation de Stokes : en effet, si $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$ et $\mathbf{v}_2(x, y, z, t)$ sont deux solutions de l'équation, $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2$ est également une solution et le gradient de pression correspondant s'écrit : $\mathbf{grad}\, p = \lambda_1\, \mathbf{grad}\, p_1 + \lambda_2\, \mathbf{grad}\, p_2$. La vitesse sur les parois est une combinaison linéaire des vitesses pour les solutions (1) et (2) avec les mêmes coefficients λ_1 et λ_2. Comme il existe un seul champ de vitesse correspondant à des conditions aux limites données, c'est la solution $\lambda_1\, \mathbf{v}_1 + \lambda_2\, \mathbf{v}_2$ qui sera effectivement observée. On peut donc superposer linéairement les profils de vitesse correspondant à des écoulements différents dans des canaux de géométrie identique, à condition de combiner linéairement les valeurs des vitesses aux parois avec les mêmes coefficients.

Nous avons déjà rencontré cette propriété lors de l'étude de la superposition des écoulements de Couette et de Poiseuille (chapitre 4, section 4.5.3) et de celle de l'effet Marangoni (chapitre 4, section 4.8.3).

Minimum de dissipation

Pour des conditions aux limites données sur les parois et à l'infini, l'écoulement vérifiant l'équation de Stokes $\mathbf{grad}\, p = \eta\, \Delta\, \mathbf{v}$ correspond à un taux de dissipation d'énergie ε minimal avec, en utilisant pour ε l'expression

donnée au chapitre 5 (Éq. (5.26)) :

$$\varepsilon = \iiint \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V = \frac{\eta}{2} \iiint \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}V = 2\eta \iiint e_{ij}^2 \, \mathrm{d}V. \quad (8.13)$$

Démonstration Soit un tenseur du taux des déformations e_{ij} correspondant à un champ de vitesse $\mathbf{v}$ solution de l'équation de Stokes, et un tenseur e'_{ij} correspondant à un autre champ de vitesse $\mathbf{v}'$ vérifiant les mêmes conditions aux limites et la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$, mais qui ne soit pas solution de l'équation de Stokes. On peut écrire :

$$2\eta \iiint e_{ij}'^2 \, \mathrm{d}V = 2\eta \iiint e_{ij}'^2 \mathrm{d}V + 2\eta \iiint (e'_{ij} - e_{ij})^2 \mathrm{d}V + 4\eta \iiint (e'_{ij} - e_{ij}) \, e_{ij} \, \mathrm{d}V. \quad (8.14)$$

Nous allons démontrer que la dernière intégrale est nulle. En effet, elle peut s'écrire sous la forme :

$$\iiint (e'_{ij} - e_{ij}) \, e_{ij} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V + \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

(rapelons que la sommation est faite sur les indices répétés ; ce sont donc des indices muets que l'on peut permuter). Par intégration par parties de la première intégrale, on obtient :

$$I_1 = \iiint \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V = \iiint \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v'_i - v_i) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \mathrm{d}V - \iiint (v'_i - v_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \, \mathrm{d}V.$$

Le premier terme du second membre se transforme en intégrale de surface, dont l'intégrant est nul sur les parois. Le second terme peut s'écrire, compte tenu de l'équation de Stokes :

$$\iiint (v'_i - v_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{\eta} \iiint (v'_i - v_i) \frac{\partial p}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{\eta} \iiint \frac{\partial}{\partial x_i} [p(v'_i - v_i)] \, \mathrm{d}V - \frac{1}{\eta} \iiint p \, \frac{\partial (v'_i - v_i)}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V.$$

Le premier terme du second membre se transforme à nouveau en intégrale de surface, qui est nulle, car la vitesse s'annule sur les parois ; le second est également nul car $\operatorname{div} \mathbf{v}$ et $\operatorname{div} \mathbf{v}'$ sont nuls.

Calculons maintenant l'intégrale I_2. On peut l'écrire :

$$I_2 = \iiint \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V = \iiint \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v'_i - v_i) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \mathrm{d}V - \iiint (v'_i - v_i) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \, \mathrm{d}V.$$

Le premier terme du second membre se transforme à nouveau en intégrale de surface, qui est nulle car la vitesse s'annule sur les parois ; le second est également nul car div $\mathbf{v}$ est nul.

Ainsi, l'intégrale $\iiint (e'_{ij} - e_{ij}) e_{ij} \, \mathrm{d}V$ est nulle. Comme le second terme du membre de droite de l'équation (8.14) est positif, la dissipation associée au tenseur e'_{ij} est supérieure à celle associée au champ de vitesse solution de l'équation de Stokes.

La propriété de minimisation de l'énergie dissipée ne s'applique pas lorsque le nombre de Reynolds n'est plus petit : les solutions turbulentes de l'équation de Navier-Stokes dissipent une énergie plus grande que les solutions laminaires correspondant aux mêmes conditions imposées.

8.2.4 Prédictions dimensionnelles sur les écoulements à petit nombre de Reynolds

Nous avons vu au chapitre 4 (section 4.2.4) comment toute solution stationnaire de l'équation de Navier–Stokes peut être appliquée à des écoulements de géométries identiques, mais de vitesses et de tailles caractéristiques différentes en utilisant la forme réduite :

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = U \, \mathbf{F}\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L} Re\right) \tag{8.15a}$$

U et L représentent la vitesse et la taille caractéristiques de l'écoulement, Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement ($Re = \rho U L/\eta$) et $\mathbf{F}$ est une fonction vectorielle sans dimension (on suppose que la direction de l'écoulement reste la même). Lors des changements d'échelle, les conditions aux limites sur les parois doivent être modifiées dans les mêmes proportions. Dans le cas des écoulements à petit nombre de Reynolds, nous avons montré plus haut (section 8.2.3) que les profils de vitesse dans un canal donné restent inchangés à un coefficient multiplicatif près, lorsque le débit global de l'écoulement est modifié. De plus, on a unicité des solutions. La fonction $\mathbf{F}$ intervenant dans l'équation (8.15a) doit donc être indépendante du nombre de Reynolds, et le champ de vitesse d'un écoulement à petit nombre de Reynolds dans une géométrie donnée peut donc s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = U \, \mathbf{F}\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}\right) \cdot \tag{8.15b}$$

Une simplification de même type se retrouve dans la variation des forces exercées sur les parois ou les solides en mouvement. Les contraintes de viscosité correspondent toutes à des termes de la forme $\eta(\partial v_i/\partial x_j)$; elles sont donc proportionnelles au produit de $\eta U/L$ par des fonctions sans dimension des variables x/L, y/L et z/L. Les forces de frottement globales sont obtenues en intégrant ces contraintes sur toute la surface des parois, d'où un facteur L^2 supplémentaire, multiplié par un vecteur constant $\mathbf{A}$. On a ainsi la relation

dimensionnelle :

$$\text{force de frottement totale} \approx \mathbf{A}\left(\frac{\eta U}{L}\right) L^2 \approx \mathbf{A}\,(\eta U L). \tag{8.16}$$

On peut utiliser un raisonnement analogue pour les forces de pression dont le gradient vérifie l'équation de Stokes (8.5). En intégrant $\mathbf{grad}\,p$ à partir d'une zone de pression constante, puis en intégrant de nouveau l'ensemble des forces de pression sur les parois, on trouve une forme identique à (8.16) pour l'effet de la force de pression totale sur un obstacle. Donc, la force globale $\mathbf{F}$ sur les parois vérifie également :

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\,\eta U L \tag{8.17}$$

où $\mathbf{C}$ est un vecteur dépendant seulement de la direction ou de la géométrie de l'écoulement et des parois solides. Par convention, on normalise souvent cette force par $(1/2)\rho U^2 S$; $(1/2)\rho U^2$ est l'ordre de grandeur de la pression dynamique définie au chapitre 5 (section 5.3.2), et $S \approx L^2$ est une aire caractéristique des parois. Pour les écoulements à petit nombre de Reynolds, on obtient ainsi un *coefficient de frottement* :

$$\mathbf{C}_d \approx \frac{|F|}{\frac{1}{2}\rho U^2 L^2} \approx \frac{\eta}{\rho U L} \approx \frac{1}{Re}\,. \tag{8.18}$$

Cette proportionnalité du coefficient de frottement à l'inverse du nombre de Reynolds est caractéristique des écoulements à petit nombre de Reynolds. Nous avions déjà rencontré cette propriété dans le cas des écoulements laminaires étudiés au chapitre 4 (section 4.5), pour lesquels le transport de quantité de mouvement par convection est nul pour des raisons géométriques. Notons toutefois que cette dépendance en l'inverse du nombre de Reynolds est tout à fait artificielle et provient de la normalisation utilisée : en effet, celle-ci n'a de signification que pour les écoulements à grand nombre de Reynolds qui sont dominés par les effets d'inertie. En fait, le nombre de Reynolds n'intervient pas dans la friction due à la viscosité.

8.3 Forces et couples s'exerçant sur un solide en mouvement

Comme nous venons de le voir, une des conséquences de la linéarité de l'équation de Stokes est la proportionnalité entre les forces sur les parois solides et la vitesse caractéristique du fluide. Nous allons préciser cette propriété (section 8.3.1) et voir son application à deux exemples de solides de symétries différentes (section 8.3.2) : un bâtonnet et une hélice.

8.3.1 Linéarité des relations entre la vitesse d'un solide et les forces exercées

Tout déplacement d'un solide peut être décrit à un instant donné comme la combinaison d'une translation globale de vitesse $\mathbf{U}(t)$ et d'une rotation à la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}(t)$ (Fig. 8.6). La vitesse en tous points du solide s'écrit selon :

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r} \tag{8.19}$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur tracé à partir de l'origine des axes (un changement d'origine revient à changer $\mathbf{U}$).

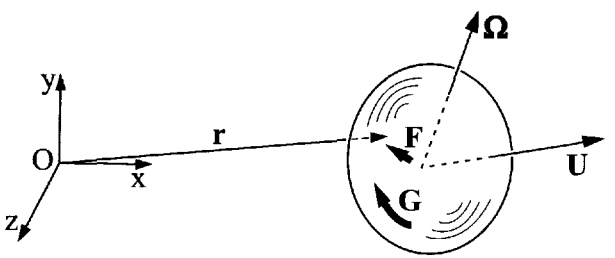


FIG. 8.6 – *Force et couple s'exerçant sur un objet en translation à vitesse* $\mathbf{U}$, *et en rotation à vitesse angulaire* $\mathbf{\Omega}$ *dans un fluide visqueux.*

Appelons F_i et G_i les composantes de la force et du couple exercés sur le solide (le couple est calculé par rapport à des axes passant par l'origine O des coordonnées). Ces composantes sont les intégrales des contraintes de viscosité et de pression locales sur la surface du solide. Elles vérifient donc les relations :

$$F_i = -\eta(A_{ij}\, U_j + B_{ij}\, \Omega_j) \tag{8.20}$$

$$G_i = -\eta(C_{ij}\, U_j + D_{ij}\, \Omega_j). \tag{8.21}$$

Les coefficients A_{ij} (respectivement D_{ij}) relient les forces (respectivement les couples) aux translations (respectivement rotations). Les coefficients B_{ij} et C_{ij} représentent au contraire respectivement des effets croisés de forces induites par une rotation et des couples créés par un mouvement de translation. Ainsi, une hélice tournant à faible vitesse autour de son axe dans un fluide très visqueux est soumise à une force parallèle à celui-ci : cet effet de type « tire-bouchon » sera étudié plus bas (section 8.3.2). Cette force est due à l'absence de plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation.

Remarquons que les équations (8.20) et (8.21) peuvent être obtenues en combinant linéairement avec les mêmes coefficients deux champs de vitesse solutions de l'équation de Stokes et les champs de pression correspondants (à condition de combiner de la même façon les conditions aux limites de vitesse

sur les parois). Notons enfin que les coefficients A_{ij} sont homogènes à une longueur, B_{ij} et C_{ij} à une surface et D_{ij} à un volume.

Les tenseurs A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} et D_{ij} qui apparaissent dans les relations (8.20) et (8.21), ont des propriétés de symétrie très générales indépendantes de la forme du corps. Ces propriétés de symétrie peuvent être démontrées en utilisant le fait que le tenseur des contraintes, σ_{ij}, est symétrique. Elles se traduisent par les relations :

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{8.22}$$

$$D_{ij} = D_{ji} \tag{8.23}$$

$$B_{ij} = C_{ji}. \tag{8.24}$$

L'égalité des tenseurs B_{ij} et C_{ji} rend compte de la relation réciproque entre la force sur une particule en rotation et le couple sur une particule en translation.

La matrice A_{ij} reliant F_i et U_j étant symétrique, elle peut être diagonalisée. Il existe donc, quelle que soit la forme du corps, un système d'axes orthogonaux de coordonnées dans lequel chaque composante de la force est proportionnelle à la composante correspondante de la vitesse de déplacement :

$$F_i = -\eta\, \lambda_i\, U_i \tag{8.25}$$

(contrairement à nos notations habituelles, il n'y a pas de sommation sur l'indice répété i). Le produit scalaire $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}$ représente la dissipation d'énergie par viscosité. Il doit donc être négatif quel que soit $\mathbf{U}$: cela implique que les trois valeurs propres λ_i sont positives. D'un point de vue géométrique, la condition $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} < 0$ signifie que l'angle entre la force $\mathbf{F}$ et la direction du mouvement doit toujours être obtus.

Pour des corps possédant des éléments de symétrie particuliers (plans ou axes), des relations supplémentaires apparaissent entre les coefficients A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} et D_{ij}, comme nous allons le voir à travers trois exemples.

8.3.2 Influence des propriétés de symétrie des solides sur les forces et les couples appliqués

Relations entre les coefficients des tenseurs pour un solide ayant un plan de symétrie

Pour un solide ayant un plan de symétrie $x_1 = 0$, les coefficients A_{ij} vérifient :

$$A_{12} = A_{21} = A_{13} = A_{31} = 0. \tag{8.26}$$

Physiquement, cela signifie par exemple que la force correspondant à un mouvement perpendiculaire à un plan de symétrie sera elle-même perpendiculaire à ce plan. Réciproquement, un corps ayant un plan de

symétrie horizontal qui tombe sous l'effet de son poids dans un fluide visqueux n'aura pas de composante de vitesse horizontale. Par ailleurs :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{32} = C_{23} = 0 \tag{8.27}$$

et

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{32} = B_{23} = 0. \tag{8.28}$$

On n'a donc d'effet tire-bouchon (apparition d'une force parallèle à l'axe de rotation x_1 d'un solide) que si le plan perpendiculaire à l'axe de rotation n'est pas un plan de symétrie du corps. Enfin :

$$D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = 0. \tag{8.29}$$

Démonstration Soit un système de coordonnées, où deux axes (x_2 et x_3) sont contenus dans le plan de symétrie $x_1 = 0$; les coefficients A_{ij} restent inchangés par l'opération $x_1 \to -x_1$. Dans cette même opération, F_1 est transformé en $F_1' = -F_1$ et U_1 en $-U_1$, tandis que les autres composantes restent inchangées. La relation (8.20) pour les composantes F_1 et F_1' s'écrit ici :

$$F_1 = -\eta(A_{11}U_1 + A_{12}U_2 + A_{13}U_3) \quad \text{et} \quad F_1' = -\eta(A_{11}(-U_1) + A_{12}U_2 + A_{13}U_3).$$

Ces deux expressions devant avoir des valeurs opposées ($F_1' = -F_1$), on en déduit :

$$A_{12} = A_{13} = 0.$$

En utilisant les autres composantes de $\mathbf{F}$, on justifie de même que les coefficients A_{21} et A_{31} sont nuls. Pour le tenseur D_{ij} reliant le couple $\mathbf{G}$ au vecteur rotation Ω, on retrouve les mêmes composantes nulles que pour A_{ij}, car ces deux pseudo-vecteurs ont les mêmes propriétés de symétrie. Les résultats sont différents pour les coefficients C_{ij} reliant les composantes G_j du couple à celles de la vitesse. En effet, $\mathbf{G}$ est un pseudo-vecteur de même symétrie qu'un vecteur rotation : il ne change donc pas de sens lors d'une symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à lui-même, mais il s'inverse pour un plan parallèle à sa direction. Lorsque x_1 est changé en $-x_1$, G_1 est changé en G_1, G_2 en $-G_2$ et G_3 en $-G_3$. En raisonnant comme précédemment, on trouve les relations (8.27) et (8.28).

Corps à trois plans de symétrie perpendiculaires

Lorsque le corps a trois plans de symétrie perpendiculaires (par exemple ellipsoïdes, parallélépipèdes, ...), tous les coefficients C_{ij} et B_{ij} sont nuls quel que soit le système de coordonnées d'après les relations (8.27 et 8.28). On a découplage complet entre les mouvements de translation et de rotation ; seul un couple peut induire une rotation de l'objet (seulement si le couple est calculé par rapport à des axes de rotation passant par l'intersection des plans de symétrie).

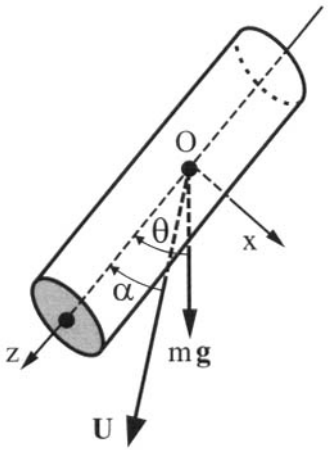


FIG. 8.7 – *Chute oblique d'un bâtonnet cylindrique dans un fluide visqueux.*

De même, d'après la relation (8.26), la matrice A_{ij} est diagonale lorsqu'on choisit des axes de coordonnées perpendiculaires aux plans de symétrie du solide.

(i) *Chute d'un bâtonnet cylindrique de section circulaire dans un fluide visqueux.*

Ce corps possède trois axes de symétrie perpendiculaire entre eux. Un d'entre eux est un axe de révolution (supposé orienté suivant la direction Oz). Non seulement le corps tombera sans tourner dans un fluide visqueux, mais son mouvement est déterminé par seulement deux coefficients qui caractérisent la force de frottement avec le fluide parallèlement et perpendiculairement à l'axe ($A_{zz} = \lambda_{\|}$ et $A_{xx} = A_{yy} = \lambda_{\perp}$ par exemple). En connaissant le rapport entre les deux coefficients $\lambda_{\|}$ et $\lambda_{\perp}$, il est possible de déterminer l'angle de chute par rapport à la verticale en fonction de l'inclinaison du bâtonnet.

Démonstration Soit un bâtonnet allongé à section circulaire avec un centre de symétrie O (Fig. 8.7). Appelons Oz l'axe de révolution du corps, et Ox l'axe perpendiculaire contenu dans le plan de symétrie vertical. Si le corps est homogène, la force de gravité s'exerce au centre de symétrie, et aucun couple ne s'exerce pour le mettre en rotation. Dans ce système de coordonnées :

$$F_z = -\eta\,\lambda_{\|}\,U_z, \quad F_x = -\eta\,\lambda_{\perp}\,U_x, \quad F_y = -\eta\,\lambda_{\perp}\,U_y. \tag{8.30}$$

Comme nous l'indiquerons plus bas (section 8.4.3), on peut montrer (par des calculs valables dans la limite de solides de très grand allongement) que $\lambda_{\perp} = 2\,\lambda_{\|}$ (Éqs. (8.71a et b) : la résistance au mouvement parallèlement à l'axe du bâtonnet est deux fois plus petite que perpendiculairement. Appelons α l'angle de la trajectoire avec l'axe du bâtonnet et θ l'inclinaison de celui-ci par rapport à la verticale. Lorsque le bâtonnet est en mouvement à vitesse constante, on peut écrire :

$$F_z = -mg\cos\theta = -\eta\,\lambda_{\|}U_z$$

où m représente la masse du bâtonnet diminuée de la contribution due à la poussée d'Archimède.

$$F_x = -mg\sin\theta = -\eta\,\lambda_\perp U_x = -2\eta\,\lambda_\parallel U_x. \tag{8.31}$$

D'où : $\tan\alpha = U_x/U_z = \tan\theta/2$.

L'angle de déviation $\theta - \alpha$ de la trajectoire par rapport à la verticale vérifie donc :

$$\tan(\theta-\alpha) = \frac{\tan\theta\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}\tan^2\theta} = \frac{\tan\theta}{(2+\tan^2\theta)}\cdot \tag{8.32}$$

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$, le corps tombe verticalement ; on retrouve les deux cas particuliers pour lesquels la force appliquée (le poids du bâtonnet) est perpendiculaire à un plan de symétrie du solide. Le maximum de l'angle de chute $(\theta - \alpha)$, obtenu pour $\tan\theta = \sqrt{2}$, vérifie donc $\tan(\theta-\alpha) = 1/(2\sqrt{2})$ et vaut donc : $\theta - \alpha \approx 19,5°$.

(ii) *Cas d'un cube ou d'une sphère*

Dans le cas du cube, les plans parallèles aux faces passant par le centre de symétrie sont des plans de symétrie perpendiculaires, et le tenseur A_{ij} est diagonal dans le système d'axes correspondant. Comme ces plans sont équivalents, les trois valeurs propres associées sont donc égales, et on peut écrire :

$$[\mathbf{A}] = \lambda\,[\mathbf{I}] \tag{8.33}$$

où $[\mathbf{I}]$ est la matrice identité. Donc, pour un mouvement de translation pure, la force de frottement est colinéaire à la vitesse, quelle que soit l'orientation et la relation (8.17) devient :

$$\mathbf{F} = -\eta\,CL\mathbf{U} \tag{8.34}$$

où L est une dimension caractéristique du solide et C une constante. La force $\mathbf{F}$ s'applique au centre de symétrie du corps. Ce résultat est valable pour une sphère de rayon $R(= L)$, avec $C = 6\pi$ (nous le démontrerons à la section 8.4.2). Par ailleurs, cette force étant appliquée au centre de symétrie du solide, elle n'induit aucune rotation. Ainsi, un corps homogène à symétrie sphérique, comme un cube ou un tétraèdre régulier, tombera toujours verticalement sans tourner dans un fluide visqueux à petit nombre de Reynolds, quelle que soit l'orientation initiale de ses faces par rapport à la verticale. Nous évaluerons ultérieurement (à la fin de la section 8.4.3) la force de frottement dans ce cas.

Pour un mouvement de rotation pure, le tenseur D_{ij} reliant le couple au vecteur rotation est également proportionnel à $[I]$ (si l'axe de rotation passe par le centre de symétrie). Donc :

$$G = -\eta\,L^3 D\Omega. \tag{8.35}$$

Dans le cas d'une sphère de rayon $R = L$, on montre qu'on a $D = 8\pi$.

Couplage translation-rotation pour un corps sans plan de symétrie

Dans ce cas, une partie des coefficients que nous avons précédemment considérés comme nuls peuvent jouer un rôle important. Analysons par exemple le mouvement d'un corps dont la symétrie est celle d'une hélice d'axe Ox (Fig. 8.8). Le plan yOz n'étant pas un plan de symétrie, les coefficients B_{xx} et C_{xx} sont non nuls. Une rotation de l'hélice à vitesse angulaire Ω_x induit donc, d'après la relation (8.20), une force propulsive $B_{xx}\,\Omega_x$ parallèle à l'axe de rotation Ox, et de sens opposé pour des hélices droites ou gauches.

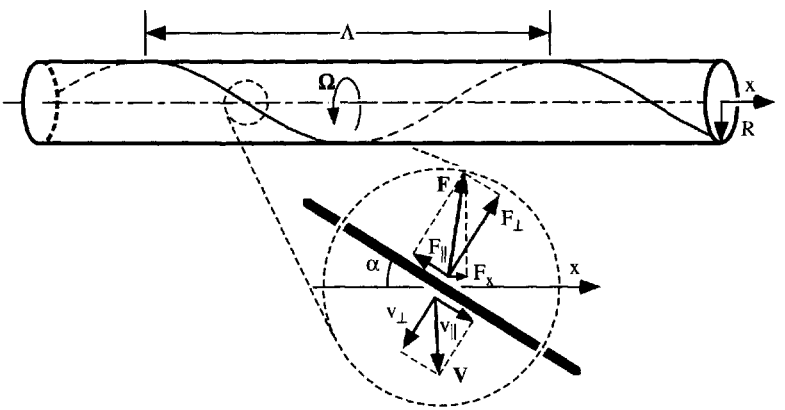


FIG. 8.8 – *Mouvement d'une hélice « se vissant » dans un fluide visqueux.*

Nous allons retrouver ce résultat par une analyse des forces locales s'exerçant sur un élément de longueur d'hélice et en l'assimilant à un bâtonnet rectiligne qui se déplace avec une composante de vitesse azimutale (ΩR) autour de l'axe de rotation. Nous supposerons le pas Λ de l'hélice grand devant le rayon R ; localement, les éléments de longueur font donc un angle faible $\alpha \approx 2\pi R/\Lambda$ avec l'axe Ox. Les composantes de vitesse $V_\parallel(\approx \Omega\alpha R = 2\pi\Omega R^2/\Lambda)$ et $V_\perp(\approx \Omega R)$, respectivement parallèle et perpendiculaire au bâtonnet, induisent des composantes des forces correspondantes $F_\parallel$ et $F_\perp$. Ces composantes, écrites par unité de longueur, ont pour expression :

$$F_\parallel = -\eta\,\lambda_\parallel\,V_\parallel = -2\,\pi\,\lambda_\parallel\,\eta\,\Omega\left(\frac{R^2}{\Lambda}\right)$$

$$F_\perp = -\eta\,\lambda_\perp\,V_\perp = -2\lambda_\parallel\eta\,\Omega\,R.$$

Ces forces peuvent, à leur tour, être décomposées en une composante parallèle à Ox et une composante orthoradiale.

Les deux projections de $F_\parallel$ et $F_\perp$ sur Ox sont de sens contraire, comme on le voit sur l'encarté de la figure 8.8. Si on les projette sur l'axe Ox en tenant compte de la faible valeur de l'angle $\alpha = 2\pi R/\Lambda$, on trouve qu'elles ont une résultante non

nulle de valeur absolue :

$$F_x = |\,\alpha F_\perp - F_\parallel\,| = 2\,\pi\,\lambda_\parallel\,\eta\,\Omega\frac{R^2}{\Lambda}$$

par unité de longueur de l'hélice. L'orientation des deux composantes s'inverse quand on change le sens de rotation, ou celui de l'hélice, il en sera donc de même pour la force F_x. Cette composante a la même valeur pour tous les éléments de l'hélice ; on aura donc globalement une force motrice résultante parallèle à l'axe Ox et proportionnelle à la vitesse et à la viscosité. Le coefficient de couplage B_{xx} entre la vitesse de rotation Ω et la force motrice s'écrit donc par unité de longueur d'hélice :

$$B_{xx} = \frac{2\,\pi\,\lambda_\parallel\,\eta\,R^2}{\Lambda}.$$

L'orientation des composantes orthoradiales de $F_\parallel$ et $F_\perp$ varie continûment le long de l'hélice ; elles ont donc une résultante nulle, et elles contribueront seulement à un couple résistant d'expression :

$$G_x = (F_\perp\,\cos\,\alpha + F_\parallel\,\sin\,\alpha)\,R \approx -2\,\lambda_\parallel\,\eta\,\Omega R^2.$$

La distance du point d'application de ces composantes à l'axe de rotation est en effet R. Le coefficient de couplage D_{xx} entre la vitesse de rotation et le couple de freinage s'écrit donc :

$$D_{xx} = 2\,\lambda_\parallel\,\eta R^2.$$

Ces résultats permettent d'expliquer le mouvement de certaines bactéries qui se propulsent en tournant leur queue (flagelle) autour d'une articulation située à l'extrémité de leur corps. Ce mode de propulsion est tout à fait différent de l'utilisation d'hélices sur un navire. Dans ce dernier cas, qui correspond à un écoulement à grand nombre de Reynolds, l'effet de propulsion est dû à la circulation de la vitesse du fluide autour des pales de l'hélice : celle-ci fait apparaître une force de Magnus perpendiculaire à la vitesse de la pale qui est analogue à la portance des ailes d'avion, comme nous l'avons vu aux sections 6.3.1 et 6.6.3 du chapitre 6. Il en résulte une force propulsive globale proportionnelle au carré de la vitesse de rotation : l'efficacité d'une telle hélice classique à petit nombre de Reynolds est bien moindre que lorsque cet effet de portance est présent. De même, une hélice ayant la forme d'un simple tire-bouchon serait tout à fait inefficace à nombre de Reynolds élevé.

8.4 Mouvement d'une sphère à vitesse constante dans un fluide visqueux

8.4.1 Champ de vitesse autour d'une sphère en mouvement

On suppose le fluide au repos à l'infini et on exprime le champ de vitesse en coordonnées sphériques $(r,\,\varphi,\,\theta)$ dans un repère au sein duquel le fluide loin

de la sphère est au repos et est tel que son origine O coïncide à chaque instant avec le centre de la sphère. L'axe Ox ($\varphi = 0$) coïncide avec la direction de la vitesse $\mathbf{U}$ de la sphère de rayon R (Fig. 8.9a). Par suite de l'invariance du problème par rotation autour de l'axe Ox, le champ de vitesse est de révolution autour cet axe avec une composante v_θ qui est nulle et des composantes v_r et v_φ indépendantes de θ. Après des calculs dont le détail est donné plus loin,

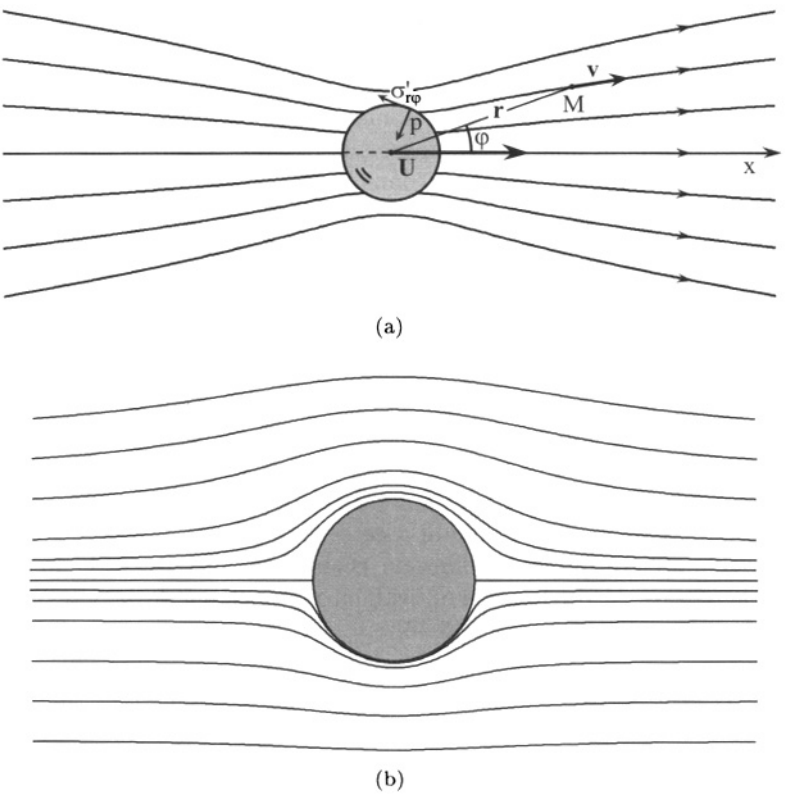


FIG. 8.9 – *(a) Lignes de courant de l'écoulement autour d'une sphère se déplaçant à une vitesse constante* $\mathbf{U}$ *dans un fluide au repos. On a aussi indiqué les composantes des contraintes normale et tangentielle qui s'exercent sur un point de la surface de la sphère ; (b) la moitié supérieure de la figure représente les lignes de courant de l'écoulement autour d'une sphère placée dans un fluide en écoulement à une vitesse* $\mathbf{U}$ *loin de la sphère et à petit nombre de Reynolds. La moitié inférieure représente pour comparaison les lignes de courant dans le cas de l'écoulement potentiel autour de la sphère, étudié au chapitre 6 (section 6.2.4).*

on trouve pour les deux composantes v_r et v_φ :

$$v_r = U \cos\varphi \left(\frac{3R}{2r} - \frac{R^3}{2r^3} \right) \tag{8.36a}$$

$$v_\varphi = -U \sin\varphi \left(\frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right) \cdot \tag{8.36b}$$

On vérifie que la vitesse du fluide s'annule bien à l'infini, et devient égale à celle de la sphère à la surface de celle-ci ($r = R$). Cette solution est valable seulement si le nombre de Reynolds est très petit devant l'unité, et si la vitesse U de la sphère est constante.

Le point le plus remarquable de ce résultat est la lente décroissance en $1/r$ de la vitesse de l'écoulement à petit nombre de Reynolds avec la distance r à la sphère. Ce résultat doit être comparé à la décroissance plus rapide en $1/r^3$ pour la vitesse autour d'une sphère, dans le problème d'écoulement potentiel étudié au chapitre 6 (section 6.2.4).

Cette décroissance lente de la perturbation de vitesse est due à la faible efficacité de la diffusion pour transporter loin du corps la quantité de mouvement communiquée au fluide par les forces de frottement visqueux. Nous pouvons retrouver cette variation en $1/r$ par un raisonnement physique simple. Supposons que la vitesse décroisse en $r^{-\alpha}$ loin de la sphère ; le flux de quantité de mouvement associé à la diffusion s'exprime par des gradients des composantes de vitesse et varie en $r^{-\alpha/1}$. L'intégrale de ce flux sur une sphère de rayon r varie en $r^{+\alpha+1}$ et doit être une constante indépendante de r, de l'ordre de la force de frottement totale sur le corps. On retrouve bien $\alpha = 1$, correspondant à un champ de vitesse en $1/r$.

Pour une sphère immobile dans un écoulement de vitesse **U** loin de la sphère, la vitesse **V** du fluide s'obtient en retranchant de la vitesse **U**, la vitesse donnée par les équations (8.36) :

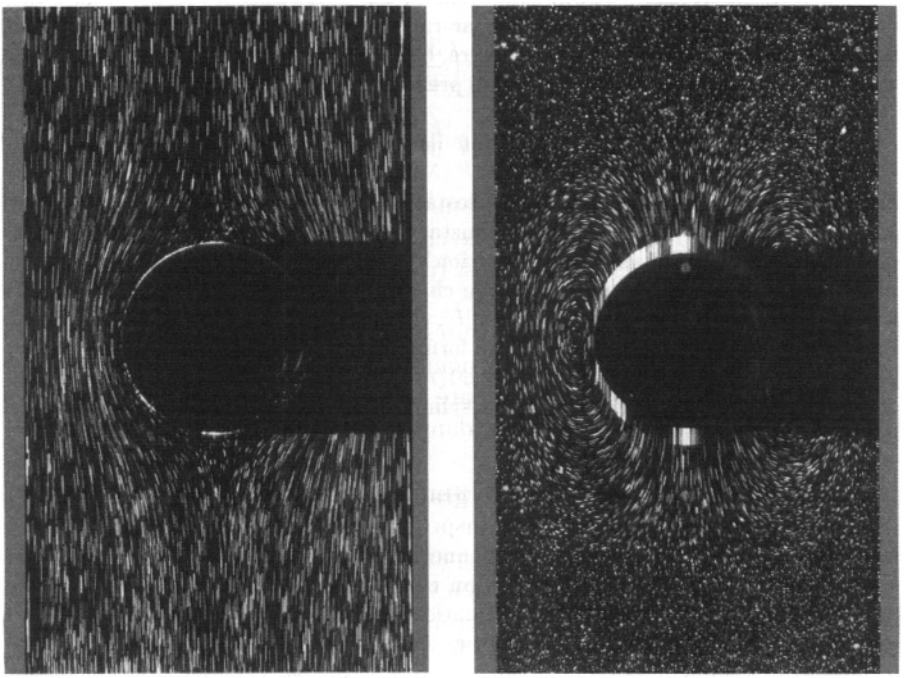
$$V_r = (U\cos\varphi) - v_r = +U\cos\varphi \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \tag{8.37a}$$

$$V_\varphi = (-U\sin\varphi) - v_\varphi = -U\sin\varphi \left(1 + \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right) \cdot \tag{8.37b}$$

Dans ce référentiel où la sphère est au repos, les lignes de courant retournent beaucoup plus lentement à une configuration de vitesse uniforme lorsqu'on s'éloigne de la sphère (Fig. 8.9b, moitié supérieure) que pour un écoulement potentiel (Fig. 8.9b, moitié inférieure).

Remarque Sur les figures 8.10a et b plus bas, on peut également comparer les lignes de courant créées par le mouvement d'une sphère dans un fluide visqueux dans le référentiel de la sphère et dans celui du fluide à grande distance. Ces figures ne correspondent pas à un déplacement dans un fluide infini, mais dans un tube coaxial avec la sphère, ce qui influence fortement le champ de vitesse.

Nous allons faire une démonstration, par étapes, du calcul qui conduit au champ de vitesse donné par les équations (8.36). Cette démonstration est



(a) (b)

FIG. 8.10 – *Visualisation de l'écoulement induit par la chute d'une sphère le long de l'axe d'un tube cylindrique vertical rempli de glycérol, et de diamètre 163 mm double de celui de la sphère. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est* $Re = 0,1$. *Les lignes de courant sont rendues visibles par de petites particules de magnésium éclairées par un fin plan de lumière (l'éclairage est réalisé par le côté gauche de la figure, et la partie sombre de la photographie correspond à l'ombre de la sphère) ; (a) l'appareil photo se déplace de manière à être fixe par rapport à la sphère ; (b) l'appareil est fixe par rapport au tube. Durant le temps d'exposition, la sphère s'est déplacée d'une petite fraction de son diamètre (documents M. Coutanceau).*

basée sur une détermination intuitive initiale d'une fonction d'essai pour la distribution de pression autour de la sphère ; à partir de celle-ci, on calcule ensuite un champ de vitesse qui vérifie les conditions aux limites imposées, puis les valeurs des paramètres inconnus de la fonction d'essai. D'après le théorème d'unicité, on obtient alors le champ de vitesse cherché.

Détermination du champ de pression

Le champ de pression $p(r)$ vérifie $\Delta p = 0$ (formule (8.9)) et est, par suite, une fonction harmonique. On peut donc développer $p(r)$ dans un système de

coordonnées sphériques (r, φ, θ) sous forme d'une combinaison linéaire d'un terme en $1/r$ et de ses dérivées successives par rapport aux coordonnées ; celles-ci sont solutions de l'équation de Laplace scalaire, et correspondent au champ créé par une charge, un dipôle, un quadrupôle, ... Les premiers termes de ce développement sont :

$$\phi_0 \propto \frac{A}{r}, \quad \boldsymbol{\phi}_1 \propto \mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r}{r^3} \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{\phi}_2] \quad \text{tel que} \quad \phi_{2ij} \propto \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{x_i\, x_j}{r^5}\right).$$

Si on néglige le terme de pression hydrostatique et qu'on suppose que p est nulle à l'infini, il n'apparaît pas de terme constant ou contenant une puissance positive de r dans $p(r)$. Utilisons comme fonction d'essai la plus simple de ces fonctions respectant la symétrie du problème. Le champ de pression doit se mettre sous la forme ϕU puisque p est proportionnel à U, comme nous l'avons vu plus haut (2.4). La seule composante compatible avec la forme scalaire de p est la composante de $\boldsymbol{\phi}_1$ parallèle à $\mathbf{U}$, soit $(\partial/\partial x)(1/r) = -(\cos\varphi)/r^2$ (en effet, les termes en $(\sin\varphi\cos\theta)/r^2$ et $(\sin\varphi\sin\theta)/r^2$ ne respectent pas la symétrie de révolution autour de l'axe Ox parallèle à $\mathbf{U}$). On peut donc écrire :

$$p = C\,\eta\, U\,\frac{\cos\varphi}{r^2} = -C\,\eta\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -C\,\eta\,\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right). \tag{8.38}$$

Les forces exercées sont donc proportionnelles à la vitesse et à la viscosité. Nous allons maintenant examiner s'il existe un champ de vitesse correspondant à cette distribution de pression, et vérifiant l'équation de Stokes et les conditions aux limites sur les parois de la sphère. Si ce n'était pas le cas, il faudrait introduire dans $p(r)$ les termes du développement d'ordre supérieur (ce serait par exemple nécessaire pour un corps de forme plus complexe qu'une sphère).

Champ de vorticité correspondant à la répartition de pression

On part de la forme (8.8) de l'équation de Stokes. En utilisant le résultat (8.38), elle devient :

$$-C\,\eta\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{U}/r) = -\eta\,C\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,(\mathbf{U}/r) - C\,\eta\,\Delta\,(\mathbf{U}/r) = -\eta\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}. \tag{8.39}$$

Or, on a :

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) = \mathbf{U}\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \tag{8.40}$$

donc :

$$\boldsymbol{\omega} = C\,\mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) + \mathbf{grad}\,g\,(\mathbf{r}) \tag{8.41}$$

où $g(r)$ est une fonction de Laplacien nul, comme on le voit en prenant la divergence de la relation (8.41). Or, seule la composante ω_θ est non nulle, car $v_\theta = 0$, et $\mathbf{v}$ est indépendant de θ. La fonction inconnue $g(r)$ doit donc être de la forme $\alpha\,\theta + \beta$ où α et β sont des constantes. Mais $\boldsymbol{\omega}$ est indépendant de θ car $\mathbf{v}$ l'est aussi ; la constante α est donc nulle. De plus, comme g intervient uniquement par son gradient, on peut prendre $\beta = 0$. Ainsi, la fonction g est identiquement nulle. En utilisant l'identité : $\mathbf{rot}\,(m\mathbf{A}) = m\mathbf{rot}\,\mathbf{A} + (\mathbf{grad}\,m) \wedge \mathbf{A}$, on en déduit :

$$\omega = C\mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) = -C\mathbf{U} \wedge \mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{8.42}$$

Soit :

$$\omega_\theta = CU\,\frac{\sin\varphi}{r^2}\,. \tag{8.43}$$

Calcul de la fonction de courant Ψ à partir du champ de vorticité

Introduisons maintenant la fonction de courant de Stokes Ψ (formules (3.22)), telle que :

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \tag{8.44}$$

et :

$$v_\varphi = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\,. \tag{8.45}$$

On a alors :

$$\omega_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right) = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)\,. \tag{8.46}$$

En reportant (8.46) dans (8.43), on obtient :

$$-\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right) = CU\,\frac{\sin\varphi}{r^2}\,. \tag{8.47}$$

On peut séparer les variables en posant $\Psi = (\sin^2\varphi)f(r)$. Ce choix se justifie car l'axe Ox doit être une ligne de courant. L'équation (8.47) devient alors, après avoir simplifié par $\sin\varphi$:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2f}{r^3} = \frac{CU}{r^2} \tag{8.48}$$

$CU\dfrac{r}{2}$ est une solution particulière, et les solutions générales de l'équation sans second membre sont L'/r et $(M'r^2)$ où L' et M' sont des constantes. D'où en posant $L = L'/U$ et $M = M'/U$:

$$\Psi = U\sin^2\varphi\left(\frac{L}{r} + Mr^2 + \frac{Cr}{2}\right)\,. \tag{8.49}$$

Calcul du champ de vitesse

Les composantes du champ de vitesse peuvent maintenant être calculées à partir des relations (8.44) et (8.45) :

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = U\cos\varphi\left(\frac{C}{r} + \frac{2L}{r^3} + 2M\right) \tag{8.50a}$$

$$v_\varphi = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -U\sin\varphi\left(\frac{C}{2r} - \frac{L}{r^3} + 2M\right)\,. \tag{8.50b}$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites :

- pour $r \to \infty$, $v \to 0$, donc $M = 0$;
- pour $r = R$, on doit avoir : $v_r = U$ pour $\varphi = 0$, et $v_\varphi = -U$ pour $\varphi = \pi/2$.

Donc : $C = \dfrac{3R}{2}$ et $L = -\dfrac{R^3}{4}$.

On obtient donc bien le champ de vitesse donné par les équations (8.36), ainsi que les expressions des champs de pression et de vorticité suivants ($\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire le long du rayon vecteur OM) :

$$p = \frac{3}{2}\eta U R \frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{3}{2}\eta R \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{r^2} \tag{8.51}$$

et

$$\omega_\theta = \frac{3}{2} U R \frac{\sin\varphi}{r^2} = \frac{3}{2} R \frac{(\mathbf{U}\wedge\mathbf{n})_\theta}{r^2}\,. \tag{8.52}$$

8.4.2 Force exercée sur une sphère en mouvement dans un fluide – Coefficient de traînée

Cas d'un milieu infini

La contrainte normale à la surface de la sphère s'écrit :

$$\sigma_{rr} = \left[-p + 2\eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\right]_{r=R} = \frac{3}{2}\frac{\eta U\cos\varphi}{R}\,. \tag{8.53a}$$

Soulignons que la contribution due au gradient de vitesse s'annule à la surface de la sphère. L'effet de cette contrainte normale est maximal sur l'axe Ox.

Remarque Si on tient compte de l'effet de la pesanteur, il convient d'ajouter à la contribution de la pression celle due au terme en $\rho g z$. Après intégration sur la surface de la sphère, ce terme conduit à la poussée d'Archimède ($\rho_{\text{fluide}}\, V_{\text{sphère}}\, \mathbf{g}$).

Par ailleurs, il existe une contrainte tangentielle due à la viscosité, dont l'expression est donnée à l'annexe A-2 du chapitre 4 :

$$\sigma_{r\varphi} = \eta\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\right]_{r=R} = \frac{3}{2}\frac{\eta U\sin\varphi}{R}\,. \tag{8.53b}$$

Elle est maximale à angle droit de l'axe Ox. Tous les autres termes du tenseur des contraintes sont nuls ; la force résultante par unité de surface en tout point de la sphère s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{dS} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \sigma_{rr}\,\mathbf{e_r} + \sigma_{r\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}S} = -\frac{3}{2}\frac{\eta U\cos\varphi}{R}\,\mathbf{e_r} + \frac{3}{2}\frac{\eta U\sin\varphi}{R}\,\mathbf{e}_\varphi = -\frac{3}{2}\frac{\eta\mathbf{U}}{R}\,. \tag{8.54}$$

Elle est opposée à **U** car les composantes radiale et orthoradiale de **U** sont précisément $(U\cos\varphi)$ et $(-U\sin\varphi)$ respectivement. On en déduit la force de traînée totale :

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} 4\,\pi\,R^2 = -6\pi\,\eta\,R\mathbf{U}. \tag{8.55}$$

Expérimentalement, on trouve que cette formule, dite *formule de Stokes*, est bien vérifiée jusqu'à un nombre de Reynolds de l'ordre de l'unité (alors qu'elle a été établie sous l'hypothèse plus restrictive $Re \ll 1$). Par ailleurs, la force **F** de traînée a bien la forme dimensionnelle que nous avions trouvée plus haut (section 8.2.4) (Éq. (8.17)).

Application à la détermination de la vitesse limite de chute d'une bille dans un fluide visqueux à petit nombre de Reynolds

Une bille de rayon R et de densité ρ_s tombe dans un fluide s'étendant à l'infini, de densité ρ_f et de viscosité η avec une vitesse terminale qui correspond à un équilibre entre le poids, diminué de la poussée d'Archimède, et la force de friction visqueuse exercée par le fluide (force de Stokes) ; cette vitesse s'écrit :

$$V_{\text{terminale}} = \frac{2}{9}\,\frac{(\rho_s - \rho_f)\,g\,R^2}{\eta}\,. \tag{8.56}$$

Pour une bille de verre ($\rho_s = 2,5\,10^3$ kg/m^3) de 1 mm de diamètre, tombant dans de la glycérine ($\rho_f = 10^3$ kg/m^3, $\eta \approx 1$ Pa.s), on obtient $V_{\text{terminale}} \approx 10^{-3}$ m/s ; si nous calculons le nombre de Reynolds correspondant à cet écoulement, nous trouvons $Re = 10^{-3}$. La condition de petit nombre de Reynolds est donc bien vérifiée.

Cette relation entre la vitesse de chute d'une bille et la viscosité du fluide est utilisé dans des viscosimètres ; ils utilisent la mesure du temps de chute d'une bille calibrée, sur une distance connue. En pratique, on utilise la chute de billes dans des tubes verticaux dont le diamètre n'est pas grand devant celui de la bille (voir Fig. 8.10). Il en résulte, comme nous venons de le voir, un facteur de correction important sur la force de friction. La viscosité est déterminée en utilisant un étalonnage avec des liquides de viscosité connue.

Le *coefficient de traînée* défini au paragraphe 2.4 peut être calculé à partir de la force de Stokes, sous la forme :

$$C_d = \frac{F}{(\pi\,R^2)\frac{1}{2}\,\rho\,U^2} = \frac{24}{Re} \tag{8.57}$$

avec $Re = \rho\,U(2R)/\eta$. Ce coefficient de traînée a bien le type de variation en $(1/Re)$ prévu dimensionnellement à la section 8.2.4. C'est également la même forme que celle obtenue au chapitre 2 pour l'écoulement de Poiseuille. De plus, le calcul complet nous a permis de déterminer le coefficient de proportionnalité.

Remarque Nous voyons ainsi que le calcul complet de la force exercée par un écoulement à petit nombre de Reynolds autour d'une sphère (problème pourtant très simple par ses symétries) est beaucoup plus complexe que la détermination de

sa forme dimensionnelle. Cela souligne toute l'importance, en mécanique des fluides, de la recherche de solutions approchées qui dégagent les mécanismes fondamentaux et conduisent à des expressions en termes de nombres sans dimension comme la relation (8.17). La détermination des préfacteurs corrects, qui dépendent des effets de forme, ne pourra souvent se faire, en pratique, que par des approches numériques ou des séries d'essais expérimentaux.

Influence de parois

La présence de parois planes ou cylindriques, placées parallèlement ou perpendiculairement au mouvement d'une sphère qui sédimente, augmente les effets de la friction. Il faut souligner la grande sensibilité de la force de Stokes à ces obstacles. À titre d'exemple, pour une sphère placée dans un tube de rayon dix fois celui de la sphère, l'augmentation de la force est de 20 %. Cette augmentation résulte pour l'essentiel de l'influence de la paroi du tube, ainsi que, dans une moindre mesure, du contre-écoulement vers le haut du liquide déplacé par la sphère en mouvement, qui contribue aussi au freinage (ce dernier effet est lié au rapport de la surface de la particule projetée parallèlement à la direction de son mouvement, à celle du tube, donc proportionnel au *carré* du rapport du rayon de la particule à celui du tube, alors que le premier effet est proportionnel à ce rapport). Les figures 8.10a & b, montrent l'écoulement autour d'une sphère en mouvement le long de l'axe d'un tube cylindrique dans un référentiel respectivement fixe par rapport à la sphère (Fig. 8.10a), et fixe par rapport au tube (Fig. 8.10b). Sur cette seconde vue, on remarque nettement l'existence d'une recirculation due à un écoulement ascendant à proximité des parois du tube (contre-écoulement) opposé au mouvement descendant de la sphère (et du fluide proche de celle-ci). Dans les deux cas, les lignes de courant sont symétriques par rapport au plan diamétral horizontal de la sphère, ce qui ne serait plus le cas à un plus grand nombre de Reynolds.

Pour le cas de l'influence d'une paroi plane perpendiculaire à la direction du mouvement d'une sphère, on montre que, lorsque la sphère est suffisamment proche de la paroi, l'expression (8.55) de la force de résistance est corrigée par un facteur multiplicatif R/h, où h est la distance minimale entre la sphère et la paroi, selon :

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta R\mathbf{U}\,\frac{R}{h}\cdot \tag{8.58}$$

Précisons que, par suite de la réversibilité des écoulements aux petits nombres de Reynolds, cette expression est valable aussi bien si la sphère se rapproche de la paroi ou s'en éloigne. On peut raccorder les deux expressions (8.55) (sphère loin de la paroi : $h \gg R$) et (8.58) (sphère proche de la paroi : $h \ll R$) selon l'expression :

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta R\left(1 + \frac{R}{h}\right)\mathbf{U}. \tag{8.59}$$

La force donnée par cette relation (*a priori* valable dans les deux limites $R/h \gg 1$ et $R/h \ll 1$) reste proche de la valeur exacte (déterminée par un calcul faisant intervenir un développement en une série de termes) à mieux que 6,5 % pour les valeurs intermédiaires du rapport R/h.

8.4.3 Extensions de la résolution de l'équation de Stokes à d'autres problèmes

Le problème de Stokes peut être généralisé à d'autres géométries mettant en jeu des sphères en présence de parois (comme dans l'exemple mentionné plus haut), à un ensemble de sphères, à des objets ellipsoïdaux (dont le bâtonnet cylindrique, discuté à la section 8.3.2 est un cas limite), ou encore, plus simplement, au cas où la sphère solide est remplacée par un fluide. Nous nous contenterons d'analyser quelques-uns de ces cas.

Influence mutuelle de deux sphères

Nous envisageons le cas de deux sphères identiques, sédimentant dans un fluide s'étendant à l'infini, et sufisamment proches l'une de l'autre pour que le champ de vitesse créé par le déplacement de chacune des sphères influence le mouvement de l'autre. La vitesse de sédimentation peut être évaluée en ajoutant la vitesse propre de sédimentation d'une sphère à celle induite par le mouvement de l'autre. En utilisant la propriété de réversibilité des écoulements aux faibles nombres de Reynolds discutée à la section 8.2.3, on montre que les vitesses résultantes des deux sphères sont nécessairement les mêmes. La droite joignant les centres ne tourne donc pas pendant la chute, quelle que soit son orientation initiale, et la distance entre les centres reste constante ; l'ensemble des deux sphères se comporte comme un solide de révolution avec un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe. L'inverse de la vitesse de sédimentation V_s (normalisée à sa valeur V_{so} pour une sphère unique en milieu infini) est donnée sur la figure 8.11 en fonction de d/R, pour les deux cas où la droite joignant les centres des sphères est verticale ou horizontale.

Supposons la distance d entre les centres suffisamment grande devant le rayon R pour qu'on puisse négliger les termes en $1/d^3$ dans le champ de vitesse induit par chacune des sphères sur l'autre (relations (8.36)). Lorsque la ligne joignant les centres est verticale, chaque sphère induit, au niveau de l'autre une composante de vitesse v_i de l'ordre de $(3/2)V_sR/d$ parallèle à la vitesse de sédimentation V_s. La vitesse relative des sphères par rapport au fluide est donc diminuée par la composante v_i ; elle doit être égale à la vitesse terminale de chute V_{so} d'une sphère isolée pour qu'on ait équilibre entre la pesanteur et les forces de frottement visqueux. On a donc :

$$V_{so} = V_s - v_i \approx V_s \left(1 - \frac{3}{2}\frac{R}{d}\right) \tag{8.60}$$

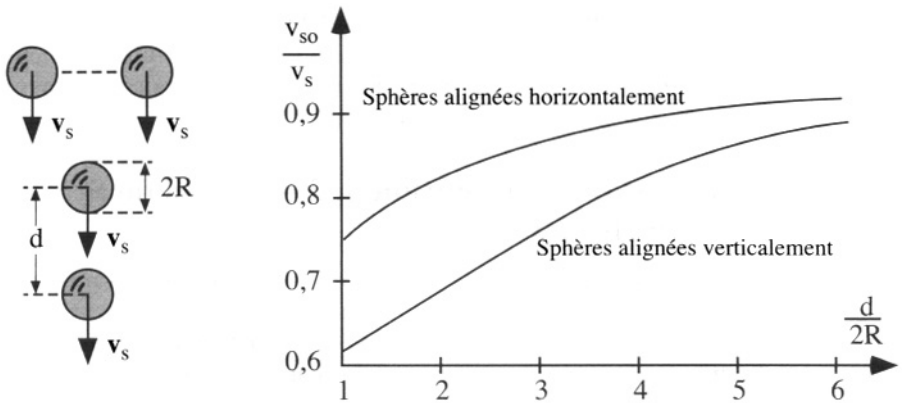


FIG. 8.11 – *Comparaison entre la vitesse de sédimentation de deux sphères identiques, à la verticale ou à l'horizontale l'une de l'autre. V_{so} est la vitesse d'une sphère isolée.*

d'où :

$$\frac{V_{so}}{V_s} \approx 1 - \frac{3}{2}\frac{R}{d} \cdot \tag{8.61}$$

Dans le cas où la ligne joignant les centres est horizontale, on obtient :

$$\frac{V_{so}}{V_s} \approx 1 - \frac{3}{4}\frac{R}{d} \cdot \tag{8.62}$$

Rappelons que les deux expressions ci-dessus ne sont valables que pour une distance entre les sphères suffisamment grande ; les courbes de la figure 8.11 ont été obtenues par un calcul exact.

Goutte fluide en mouvement dans un autre fluide

On considère une sphère fluide de viscosité η_i, en mouvement à une vitesse U dans un autre fluide non miscible de viscosité $\eta_e = \lambda\,\eta_i$. Pour déterminer le champ de vitesse à l'extérieur, on utilise la forme générale donnée par les formules (8.50). À l'intérieur, un calcul analogue au précédent conduit pour le champ de vitesse induit, à un résultat de la forme :

$$v_r = U\cos\varphi\,(A + B\,r^2) \tag{8.63a}$$

$$v_\theta = -U\sin\varphi\,(A + 2B\,r^2). \tag{8.63b}$$

Les constantes A et B sont déterminées en exprimant la continuité du champ de vitesse et des contraintes de cisaillement à la surface de la sphère. On remarque que la dépendance par rapport à r de ces deux composantes de vitesse est tout à-fait différente de celle des équations (8.36a et b) ; cela peut

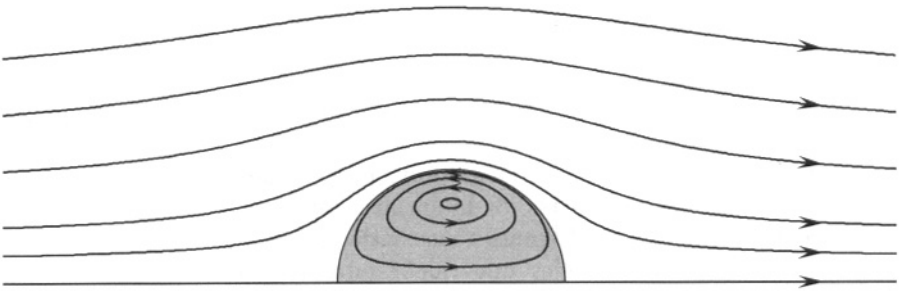


FIG. 8.12 – *Écoulements extérieur et intérieur à une sphère liquide se déplaçant à vitesse constante dans un fluide visqueux. Comme pour la figure 8.9b, le champ de vitesse est donné dans le référentiel où la sphère est fixe.*

se comprendre car, d'une part, la répartition de vorticité à l'intérieur de la sphère n'a pas la même forme que celle obtenue dans l'équation (8.43), d'autre part, les conditions aux limites sont différentes ; par exemple, les termes en $1/r^n (n > 0)$ doivent être nuls pour le champ de vitesse intérieur, car la vitesse est finie au centre la sphère.

On obtient, pour chacun des deux champs de vitesse :

- à l'extérieur :

$$v_r = U \cos\varphi \left[\frac{3+2\lambda}{2\,(1+\lambda)} \frac{R}{r} - \frac{1}{2\,(1+\lambda)} \frac{R^3}{r^3} \right] \tag{8.64a}$$

$$v_\theta = -U \sin\varphi \left[\frac{3+2\lambda}{2\,(1+\lambda)} \frac{R}{2r} + \frac{1}{2\,(1+\lambda)} \frac{R^3}{2\,r^3} \right] \tag{8.64b}$$

- à l'intérieur :

$$v_r = U \cos\varphi \left[\frac{1+3\,\lambda}{2\,(1+\lambda)} - \frac{\lambda}{2\,(1+\lambda)} \frac{r^2}{R^2} \right] \tag{8.65a}$$

$$v_\theta = -U \sin\varphi \left[\frac{1+3\,\lambda}{2\,(1+\lambda)} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{r^2}{R^2} \right] \cdot \tag{8.65b}$$

La force de Stokes qui s'exerce sur la sphère est donnée par la formule :

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta_e R\mathbf{U} \frac{1+\dfrac{2}{3}\lambda}{1+\lambda} \cdot \tag{8.66}$$

La solution redonne la formule de Stokes (8.55) dans la limite où λ tend vers zéro (le fluide intérieur est infiniment visqueux) ; dans la limite opposée où λ

tend vers l'infini, on obtient la formule correspondant à une bulle de gaz dans un liquide :

$$F = -4\pi\eta_e R\mathbf{U} \tag{8.67}$$

Le changement du préfacteur 6π en 4π provient de la différence des conditions aux limites dans les deux cas. Si la surface d'une bulle est partiellement rigidifiée par la présence d'agents tensioactifs en solution qui se fixent à l'interface, on obtient en effet une valeur intermédiaire entre 4π et 6π ; c'est souvent le cas en pratique pour une bulle montant dans de l'eau insuffisamment purifiée.

Force de résistance sur un corps de forme quelconque

Pour un corps de forme quelconque, le premier terme du développement de la variation de la pression dans le fluide avec la distance ne se limite pas à un terme en $(\cos\varphi/r^2)$, mais fait intervenir également des termes en $(\sin\varphi\cos\theta/r^2)$ et $(\sin\varphi\sin\theta/r^2)$ (ainsi que des termes d'ordre supérieur en $(1/r)$ qui sont négligeables à des distances L de la sphère telles que $L \gg R$).

Les termes supplémentaires en $1/r^2$ ne sont pas nuls quand le corps n'a pas la symétrie d'un polyèdre régulier ; la force exercée n'est alors pas parallèle à la vitesse. Dans le cas contraire (cube, tétraèdre ...), on retrouve, pour des distances L telles que $R \ll L \ll (R/Re)$, le même type de variation que pour la sphère avec :

$$p = C\eta\frac{\cos\varphi}{r^2} \tag{8.68}$$

$$v_r = C\mathbf{U}\,\frac{\cos\varphi}{r} \tag{8.69a}$$

$$v_\theta = -C\mathbf{U}\,\frac{\sin\varphi}{2r} \tag{8.69b}$$

$$|F_{\text{traînée}}| = 4\pi C\eta U \tag{8.70}$$

Un tel champ de vitesse est appelé « Stokeslet ». Il représente, par exemple, le champ de vitesse induit à grande distance par un tout petit insecte en vol stationnaire dans l'air. Pour chaque géométrie particulière, on devra déterminer la valeur correspondante du coefficient C. La valeur de C pour des objets non sphériques a déjà été évoquée à la section 8.3.2. La correspondance avec le cas de la sphère (problème de Stokes) permet d'évaluer assez aisément des ordres de grandeur dans des effets de sédimentation de solutions de polymères ou d'agrégats colloïdaux ; ce sont des objets non compacts, pour lesquels on peut cependant définir un rayon hydrodynamique R_h compatible avec l'application de la formule de Stokes. Ce rayon R_h reste de l'ordre de grandeur du rayon de la sphère circonscrite à l'objet.

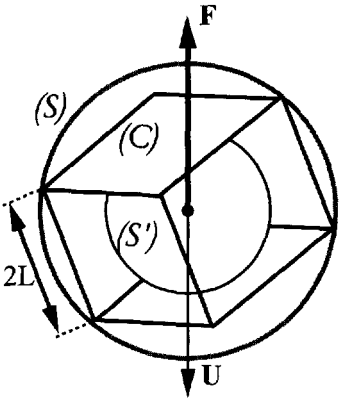


FIG. 8.13 – *Géométrie conduisant à l'évaluation approchée de la force de résistance hydrodynamique* **F** *sur un cube (C) en mouvement à la vitesse* **U**.

Le théorème de dissipation minimale d'énergie (section 8.2.3) permet d'évaluer la force de Stokes exercée sur un cube de côté $2L$ se déplaçant avec une vitesse **U** (Fig. 8.13). Notons d'abord, comme nous l'avons justifié plus haut (section 8.3.2, exemple (ii)), que la force **F** sur le cube est indépendante de l'orientation de celui-ci par rapport à **U** ; elle est par ailleurs toujours parallèle à U et de sens contraire. Considérons la sphère (S) de rayon $\sqrt{3}\,L$ *circonscrite* au cube (C). Remplaçons le champ de vitesse réel autour de (C), $\mathbf{v}_c(\mathbf{r})$, par la juxtaposition du champ de vitesse $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ autour de la sphère, et d'un champ uniforme égal à la vitesse **U** entre (S) et (C). Cette seconde solution qui satisfait à la condition aux limites sur (S) et (C) correspond à une dissipation d'énergie supérieure à la solution réelle. En appliquant la formule de Stokes à l'écoulement autour de la sphère, on obtient un *majorant* de l'énergie dissipée, soit :

$$F \cdot U < 6\pi\eta\sqrt{3}LU^2$$

F et U sont les modules de la force et de la vitesse et $F \cdot U$ est le taux de dissipation réel autour du cube (C). Le membre de gauche représente en effet l'énergie dissipée autour de la sphère de rayon $L\sqrt{3}$, la dissipation entre la sphère et (C) est nulle, car la vitesse est uniforme. Prenons de même la sphère (S') *inscrite* dans (C) ; la dissipation autour de (S') est inférieure à celle obtenue pour une solution correspondant à un écoulement uniforme de vitesse **U** entre (S') et (C), et à l'écoulement inconnu autour de (C). On trouve donc un *minorant* égal cette fois-ci à $6\pi\eta LU^2$. En combinant les deux inégalités, on peut borner la force F exercée sur le cube par :

$$6\pi\eta LU < F < 6\pi\eta\sqrt{3}LU.$$

Remarquons que ces bornes sont assez proches l'une de l'autre. De façon très générale, la force sur un objet de taille finie et de dimension maximale L est

voisine de celle sur une sphère de diamètre L. En particulier pour un cylindre allongé de rayon R et de longueur L, d'axe parallèle ($\mathbf{F}_{\parallel}$) ou perpendiculaire ($\mathbf{F}_{\perp}$) à sa vitesse $\mathbf{U}$, un calcul plus complet donne les expressions :

$$\mathbf{F}_{\parallel} \approx -\frac{2\pi\eta LU}{\mathrm{Log}\left(\dfrac{L}{R}\right) - 0,72} \tag{8.71a}$$

et :

$$\mathbf{F}_{\perp} \approx -\frac{4\pi\eta LU}{\mathrm{Log}\left(\dfrac{L}{R}\right) + \dfrac{1}{2}} \cdot \tag{8.71b}$$

Le rapport des valeurs de force est très voisin de 2 ; c'est ce résultat que nous avons utilisé dans les calculs de l'angle de chute d'un bâtonnet (section 8.3.2, exemple (i)) et de la force induite par la rotation d'un fil en hélice (fin de la section 8.3.2). Ces deux valeurs sont également voisines de la force sur la sphère circonscrite de rayon $L/2$. Cela est une manifestation de la grande portée des interactions hydrodynamiques aux petits nombres de Reynolds : il en résulte une faible dépendance des formes de profil d'écoulement, ainsi que des forces par rapport aux détails de la forme de l'objet en déplacement. C'est ainsi que, dans le cas d'une macromolécule d'un polymère, on définit un rayon « hydrodynamique » R_h comme celui d'une sphère qui aurait la même résistance hydrodynamique. Dans le cas où le polymère est dans une configuration géométrique du type « pelote » assimilable à une sphère, R_h représente le rayon de cette sphère. C'est à ce rayon hydrodynamique qu'on accède par des mesures de diffusion de lumière sur ces systèmes.

8.4.4 Limites de la description de Stokes des écoulements à faible nombre de Reynolds – Équation d'Oseen

La démonstration de l'équation de Stokes au début de ce chapitre repose sur l'hypothèse que les termes d'inertie ($(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$) et d'instationnarité ($\partial\mathbf{v}/\partial t$) sont négligeables devant les termes de viscosité dans l'équation de mouvement. Nous allons montrer, à partir du cas particulier de l'écoulement autour d'une sphère, que ces hypothèses ne sont plus vérifiées à suffisamment grande distance de la sphère.

Énergie cinétique du fluide loin de la sphère

À très grande distance de la sphère ($r \gg R$), on peut approcher les valeurs des composantes de la vitesse (Éqs. (8.36)) par :

$$v_r \approx \frac{3}{2}\frac{R}{r}U\cos\varphi \tag{8.72a}$$

et :

$$v_\varphi \approx -\frac{3}{4}\frac{R}{r}U\sin\varphi. \tag{8.72b}$$

On en déduit une borne inférieure de l'énergie cinétique du fluide e_c par unité de volume, en écrivant :

$$e_c = \frac{1}{2}\rho v^2(r) > \frac{9}{32}\rho U^2\frac{R^2}{r^2}.$$

L'énergie cinétique $(\mathrm{d}E_c/\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}r$ comprise entre les rayons r et $r+\mathrm{d}r$ vérifie donc :

$$\mathrm{d}E_c = e_c\,4\pi\,r^2\,\mathrm{d}r > \frac{9\pi}{8}\,\rho\,U^2\,R^2\,\mathrm{d}r. \tag{8.73}$$

L'intégration dans tout l'espace donne une énergie cinétique totale infinie. L'équation de Stokes cesse donc certainement d'être valable à grande distance de la sphère.

Effets de convection et d'accélération loin de la sphère – Équation d'Oseen

Supposons la sphère en mouvement à une vitesse $\mathbf{U}$ dans un fluide immobile à l'infini avec un nombre de Reynolds $Re = (2\rho UR/\eta) \ll 1$. Évaluons l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de Navier-Stokes à grande distance L de la sphère. L'ordre de grandeur de la vitesse à cette distance est $v \approx U\,(R/L)$ (Éqs. (8.72)). Un observateur, fixe par rapport au fluide à l'infini et situé à une distance L de la sphère, voit défiler le champ de vitesse décrit par les équations (8.36), entraîné par le mouvement de celle-ci. Même si la vitesse de la sphère est constante, l'écoulement du fluide n'est pas stationnaire dans le référentiel de l'observateur ; on mesure localement une variation :

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{U}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} \quad \text{soit :} \quad \rho\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \approx \rho U\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right| \approx \rho U\left(U\frac{R}{L}\right)\frac{1}{L} = \rho\frac{U^2R}{L^2}.$$

Le terme $\rho\,\partial\mathbf{v}/\partial t$ décroît donc en $1/L^2$ contrairement au terme de contraintes visqueuses, qui est de l'ordre de :

$$\eta\,|\Delta\,\mathbf{v}| \approx \eta\left(U\frac{R}{L}\right)\frac{1}{L^2} \approx \eta\frac{UR}{L^3}$$

et qui varie en $1/L^3$. Le rapport de ces deux termes est ainsi de l'ordre de $\rho U\,L/\eta$ et il augmente avec la distance. Ainsi, à une distance L de la sphère telle que :

$$\frac{L}{R} \approx \frac{1}{Re}$$

on a $\rho UL/\eta \approx 1$, et l'hypothèse de quasi stationnarité cesse d'être valable. En revanche, toujours pour un fluide immobile à l'infini, le terme de transport par convection $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ vérifie :

$$|\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}| \approx \frac{U^2R^2}{L^3} \ll \eta|\Delta\mathbf{v}| \approx \eta\frac{UR}{L^3}.$$

Il varie donc en $1/L^3$ et reste toujours négligeable. Inversement, analysons maintenant le cas d'une sphère immobile dans un fluide de vitesse constante $\mathbf{U}$ à l'infini : dans ce cas au contraire, le terme de non-stationnarité $(\partial\mathbf{v}/\partial t)$ reste identiquement nul pour tout observateur fixe, quelle que soit sa position. À distance suffisamment grande, la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide tend vers $\mathbf{U}$, et le terme convectif $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ est voisin de $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$. C'est donc lui, dans ce cas, qui est de l'ordre de U^2R/L^2 et cesse d'être négligeable à grande distance par rapport au terme de dissipation visqueuse.

Ainsi, dans un volume de fluide infini, l'équation de Stokes n'est qu'une approximation valable suffisamment près du solide ; en raison de la lente décroissance du champ de vitesse, les erreurs correspondantes pourront être importantes. Loin de la sphère, on remplacera donc en première approximation l'équation de Stokes par *l'équation d'Oseen* :

$$\rho\,(\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,p + \eta\,\Delta\,\mathbf{v}. \tag{8.74}$$

Revenons au premier cas envisagé où le solide se déplace à vitesse constante dans un fluide immobile à l'infini ; il suffit d'ajouter à l'équation de Stokes le terme de variation temporelle $\rho\partial\mathbf{v}/\partial t = -(\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$, que nous avons vu plus haut, pour obtenir :

$$\rho(-\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,p + \eta\,\Delta\,\mathbf{v}. \tag{8.75}$$

À partir de ces équations, on peut obtenir une valeur corrigée de la force de traînée $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = -6\pi\,\eta\,R\,U\left(1 + \frac{3}{8}\,Re\right) + O(Re^2). \tag{8.76}$$

Si l'équation d'Oseen décrit mieux l'écoulement que l'équation de Stokes loin de la sphère, elle est incorrecte près de celle-ci, car l'estimation des termes non linéaires ou d'accélération est erronée. Des développements plus complexes (méthodes dites de raccordements asymptotiques) sont nécessaires pour raccorder les deux types de solutions.

Contrairement aux écoulements de Stokes, les champs de vitesse obtenus sont dissymétriques par rapport au plan diamétral perpendiculaire à l'écoulement. La figure 8.14 correspond à une sphère en mouvement dans un fluide immobile à l'infini ; les lignes de courant sont plus resserrées en arrière de la sphère qu'en avant de celle-ci (la vorticité est plus concentrée en aval). En effet, aux échelles de distance $L \approx R/Re$, la vorticité, créée localement par le passage de la sphère ne diffuse pas assez vite pour se répartir également

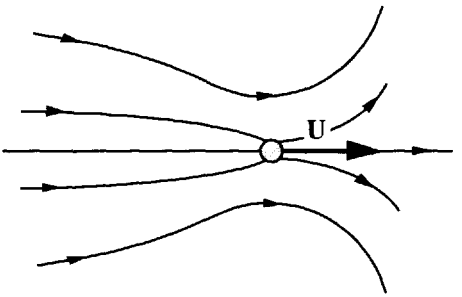


FIG. 8.14 – *Écoulement asymétrique autour d'une sphère se déplaçant à vitesse constante à nombre de Reynolds fini dans un référentiel où le fluide est au repos à l'infini. Cette configuration d'écoulement est à comparer à celle de la figure 8.9a qui correspondait à un très petit nombre de Reynolds et à de plus petites distances à la sphère.*

entre l'amont et l'aval de la sphère, et est entraînée vers l'arrière. Nous verrons au chapitre 9 (section 9.8) que, aux grands nombres de Reynolds ou aux très grandes distances $L \gg (R/Re)$, la dissymétrie est telle que les gradients de vitesse restent concentrés dans un sillage de très faible largeur en aval du corps (précisons que cela n'est vrai que pour les corps aérodynamiques – bien profilés – pour lesquels le sillage reste laminaire).

L'analyse précédente reste valable à grande distance d'un solide de forme quelconque, pourvu que ses trois dimensions soient finies. Le terme dominant du champ de vitesse est en effet encore d'ordre $1/r$ à grande distance, et les approximations précédentes restent appliquables.

Forces sur un cylindre circulaire infini dans un écoulement à petit nombre de Reynolds

Il n'existe pas de solution de l'équation de Stokes vérifiant les conditions aux limites à la fois sur le cylindre et à l'infini. Les gradients de vitesse sont en effet plus faibles que dans le cas de la sphère, ce qui réduit le transport de quantité de mouvement par diffusion ; le transport par convection devient notable pour des distances supérieures à ν/U.

L'approximation d'Oseen donne une solution vérifiant les conditions aux limites pour un cylindre de rayon R avec une valeur de la force par unité de longueur :

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi\,\eta\,\mathbf{U}}{\log\dfrac{4\eta}{\rho\,U\,R} + \dfrac{1}{2}}\,. \tag{8.77}$$

Cette valeur est une bonne première approximation, bien que les termes de transport par convection soient seulement estimés très approximativement

près du cylindre. Notons, en comparant ce résultat avec la formule (8.71(b)) présentée plus haut pour un bâtonnet de longueur finie, que la longueur $4\eta/(\rho U) = 4R/Re$ remplace la longueur physique du cylindre.

8.5 Dynamique des suspensions

Ce problème est d'une grande importance pratique. Il recouvre aussi bien la sédimentation de particules, l'écoulement de suspensions (boues de forage argileuses, ciments, pâtes, ...) que le comportement des lits fluidisés (ces derniers sont formés d'un ensemble de particules mises en lévitation par l'injection de fluide vers le haut, à la base du système, ce qui maintient les particules en suspension).

Le comportement des suspensions sera très différent suivant la taille L des particules. Pour de très petites particules (dites browniennes), les effets d'agitation thermique sont très importants. Pour des plus grosses particules, les effets hydrodynamiques sont dominants. L'importance relative de ces deux effets est mesurée par le *nombre de Péclet* Pe défini au chapitre 2 (Éq. (2.16)) par :

$$Pe = \frac{UL}{D}$$

où U est la vitesse de l'écoulement et D, le coefficient de diffusion brownienne des particules. Ici, nous allons déterminer le nombre de Péclet à partir du rapport du temps de diffusion de particules sphériques sur une distance de l'ordre de leur rayon R, au temps de convection des particules par l'écoulement sur la même distance R. Nous avons montré au chapitre 1 (Éq. (1.48)) que le coefficient de diffusion brownienne D des particules s'écrit :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

où R est le rayon des particules et η la viscosité du fluide. Le temps de diffusion brownienne τ_D des particules sur la distance R est $\tau_D \approx R^2/D$. Le temps de convection des particules à la vitesse caractéristique $U \approx \dot{\gamma} R$ de l'écoulement est $\tau_C \approx R/U \approx 1/\dot{\gamma}$ ($\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement de l'écoulement). Donc, le nombre de Péclet s'écrit :

$$Pe = \frac{\tau_D}{\tau_C} = \frac{6\pi\,\eta\,\dot{\gamma}\,R^3}{k_B\,T}\,. \tag{8.78}$$

A priori, le passage d'une particule d'un comportement brownien pour $Pe \ll 1$ à un comportement non brownien pour $Pe \gg 1$ dépend de la valeur du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Cependant, à cause de l'exposant élevé du terme en R, c'est surtout la taille des particules qui détermine la frontière entre les deux comportements.

Exemple Prenons des particules dans l'eau à température ambiante ; la limite $Pe \approx 1$ correspond à un diamètre des particules de l'ordre de 1 μm, pour des taux de

cisaillement $\dot{\gamma} \approx 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Signalons la coïncidence suivante qui permet de mémoriser la frontière entre les deux domaines : des particules de 1 μm de diamètre, en suspension dans de l'eau à température ambiante et en écoulement avec des taux de cisaillement de 1 s^{-1}, ont un coefficient de diffusion brownienne $D \approx 1\,(\mu\mathrm{m})^2/\mathrm{s}$, un temps caractéristique correspondant $\tau_D \approx R^2/D \approx 1$ s, et un nombre de Péclet de l'ordre de l'unité. En prenant le micromètre et la seconde comme unités de base de ces différentes grandeurs, on peut résumer cette propriété par :

$$2\,R \approx D \approx \dot{\gamma} \approx \tau_D \approx Pe \approx 1. \tag{8.79}$$

Ces évaluations montrent qu'on peut donc fixer approximativement la frontière entre particules browniennes et non browniennes à une taille des particules de l'ordre de 1 μm.

Dans l'étude des mouvements hydrodynamiques des objets de petite taille, il existe un facteur supplémentaire qui provient de la nécessité de prendre en compte les forces interparticulaires de type Van der Waals, et électrostatiques dans le cas de particules chargées ou de solvants polaires ; les interactions correspondantes (interactions colloïdales) jouent un rôle prépondérant dans le cas de faibles séparations entre particules (typiquement inférieures au millier d'angströms).

8.5.1 Rhéologie des suspensions

Les suspensions diluées se comportent comme des fluides homogènes newtoniens de viscosité η supérieure à celle du fluide suspendant η_0. Le coefficient de viscosité η vérifie la relation établie par Einstein dans un article de 1905 sur la théorie du mouvement brownien :

$$\eta = \eta_0\,(1 + 2,5\Phi) \tag{8.80}$$

où $\Phi(\ll 1)$ est la fraction de volume occupée par des sphères (volume total occupé par les sphères sur volume total de la suspension). Le résultat est remarquablement simple et général ; il ne dépend pas en particulier du caractère brownien ou non brownien des particules, ni de la nature de l'écoulement dans lequel se trouve la particule. La seule hypothèse faite pour la démonstration est l'absence d'interactions hydrodynamiques entre les particules. Cela permet de ne considérer dans le calcul que la modification du champ de vitesse induite par la présence d'une seule particule, et de sommer sur toutes les particules la modification ainsi calculée. C'est cette sommation qui fait apparaître dans la viscosité une contribution totale proportionnelle à la concentration volumique Φ en particules. Signalons cependant que la démonstration complète, qui peut être menée à partir du calcul de l'augmentation de l'énergie dissipée dans la suspension due à la présence des particules, est assez complexe.

On peut comprendre qualitativement le résultat (8.80) en imaginant le transport de quantité de mouvement le long d'une ligne tracée au hasard dans la suspension

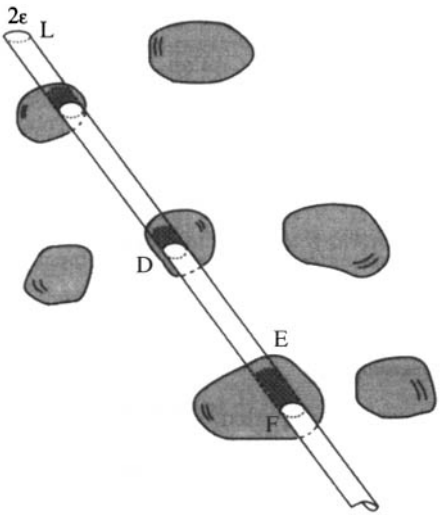


FIG. 8.15 – *Calcul approché de la viscosité d'une suspension diluée et analyse de la relation entre la concentration volumique des particules et la fraction de longueur d'une ligne droite quelconque située à l'intérieur de celles-ci.*

(Fig. 8.15). Ce transport est diffusif dans la région fluide DE entre deux particules, mais se fait instantanément le long du segment EF dans un grain solide qui joue le rôle de court-circuit. Globalement, tout se passe comme si la longueur de la ligne était réduite par l'effet de la fraction de solide (particules) qu'elle traverse. D'après un théorème de stéréologie que nous justifierons plus loin, la fraction de longueur située à l'intérieur des particules solides, pour une droite traversant la suspension, est égale à la fraction volumique Φ des particules. Le rapport des longueurs DE et DF vaut donc en moyenne :

$$\frac{DE}{DF} = 1 - \frac{EF}{DF} = 1 - \Phi.$$

Écrivons le temps de diffusion τ_D de la quantité de mouvement sur la longueur DF sous deux formes. On obtient :

$$\tau_D = \frac{DF^2}{\eta/\rho} = \frac{DE^2}{\eta_0/\rho} = \frac{[DF(1-\Phi)]^2}{\eta_0/\rho}.$$

Dans la première forme, on fait intervenir la viscosité globale η de l'ensemble fluide + particules ; dans la seconde, on ne fait intervenir que la viscosité du fluide, mais on tient compte du fait que la diffusion dans le fluide ne se fait que sur la longueur DE. En développant au premier ordre en Φ, on trouve :

$$\eta = \eta_0\,(1 + 2\Phi)$$

en accord raisonnable avec le résultat exact.

Justification de la relation entre concentration de particules et fraction de longueur de ligne interceptée

Sur l'élément de ligne L tracé au hasard à travers le milieu hétérogène, nous construisons un cylindre de rayon infinitésimal ε (tel que ε soit très inférieur aux dimensions caractéristiques des particules) (Fig. 8.15). La fraction de volume de ce cylindre qui intercepte les particules est égale à la fraction f de longueur de la ligne L qui se trouve à l'intérieur des particules : en effet, dans l'évaluation du rapport des volumes, il intervient la même section $\pi\varepsilon^2$ pour les deux volumes. Comme la ligne a été tracée au hasard à l'intérieur du milieu, la fraction volumique dans le cylindre sera égale à la fraction volumique dans l'ensemble du volume global, à condition que la longueur de la ligne L soit grande devant la taille des particules.

Le résultat (8.80) est valable jusqu'à des concentrations de quelques pourcent. Pour ces valeurs, la distance entre les particules de la suspension est, en moyenne, de 5 à 10 fois leur rayon ; on comprend pourquoi il est raisonnable dans ces conditions de négliger l'effet de la présence des particules voisines sur le mouvement d'une particule, malgré la lente décroissance des perturbations hydrodynamiques qu'elles induisent (rappelons que ces perturbations sont proportionnelles au rapport du rayon de la particule à la distance à une particule voisine). Pour des concentrations plus importantes, les termes négligés dans l'approximation précédente deviennent plus importants que la correction du premier ordre à la viscosité. Il faut alors prendre en compte les interactions hydrodynamiques entre les particules. Dans une première approche, on ne considère que les interactions de paires de particules, et on somme les effets dus à toutes les paires de particules. Cela donne une contribution supplémentaire à la viscosité qui est proportionnelle au carré de la fraction volumique Φ :

$$\eta = \eta_0 \left(1 + 2,5\Phi + k\Phi^2\right). \tag{8.81}$$

Cependant, malgré les hypothèses simplificatrices, le calcul qui conduit à cette expression est très complexe (notamment à cause de la lente décroissance des perturbations de vitesse induites par la présence des particules). Par ailleurs, le coefficient k du terme en Φ^2 dépend du type d'écoulement auquel est soumise la suspension, ainsi que de la diffusion brownienne (suivant les différents cas, il varie de 5,2 à 7,6). Cela provient de l'influence de l'écoulement sur l'organisation spatiale des particules (formation d'agrégats, de structures, effet d'orientation des particules, ...). Ainsi, la viscosité d'une suspension soumise à un écoulement élongationnel ne sera pas identique à celle de la même suspension soumise à un écoulement de cisaillement. La viscosité dépendra également de la vitesse de l'écoulement auquel est soumise la suspension et pourra avoir également des dépendances temporelles (effets non newtoniens, voir chapitre 4, section 4.4).

8.5.2 Sédimentation d'une suspension de particules

Sédimentation de suspensions diluées

Lors de l'étude de l'influence de la présence d'une sphère sur l'écoulement induit par le mouvement d'une autre sphère (section 8.4.2), nous avons vu que cette interaction mutuelle conduit à une augmentation de la vitesse de sédimentation des deux sphères. En fait, dans le cas d'une suspension comportant un plus grand nombre de particules, cet effet est masqué par l'existence d'écoulements de retour de vitesse v_{cf} autour de chaque particule, schématisés sur la figure 8.16a et que nous avons mentionnés à la section 8.4.2 (Fig. 8.10b). Ces écoulements assurent la conservation du débit du fluide, supposé incompressible, à travers toute section perpendiculaire au mouvement des particules. Ainsi, la vitesse de sédimentation v_s d'une suspension diluée de sphères de concentration volumique Φ est plus faible que celle d'une sphère isolée v_{so}. Dans une géométrie idéale pour la sédimentation d'une suspension vers un plan infiniment éloigné, on a :

$$v_s = v_{so}(1 - 6,55\,\Phi) \tag{8.82}$$

Cette expression est un développement au premier ordre de la vitesse de sédimentation par rapport à la concentration Φ qui tient compte des interactions à deux particules. On sait déterminer le terme du second ordre, mais le calcul est compliqué et on doit faire des hypothèses sur la répartition spatiale des particules qui n'est pas connue *a priori*. De plus, les effets à longue portée (toujours liés à la variation lente de la vitesse en $1/r$ avec la distance) font qu'il n'est pas possible de se limiter dans le calcul aux interactions avec les plus proches voisines de chaque particule.

En pratique, la vitesse absolue de sédimentation d'une suspension dépend de la forme du récipient qui la contient ; elle peut différer fortement de la valeur obtenue pour la sédimentation au-dessus d'un plan imperméable (relation 8.82). Ainsi, on trouve pour la vitesse de chute $v_{ss}(\Phi)$ dans un récipient sphérique de grand rayon :

$$v_{ss}(\Phi) = v_{so}\,(1 - 3,55\,\Phi).$$

Cette différence est associée à la présence d'un écoulement de recirculation avec une vitesse dirigée vers le bas sur l'axe vertical de la sphère, et vers le haut près des parois (Fig. 8.16b) (la figure 8.10b illustre un effet du même type pour une bille dans un tube). Cette recirculation est due à l'influence des parois et de la géométrie sur le champ de vitesse résultant de l'ensemble de sphères ; elle ne doit pas être confondue avec les effets dus à la présence de gradients de concentration.

Parmi ces derniers, citons un phénomène dont l'origine n'est pas directement dû à la présence des parois, mais à l'apparition de gradients de concentration en particules. Il s'agit de l'*effet Boycott* (du nom de celui qui a découvert le phénomène) qui est observé lors de la sédimentation d'une

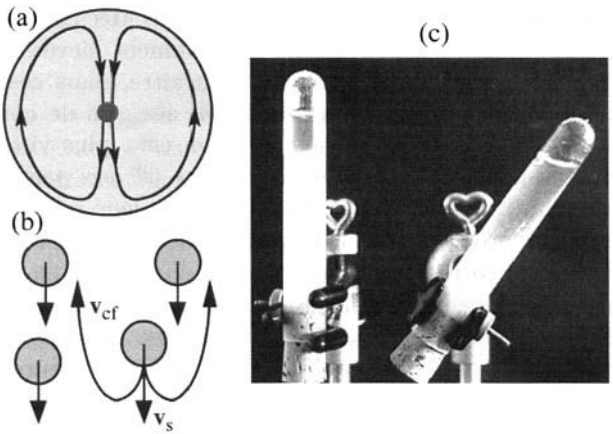


FIG. 8.16 – *(a) Effet de recirculation globale lors de la sédimentation d'une suspension dans un récipient sphérique ; (b) effet du contre-écoulement local lors de la sédimentation d'une suspension de sphères ; (c) effet Boycott lors de la sédimentation dans un tube incliné. Les deux tubes contenant une suspension de même concentration ont été retournés au même moment. La sédimentation est notablement plus rapide pour le tube incliné (cliché des auteurs).*

suspension de particules dans un tube incliné (Fig. 8.16c). Dans ce cas, la sédimentation est beaucoup plus rapide que dans un tube vertical. Cela est dû à l'existence d'un courant de recirculation ascendant le long de la partie supérieure du tube : ce courant est dû au gradient horizontal de concentration de particules (et donc de densité moyenne) créé par la sédimentation de celles-ci vers la génératrice inférieure du tube. Nous avons déjà décrit au chapitre 7 (section 7.2.2) des phénomènes de convection induits par des gradients de densité, et nous en rencontrerons d'autres au chapitre 10 (section 10.1.2), induits par des gradients de température.

Sédimentation de suspensions concentrées

Aux fortes concentrations Φ, des termes supplémentaires importants apparaissent lorsque Φ tend vers sa valeur limite Φ_m ; Φ_m correspond à un empilement dense de particules, tombant sous son propre poids dans le fluide. Dans ce cas, il n'y a pas de mouvement relatif des particules : à un mouvement de translation globale près, le problème peut être rapproché de l'écoulement dans un milieu poreux, où l'ensemble des particules reste fixe et le fluide s'écoule entre celles-ci.

Ces résultats expliquent les variations abruptes dans le profil de concentration ; elles sont observées dans la sédimentation d'un ensemble de

particules de même taille dans un fluide et représentées sur les photos de la figure 8.17. Pour des concentrations suffisamment élevées de particules (typiquement à partir de 20 %), on voit apparaître, dans ces expériences, un front arrière correspondant à une variation abrupte de concentration ; les particules laissées en arrière se déplacent en effet plus vite que celles à l'intérieur de la suspension, car l'effet de freinage dû aux particules voisines est moins important ; elles peuvent ainsi rattraper leur retard, même si les variations de vitesse propre dues à la dispersion des tailles des particules sont notables. Un tel front correspond à la formation d'une onde de choc, situation tout à fait analogue à celle rencontrée dans les problèmes de trafic routier. On voit également, sur la figure 8.17 un front avant qui remonte le long de l'écoulement moyen et qui correspond à la frontière supérieure du sédiment formé au fond du récipient. Dans de tels systèmes, on observe des effets de bouchons de concentration : ils sont dus à la diminution du débit $\Phi\, v(\Phi)$ lorsque la concentration Φ de véhicules est élevée, alors qu'il est proportionnel à Φ aux faibles densités de particules ($v(\Phi)$ est la vitesse à une concentration Φ donnée). C'est la variation non monotone du débit avec la concentration qui est à l'origine du phénomène de formation de bouchons.

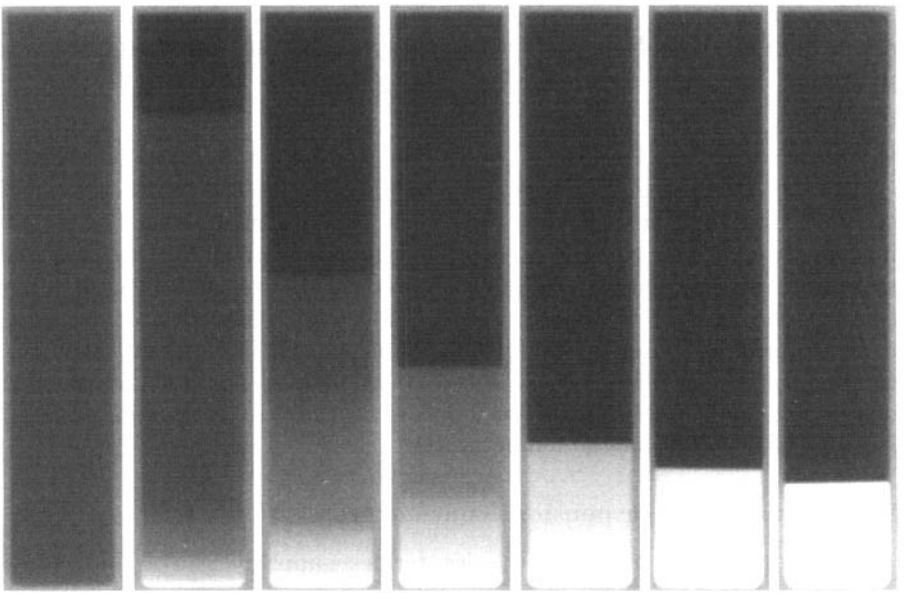
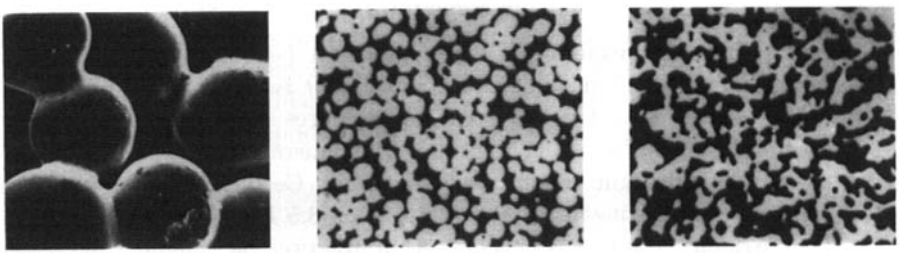


FIG. 8.17 – *Sédimentation d'une suspension de particules observée grâce à une coupe au scanner à rayons X pour des temps croissants. On remarque plusieurs variations abruptes de la concentration en particules le long de la verticale, notamment l'une dans la partie supérieure de la suspension (front arrière), ainsi qu'une autre dans la partie inférieure marquant la limite du sédiment concentré au fond du récipient (document François Auzerais).*

8.6 Écoulements dans les milieux poreux

8.6.1 Quelques exemples

Un milieu poreux est un matériau massif à l'intérieur duquel se trouvent des cavités ou pores, reliées entre elles par des canaux ou éventuellement isolées. On peut voir sur les photographies de la figure 8.18 l'aspect de tels matériaux observés en microscopie. Dans la plupart des cas pratiques, la taille des pores est assez faible et les écoulements assez lents pour que la condition de petites valeurs du nombre de Reynolds soit satisfaite. On peut distinguer trois classes de problèmes suivant les phases en présence à l'intérieur des pores.



(a) (b) (c)

FIG. 8.18 – *(a) Milieu poreux constitué de l'espace des vides d'une poudre de bronze frittée en la chauffant à une température de 700 °C pendant sept heures (grossissement 500 fois) ; (b) coupe stéréologique de cette même poudre (grossissement 100 fois) ; l'espace des pores apparaît en noir sur la photographie. Notons que la porosité d'un tel milieu, supposé homogène, peut être obtenue en traçant des lignes sur toute la coupe et en mesurant la fraction de longueur des lignes occupées par les pores (voir la justification de cette propriété à la fin de la section 8.6.2) ; (c) coupe stéréologique d'une poudre de cobalt irrégulière ; l'espace des pores, toujours en noir, est très hétérogène (photographies J.-P. Jernot)*

Une première classe concerne des écoulements où le milieu est saturé (c'est-à-dire rempli complètement) par une seule phase fluide ou encore par un ensemble de fluides miscibles ; ce sera par exemple le cas d'un sol complètement imbibé d'eau.

Une deuxième famille de problèmes concerne la situation où plusieurs fluides non miscibles coexistent dans le milieu. Tout un ensemble de ménisques séparent les différentes phases en présence, et les effets capillaires discutés au chapitre 1 (section 1.4) doivent être pris en compte pour caractériser les écoulements relatifs des différentes phases. Cette situation, que nous discuterons brièvement plus loin (section 8.6.6), se rencontre dans de très

nombreux exemples : sols partiellement saturés en eau (la deuxième phase est l'air chargé de vapeur d'eau), mélanges eau-huile dans les roches pétrolifères ...

Enfin, le transport de particules solides est important dans les problèmes de filtration à la surface ou dans le volume d'un filtre. Il conduit en général à une modification au cours du temps des propriétés hydrodynamiques du milieu.

8.6.2 Paramètres caractérisant un milieu poreux

- **Porosité**

Elle est définie par le rapport :

$$\phi = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}} = 1 - C \tag{8.83}$$

où C est la *compacité* définie au chapitre 1 (section 1.1.1). On peut montrer que, pour un matériau homogène et isotrope, ϕ est aussi égal à la fraction de surface occupée par les pores dans une section plane du matériau, ou bien à la fraction de longueur située à l'intérieur des pores pour une ligne traversant le matériau. Cette relation, analogue à celle que nous avons introduite à la section 8.5.1 entre la concentration de particules d'une suspension, et la fraction de longueur de ligne interceptée par les particules, est un résultat classique de stéréologie.

- **Aire spécifique**

Un autre paramètre géométrique important est la surface interne par unité de volume d'un poreux (ou aire spécifique) S_v, qui a la dimension de l'inverse d'une longueur. Si on adsorbe progressivement une espèce moléculaire gazeuse dans un milieu poreux initialement mis sous vide, la fin de la formation d'une première couche moléculaire adsorbée sur la surface interne se traduit par un palier dans l'augmentation de la pression. Si a représente la taille des molécules adsorbées et V_a le volume total de ces molécules adsorbées dans le volume V du milieu poreux, on a :

$$S_v = \frac{V_a}{V \cdot a} \cdot \tag{8.84}$$

Dans le cas de pores de géométrie simple (en particulier lorsque leurs parois sont presque lisses), la quantité S_v est de l'ordre de l'inverse de la taille locale de pores. Ainsi, pour un cylindre de longueur L et de diamètre d, on trouve :

$$S_v = \frac{(\pi \mathrm{d})\, L\, a}{\left(\frac{\pi \mathrm{d}^2}{4} L\, a\right)} = \frac{4}{\mathrm{d}} \cdot \tag{8.85}$$

L'aire spécifique est un paramètre essentiel pour tous les processus d'adsorption et de catalyse : ils dépendent en effet très fortement de

la surface disponible dans le matériau pour des réactions chimiques ou physicochimiques.

S_v peut aussi être déterminée en comptant sur une image d'une coupe du matériau le nombre de points d'intersection d'une ligne traversant le milieu poreux avec les parois des pores.

Justification Si on se reporte au problème équivalent de la figure 8.15, on voit que l'élément de cylindre qui coupe les grains intercepte une surface totale de parois de grains égale au nombre d'interceptions n par le segment, multipliée par la surface de base du cylindre S et par un facteur numérique F qui traduit l'effet de l'inclinaison par rapport à l'axe du cylindre des surfaces élémentaires interceptées. Le rapport surface (nSF) sur volume (SL) vaut donc $Fn\,/\,L$. Pour un matériau isotrope, on montre que $F = 2$: la surface spécifique A_s est donc égale dans ce cas au double du nombre d'interceptions des parois des pores du milieu par unité de longueur d'une ligne aléatoire.

Remarque Les paramètres tels que la porosité ou la surface spécifique sont, dans les modèles classiques, obtenus par moyennage sur un certain *volume élémentaire représentatif* V_m du matériau, ainsi que nous l'avons discuté au le chapitre 1 (section 1.3.2). La dimension du volume V_m est au minimum d'une dizaine de tailles de pores pour des matériaux très homogènes ; V_m est beaucoup plus grand, et est même parfois impossible à définir pour des matériaux hétérogènes, ou dont la structure présente une très large gamme d'échelles de longueur caractéristiques.

♦ **Tortuosité**

Les propriétés de transport des matériaux poreux (écoulement de fluides ou passage de courant électrique) font intervenir bien d'autres caractéristiques géométriques que l'aire spécifique et la porosité. La topologie du milieu (nombre de pores auquel est relié chacun d'entre eux), la complexité des chemins de passage à travers l'espace des pores, les tailles caractéristiques des pores et des canaux qui les joignent ont également une influence importante. De plus, il faut tenir compte des bras morts (les « voies de garage » de l'écoulement), qui seront importants dans les matériaux peu poreux et très hétérogènes. Pour rendre compte de tels effets, on définit un paramètre T, appelé *tortuosité*, à partir de la conductivité électrique σ_p d'un milieu poreux isolant, saturé d'un liquide conducteur de conductivité connue σ_f :

$$T = \phi \frac{\sigma_f}{\sigma_p} \cdot \tag{8.86}$$

On peut se faire une idée de la signification de la tortuosité dans le cas modèle d'un réseau de capillaires ondulés (Fig. 8.19a). On trouve dans ce cas :

$$T = \left(\frac{L_{\text{cap}}}{L}\right)^2 \cdot \tag{8.87}$$

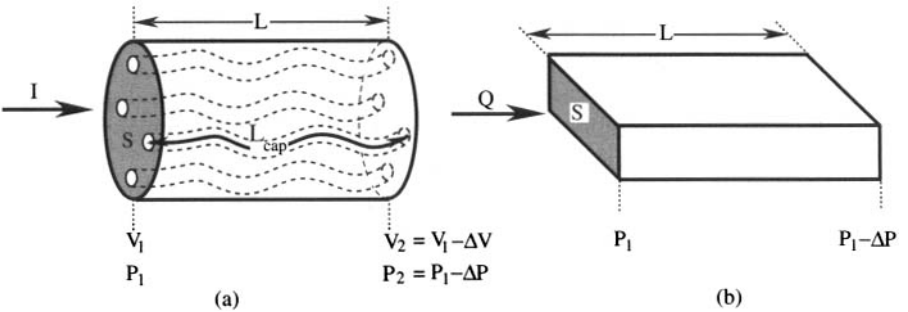


FIG. 8.19 – *(a) Modélisation de la géométrie d'un milieu poreux, sous la forme d'un ensemble de capillaires ondulés. Ce modèle permet de définir la tortuosité du milieu à partir de sa conductivité électrique déterminée par application d'une différence de potentiel ΔV et mesure de l'intensité I du courant circulant à travers le milieu ; (b) schéma montrant les paramètres intervenant dans l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux.*

Où L_{cap} est la longueur totale des capillaires et L celle de l'échantillon. Pour des capillaires ondulés, L_{cap} est supérieur à L et la tortuosité est supérieure à l'unité ; par contre T est égale à 1 s'ils sont rectilignes.

Démonstration Calculons la conductivité électrique effective σ_p d'un milieu poreux saturé de fluide conducteur. Notons ΔV la différence de potentiel entre deux sections d'aire S du milieu (Fig. 8.19a), et I l'intensité du courant électrique circulant à travers celui-ci ; on a :

$$\Delta V = \left(\frac{1}{\sigma_p}\frac{L}{S}\right) I. \tag{8.88}$$

De même, pour chaque capillaire individuel, on peut écrire :

$$\Delta V = \left(\frac{1}{\sigma_f}\frac{L_{\text{cap}}}{S_{\text{cap}}}\right) I_{\text{cap}} \tag{8.89}$$

où L_{cap} représente la longueur moyenne des capillaires. Le rapport de ces deux relations vérifie :

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_f} = \frac{L}{L_{\text{cap}}}\frac{I}{I_{\text{cap}}}\frac{S_{\text{cap}}}{S} = \left(\frac{L}{L_{\text{cap}}}\right)^2 \phi \tag{8.90}$$

car $I = NI_{\text{cap}}$, et $\phi = (NS_{\text{cap}}\, L_{\text{cap}})/(SL)$ où N est le nombre de capillaires dans la surface S. En utilisant la définition de l'équation (8.86), on retrouve bien l'expression (8.87) pour la tortuosité. Nous utiliserons ce modèle plus loin (section 8.6.4) pour calculer le débit Q de fluide induit à travers un tel milieu par une différence de pression ΔP.

8.6.3 Écoulements dans les milieux poreux saturés – Loi de Darcy

Écoulements unidirectionnels à faible vitesse

On s'intéresse ici aux milieux poreux saturés pour lesquels l'espace des pores est entièrement rempli d'un seul fluide supposé newtonien et incompressible. Si l'écoulement est à une vitesse assez faible pour que le nombre de Reynolds, défini à partir de la taille des pores et de la vitesse locale, soit très inférieur à l'unité, on peut admettre, en écoulement stationnaire, que les gradients de pression sont proportionnels à la vitesse d'écoulement dans les pores (loi de Poiseuille appliquée à chaque pore). Cette relation de proportionnalité, valable pour tous les pores individuellement, se conserve si on moyenne le débit et les gradients de pression sur un volume grand devant la taille des pores. Pour un échantillon homogène de longueur L et de section S constante (Fig. 8.19b), et pour un gradient de pression parallèle à la longueur, le débit volumique Q vérifie :

$$Q = \frac{K}{\eta} S \frac{\Delta P}{L} \cdot \tag{8.91}$$

La constante de proportionnalité K est la *perméabilité*, qui est une caractéristique du milieu poreux. Elle est homogène à une surface, et son ordre de grandeur est donné par la section d'un pore individuel comme nous le verrons plus loin (section 8.6.4). Une unité courante est le darcy (1 $(\mu\text{m})^2$), qui est bien adaptée aux ordres de grandeur de perméabilité de milieux naturels (voir tableau 8.1).

TAB. 8.1 – *Quelques valeurs caractéristiques de perméabilité de matériaux poreux.*

Matériau	Perméabilité (darcy)
terre	$0,3 - 15$
brique	$0,005 - 0,2$
calcaire	$0,002 - 0,05$
grès	$0,0005 - 5$
cigarette	1000
fibres de verre	$20 - 50$
sable	$20 - 200$
poudre de silice	$0,01 - 0,05$

Équation de Darcy généralisée à trois dimensions

À trois dimensions et en présence de pesanteur, l'équation (8.91) se généralise pour un milieu isotrope en :

$$\mathbf{v}_s = \frac{Q\,\mathbf{n}_u}{S} = -\frac{K}{\eta}\,(\mathbf{grad}\,p - \rho\,\mathbf{g}). \tag{8.92}$$

Chaque composante de $\mathbf{v}_s$ correspond au débit volumique à travers une surface unité perpendiculaire à la direction de la composante. $\mathbf{n}_u$ est le vecteur unitaire normal à la section S à travers laquelle on mesure le débit Q. $\mathbf{v}_s$ a la dimension d'une vitesse et est souvent appelée *vitesse débitante.*

Remarque La vitesse moyenne réelle v_p à l'intérieur des pores peut être très supérieure à v_s car seule une partie du volume total de matériau est disponible pour le transport de fluide. Ainsi, pour un ensemble de capillaires parallèles, de porosité globale ϕ, v_p vérifiera $v_p = v_s/\phi$. En effet, le débit moyen par unité de section de matériau perpendiculaire aux capillaires est, d'une part, égal à v_s et, d'autre part, égal au produit de v_p par la fraction de surface de section occupée par les pores ; cette dernière est égale à ϕ comme nous l'avons vu plus haut (section 8.6.1). Il faut également noter que, pour un milieu poreux homogène mais anisotrope comme un milieu stratifié, on généralise l'équation (8.92) en remplaçant le scalaire K par un tenseur.

Si K et η sont constants, on a, d'après (8.92) :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v_s} = 0$$

d'où :

$$\mathbf{v_s} = -\mathbf{grad}\,\Phi \tag{8.93}$$

avec :

$$\Phi = \frac{K}{\eta}(p + \rho\,g\,z).$$

Si le fluide est incompressible, le champ de vitesse $\mathbf{v_s}$ vérifie $\mathrm{div}\,\mathbf{v_s} = 0$, d'où :

$$\Delta\,\Phi = 0 \tag{8.94}$$

Le champ de vitesse $\mathbf{v_s}$ dérive donc d'un potentiel Φ, dont le laplacien est nul, comme ce serait le cas pour le champ de vitesse d'un fluide parfait. Or, du fait de la petite taille des pores, l'écoulement d'un fluide visqueux dans un poreux est un des cas où l'influence de la viscosité est la plus forte, et où le comportement du fluide est le plus éloigné du cas d'un fluide parfait ! L'explication de ce paradoxe tient au fait que $\mathbf{v_s}$ n'est pas une vitesse locale, mais un champ de vitesse *macroscopique*, défini par une moyenne sur un volume grand par rapport à celui des pores. On moyenne donc les effets de la viscosité qui interviennent sur des petites échelles de longueur.

Application de la loi de Darcy à l'écoulement dans un talus poreux

À titre d'exemple, analysons l'écoulement à travers un talus poreux de perméabilité K et de largeur L qui sépare deux nappes d'eau de niveaux différents y_0 et y_1 (Fig. 8.20). Nous supposons qu'on a atteint un régime stationnaire où le niveau de l'eau $y_s(x)$ à l'intérieur du massif est constant au cours du temps, avec un débit volumique Q constant dans chaque section $x = \text{cte}$ et indépendant de x. Si la pente de la surface libre est assez faible à l'intérieur du massif poreux (*approximation de Forcheimer*), nous montrerons plus loin que la variation du niveau d'eau avec la distance vérifie :

$$\frac{y_0^2 - y_s^2(x)}{y_0^2 - y_1^2} = \frac{x}{L} \cdot \tag{8.95}$$

On obtient un profil parabolique comme pour un jet d'eau fluide sortant librement d'un récipient (malgré la différence complète de nature des forces qui interviennent). Le débit Q vérifie :

$$Q = K\,g\,\frac{y_0^2 - y_1^2}{2\,L\,\nu} \cdot \tag{8.96}$$

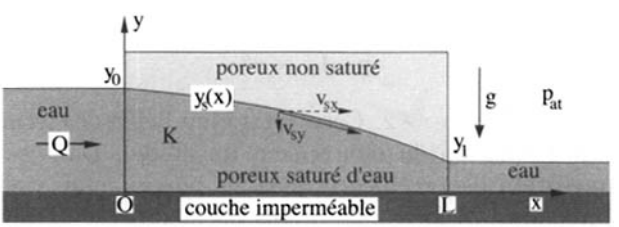


FIG. 8.20 - *Écoulement entre deux nappes d'eau à des niveaux différents ($y = y_0$, y_1) à travers un massif poreux limité par les plans $x = 0$, L*

Démonstration Si la partie non saturée d'eau du poreux est remplie d'air et si on néglige les effets de tension superficielle, la pression dans l'eau juste en dessous de la surface $y_s(x)$ est égale à la pression atmosphérique p_{at}. Écrivons alors l'égalité de pression entre deux points de la surface d'abscisses x et $x + \delta x$:

$$p\,(x,\, y_s(x)) = p\,(x + \delta x, y_s\,(x + \delta x))$$

d'où, en développant :

$$\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\delta y_s = 0. \tag{8.97}$$

Si $\partial\, y_s(x)/\partial x$ est assez petit, on peut considérer que la composante v_{sy} de la vitesse superficielle $\mathbf{v}_s$ est très inférieure à la composante v_{sx}, et que le gradient de pression $\partial p/\partial y$ suivant Oy se réduit au gradient de pression hydrostatique $-\rho\, g$

(ces hypothèses ne sont pas sans rappeler celles utilisées pour les écoulements quasi parallèles). On déduit alors de l'équation (8.97) le gradient de pression horizontal :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}y_s(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\, g\, \frac{\mathrm{d}y_s(x)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{8.98}$$

En appliquant la loi de Darcy (8.92) pour calculer la composante horizontale $v_s(x)$ de la vitesse débitante, on obtient le débit $Q = v_s(x)y_s(x)(\partial p/\partial x$ et, par conséquent, $v_s(x)$ sont en effet tous deux indépendants de y). On a :

$$Q = -\rho\, g\, \frac{K}{\eta}\, y_s(x)\frac{\mathrm{d}y_s(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{K\, g}{\nu}\, y_s(x)\frac{\mathrm{d}y_s(x)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{8.99}$$

On obtient alors la relation (8.95) par intégration par rapport à x et on en déduit l'équation (8.96) en appliquant la relation (8.99) à cette expression.

Régimes d'écoulement non linéaire dans les poreux

La relation (8.92) est valable à des faibles vitesse telles que le nombre de Reynolds Re (calculé en prenant la taille des pores comme échelle de longueur) soit très inférieur à 1. À des vitesses plus élevées (et des valeurs de Reynolds de l'ordre de quelques unités), la relation pression–débit n'est plus linéaire. On peut la représenter par une loi de puissance :

$$\mathbf{grad}\, p \propto v^n \tag{8.100}$$

l'exposant n étant de l'ordre de 2. Cette loi traduit l'effet des termes convectifs non linéaires de l'équation du mouvement du fluide. Dans ce cas, on n'a pas encore apparition de turbulence dans les pores ; mais, même avec un écoulement laminaire, les fortes variations de module et de direction de la vitesse d'un pore à l'autre peuvent rendre l'effet des termes $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ notable. Cela représente un cas limite opposé à celui des écoulements parallèles, où ces termes peuvent rester négligeables même pour des nombres de Reynolds nettement plus grands que l'unité.

Signalons également que, à plus grand nombre de Reynolds, des zones de recirculation de fluide peuvent apparaître derrière les grains constituant le milieu poreux. Ces zones sont du même type que celles que nous avons décrites au chapitre 2 (section 2.4.1) lors de l'étude de l'évolution de l'écoulement autour d'un cylindre lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Un modèle à deux dimensions des milieux poreux : la cellule de Hele-Shaw

Une cellule de Hele-Shaw est constituée de deux plaques parallèles très proches l'une de l'autre (à une distance a très petite devant la taille L des obstacles), entre lesquelles sont placées des cales simulant des formes d'obstacles (Fig. 8.21).

Ce système est utilisé pour reproduire des champs de vitesse d'écoulements potentiels bidimensionnels de fluides parfaits autour d'obstacles. Nous en avons donné un exemple dans le chapitre 6 (Fig. 6.7) pour l'écoulement autour d'un

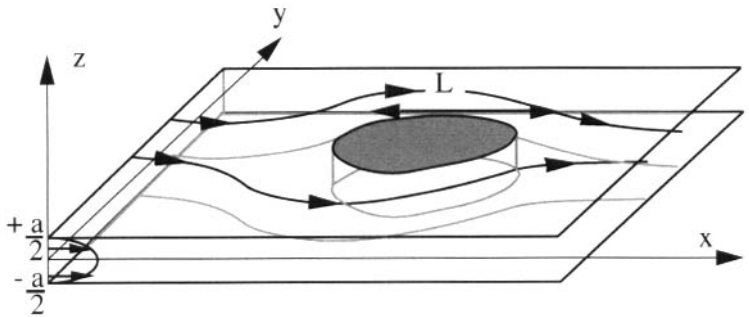


FIG. 8.21 – *Géométrie d'une cellule de Hele-Shaw avec un obstacle d'extension L grande devant l'épaisseur* a *de la cellule.*

cylindre. Comme pour les milieux poreux, ce résultat semble au premier abord paradoxal puisque, étant donnée la proximité des plaques, les forces de frottement visqueux joueront un rôle essentiel sur les caractéristiques de l'écoulement. En fait, comme dans le cas des milieux poreux, c'est la moyenne du champ de vitesse prise sur l'intervalle entre les plaques qui dérive d'un potentiel et non la *vitesse locale.*

Entre les plaques, l'écoulement est quasi parallèle au plan xOy et on a donc : $v_z \approx 0$. On peut le justifier à partir de l'équation de conservation de la masse, qui s'écrit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Les échelles de longueur suivant Oz (de l'ordre de a) sont très inférieures à celles suivant Oy (de l'ordre de L). On en déduit un ordre de grandeur de la composante v_z :

$$v_z \approx \frac{a}{L}\, v_{x(y)} \ll v_{x(y)}. \tag{8.101}$$

La grande différence entre les échelles de longueur perpendiculairement et parallèlement au plan des plaques permet également d'écrire les inégalités suivantes :

$$\frac{\partial^2 v_{x(y)}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_{x(y)}}{\partial z^2}\,. \tag{8.102}$$

Par ailleurs, les termes en $|\,\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}\,|$ sont négligeables devant ceux en $|\eta\Delta\mathbf{v}|$ puisque l'écoulement se fait à petit nombre de Reynolds. Compte tenu des relations (8.101) et (8.102), l'équation de Navier-Stokes se ramène à :

$$\eta\,\frac{\partial^2 \mathbf{v}_{\|}}{\partial z^2} = -\mathbf{grad}_{\|}\, p \tag{8.103}$$

avec : $p = p\,(x, y)$. L'indice $\|$ désigne la composante des vecteurs (vitesse ou gradient de pression) dans le plan xOy. Au vu de l'équation (8.103), on peut séparer les variables en écrivant :

$$\mathbf{v}_{\|}(x, y, z) = \mathbf{v}_{\|}(x,\, y,\, 0)\, f(z) \tag{8.104}$$

où la variation de $\mathbf{v}_{\parallel}$ avec x et y est très lente par rapport à celle de $f(z)$ avec z. De (8.103) et (8.104), on tire :

$$f(z) = \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \cdot \tag{8.105}$$

Finalement, le champ de vitesse entre les plaques vérifie :

$$\mathbf{v}_{\parallel}(x, y, 0) = -\frac{a^2}{2\eta}\,\mathbf{grad}_{\parallel}\, p \tag{8.106a}$$

et :

$$v_z(x, y, 0) = 0. \tag{8.106b}$$

Donc, la direction de la vitesse $\mathbf{v}$ est en tout point parallèle à celle de $\mathbf{grad}\, p$; par ailleurs, cette direction ne varie pas sur l'épaisseur de la lame de fluide, même si le *module* de $\mathbf{v}$ dépend beaucoup de z. L'équation (8.106a) représente, pour la cellule de Hele–Shaw, l'équivalent de la loi de Darcy pour les milieux poreux. De l'égalité (8.106(a)), on tire :

$$\mathbf{rot}_{\parallel}[\mathbf{v}_{\parallel}(x, y, 0)] = \mathbf{rot}_{\parallel}(\mathbf{grad}\, p) = \mathbf{0} \tag{8.107}$$

Les lignes de courant dans des plans z = constante sont donc les mêmes pour les différentes valeurs de z et sont identiques à celles d'un écoulement potentiel bidimensionnel de fluide parfait autour d'obstacles de même géométrie que les cales. Près des cales, on a une condition aux limites de vitesse nulle, mais son influence se limitera à une distance du contour qui est de l'ordre de l'épaisseur a.

La cellule de Hele–Shaw est utilisée expérimentalement en tant que milieux poreux « modèle », qui comporte par exemple des distributions de perméabilité contrôlables en agissant sur la distribution de l'épaisseur a entre les plaques. Nous verrons en effet à la section suivante que la section des pores intervient directement sur la perméabilité d'un milieu poreux.

On peut modéliser l'écoulement dans un talus poreux décrit plus haut à l'aide d'une cellule de Hele–Shaw mise verticalement sur la tranche avec ses deux bords verticaux reliés à deux bains de hauteurs différentes. Dans la cellule, on verra apparaître une surface libre parabolique analogue, à l'ascension capillaire constante près, à celle décrite précédemment.

8.6.4 Modèles simples de la perméabilité des matériaux poreux

Perméabilité d'un ensemble de capillaires ondulés

On représente souvent les milieux poreux où les pores sont bien connectés et de section assez uniforme à partir d'un ensemble de capillaires ondulés de diamètres individuels d (Fig. 8.19a). Nous avons déjà utilisé cette approche pour en évaluer la conductivité électrique à la section 8.6.2. Pour un capillaire

unique, la relation entre la perte de charge et le débit δQ est donnée par la relation de Poiseuille établie au chapitre 4 (relation (4.78)) :

$$\delta Q = \frac{\pi}{128\,\eta}\frac{\Delta P}{L_{\text{cap}}}\,d^4. \tag{8.108}$$

Soit N le nombre de capillaires dans la surface S perpendiculaire au sens de l'écoulement, et K la perméabilité pour les écoulements dans cette direction. Le débit total par unité de surface à travers l'ensemble de la section S est donné par :

$$Q = N\,\delta Q = N\frac{\pi d^4}{128\,\eta}\frac{\Delta P}{L_{\text{cap}}}\cdot \tag{8.109}$$

D'après la loi de Darcy (8.91), Q vérifie également :

$$\frac{Q}{S} = \frac{K}{\eta}\frac{\Delta P}{L}\cdot$$

En tenant compte de l'expression de la porosité $\phi = N(\pi\,d^2/4)L_{\text{cap}}/(SL)$, on trouve :

$$K = \frac{\phi\,d^2}{32}\frac{1}{T}\cdot \tag{8.110}$$

Ainsi, pour une porosité donnée, la perméabilité varie comme le carré du diamètre des canaux : la chute de pression, pour un débit de fluide donné, augmente très rapidement lorsque la taille des pores décroît même si le volume poreux total reste constant. Ce résultat est très différent de celui obtenu pour la conductivité électrique σ_p du même milieu poreux rempli d'un fluide de conductivité σ_f donnée. Dans ce cas, le rapport σ_p/σ_f pour des canaux circulaires est proportionnel à la porosité ϕ du milieu (relation (8.90)).

Dans le précédent modèle, on a supposé que l'ensemble des capillaires parallèles étaient *en moyenne* parallèles à une direction, une hypothèse qui correspond à des milieux qui seraient très anisotropes. On peut cependant trouver une estimation de la perméabilité d'un milieu poreux isotrope en considérant qu'il est formé de trois ensembles de capillaires perpendiculaires deux à deux. Pour une différence de pression appliquée dans l'une des trois directions, seul un ensemble de capillaires participera au transport du fluide. La perméabilité sera de ce fait réduite d'un facteur 3 par rapport au cas précédent. On obtient alors :

$$K = \frac{\phi\,d^2}{96}\frac{1}{T}\cdot \tag{8.111}$$

Relation de Kozeny–Carman

L'expression (8.111) fait intervenir un diamètre des pores qui est presque impossible à définir sans ambiguïté, même si on dispose de

coupes des matériaux. La relation de Kozeny–Carman permet de relier la perméabilité K d'un milieu poreux à des paramètres physiques mesurables expérimentalement, tels que la porosité et l'aire spécifique du milieu poreux. L'aire spécifique est utilisée dans cette approche pour évaluer l'ouverture des pores, ce qui n'est possible que dans le cas de pores de géométrie simple bien connectés entre eux .

Reprenons la modélisation par un ensemble de capillaires de la figure 8.19a. L'aire spécifique S_v (surface interne des pores par unité de volume du milieu poreux) d'un tel milieu est :

$$S_v = \frac{N(\pi\, d)L_{\text{cap}}}{S\, L} \tag{8.112}$$

où N est le nombre de capillaires sur la section S du milieu poreux. La porosité ϕ du milieu s'écrit d'autre part :

$$\phi = \frac{N(\pi\, d^2/4)L_{\text{cap}}}{S\, L}\,. \tag{8.113}$$

À partir des deux relations précédentes, on trouve alors, pour l'aire spécifique en fonction de la porosité :

$$S_v = \frac{4}{d}\,\phi. \tag{8.114}$$

En éliminant d entre les équations (8.111) et (8.114), on obtient :

$$K = \frac{\phi}{96T}\left(\frac{4\phi}{S_v}\right)^2 = \frac{1}{6}\frac{\phi^3}{S_v^2\, T}\,. \tag{8.115}$$

La constante $1/6$ provient de l'utilisation d'une modélisation du milieu par un ensemble de trois systèmes de capillaires perpendiculaires deux à deux. Un intérêt essentiel de la relation de Kozeny–Carman est le fait que, pour des milieux poreux réels formés de grains ou de poudres empilés ou comprimés, $6T$ peut être remplacé par une valeur expérimentale presque constante de l'ordre de 5. Cette approche n'est cependant utilisable que pour des grains et des empilements de géométries simples, lorsque les tailles des pores ne varient pas dans de trop larges proportions.

Par ailleurs, on peut remplacer la quantité S_v dans l'équation (8.115) par la surface de paroi de pores par unité de volume de solide $S'_v = S_v/(1-\phi)$. La deuxième forme est particulièrement intéressante lorsqu'on a affaire à des grains identiques de forme simple, car S'_v représente le rapport surface/volume des grains individuels. Ainsi, pour un empilement poreux de grains sphériques de diamètre D, $S'_v = 6/D$ et on obtient la relation dite d'Ergun :

$$K = \frac{\phi^3\, D^2}{180(1-\phi)^2}\,. \tag{8.116}$$

Dans l'exemple d'un empilement de grains sphériques de diamètre $D = 100\ \mu\text{m}$ et de porosité $\phi = 0,4$ (correspondant à une compacité de 60 %), on trouve $K \approx 10^{-11}\ \text{m}^2$.

8.6.5 Relations conductivité électrique – perméabilité des poreux

Nous utilisons ici une approche différente de l'évaluation de la perméabilité des milieux poreux, applicable à une plus large gamme de matériaux réels où les géométries des pores et des chemins d'écoulement sont plus complexes. Dans cette approche, on cherche à établir des relations entre la perméabilité et la conductivité électrique du matériau saturé d'un fluide conducteur. Cette dernière est également sensible, bien que d'une manière différente de la perméabilité, aux variations de structure et d'ouverture des canaux qui traversent le milieu.

Modélisation simplifiée de la perméabilité et de la conductivité électrique

Nous schématisons le milieu poreux (Fig. 8.22) sous la forme de grains de taille caractéristique a (qui est aussi de l'ordre de la longueur des canaux), dont les surfaces sont séparées par une distance caractéristique d (qui représente le diamètre des canaux). Cette approche a des points communs avec les modèles de capillaires décrits précédemment (elle est même plus simple, car on ne fait pas intervenir explicitement la tortuosité) : elle en diffère par l'introduction de ces deux échelles de taille au lieu d'utiliser des tubes de longueur infinie.

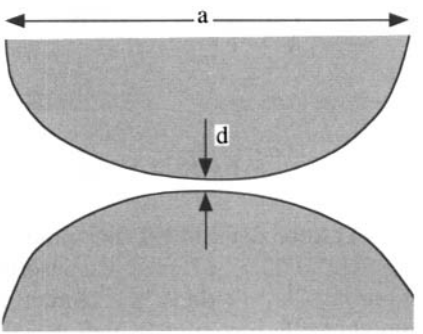


FIG. 8.22 – *Représentation schématique d'un milieu poreux constitué de grains de taille* a *(*a *représente la longueur caractéristique des canaux du milieu poreux), dont les surfaces sont séparées par une distance d, qui représente le diamètre des canaux.*

Évaluons maintenant la relation entre la perméabilité du milieu poreux et sa conductivité électrique ou, plus précisément le rapport de la conductivité électrique σ_f du fluide remplissant les canaux du milieu poreux à celle σ_p du milieu poreux. Au lieu d'utiliser directement les paramètres σ_p et σ_f, on

introduit le *facteur de formation* F du milieu qui est défini par la relation :

$$F = \frac{\sigma_f}{\sigma_p} \cdot \tag{8.117}$$

Évaluons maintenant F dans la géométrie de la figure 8.22. En utilisant les relations (8.88) et (8.89) et en considérant que la section à prendre en compte pour la conduction électrique globale du milieu poreux est $S_p \approx a^2$, et celle à prendre en compte pour la conduction dans les canaux est $S_c \approx d^2$, nous obtenons :

$$F = \frac{\sigma_f}{\sigma_p} \approx \frac{a^2}{d^2} \cdot \tag{8.118a}$$

Par ailleurs, d'après la relation (8.108), le débit à travers les canaux est de l'ordre de $\delta Q \approx (1/\eta)(\Delta P/a)\, d^4$. À partir de la loi de Darcy (relation (8.91)), on obtient, pour la perméabilité :

$$K \approx \frac{d^4}{a^2} \cdot \tag{8.118b}$$

En combinant les deux relations précédentes, on obtient les expressions suivantes du facteur de formation et de la perméabilité en fonction des deux longueurs a et d :

$$d \approx \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_p}\right) K} = \sqrt{FK} \tag{8.119a}$$

et

$$a \approx \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_p}\right) \sqrt{K} = F\sqrt{K}. \tag{8.119b}$$

Nous allons maintenant explorer deux approches pour utiliser ces relations : dans la première, on détermine une ouverture caractéristique d_c des canaux, par une mesure physique auxiliaire ; dans la seconde, on utilise des milieux poreux formés de grains de taille a connue et peu variable mais de degrés de compaction (et donc de porosités) différents.

Remarque Notons que, dans la discussion précédente, on applique la loi de Darcy sur un cube de taille d, qui est ainsi implicitement considéré comme un volume élémentaire représentatif sur lequel on peut définir des variables macroscopiques comme K et F. Malgré cette approximation injustifiable pour les poreux hétérogènes, nous verrons plus bas que les relations obtenues sont utilisables sur certains de ces derniers. Cela montre la nature de type *lois d'échelle* des équations (8.118 et 119) dont le principal intérêt est de prédire le type de dépendance des coefficients de perméabilité et conductivité électrique par rapport aux tailles caractéristiques de la structure du milieu, sans fournir de valeur numérique des coefficients.

Détermination d'une taille caractéristique de canaux par porosimétrie

Dans cette approche, due à Katz et Thomson, on évalue une valeur caractéristique de d par une technique voisine de la *porosimétrie au mercure* que nous décrirons plus en détail à la section 8.6.6. La mesure consiste à faire le vide dans l'échantillon et à injecter du mercure par une de ses faces sous une pression contrôlée et très lentement croissante (la vitesse de déplacement du liquide est donc très faible, et les gradients de pression associés négligeables). On détermine alors, par mesure de résistance électrique, la pression minimum p_c pour laquelle un chemin continu de mercure s'établit à travers l'ensemble de l'échantillon.

Le mercure, fluide non mouillant, pénètre d'autant plus difficilement à travers les canaux qu'ils sont de plus faible ouverture : il passe donc par les chemins les plus faciles, c'est-à-dire ceux qui empruntent les canaux les plus ouverts. Sur le chemin le plus facile, la pression p_c correspond au pore le plus étroit représentant le « verrou » qu'il faut ouvrir avant de traverser tout l'échantillon. p_c est donc la pression capillaire associée à l'ouverture d_c de ce pore, et nous verrons plus loin que p_c et d_c sont reliés par l'équation (8.123). La longueur d_c ainsi déterminée est bien adaptée comme ouverture caractéristique à utiliser dans les expressions (8.118a & b) de la conductivité électrique et de la perméabilité. La conductance électrique (ou hydraulique) d'un chemin donné à travers l'échantillon est en effet déterminée par les passages les plus étroits (ceux sur lesquels la chute de potentiel électrique ou de pression sera la plus forte). La conductance globale de plusieurs chemins en parallèle est au contraire déterminée par les plus faciles d'entre eux, par lesquels passe la plus large part du courant électrique (ou du débit de fluide). C'est donc, comme pour la mesure de pénétration de mercure, le passage le plus étroit sur les chemins les plus faciles qui contrôle ces propriétés de transport. On s'attend donc, en élevant au carré la relation (8.119a) à avoir : $d_c^2 \approx FK$.

On vérifie ce résultat sur la figure 8.23 qui présente des mesures de perméabilité effectuées sur un large ensemble d'échantillons de roches poreuses. Les différents points représentent la perméabilité calculée à partir de la relation (8.119a) ($K \approx (\sigma_p/\sigma_f)d_c^2$) en fonction de la perméabilité mesurée. L'ajustement représenté par la ligne continue correspond à la relation :

$$K = \frac{\sigma_p}{\sigma_f}\frac{d_c^2}{226}\,. \tag{8.120}$$

On constate que la relation est vérifiée, à un facteur 2 près, sur une très large gamme de valeurs de perméabilité (1 à 10^8) et pour des échantillons d'origine, de minéralogie et de porosité très variables.

Remarque Le type d'analyse que nous avons faite en utilisant la notion de taille critique d_c pour les canaux est utilisée pour d'autres problèmes de transport dans les milieux hétérogènes, comme par exemple la conductivité électrique de solides

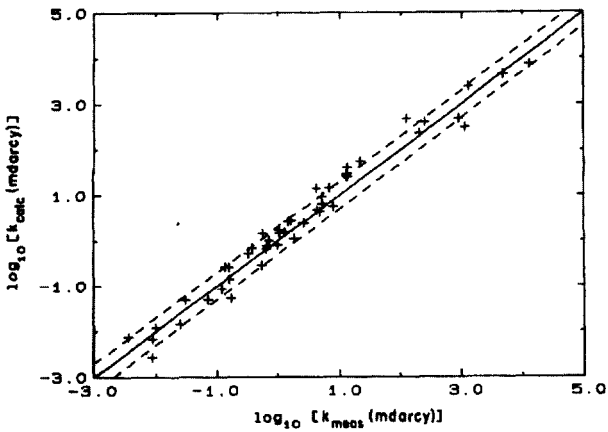


FIG. 8.23 – *Perméabilité calculée à partir de la relation (8.119a) en fonction de sa valeur mesurée sur un grand nombre de milieux poreux d'origine variée. La droite représente l'ajustement avec la relation (8.120) (d'après les travaux de Katz et Thompson).*

très hétérogènes. L'idée est que, pour un système dont un paramètre varie très fortement d'un point à un autre du milieu (la résistance d'un réseau d'éléments conducteurs de résistances individuelles très diverses), la conductivité globale est peu sensible aux éléments très bons conducteurs ; ils agissent en effet localement comme des courts-circuits. Il en est de même pour les éléments du réseau qui sont mauvais conducteurs, ils participent faiblement à la conductivité globale car ils sont en général court-circuités par des éléments plus conducteurs. Ce sont les éléments de résistance intermédiaire, mais en nombre suffisant pour former un chemin continu à travers l'échantillon, qui déterminent la conductivité de l'ensemble.

Matériaux de taille de grain donnée et de porosité variable

Cette approche basée sur la seconde relation (8.119b) utilise la taille des grains comme échelle de longueur caractéristique. Sa portée est moins générale et elle est surtout intéressante pour comparer des séries de matériaux formés des mêmes grains, mais de porosité variable. Ce sont par exemple des échantillons de roches de même provenance géologique, mais plus ou moins compactés ou prélevés à des profondeurs variables : lors de la compaction, la taille a des grains reste presque inchangée, et c'est l'intervalle entre eux (la longueur d) qui est réduit.

Il en est de même lorsqu'on compare les perméabilités d'échantillons plus ou moins frittés (et donc de porosités différentes) obtenus par chauffage et compression de grains de taille a identique ; d'après la relation (8.119b), on s'attend alors à une variation en $1/F^2$ de la perméabilité K en fonction du facteur de formation F. Les résultats d'une série d'expériences de ce type, réalisées sur des milieux poreux constitués de billes de verre de même diamètre a, pour différents taux de frittage, sont donnés, à la figure 8.24. La variation linéaire avec une pente -2 du logarithme de K avec le logarithme de F montre que K varie en $1/F^2$. Si, de

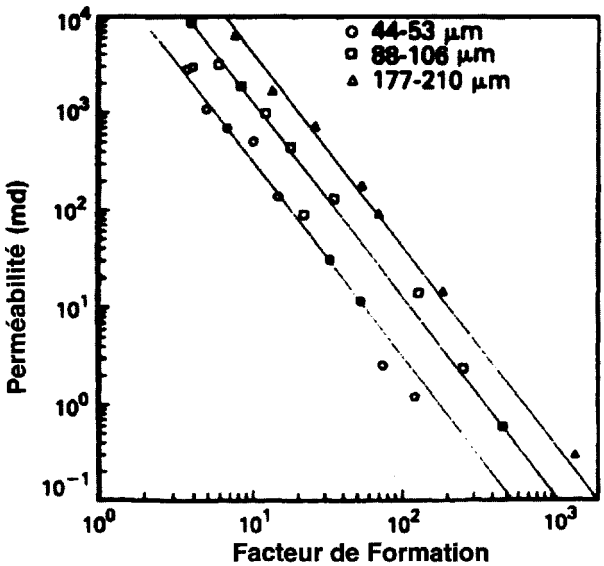


FIG. 8.24 – *Dépendance de la perméabilité exprimée en millidarcys d'un milieu poreux constitué de billes de verre frittées par différents diamètres de billes, en fonction du facteur de formation $F = \sigma_f/\sigma_p$, pour des échantillons de différentes tailles de billes. Le graphique est en coordonnées logarithmiques (d'après les travaux de P. Z. Wong, J. Koplik et J. Tomanic).*

plus, la perméabilité K est normalisée par le carré a^2 de la taille des billes, alors la perméabilité K suit une loi universelle de la forme :

$$K = 14,1\, a^2 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_f}\right)^2 = 14,1\, \frac{a^2}{F^2} \cdot \tag{8.121}$$

L'accord avec la prédiction donnée par l'équation (8.119b) est donc excellent. Précisons toutefois que ces résultats sont valables pour des degrés de frittage modérés, qui correspondent à des porosités ϕ de 10 % à 40 %. Pour des porosités plus faibles, les effets de bras morts (pores fermés) altèrent la validité du modèle.

8.6.6 Écoulement de fluides non miscibles dans les milieux poreux

Ce type d'écoulement se rencontre lorsque deux fluides (ou plus) non miscibles sont simultanément présents dans un milieu poreux. En hydrogéologie, c'est le cas des sols poreux contenant de l'eau et de l'air, de la récupération assistée du pétrole (mélange eau et huile) et dans l'expérience de porosimétrie à mercure, citée plus haut. Il convient alors de tenir compte à la fois des pertes de charge dans chacune des phases dues aux écoulements, ainsi

que des effets capillaires résultant de la présence d'interfaces courbes entre les deux fluides. L'importance de ces deux phénomènes peut être mesurée par la quantité sans dimension $Ca = \eta v/\gamma$– le *nombre capillaire* –, qui évalue le rapport des effets de la viscosité et de la pression capillaire, et qui a déjà été rencontré au chapitre 4 (section 4.8.1).

Nous présenterons d'abord l'approche la plus classique, celle du modèle de perméabilités relatives, utilisable lorsque les gradients de pression visqueux jouent un rôle important et que la distribution des deux phases dans les sections du matériau poreux est relativement homogène. Cette approche généralise la loi de Darcy en conservant l'utilisation de variables macroscopiques (définies par moyennage sur un volume élémentaire représentatif) pour caractériser la distribution et le déplacement des fluides. Nous présenterons ensuite quelques problèmes associés à l'action des forces de capillarité, et quelques cas expérimentaux où elles jouent un rôle dominant. Dans ce cas, les phénomènes observés sont très différents suivant que le fluide initialement présent est progressivement chassé par un fluide qui mouille moins bien le matériau (processus de *drainage*), ou par un fluide qui le mouille mieux (processus *d'imbibition*).

Modèles de perméabilité relative

Analysons par exemple la pénétration par de l'eau d'un échantillon cylindrique initialement saturé d'huile (Fig. 8.25). Un premier paramètre important est la *saturation* en eau S_e du matériau poreux définie comme la fraction du volume des pores occupée par l'eau. On définit de même une saturation en huile S_h (si les pores sont complètement saturés et qu'aucun autre fluide n'est présent on a $S_h + S_e = 1$). S_e et S_h, ainsi que les vitesses débitantes locales $\mathbf{v}_{se}$ et $\mathbf{v}_{sh}$ respectives d'huile et d'eau, sont définies par moyennage sur un volume élémentaire représentatif, et varient lorsqu'on s'éloigne de la face d'injection. Au centre, il y a un domaine où les deux phases eau et huile sont continues ; aux deux extrémités, seule la phase eau ou la phase huile est continue.

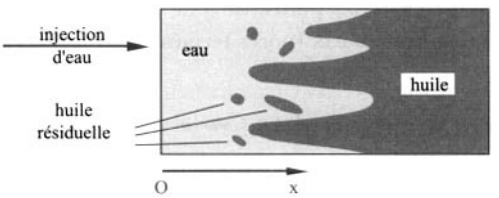


FIG. 8.25 – *Schéma de principe du déplacement d'huile par de l'eau dans un milieu poreux.*

On définit à une distance x donnée, des coefficients appelés perméabilités relatives moyennes k_{re} et k_{rh} par :

$$\frac{Q_e}{A} = \mathbf{v}_{se} = -K\frac{k_{re}}{\eta_e}(\mathbf{grad}\, p_e - \rho_e\, \mathbf{g}) \tag{8.122a}$$

et

$$\frac{Q_h}{A} = \mathbf{v}_{sh} = -K\frac{k_{rh}}{\eta_h}(\mathbf{grad}\, p_h - \rho_h\, \mathbf{g}) \tag{8.122b}$$

où K est la perméabilité moyenne de Darcy telle qu'on la mesurerait s'il n'y avait qu'une seule phase. Q_e et Q_h sont les débits d'eau et d'huile et A la section de l'échantillon. Cette approche généralise la loi de Darcy de la manière la plus simple possible, et prend en compte la présence des deux fluides en introduisant simplement les deux coefficients multiplicatifs supplémentaires k_{re} et k_{rh}. Les viscosités et les densités de l'eau et de l'huile sont η_e, ρ_e, η_h et ρ_h et les pressions p_e et p_h dans l'eau et l'huile peuvent être différentes en raison de la différence de pression capillaire de part et d'autre des ménisques d'interface eau–huile. Les formules (8.122a et b) incluent les variations de pression dues aux gradients de pression hydrostatiques qui sont différentes dans la phase eau et la phase huile. Ces équations supposent implicitement qu'il y a une distribution homogène d'eau et d'huile à l'échelle du volume de moyennage sur lequel on définit S_e ainsi que les débits Q_e et Q_h. Cette condition sera très difficile à vérifier dans les milieux poreux hétérogènes, ou en présence d'instabilités hydrodynamiques dues, par exemple, aux différences de viscosité entre les deux fluides.

Dans la pratique, on suppose souvent également que les perméabilités relatives k_{re} et k_{rh} ne dépendent que de la saturation locale S_e et non de l'histoire de l'écoulement. Il est alors possible de déterminer expérimentalement k_{re} et k_{rh} en fonction de S_e, en mesurant en fonction du temps les quantités d'eau et d'huile qui sortent de l'échantillon au cours du déplacement, ainsi que la variation temporelle de la différence de pression entre ses extrémités. Cette hypothèse très simplifiée n'est généralement pas vérifiée, en particulier si on compare une première invasion d'un échantillon initialement saturé d'un seul fluide avec des invasions réalisées après plusieurs injections de l'un et l'autre fluide. Aussi les mesures de perméabilité relative de routine sont-elles toujours effectuées avec une procédure expérimentale bien déterminée, de façon à fournir des résultats comparables d'un matériau à un autre.

La figure 8.26 montre l'allure typique de la variation de k_{re} et k_{rh} avec la saturation S_e. On constate que k_{re} s'annule pour une valeur finie S_{ei} non nulle de la saturation S_e : cela signifie que les gouttes ou les films d'eau présents à des saturations en eau plus faibles ne forment pas un chemin continu à travers l'échantillon et ne peuvent donc pas être mis en mouvement sous des gradients de pression faibles. De même, il faudra une saturation minimale $1 - S_{hi}$ en huile pour avoir un chemin continu d'huile et pour pouvoir mettre de l'huile en

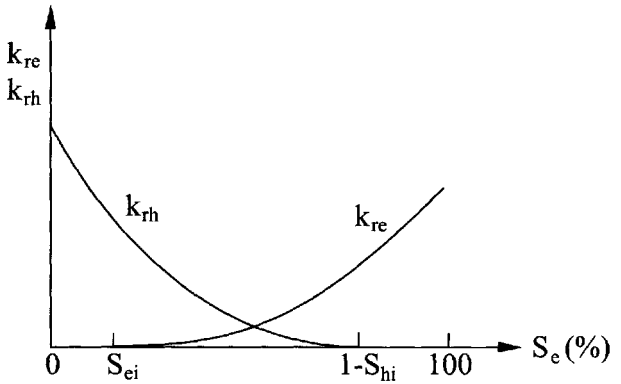


FIG. 8.26 – *Variation typique des perméabilités relatives pour l'eau k_{re} et pour l'huile k_{rh} en fonction de la saturation relative en eau dans l'espace des pores S_e. Les saturations résiduelles en eau et huile sont S_{ei} et S_{hi}.*

mouvement sous une faible différence de pression. La notion de perméabilité relative, malgré sa nature empirique, permet de rendre compte, en particulier, des profils des fronts d'invasion lorsqu'un fluide en chasse un autre à l'intérieur d'un massif poreux.

Effets de mouillabilité dans les écoulements diphasiques en milieux poreux

Nous nous plaçons dans la situation courante où le nombre capillaire Ca est assez faible pour que les effets capillaires deviennent importants, ou même dominants. Nous partons d'une situation où une phase unique remplit complètement – sature – l'espace des pores. Deux situations se rencontrent, comme nous l'avons dit plus haut.

♦ Drainage

Le fluide présent est progressivement chassé par un autre, mouillant moins bien le matériau. Ce sera le cas d'une roche saturée d'eau que l'on chasse par de l'air sous pression, ou de mercure qu'on force sous pression, dans un milieu poreux initialement vidé de fluide. Nous étudierons plus particulièrement ce dernier cas, qui correspond à la technique de *porosimétrie*, très utilisée en pratique et déjà évoquée plus haut (section 8.6.5). Par suite du caractère non mouillant du mercure, pour vaincre les forces de capillarité il est nécessaire d'appliquer une surpression Δp vérifiant pour un pore cylindrique de diamètre d :

$$\Delta p = \frac{4\gamma \cos \theta}{d} \tag{8.123}$$

où $\cos \theta$ est l'angle de mouillage et γ la tension superficielle du mercure (si

le ménisque est une calotte sphérique se raccordant aux parois avec un angle θ son rayon de courbure est en effet $R = d/(2.\cos\theta)$ et Δp est donnée par l'équation de Laplace (1.56)).

Remarque Lorsque l'échantillon a été évacué au départ, la surpression Δp coïncide avec la pression de fluide injecté, et on confond souvent les deux grandeurs. Ce n'est pas le cas si le poreux est initialement saturé d'un fluide compressible, dont la pression variera d'ailleurs au fur et à mesure de l'invasion.

Dans la technique de porosimétrie proprement dite, on mesure la variation du volume de mercure pénétrant dans l'échantillon en fonction de la surpression appliquée : la vitesse d'injection est choisie très faible, pour que l'influence des forces de viscosité soit négligeable et que seules les forces capillaires interviennent. Dans l'interprétation élémentaire de la mesure, on considère que le volume envahi pour une surpression Δp représente le volume total des pores de taille supérieure à la valeur de d reliée à Δp par l'équation (8.123). Cette vision est cependant trop simplifiée (et n'est pas vérifiée quantitativement par des comparaisons avec l'analyse d'images du poreux).

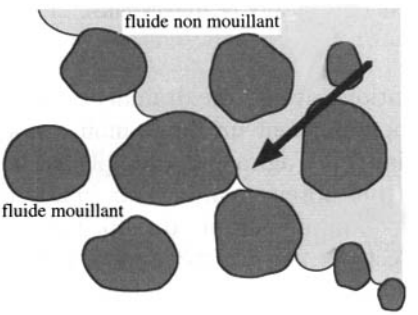


FIG. 8.27 – *Représentation schématique de la pénétration d'un fluide non mouillant à l'intérieur d'un milieu poreux rempli initialement d'un fluide mouillant.*

On peut comprendre la raison de ce désaccord sur le schéma de la figure 8.27 qui représente schématiquement la distribution des fluides à une étape de l'invasion, ainsi que les interfaces qui séparent la phase non mouillante (NM, ici le mercure) et la phase mouillante (M, ici le vide). Lorsqu'on augmente lentement la surpression Δp, le fluide NM déplace progressivement le fluide M d'un certain nombre de pores, à condition que ceux-ci aient un diamètre d supérieur à celui donné par la relation (8.123) et qu'ils soient connectés au front d'invasion ou à un des bords du milieu poreux. La progression du front s'effectue toujours sur les pores de plus grand diamètre. La fraction du poreux saturée de fluide NM augmente donc avec Δp, mais les pores et les canaux, même de grande ouverture, qui ne sont

connectés ni au front, ni à la paroi de l'échantillon, ne peuvent être envahis. En revanche, des volumes importants de poreux restant vides peuvent être brusquement remplis, dès qu'un canal étroit bloquant le passage vers eux est lui-même envahi. Ainsi, à une pression donnée Δp, une part significative des plus grands canaux restera vide ce qui rend complexe l'interprétation quantitative des mesures de porosimétrie.

La description du processus d'invasion très lente d'un poreux par un fluide non mouillant est un exemple particulier du phénomène général de *percolation*. Ce concept a été inventé en premier sur l'exemple d'un filtre initialement constitué de canaux ouverts interconnectés, que l'on bouche l'un après l'autre progressivement et au hasard. Le seuil de percolation correspond au moment où la perméabilité s'annule. Ce dernier exemple est en quelque sorte le complémentaire de l'exemple d'invasion décrit plus haut qui correspondrait au cas du débouchage progressif d'un filtre totalement bouché au départ. Dans le cas de porosimétrie à mercure, il s'agit bien d'établir de plus en plus de liens accessibles au fluide NM – le mercure – jusqu'à ce que la perméabilité à ce fluide apparaisse. Le phénomène de percolation s'inscrit dans la famille des phénomènes critiques, caractérisés par le fait que les propriétés au voisinage du seuil (par exemple la conductivité électrique ou la perméabilité) sont indépendantes des détails locaux et universelles.

♦ Imbibition

Il s'agit de l'opération inverse du drainage : un fluide mouillant bien le poreux remplace spontanément un fluide moins mouillant qui remplissait initialement le matériau. Il s'agira par exemple de la pénétration de l'eau (fluide mouillant) dans un poreux rempli d'air (fluide non mouillant), ce qui correspond bien à la définition courante du mot imbibition. Si, au contraire, on avait laissé l'eau s'écouler par gravité à partir d'un filtre rempli d'eau, on aurait un phénomène de drainage, où l'air moins mouillant pousse par gravité l'eau vers le bas.

Dans le cas de la récupération assistée du pétrole, il s'agit de déplacer par de l'eau une partie de l'huile présente dans les roches réservoir (l'huile peut souvent en effet être considérée comme le fluide le moins mouillant). Ici, ce sont les pores de plus grand diamètre qui sont les plus difficiles à remplir par le fluide injecté.

Mentionnons qu'il existe fréquemment des films continus du fluide mouillant le long des parois d'un milieu poreux, qui jouent un rôle clé dans le phénomène d'imbibition. Pour le cas du fluide non mouillant, des gouttes de ce fluide peuvent apparaître et se piéger au sein du milieu poreux. Elles représentent une quantité résiduelle de fluide qui subsiste à l'intérieur du milieu.

Chapitre 9

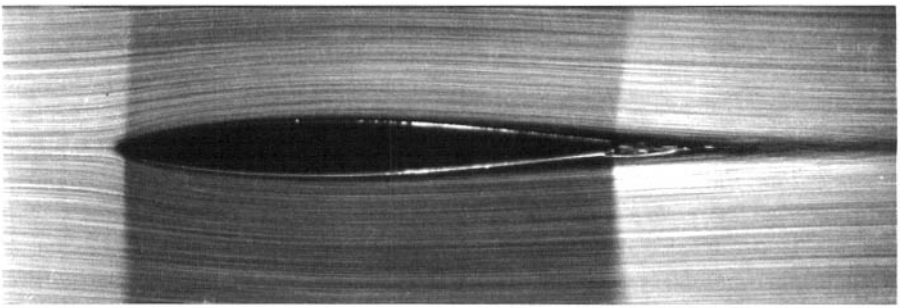
Couches limites laminaires

LA NOTION *de couche limite laminaire intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminaires à grand nombre de Reynolds autour d'un solide. Loin du corps, et tant que l'écoulement incident n'est pas turbulent, les termes de forces de viscosité de l'équation du mouvement (équation de Navier–Stokes) sont négligeables, et l'écoulement a pratiquement le profil qui correspondrait à celui d'un fluide parfait. Le raccordement entre la solution d'écoulement de fluide parfait et la condition de vitesse nulle sur les parois solides se fait sur une zone appelée couche limite, d'épaisseur d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est grand. Dans cette région, les termes de viscosité et de convection sont à prendre en compte simultanément. Ce chapitre est donc un complément nécessaire à l'étude du fluide parfait en écoulement potentiel, que nous avons présentée au chapitre 6.*

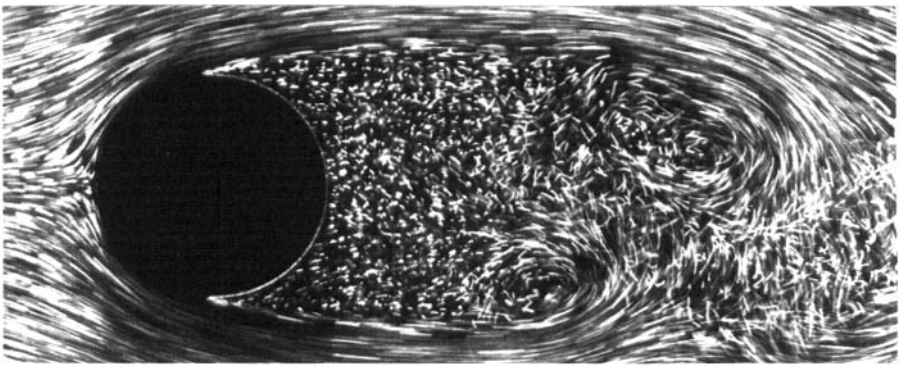
Après l'introduction, nous établirons, dans la section 9.2, la structure de la couche limite, en comparant les effets de la viscosité et de la convection. Celle-ci dégage la notion d'une double échelle de longueur pour les déplacements perpendiculaire et parallèle à l'obstacle. Puis, une approche plus fine dans les sections 9.3 et 9.4 nous permettra d'étudier de façon détaillée la structure autosimilaire des écoulements de couche limite. Nous évaluerons ensuite, à la section 9.5, l'effet supplémentaire d'un gradient de pression dans la direction de l'écoulement lorsque l'obstacle n'est pas parallèle à celui-ci. Le phénomène de décollement de couche limite est une cause importante de l'apparition d'écoulements turbulents ; paradoxalement, l'existence d'une turbulence dans la couche limite tend à limiter cet effet. La section 9.6 discute quelques applications de la couche limite en aérodynamique. L'existence de gradients de température ou de concentration au voisinage des parois d'un objet, entraîne l'existence de couches limites pour le transfert de chaleur ou de masse (couplées à celles correspondant à la vitesse). La section 9.7, qui traite ces problèmes, a de nombreuses applications en génie thermique et chimique. Enfin, la dernière section 9.8 considère le problème du sillage laminaire derrière un obstacle : celui-ci peut en effet être considéré comme une couche limite qui n'est pas localisée près d'une paroi solide.

9.1 Introduction

Dans un écoulement laminaire à grand nombre de Reynolds ($Re = UL/\nu \gg 1$) autour d'un solide, les termes de viscosité de l'équation du mouvement (Éq. (4.30)) ne sont à prendre en compte que dans une zone de petite épaisseur appelée *couche limite*. La vorticité générée près des parois est ensuite entraînée dans un sillage en aval (Fig. 9.1a). Nous verrons par ailleurs en fin de chapitre que, en aval d'un corps solide, les gradients de vitesse restent concentrés dans une faible partie du volume total de l'écoulement. Ainsi, l'étude des écoulement de fluides parfaits se trouve-t-elle justifiée *a posteriori*, puisque les profils d'écoulement correspondants seront utilisables presque partout : les effets de viscosité n'interviendront qu'à



(a)



(b)

FIG. 9.1 – *(a) Couche limite et sillage laminaires le long d'un profil d'aile placé sous incidence nulle dans un écoulement uniforme ; (b) couche limite décollée de la surface d'un corps mal profilé, avec présence d'un sillage important ; dans ce dernier cas, la taille du sillage est du même ordre de grandeur que celle de l'objet (clichés H. Werlé, ONERA).*

l'intérieur de la couche limite au voisinage d'une paroi solide, ou dans le sillage en aval du corps. La notion de couche limite représente ainsi le point de liaison entre deux domaines importants de la mécanique des fluides : l'étude des champs de vitesse de fluides parfaits en écoulement potentiel présentée au chapitre 6, et la détermination pratique de l'écoulement de fluides visqueux à un nombre de Reynolds fini.

Cette notion, due à L. Prandtl (1905), doit-être adaptée dans plusieurs situations pratiques :

- écoulements turbulents en amont du corps et/ou dans la couche limite ; le transport convectif de quantité de mouvement joue alors un rôle important et se substitue aux transferts diffusifs transverses que l'on a dans la couche limite laminaire. Les profils de vitesse d'écoulement sont, alors, considérablement modifiés. Il existe encore une couche limite, mais turbulente ;

- corps solides mal profilés : la couche limite n'existe alors que sur une partie de la surface du corps, et un *sillage* turbulent de largeur comparable à celle du corps apparaît en aval de celui-ci ; cela correspond au phénomène de *décollement* de couches limites, qui apparaît à la figure 9.1b. Dans ce cas, l'écoulement aval n'a plus rien à voir avec celui d'un fluide parfait, et la dissipation d'énergie ainsi que la force de traînée sur le corps sont considérablement augmentées.

Nous nous limiterons ici à l'étude des couches limites laminaires, à l'intérieur desquelles le champ de vitesse ne varie que lentement dans le temps. Nous reviendrons sur les caractéristiques propres aux écoulements turbulents au chapitre 11 (section 11.4.5).

9.2 Structure de la couche limite près d'une plaque plane dans un écoulement uniforme

Considérons un écoulement laminaire uniforme de vitesse $\mathbf{U}$ arrivant parallèlement à une plaque plane semi-infinie, d'arête parallèle à l'axe Oz et perpendiculaire au plan de la figure (Fig. 9.2). Si la vitesse est assez grande, l'influence de la plaque ne se fera pas sentir en amont de l'arête ; en effet, les gradients de vitesse n'auront pas diffusé sur une distance appréciable depuis l'arête de la plaque avant d'avoir été entraînés par l'écoulement en aval. Il en résulte que, près de l'arête, les gradients de vitesse et la vorticité seront concentrés très près de la paroi. Comme dans le problème de la mise en mouvement d'une plaque plane parallèlement à elle-même, étudié au chapitre 2 (section 2.1.2), les gradients de vitesse s'atténuent avec le temps ; en effet, la distribution spatiale de vorticité s'élargit par diffusion visqueuse à partir de la paroi sur une distance de l'ordre de :

$$\delta \approx \sqrt{\nu t}$$

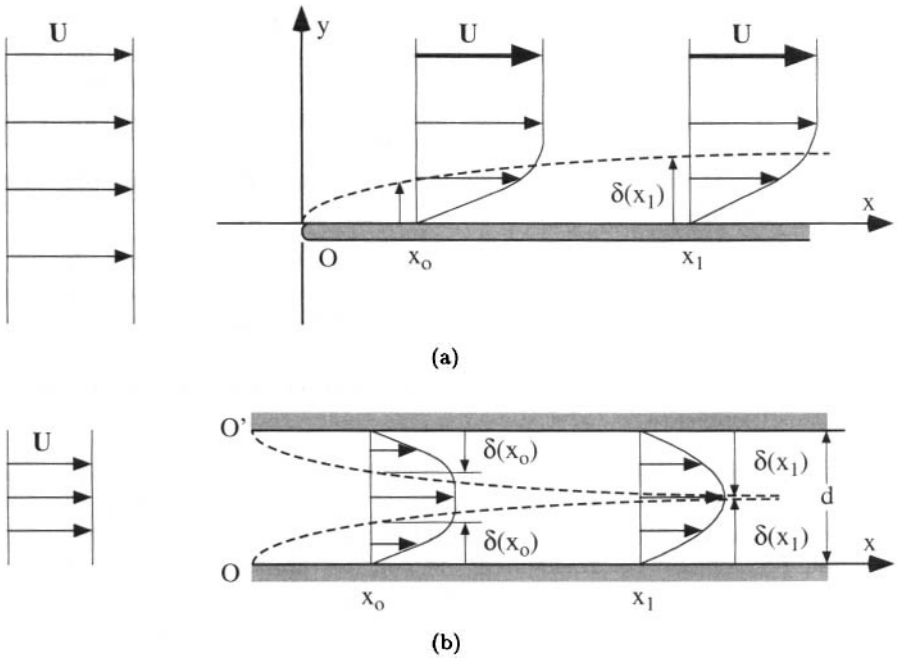


FIG. 9.2 – *(a) Développement d'une couche limite le long d'une plaque plane semi-infinie, d'arête perpendiculaire en O au plan de la figure, et placée dans un écoulement uniforme de vitesse U. Les gradients de vitesse générés près de la paroi, par suite de la condition de vitesse nulle sur la surface, diffusent perpendiculairement à la plaque, en même temps qu'il sont entraînés par l'écoulement. Notons qu'ici nous avons dilaté fortement l'échelle suivant Oy ; (b) effet d'entrée pour l'écoulement entre deux plaques planes semi-infinies parallèles placées dans un écoulement. Évolution du profil de vitesse avec la distance x à l'arête des plaques.*

où ν est la viscosité cinématique du fluide. Cependant, contrairement au cas du problème du chapitre 2, le fluide est, dans le même temps, entraîné parallèlement à la plaque avec une vitesse de l'ordre de la valeur U assez loin de la plaque. L'ordre de grandeur du temps t écoulé dans le référentiel du fluide en mouvement, pendant que celui-ci se déplace d'une distance x_0 vers l'aval à partir de l'arête de la plaque, vérifie donc :

$$t \approx \frac{x_0}{U} \cdot$$

En reportant cet ordre de grandeur de t dans l'expression de δ, on trouve que, à une abscisse x_0 par rapport à l'arête, les gradients de vitesse sont concentrés

sur une distance à la paroi de l'ordre de :

$$\delta(x_0) \approx \sqrt{\frac{\nu x_0}{U}} \tag{9.1a}$$

$\delta(x_0)$ représente donc l'épaisseur de la *couche limite* sur laquelle a lieu la transition entre l'écoulement de fluide parfait loin de la plaque et l'écoulement près de celle-ci ; ce dernier est contrôlé par la viscosité (qui impose, en particulier, la condition de vitesse nulle à la paroi). On a alors :

$$\frac{\delta(x_0)}{x_0} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U x_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}} \ll 1 \tag{9.1b}$$

où Re_{x_0} est le nombre de Reynolds local obtenu en prenant la distance x_0 à l'arête comme échelle locale de longueur. Ainsi, lorsque Re_{x_0} tend vers l'infini, l'épaisseur maximale de la couche limite devient très faible devant la taille caractéristique globale des parois. Ce résultat explique pourquoi, lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, le régime d'écoulement externe non turbulent d'un fluide visqueux se rapproche de celui d'un fluide parfait : en effet, l'épaisseur de la zone où les effets de la viscosité se font sentir tend vers zéro. Cela ne veut pas dire pour autant que les effets d'une telle couche, même infiniment mince, soient négligeables, bien au contraire : en effet, à partir des résultats établis au chapitre 5 (section 5.3.1), on trouve que la dissipation d'énergie due à une variation finie de vitesse sur une couche d'épaisseur infiniment faible est infinie. On parle ainsi de « perturbation singulière » pour décrire le passage à la limite ($\delta = 0$).

Remarque L'épaisseur δ de la couche limite, quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini, joue un rôle analogue à la longueur d'onde de de Broglie, qui est la petite échelle du problème dans l'approximation quasi-classique de la mécanique quantique. Une telle correspondance a conduit Heisenberg à une description de la turbulence aux très grands nombres de Reynolds, à partir de la perturbation de la solution de l'équation du mouvement du fluide à nombre de Reynolds infini.

Nous verrons plus loin dans la section 9.4.4 que le contour de la couche limite n'est pas une ligne de courant et que le débit à l'intérieur augmente comme $\sqrt{x_0}$. De plus, si Re_{x_0} prend une valeur trop élevée, la couche limite elle-même devient instable et turbulente : les évaluations précédentes ne sont plus valables, car le transport de quantité de mouvement par convection turbulente fait augmenter δ beaucoup plus rapidement que dans le cas laminaire.

Un phénomène étroitement lié à l'existence de la couche limite est l'effet de *longueur d'entrée*, qui retarde le développement d'un profil d'écoulement stationnaire près de l'ouverture amont d'une conduite. La figure 9.2b schématise ce processus, dans le cas simple d'un écoulement entre deux plaques semi-infinies perpendiculaires au plan de figure et distantes de d. À une faible distance x_0 des arêtes O et O' qui limitent les deux plaques, on a une vitesse

presque uniforme entre les plaques avec un module égal à la valeur U en amont. La transition avec la condition de vitesse nulle à la surface des plaques se fait sur la faible épaisseur locale $\delta(x_0)$ de la couche limite. Au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers l'aval, l'épaisseur $\delta(x)$ augmente, et les deux couches limites finissent par se rejoindre à une distance x_1 (Fig. 9.2b) : x_1 représente donc la longueur nécessaire pour que s'établisse, entre les deux plans, le profil de vitesse parabolique stationnaire que nous avons déterminé au chapitre 4 (section 4.5.3). Estimons cette distance x_1 à partir de l'équation (9.1a) en écrivant que $\delta(x_1) \approx d/2$. On trouve :

$$\frac{x_1}{\mathrm{d}} \approx \frac{Ud}{\nu} \approx Re_d$$

où Re_d est le nombre de Reynolds construit à partir de la vitesse U et de la distance d entre plaques. On constate qu'on obtient le profil stationnaire d'autant plus loin que Re_d est plus élevé (ainsi, pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 100 ou 1 000, la distance d'établissement est de l'ordre de 100 ou 1 000 fois la distance d). Pour une conduite cylindrique, le comportement est qualitativement le même.

Remarque Un raisonnement du même type permet d'analyser le profil de vitesse derrière un obstacle aux nombres de Reynolds où apparaît une zone de recirculation stationnaire (Fig. 2.8b). On peut ainsi justifier pourquoi la longueur L de cette zone augmente proportionnellement au nombre de Reynolds.

9.3 Équations de mouvement dans la couche limite – théorie de Prandtl

9.3.1 Équations de mouvement près d'une plaque plane

Analysons l'écoulement bidimensionnel stationnaire dans le plan (xOy) près d'une plaque plane $y = 0$, pour un écoulement extérieur potentiel $U(x)$ qu'on supposera parallèle à la paroi. Les résultats que nous allons obtenir resteront valables pour des parois courbes, dont le rayon de courbure est très supérieur à l'épaisseur δ de la couche limite.

La dimension caractéristique dans la direction parallèle à l'écoulement est localement, en un point M donné, de l'ordre de sa distance x_0 à l'arête (Fig. 9.3). La dimension caractéristique, perpendiculairement à l'écoulement, est l'épaisseur locale de la couche limite $\delta(x_0)$ qui est très inférieure à x_0 (relations (9.1(a et b)). Tout le raisonnement qui suit est basé sur l'existence de ces *deux échelles de longueur très différentes* suivant les directions parallèle et perpendiculaire à la paroi.

L'écoulement étudié étant bidimensionnel et incompressible, l'équation de conservation de la masse s'écrit donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{9.2}$$

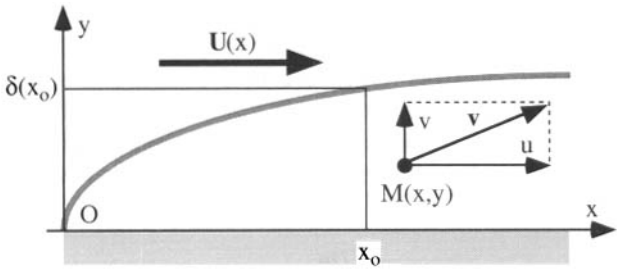


FIG. 9.3 – *Géométrie pour l'étude de la couche limite le long d'une plaque plane placée dans un écoulement de vitesse $U(x)$ parallèle à la plaque ; $\delta(x_0)$ représente l'ordre de grandeur de l'épaisseur locale de la couche limite en un point d'abscisse x_0 en aval de l'arête de la plaque.*

où u et v sont les composantes de la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide respectivement dans les directions x et y. L'équation (9.2) montre que la composante de la vitesse perpendiculaire à la paroi est d'un ordre de grandeur inférieur à la composante parallèle avec :

$$v \approx u\frac{\delta(x_0)}{x_0} = \frac{u}{\sqrt{Re_{x_0}}} \ll u. \tag{9.3}$$

On a également :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u}{\delta^2(x_0)} \gg \frac{u}{x_0^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ce qui permet de négliger ce dernier terme. En revanche, le terme $v\dfrac{\partial u}{\partial y}$ est du même ordre de grandeur que $u\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot$ En effet :

$$v\frac{\partial u}{\partial y} \approx u\frac{\delta(x_0)}{x_0}\frac{u}{\delta(x_0)} = \frac{u^2}{x_0} \approx u\frac{\partial u}{\partial x}\cdot$$

La faible valeur de v est compensée par la forte valeur du gradient $\partial u/\partial y$ dans la direction normale à la paroi, suivant laquelle les échelles de longueur sont les plus faibles.

Les composantes suivant Ox et Oy de l'équation de Navier-Stokes s'écrivent donc, en tenant compte de ces inégalités :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{9.4}$$

et

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cdot \tag{9.5}$$

On passe de l'équation (9.4) à l'équation (9.5) en remplaçant $\partial p/\partial x$ par $\partial p/\partial y$ et en substituant la composante v à u dans les trois autres termes ; comme v est très inférieur à u, ces trois termes seront d'un ordre de grandeur inférieur aux termes correspondants de l'équation (9.4). Les variations de pression dans la direction y n'ont donc qu'une influence négligeable sur le profil de vitesse par rapport aux variations dans la direction x qui interviennent dans l'équation (9.4). On prendra donc :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{9.6}$$

d'où

$$p = p(x). \tag{9.7}$$

Ce résultat est similaire à l'absence de gradient de pression perpendiculairement aux lignes de courant d'un écoulement parallèle, propriété que nous avons démontrée à la section 5.3.2 du chapitre 5 (ici l'écoulement n'est que quasi-parallèle).

En dehors de la couche limite, les effets de la viscosité sont négligeables, et on peut appliquer l'équation de Bernoulli comme pour un fluide parfait, soit :

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2(x) = \text{constante} \tag{9.8}$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho U(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0. \tag{9.9}$$

En combinant la relation (9.4) avec l'équation (9.9), on obtient :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot \tag{9.10}$$

Remarque Au bord de la couche limite, à la distance $\delta(x_0)$ de la paroi, le terme de transport de quantité de mouvement par convection $u(\partial u/\partial x)$ et le terme de transport de quantité de mouvement par diffusion visqueuse $\nu(\partial^2 u/\partial y^2)$ sont du même ordre de grandeur. En effet $u(\partial u/\partial x)$ est de l'ordre de (U^2/x_0), tandis que $\nu(\partial^2 u/\partial y^2)$ vérifie, pour $y \approx \delta(x_0)$:

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \nu\frac{U}{\delta^2(x_0)} \approx \nu U\frac{U}{\nu x_0} \approx \frac{U^2}{x_0}\cdot$$

9.3.2 Transport de vorticité dans la couche limite

L'équation générale du transport de la vorticité dans un fluide newtonien (Éq. (7.36)) s'écrit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v} + \nu\, \Delta \boldsymbol{\omega}. \tag{9.11}$$

Elle se simplifie dans le cas présent, car seule la composante ω_z est non nulle : le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v}$ est donc nul et, par ailleurs l'écoulement est stationnaire. On obtient donc :

$$u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \cdot \tag{9.12}$$

Cette équation exprime l'équilibre entre les transports de vorticité par convection et par diffusion. Les variations de ω_z associées à l'étirement des tubes de vorticité n'interviennent en effet pas, en raison du caractère bidimensionnel de l'écoulement (nous avons analysé ces propriétés au chapitre 7 consacré à l'étude de la vorticité).

9.3.3 Autosimilitude des profils de vitesse dans la couche limite, dans le cas d'une vitesse extérieure uniforme et constante

Comme nous l'avons déjà vu plus haut, les échelles de longueur x_0 et $\delta(x_0)$ parallèle et perpendiculaire à la paroi sont très différentes. Il en est de même des échelles correspondantes de vitesse $u(\approx U)$ et $v \approx (U/\sqrt{Re})$. De plus, il n'existe pas une seule échelle de longueur caractéristique valable pour tous les points de l'écoulement. Nous utiliserons localement *deux* échelles de longueur différentes :

- la distance x_0 à l'arête de la plaque parallèlement à celle-ci ;
- l'épaisseur locale $\delta(x_0) \approx \sqrt{\dfrac{\nu x_0}{U}} \approx \dfrac{x_0}{\sqrt{Re_{x_0}}}$ de la couche limite dans la direction y perpendiculaire à la paroi.

Écrivons alors l'équation de Navier-Stokes, en utilisant un ensemble de variables sans dimension (que nous notons par des « primes ») définies à partir de ces deux échelles de longueur et des deux échelles de vitesse correspondantes :

- U parallèlement à la plaque ;
- $\dfrac{U}{\sqrt{Re_{x_0}}}$ perpendiculairement à celle-ci (relation (9.3)).

Nous avons alors :

$$x' = \frac{x}{x_0} \tag{9.13a}$$

$$y' = \frac{y}{\delta(x_0)} = \frac{y}{\dfrac{x_0}{\sqrt{Re_{x_0}}}} \tag{9.13b}$$

$$u' = \frac{u}{U} \tag{9.13c}$$

$$v' = \frac{v}{\dfrac{U}{\sqrt{Re_{x_0}}}} \cdot \tag{9.13d}$$

Les équations (9.2) et (9.10) deviennent alors :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \tag{9.14}$$

et

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \cdot \tag{9.15}$$

Nous nous sommes placés dans le cas où la vitesse U est constante à l'extérieur de la couche limite ; le terme $U(x)\,(\partial U(x)/\partial x)$ est donc nul, et $\partial p/\partial x = 0$ d'après la relation (9.9).

On constate que le terme de transport de quantité de mouvement par viscosité joue, dans la relation (9.15), un rôle aussi important que les termes convectifs, ce qui correspond bien à la réalité physique. Ce n'est pas le cas pour la limite, à nombre de Reynolds infini, de l'équation de Navier–Stokes sans dimension obtenue en utilisant une seule échelle de longueur ; en effet, on aboutit alors simplement à l'équation d'Euler des fluides parfaits établie au chapitre 4 (section 4.2.3). C'est l'utilisation de deux échelles de longueur différentes, perpendiculairement et parallèlement à la paroi, qui permet de tenir compte du rôle de la viscosité dans la faible épaisseur de couche limite près des parois.

Les solutions des équations (9.14) et (9.15) sont de la forme :

$$u' = f(x', y') \tag{9.16}$$

et

$$v' = g(x', y') \tag{9.17}$$

soit :

$$u = U\,f\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{\delta(x_0)}\right) \cdot \tag{9.18}$$

Et :

$$v = \sqrt{\frac{\nu U}{x_0}}\, g\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{\delta(x_0)}\right) \tag{9.19}$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{\nu U}{x}}\, h\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{\delta(x_0)}\right) \tag{9.20}$$

avec, $h = \sqrt{x/x_0}\, g$. Les composantes u et v dépendent, *a priori* séparément, des deux variables x/x_0 et $y/\delta(x_0)$. Montrons que les fonctions f et h ne peuvent pas faire intervenir indépendamment ces deux variables, mais seulement une combinaison dans laquelle n'apparaît pas x_0 : le choix initial de l'échelle de longueur x_0 parallèlement à la plaque étant arbitraire, la solution finale du problème ne saurait, en effet, en dépendre. Formons la combinaison sans dimension :

$$\theta = \frac{y'}{\sqrt{x'}} = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}} \tag{9.21}$$

qui est indépendante de x_0.

On en déduit :

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}\right) = f(\theta) \tag{9.22}$$

et

$$\frac{v}{U} = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}\, h\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}\right) = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}\, h(\theta). \tag{9.23}$$

Un tel profil est dit *autosimilaire* : la variation de la composante u de la vitesse avec la distance y à la surface de la plaque est toujours la même, à un facteur d'échelle $\sqrt{\nu x/U}$ près, lorsque la distance x à l'arête de la plaque change.

La notion de profil autosimilaire et la méthode que nous avons utilisée sont très générales. Nous avons déjà rencontré un exemple de profil autosimilaire au chapitre 2 (section 2.1.2) dans l'étude de l'écoulement induit par la mise en mouvement d'une plaque plane parallèlement à elle-même. Dans ce cas, le profil de vitesse ne dépendait que de la combinaison sans dimension $y/\sqrt{\nu t}$, de la distance y à la plaque et du temps t, qui est l'analogue, pour ce problème instationnaire, de la distance x à l'arête de la plaque pour la couche limite stationnaire que nous étudions ici. Nous en verrons un autre exemple à la fin de ce chapitre, où nous étudierons la forme du profil de vitesse transverse dans un sillage laminaire derrière un corps solide. On retrouve des profils autosimilaires pour les jets et les couches de mélange entre deux fluides de vitesses différentes, aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent.

Remarque La propriété d'autosimilarité du profil de vitesse dans la couche limite est observée dès qu'il n'existe pas de longueur caractéristique dans le profil de vitesse à l'extérieur de la couche limite ; nous venons d'en voir un exemple dans le cas de la plaque plane. Un autre exemple est constitué par la famille d'écoulements de la forme $U(x) = Cx^m$ qui correspond à l'écoulement au voisinage d'un dièdre, introduits au chapitre 6 (section 6.6.2.(iv)) et que nous retrouverons à propos du comportement d'une couche limite en présence d'un gradient de pression de l'écoulement extérieur (section 9.5.2).

9.4 Profils de vitesse dans les couches limites

9.4.1 Équation de Blasius pour un écoulement extérieur uniforme le long d'une plaque plane

On cherche à déterminer l'équation différentielle vérifiée par le champ de vitesse à l'intérieur de la couche limite, le long d'une plaque plane placée dans un écoulement uniforme de vitesse **U**, parallèle à son plan. On exprime pour cela la composante de vitesse $u(x, y)$ en fonction de la variable réduite θ, introduite dans l'équation (9.21) et du module U de la vitesse avec (Éq. (9.22)) :

$$u(x, y) = U\, f(\theta) \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}\,.$$

En reportant ces expressions dans les équations (9.2) et (9.10), valables dans la couche limite, on obtient *l'équation* dite *de Blasius* :

$$f''(\theta) = -\frac{1}{2} f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{9.24}$$

Démonstration Utilisons la condition d'incompressibilité (9.2) et exprimons la variable y en fonction de x et de θ.

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = U f'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} = -U f'(\theta) \frac{\theta}{2x}\,. \tag{9.25}$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial y} \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\,. \tag{9.26}$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{\nu U}{x}}\, \theta\, \frac{f'(\theta)}{2} \tag{9.27}$$

d'où, après une intégration par parties, par rapport à θ à x constant (on appelle ξ la variable d'intégration entre 0 et θ) :

$$v = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(\frac{1}{2}\theta\, f(\theta) - \frac{1}{2} \int f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right). \tag{9.28}$$

La constante d'intégration qui fixe les bornes de l'intégrale dans l'expression de v sera déterminée plus bas à partir des conditions aux limites. Calculons les termes de l'équation (9.10) en remplaçant v par l'expression précédente :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{9.29}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U^2}{x} \left(-\theta\, f(\theta) \frac{f'(\theta)}{2} \right) \tag{9.30}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U^2}{x} f'(\theta) \left(\frac{1}{2}\theta\, f(\theta) - \frac{1}{2} \int f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) \tag{9.31}$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{x} f''(\theta). \tag{9.32}$$

On obtient alors :

$$f''(\theta) = -\frac{1}{2} f'(\theta) \int f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{9.33}$$

en combinant les différents termes de l'équation (9.10) que nous venons de calculer, et en simplifiant par U^2/x. Cela permet d'éliminer complètement la variable x de l'équation, et confirme la propriété d'autosimilitude (θ est en effet la seule variable restante). Déterminons maintenant les bornes d'intégration dans les équations (9.28) et (9.33) à partir des conditions aux limites à la surface de la plaque et à l'infini. On a en effet :

$$\frac{u(y=0)}{U} = f(\theta = 0) = 0 \tag{9.34a}$$

et

$$\frac{v(y=0)}{\sqrt{\nu U/x}} = \frac{v(\theta=0)}{\sqrt{\nu U/x}} = 0 \tag{9.34b}$$

et

$$\lim_{y \to \infty} \frac{u}{U} = \lim_{\theta \to \infty} f(\theta) = 1. \tag{9.34c}$$

La condition (9.34b) fixe les bornes d'intégration dans l'expression (9.28) de v, qui devient :

$$v = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(\frac{1}{2}\theta f(\theta) - \frac{1}{2} \int_0^\theta f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right). \tag{9.35}$$

De même, ces conditions fixent les bornes de l'intégrale qui apparaît dans l'équation (9.33) : celle-ci prend alors bien la forme de l'équation (9.24).

9.4.2 Résolution approchée de l'équation de Blasius

La dérivée de l'équation de Blasius (9.24) s'écrit :

$$f'''(\theta) = -\frac{1}{2}\left(f'(\theta)\,f(\theta) + f''(\theta)\int_0^\theta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right). \tag{9.36}$$

Pour $\theta = 0$, on a $f(0) = 0$ (condition (9.34a)) et, d'après l'équation (9.24), $f''(0) = 0$; on en déduit que $f'''(0) = 0$. Ainsi, aux faibles valeurs de θ, la variation de la composante de vitesse u parallèle à la plaque en fonction de la distance à celle-ci, reste pratiquement linéaire et peut s'exprimer sous forme d'un développement limité :

$$\frac{u(\theta)}{U} = f(\theta) \approx \theta\, f'(0) + b\,\theta^4 + O(\theta^5). \tag{9.37}$$

Reportons ce développement dans l'équation (9.36) et écrivons l'égalité des termes d'ordre θ. On trouve :

$$b = -\frac{1}{48} f'^2(0). \tag{9.38}$$

Ainsi :

- la concavité du profil $f(\theta)$ est dirigée vers l'amont de l'écoulement (Fig. 9.4) ;
- même pour une valeur de θ aussi élevée que 2, la correction relative $b\theta^3$ par rapport à une variation linéaire est seulement de l'ordre de $f'(0)/6$.

Dans la limite opposée des grandes valeurs de θ, $f(\theta)$ tend vers 1 (Éq. (9.34c)) et $\int_0^\theta f(\xi)\mathrm{d}\xi$ devient de l'ordre de θ. L'équation de Blasius (9.24) tend donc vers la forme limite :

$$f''(\theta) \approx -\frac{1}{2}\,\theta\, f'(\theta). \tag{9.39}$$

En intégrant cette expression, on trouve que $f'(\theta)$ est de l'ordre de $K\,\mathrm{e}^{-\theta^2/4}$. Ainsi, le profil $f\theta)$ rejoint exponentiellement sa valeur asymptotique 1 : dès que θ vaudra 4 ou 5, $f'(\theta)$ sera en effet de l'ordre de quelques millièmes. Ce résultat confirme toute la valeur de la notion de couche limite : dès qu'on s'éloigne de la paroi, on retrouve pratiquement l'écoulement uniforme extérieur. En combinant les deux limites précédentes ($\theta \to 0$ et $\theta \to \infty$), on peut prédire que $f(\theta)$ passera d'une manière abrupte d'une variation linéaire à sa valeur asymptotique. On retrouve ce résultat par une intégration numérique de l'équation de Blasius, dont le résultat apparaît à la figure 9.4. On obtient :

$$f'(0) = 0,332 \approx \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad f(\theta = 5) = 0,99.$$

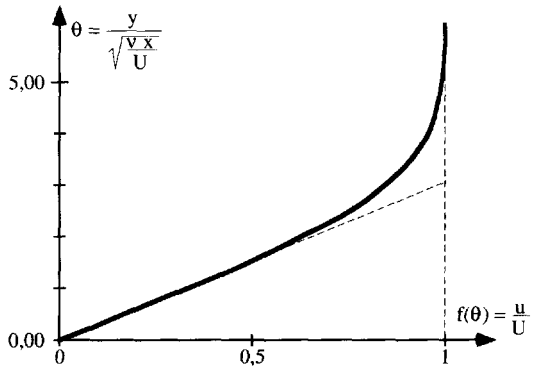


FIG. 9.4 – *Forme de la variation de la composante de vitesse parallèle à la plaque en fonction de la coordonnée sans dimension θ, qui correspond à la distance y perpendiculaire à la plaque normalisée par une longueur construite avec la variable x.*

Dans le cas des écoulements de couches limites turbulentes, nous verrons au chapitre 11 que la vitesse rejoint plus lentement sa valeur asymptotique.

Évaluation simple de la pente $f'(0)$ du profil de vitesse au voisinage de la plaque :

L'ordre de grandeur de la valeur $f'(0)$ de la pente à l'origine peut être trouvé à partir du développement approché de la formule (9.37). Celui-ci prédit une variation initiale très linéaire, suivie d'un arrondi brusque (correspondant au coude du profil présenté sur la figure 9.4), après lequel $f(\theta)$ atteint un maximum pour une valeur θ_m obtenue en dérivant la relation (9.37) par rapport à θ :

$$\theta_m = \left(\frac{12}{f'(0)}\right)^{\frac{1}{3}} . \tag{9.40}$$

La valeur maximale de $f(\theta)$ correspondante devra être proche de 1 (la valeur asymptotique est rejointe très rapidement – exponentiellement – par le profil de vitesse après le coude). On a donc, en première approximation :

$$f(\theta_m) = \theta_m f'(0) - \frac{1}{48} f'^2(0)\, \theta_m^4 = 1$$

en remplaçant θ_m par sa valeur l'équation (9.40) on trouve :

$$f'(0) = 0,29 \qquad \text{et} \qquad \theta_m = 3,44$$

qui sont deux approximations très acceptables des résultats de l'intégration numérique donnés plus haut.

La résolution de l'équation de Blasius (9.24) est un bon exemple de problème de raccordement entre des solutions simples, mais valables uniquement dans des domaines limités (ici $\theta \ll 1$ et $\theta \gg 1$). Cette méthode,

dite de *raccordement asymptotique*, est très générale en mécanique des fluides. Nous en avons vu un autre exemple au chapitre 8 (section 8.4.4) avec les écoulements à petit nombre de Reynolds autour d'une sphère. Il s'agissait alors de raccorder la solution de l'équation de Stokes valable près de la sphère, avec celle de l'équation d'Oseen utilisable à grande distance.

9.4.3 Force de frottement sur une plaque plane dans un écoulement uniforme

Pour un écoulement suivant Ox, la valeur à la distance x de l'arête de la force de frottement par unité de surface, sur la surface de normale orientée suivant y ($n_y = 1$, $n_x = n_z = 0$), est la composante de la contrainte :

$$\sigma_{xy} = \eta \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = \eta\, U\, f'(0) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \eta\, U\, f'(0) \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \tag{9.41}$$

ou, en faisant apparaître un terme de la forme $\rho\, U^2$, homogène à une pression :

$$\sigma_{xy} = \rho\, U^2\, f'(0) \sqrt{\frac{\nu}{U x}}\,. \tag{9.42}$$

Pour obtenir la force totale exercée par le fluide sur la plaque, nous intégrons σ_{xy} par rapport à x sur l'ensemble des deux faces de la plaque plane (longueur L dans la direction de l'écoulement, largeur unité). On trouve

$$F_{\text{totale}} = 2\, \rho\, U^2\, f'(0) \sqrt{\frac{\nu}{U}} \int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 4\, \rho\, U^2\, f'(0) \sqrt{\frac{\nu L}{U}}\,. \tag{9.43}$$

Construisons un nombre de Reynolds ($Re_L = UL/\nu$) à partir de la dimension caractéristique L de la plaque dans la direction de l'écoulement et prenons $f'(0) \approx \dfrac{1}{3}$. Nous obtenons alors :

$$F_{\text{totale}} = \frac{4}{3}\, \rho\, U^2 L \sqrt{\frac{1}{Re_L}}\,. \tag{9.44}$$

Le coefficient de traînée C_d est obtenu en normalisant la force par unité de surface par le produit de la pression dynamique ($1/2\, \rho\, U^2$) et par la surface en contact avec le fluide ($2L$). D'où :

$$C_d = \frac{F_{\text{totale}}}{\rho\, U^2\, L} = \frac{1,33}{\sqrt{Re_L}}\,. \tag{9.45}$$

Cette variation du coefficient C_d en $1/\sqrt{Re_L}$ est plus lente que la variation en $1/Re_L$, obtenue dans le cas des écoulements aux petits nombres de Reynolds, dans lesquels le transport est assuré par diffusion visqueuse (chapitre 8, formule (8.18)). Le transport de quantité de mouvement par diffusion

visqueuse est en effet concentré dans la faible épaisseur de la couche limite et est favorisé par la présence de gradients de vitesse plus importants que lorsque le nombre de Reynolds est très inférieur à l'unité. En revanche, la variation est plus rapide que pour les écoulements turbulents (chapitre 11) : dans ce dernier cas, le transport convectif domine, la force est proportionnelle au carré de la vitesse, et C_d est approximativement constant.

9.4.4 Épaisseurs de couche limite

Nous avons démontré que, en présence d'un écoulement de vitesse U, l'épaisseur de la couche limite varie comme $\sqrt{\nu x/U}$. Pour préciser le coefficient de proportionnalité, la définition la plus simple consiste à prendre l'épaisseur de couche limite δ égale à la valeur de y pour laquelle $f(\theta) = u(y)/U$ a une valeur donnée. Ainsi $\delta_{0,99}$ (correspondant à $u/U = 0,99$) vérifie :

$$\delta_{0,99} = 5\sqrt{\frac{\nu\, x}{U}}\,. \tag{9.46}$$

Nous donnons par la suite deux autres définitions de l'épaisseur d'une couche limite, dont l'expression ne diffère de celle donnée précédemment que par un facteur numérique.

(i) Épaisseur de déplacement δ^*

Cette définition plus universelle correspond au déplacement δ^* des lignes de courant de l'écoulement potentiel extérieurement à la couche limite. Ce déplacement varie avec la distance à l'arête de la plaque dans la direction de l'écoulement. Pour évaluer la quantité δ^*, écrivons la variation du débit volumique à l'intérieur d'un tube de courant de largeur unité suivant la perpendiculaire au plan de la figure 9.5, et d'épaisseur D en amont de la plaque (D doit être très largement supérieur à δ^*) :

$$\int_0^D U\,\mathrm{d}y = \int_0^{D+\delta^*} u\,\mathrm{d}y = \int_0^{D+\delta^*} (u-U)\,\mathrm{d}y + \int_0^{D+\delta^*} U\,\mathrm{d}y. \tag{9.47}$$

Si D est assez grand, on peut considérer que $(u - U)$ est égal à 0 au-delà de la distance $(D + \delta^*)$ et admettre l'égalité :

$$\int_0^{D+\delta^*} (u-U)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} (u-U)\,\mathrm{d}y. \tag{9.48}$$

La relation (9.47) devient alors, si l'écoulement est uniforme :

$$U\,D - U(D+\delta^*) = \int_0^{\infty} (u-U)\,\mathrm{d}y \tag{9.49}$$

soit :

$$\delta^*(x) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u(x,\,y)}{U}\right)\mathrm{d}y. \tag{9.50}$$

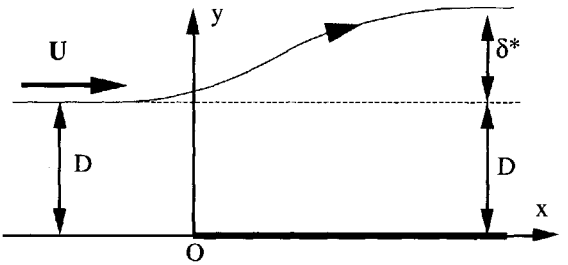


FIG. 9.5 – *Évaluation de l'épaisseur de la couche limite le long d'une plaque plane, à partir du déplacement δ^* des lignes de courant de l'écoulement extérieur à la couche limite (l'échelle verticale est fortement dilatée).*

On obtient ensuite numériquement :

$$\delta^* = 1,73\sqrt{\frac{\nu\, x}{U}}\,. \tag{9.51}$$

(ii) Épaisseur de quantité de mouvement δ^{**}

De manière analogue à l'épaisseur de déplacement, on peut définir des épaisseurs de couche limite à partir de la variation de quantité de mouvement à l'intérieur d'un tube de courant ou à partir de la variation d'énergie cinétique. Ainsi :

$$\delta^{**} = \frac{\text{flux de quantité de mouvement en amont} - \text{flux à la distance x}}{\rho U^2} \tag{9.52a}$$

soit :

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u(U-u)}{U^2}\,\mathrm{d}y. \tag{9.52b}$$

Pour un écoulement extérieur uniforme, on obtient :

$$\delta^{**}(x) = 0,66\sqrt{\frac{\nu\, x}{U}}\,. \tag{9.53}$$

9.4.5 Stabilité hydrodynamique d'une couche limite laminaire – Couches limites turbulentes

Dans ce chapitre, jusqu'à présent, nous avons défini des nombres de Reynolds avec, comme échelles de longueur, les distances dans la direction de l'écoulement. Nous avons ainsi utilisé $Re_{x_0} = Ux_0/\nu$ et $Re_L = UL/\nu$, où x_0 et L sont respectivement la distance locale à l'arête de la paroi et la longueur totale de celle-ci suivant l'écoulement : les critères $Re_{x_0} \gg 1$

et $Re_L \gg 1$ doivent être vérifiés pour que l'épaisseur δ de la couche limite soit faible devant x_0 et L. La stabilité d'une couche limite laminaire est, en revanche, déterminée par la valeur d'un nombre de Reynolds local qui utilise l'épaisseur de la couche limite comme échelle de longueur (de même, pour déterminer si dans un tube l'écoulement est laminaire ou turbulent, on prend pour longueur caractéristique dans le nombre de Reynolds le diamètre du tube et non sa longueur). On définit par exemple :

$$Re_{\delta_{0,99}} = \frac{U\,\delta_{0,99}}{\nu} \propto \sqrt{\frac{U\,x}{\nu}}\,. \tag{9.54}$$

Ce nombre augmente comme la racine carrée de la distance x à l'arête. Aussi, même à des vitesses d'écoulement élevées, les instabilités hydrodynamiques n'apparaîtront qu'au-delà d'une certaine distance de l'arête. Elles prendront la forme d'oscillations régulières de la vitesse dans le plan xy puis de fluctuations tridimensionnelles. Au-delà d'une certaine amplitude des fluctuations, des zones turbulentes apparaissent. À vitesse encore plus élevée, l'ensemble de la couche limite présente des fluctuations rapides de la vitesse locale instantanée. Nous étudierons au chapitre 11 (section 11.4.5) les caractéristiques de ces *couches limites turbulentes* où, dès qu'on s'éloigne un peu de la plaque, le transport de quantité de mouvement n'est plus effectué par la viscosité, mais par les fluctuations turbulentes de la vitesse.

9.5 Couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression externe : décollement des couches limites

9.5.1 Analyse physique simplifiée du problème

Supposons que la vitesse de l'écoulement potentiel extérieur $U(x)$ décroisse avec la distance x en aval de l'arête de la paroi, comme, par exemple, dans le cas d'un écoulement divergent. En dehors de la couche limite, la pression $p(x)$ augmente avec la distance, car le gradient de pression $\partial p/\partial x$ dans cette direction vérifie l'équation de Bernoulli (voir Éq. (9.9)) :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\,U\,\frac{\partial U}{\partial x} > 0. \tag{9.55}$$

Par ailleurs, comme, d'après l'équation (9.6), les variations de pression dans la direction transverse sont négligeables, on retrouve le même gradient de pression longitudinal à l'intérieur de la couche limite. Ainsi, dans les zones de faible vitesse près de la paroi, la dynamique des éléments de fluide résulte de deux influences opposées : d'une part, le gradient de pression $\partial p/\partial x$ positif freine leur déplacement et, d'autre part, l'apport de quantité de mouvement par diffusion visqueuse à partir des zones de plus grande vitesse les accélère. Si le gradient de vitesse $\partial U/\partial x$ est suffisamment grand en valeur absolue,

on aura donc renversement local du sens de l'écoulement près de la paroi. Ce phénomène est appelé *décollement des couches limites*. Dans le cas opposé d'un gradient de vitesse positif vers l'aval, le gradient de pression $\partial p/\partial x$ correspondant est négatif ; le fluide proche de la paroi est accéléré et la couche limite s'amincit.

9.5.2 Profils de vitesse autosimilaires – écoulements de la forme $U(x) = Cx^m$

Au chapitre 6 (section 6.6.2(iv)), nous avons vu que le potentiel complexe $f(z) = C\,z^{m+1}$ décrit l'écoulement le long de deux demi-plans solides formant entre eux un angle $\pi/(m+1)$. Le long du plan $\theta = 0$, la vitesse se réduit à sa composante radiale :

$$v_r = C\,(m+1)\,r^m$$

où le rayon vecteur r est égal, dans le plan, à la distance x à l'arête de l'angle. Ainsi, en prenant une variation de vitesse $U(x) = Cx^m$ juste à l'extérieur de la couche limite, nous pouvons analyser le comportement de celle-ci pour l'écoulement autour d'un angle entre plans. Nous allons commencer par établir l'équation différentielle vérifiée par le champ de vitesse dans la couche limite ; ce sera dans ce cas l'analogue de l'équation de Blasius pour un écoulement extérieur uniforme.

Équation de Falkner–Skan

Suivons une démarche calquée sur celle utilisée dans le cas de l'écoulement uniforme (section 9.4.1) ; on trouve que la combinaison des variables sans dimension, x/x_0 (x = distance à l'arête du dièdre) et $y/\sqrt{\nu\,U(x_0)/x_0}$ (y = distance au plan), qui ne dépend pas de la distance locale x_0 à l'arête est :

$$\theta = y\sqrt{\frac{U(x)}{\nu\,x}} = y\sqrt{\frac{C\,x^{m-1}}{\nu}}\,. \tag{9.56}$$

Écrivons les différents termes de l'équation (9.10) à l'aide de la variable θ : nous trouvons alors l'équation différentielle vérifiée par le rapport $u(x,\,y)/U(x)$ de la composante de vitesse parallèle au plan à la vitesse extérieure $U(x)$:

$$m(1 - f^2(\theta)) + f''(\theta) = -\frac{m+1}{2} f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{9.57}$$

Cette équation est appelée *équation de Falkner–Skan*. Elle redonne bien l'équation de Blasius (9.24), dans le cas particulier $m = 0$.

Profils de vitesse dans la couche limite

En résolvant numériquement l'équation de Falkner-Skan , on trouve des profils de vitesse du type représenté à la figure 9.6 : plus m est grand et positif, plus la couche limite s'amincit. Quand m décroît, l'épaisseur augmente et, pour une faible valeur critique négative $m_c = -0,0905$, le gradient de vitesse à la paroi s'annule. Aux valeurs de m encore plus faibles, le sens de l'écoulement s'inverse près de la paroi : on a le décollement de la couche limite déjà défini à la section 9.5.1.

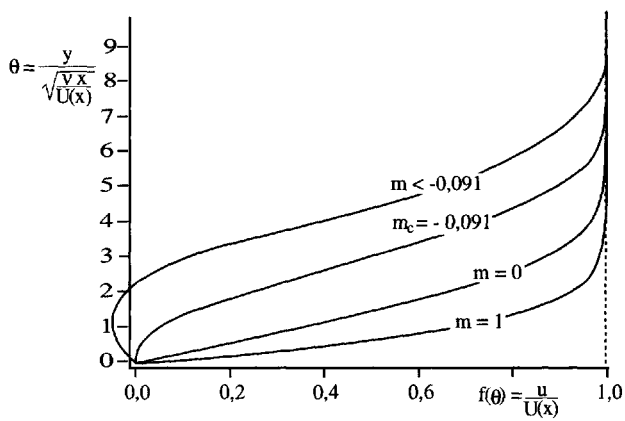


FIG. 9.6 – *Forme des profils de vitesse à l'intérieur de la couche limite dans le cas d'écoulements extérieurs de la forme $U(x) = C\,x^m$; $u(x, y)$ est la composante de vitesse parallèle à la paroi.*

L'angle critique α_c, correspondant à l'apparition du renversement, vérifie :

$$\alpha_c = \frac{\pi}{m_c + 1} = 198°.$$

On a donc alors une « cassure » entre les deux plans d'angle : $198° - 180° = 18°$. La figure 9.7 correspond au type d'écoulement observé lorsque la cassure est supérieure à cette valeur.

Plus $|m|$ décroît (avec $m < 0$), plus $f(\theta)$ atteint lentement la valeur 1. Dans la limite où $m = -1$, la vitesse n'atteint plus d'asymptote. Physiquement, ce cas ($U \propto 1/x$) correspond à un écoulement divergent à partir d'une arête entre deux plans : il n'apparaît alors effectivement aucune couche limite. Pour $m > 0$, la couche limite est plus fine que pour U = constante. Pour $m = 1$ (écoulement vers un point de stagnation), son épaisseur est constante lorsqu'on s'éloigne du point d'incidence (Fig. 9.8a).

Remarque On peut se demander pourquoi il n'y a pas de renversement du sens de l'écoulement dans la partie divergente de l'écoulement dans l'exemple de la figure 9.8a. Cela est dû à l'absence de paroi solide en amont de la plaque : il n'y donc

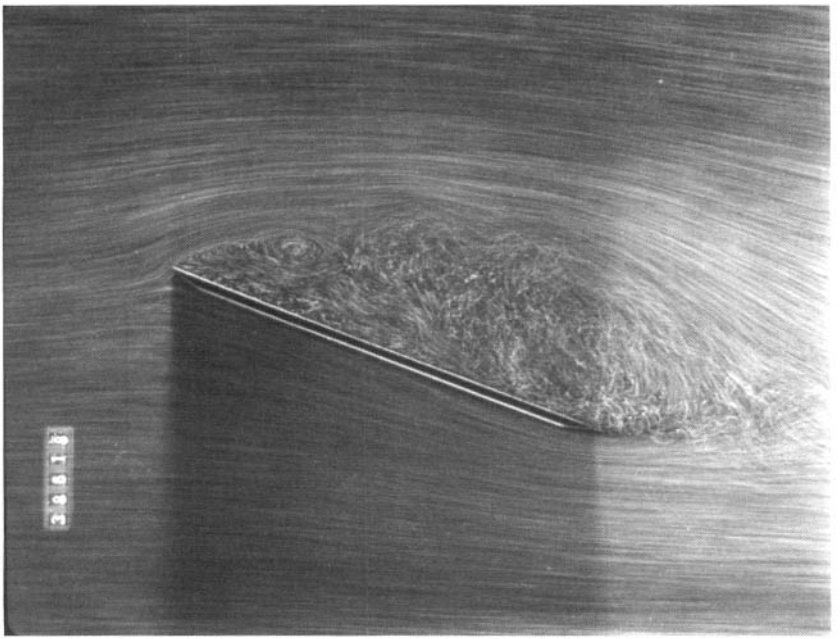


FIG. 9.7 - *Décollement généralisé d'un écoulement au bord d'attaque d'une plaque inclinée. La figure correspond à un angle d'attaque un peu supérieur à la valeur de* 18° *au-delà de laquelle se produit le décollement de la couche limite (cliché ONERA).*

pas de zone de faible vitesse, où l'énergie cinétique du fluide peut être facilement annulée par un gradient de pression opposé à l'écoulement. Si on place une deuxième plaque plane perpendiculaire à la paroi que rencontre le fluide (Fig. 9.8b), une zone de recirculation apparaît dans les angles formés par les plaques.

Évaluation approximative de la condition de décollement des couches limites

Reprenons l'équation de Falkner-Skan (9.57) sous la forme :

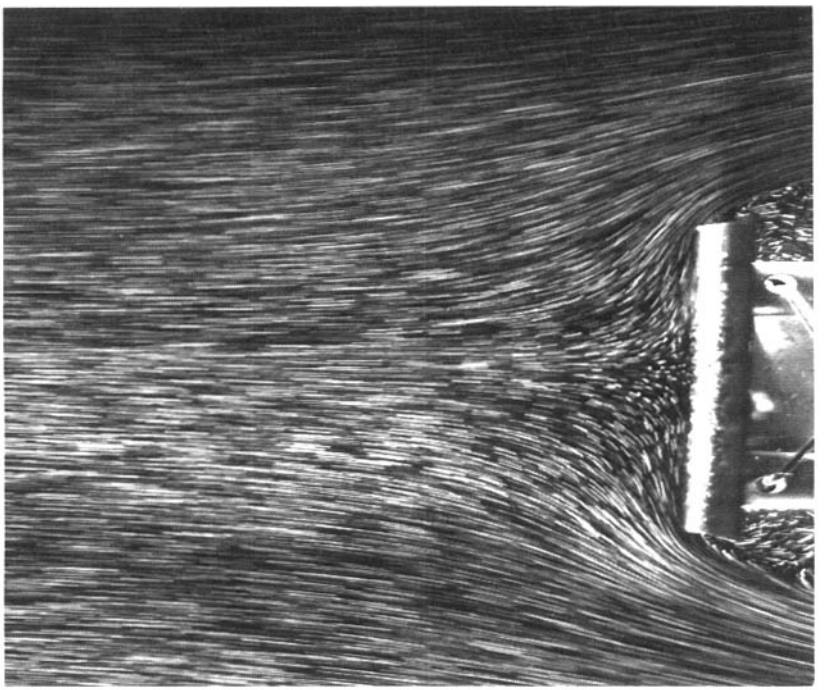
$$m(1 - f^2(\theta)) + f''(\theta) = -\frac{m+1}{2} f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{9.58}$$

Pour $\theta = 0$:

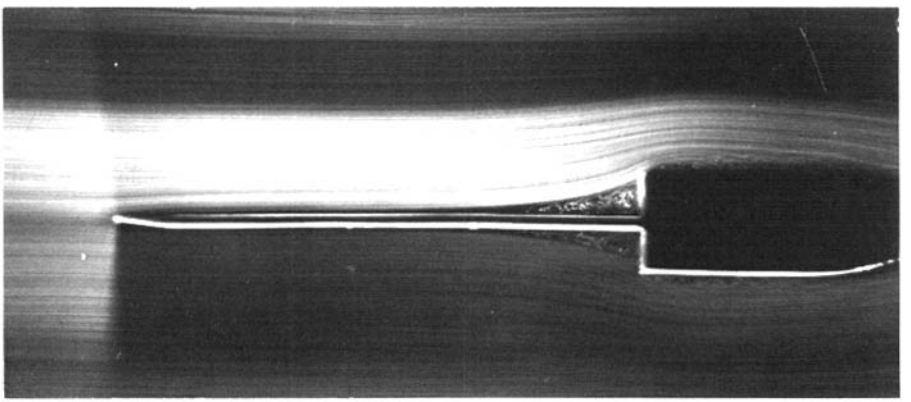
$$f(0) = 0. \tag{9.59}$$

D'où :

$$m + f''(0) = 0.$$



(a)



(b)

FIG. 9.8 – *Écoulement vers un plan avec point de stagnation ; (a) l'absence de paroi solide empêche la formation d'une couche limite dans la partie divergente de l'écoulement ; (b) si une paroi est rajoutée, apparaissent deux zones tourbillonnaires provenant du décollement des couches limites de part et d'autre de cette paroi (clichés H. Werlé, ONERA).*

Donc:

$$f(\theta) = \theta\, f'(0) - \frac{m}{2}\,\theta^2 + O(\theta^3). \tag{9.60}$$

Pour θ élevé :

$$f(\theta) \to 1 \tag{9.61}$$

et, par suite :

$$\int_0^\theta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \to \theta.$$

Donc, la relation (9.58) prend la forme limite :

$$f''(\theta) = -\frac{m+1}{2}\,\theta\, f'(\theta). \tag{9.62}$$

D'où :

$$f'(\theta) \approx C\,\mathrm{e}^{-\frac{(m+1)\,\theta^2}{4}} \tag{9.63}$$

$f'(\theta)$ tend donc vers 0 plus lentement pour $m < 0$ ($\partial U/\partial x < 0$) que lorsque $\partial U/\partial x = 0$. La couche limite est en effet plus épaisse que pour $m > 0$ ($\partial U/\partial x > 0$), où elle devient plus mince. Il faut à présent raccorder la variation donnée par l'équation (9.63) pour $\theta \to \infty$ avec celle donnée par l'équation (9.60) pour θ proche de 0.

♦ Pour $m > 0$, $f''(0)$ est négatif ; la courbure du profil de vitesse est donc dirigée vers la gauche sur la figure 9.6 et il n'a pas de point d'inflexion. Pour rejoindre la valeur asymptotique plus vite que dans le cas $U =$ cte, $f'(0)$ doit donc être plus élevé que dans ce dernier cas pour une même vitesse à l'extérieur de la couche limite.

♦ Si m est négatif, $f'(0)$ est au contraire plus faible et la courbure du profil de vitesse est dirigée vers la droite près du point O. Pour $|m|$ assez grand, on a alors renversement du sens de l'écoulement près de la paroi ($f'(0) < 0$).

Estimons très approximativement la valeur critique m_c pour laquelle $f'(0) = 0$. On a pour θ petit :

$$f(\theta) = -m_c\frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3).$$

Par ailleurs, $f(\theta)$ doit ensuite augmenter vers la valeur limite 1 lorsque θ est de l'ordre de quelques unités. En prenant dans l'expression précédente $f = 1$ pour $\theta = 5$, on obtient l'ordre de grandeur $m_c \approx -1/12$ (la valeur exacte est $-0,0905$).

9.5.3 Couches limites d'épaisseur constante

Un premier cas possible est celui où l'épaississement de la couche limite causée par la diffusion de la vorticité est compensé par une composante de vitesse dirigée vers la paroi.

♦ Ainsi, dans l'exemple de la figure 9.8a, l'écoulement vers le point de stagnation comporte une telle composante. Dans le cas modèle d'un point de

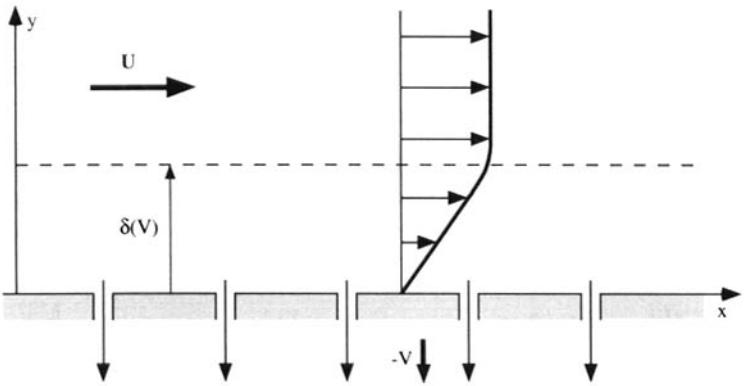


FIG. 9.9 – *Couche limite en présence d'une aspiration de vitesse V uniforme sur la paroi.*

stagnation à deux dimensions, la fonction de courant en dehors de la couche limite est $\Psi = k\,x\,y$, les composantes de vitesse correspondantes sont $u = kx$ et $v = -ky$ (pour le point de stagnation de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$). L'épaisseur $\delta(x)$ de la couche limite vérifie la relation :

$$\delta(x) \approx \sqrt{\frac{\nu\,x}{u(x)}} \approx \sqrt{\frac{\nu}{k}} \tag{9.64}$$

$\delta(x)$ ne dépend alors pas de la distance : on a équilibre entre les influences opposées de la convection vers la paroi et de la diffusion à partir de celle-ci.

♦ Nous nous intéresserons à présent au cas – voisin – de l'influence sur le problème de Blasius d'une aspiration du fluide perpendiculairement à la plaque, avec une composante normale de vitesse à la paroi $v_y = -V$, indépendante de x (Fig. 9.9). Cette technique est envisagée pour limiter le décollement de la couche limite sur les avions. Un exemple voisin est celui de l'effet d'aspiration sur les turbovoiles du bateau Cousteau–Malavard décrit plus loin (section 9.6.2).

Supposons qu'il existe une solution des équations de mouvement qui corresponde à une couche limite où l'épaisseur et le profil de vitesse sont indépendants de x. Dans ce cas, u et v dépendent seulement de y, et la composante v normale à la paroi vérifie $\partial v/\partial y = 0$, par suite de la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} v = 0$. On a donc v = constante $= -V$ dans tout le volume fluide. L'équation (9.12) de transport de la vorticité en régime stationnaire s'écrit :

$$-V\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \tag{9.65}$$

puisque le terme $\partial\omega_z/\partial x$ est nul. Intégrons une fois cette équation ; nous

obtenons :

$$-V(\omega_z - \omega_0) = \nu \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}y} \tag{9.66}$$

ω_0 représente la vorticité à grande distance de la plaque (là où $\mathrm{d}\omega_z/\mathrm{d}y \approx 0$) et est nul lorsque l'écoulement à l'extérieur de la couche limite est uniforme. Intégrons deux fois de plus en choisissant les constantes d'intégration pour avoir $u = U$, loin de la plaque, et $u = 0$ pour $y = 0$, on obtient :

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} = A\,\mathrm{e}^{-\frac{Vy}{\nu}} \qquad u = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{Vy}{\nu}}\right) \qquad \text{et} \qquad A = \frac{UV}{\nu}\cdot$$

On a bien, conformément aux hypothèses de départ, une couche limite d'épaisseur $\delta(V) = \nu/V$ constante. Cela traduit le fait que, au bord de la couche limite, on a équilibre entre les termes de transport convectif et diffusif de la vorticité dans l'équation (9.65), qui sont respectivement de l'ordre de $V\omega_z/\delta$ et $\nu\,\omega_z/\delta^2$. Dans cette démonstration, nous avons utilisé l'équation (9.12) de transport de la vorticité ; nous aurions aussi pu utiliser les équations de mouvement (9.4, 9.5) et (9.6) pour trouver la solution.

♦ Une autre catégorie de couches d'épaisseur constante correspond à des écoulements périodiques sans vitesse de translation moyenne globale. Un exemple analysé au chapitre 4 (section 4.5.4), est celui de l'écoulement au voisinage d'une plaque oscillant parallèlement à son plan avec une pulsation ω. L'influence du mouvement de la plaque décroît exponentiellement sur une distance δ_ω de l'ordre de $\sqrt{\nu/\omega}$ (δ_ω représente l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle diffuse la variation de vitesse pendant une période d'oscillation).

9.5.4 Écoulements non autosimilaires – décollement de la couche limite

Pour les écoulements autosimilaires vus plus haut (écoulement uniforme ou de profil de vitesse de la forme Cx^m), le renversement du sens de l'écoulement se produit en même temps sur toute la paroi. Dans de nombreux cas pratiques d'écoulements dans lesquels la vitesse décroît vers l'aval, ce renversement ne s'opère qu'à partir d'un *point de décollement*, au-delà duquel une zone de recirculation apparaît. Ce sera par exemple le cas pour des écoulements autour d'un corps non profilé (Fig. 9.1b), ou dans le cas d'un profil divergent (Fig. 9.10). Pour des variations de vitesse du type $U(x) = U_0 - \alpha x$, il apparaît ainsi une longueur caractéristique U_0/α naturelle de l'écoulement : c'est celle-ci qui détermine l'ordre de grandeur de la distance du point de décollement par rapport au début de la zone de gradient de vitesse négatif.

Analysons maintenant l'influence de la valeur du nombre de Reynolds sur la position du point de décollement. Dans le cas général, d'après les équations (9.14) et (9.15), le champ de vitesse $u(x, y)$ à l'intérieur de la couche

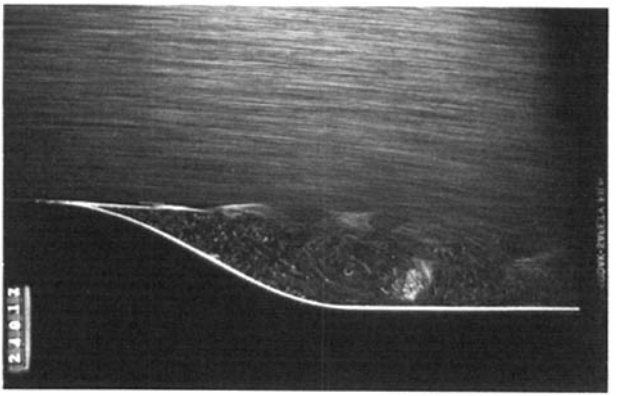


FIG. 9.10 – *Profil de vitesse dans un diffuseur à pente élevée. On remarque l'existence d'une zone stagnante suivie d'une zone de recirculation induite par l'instabilité due à la différence de vitesse (cliché H. Werlé, ONERA).*

limite vérifie :

$$\frac{u(x,\,y)}{U(x)} = f\left(\frac{x}{L},\,\frac{y}{\delta_L}\right) \tag{9.67}$$

x et y sont des coordonnées locales respectivement parallèle et perpendiculaire à la paroi, L est une longueur caractéristique de l'écoulement dans la direction parallèle à la paroi, et δ_L est l'épaisseur de couche limite correspondante. Lorsque l'épaisseur δ_L est faible devant L, le profil de vitesse potentiel extérieur $U(x)$ est indépendant du nombre de Reynolds (l'influence de la zone de couche limite sur l'écoulement extérieur est négligeable). La condition $\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$, qui donne la position du point de décollement, devient donc :

$$f'\left(\frac{x}{L},\,0\right) = 0. \tag{9.68}$$

Ainsi, la valeur du rapport x/L, qui détermine la position du point de décollement, est indépendante du nombre de Reynolds, si celui-ci est suffisamment élevé pour qu'une couche limite ait pu s'établir en amont.

9.5.5 Conséquences pratiques du décollement des couches limites

Les zones d'écoulement présentant des recirculations sont généralement très instables. Le nombre de Reynolds minimal pour lequel des instabilités peuvent être amplifiées descend alors à quelques dizaines. Il apparaît ainsi, en arrière du point de décollement, une zone turbulente de grande largeur

avec une dissipation d'énergie importante. La force de traînée (composante de la force de frottement parallèle à l'écoulement) augmente alors de façon considérable : on observe un tel effet pour les corps non profilés, comme dans l'exemple de la figure 9.1b. Au contraire, la force de traînée est peu élevée pour un corps aérodynamique sur lequel ne se produit pas de décollement de couche limite et qui induit un sillage de faible largeur (Fig. 9.1a).

Soulignons la différence entre l'effet de turbulence accompagnant le décollement de la couche limite, cause d'une dissipation d'énergie souvent très importante, et la transition vers la turbulence au niveau de parois solides, qui augmente la dissipation... mais retarde l'apparition du décollement. Dans certains cas, on peut même observer le réattachement de couches limites turbulentes qui étaient décollées alors qu'elles étaient encore laminaires. Nous étudierons ces effets au chapitre 11 consacré aux écoulements turbulents.

9.6 Quelques applications des problèmes de décollement des couches limites en aérodynamique

9.6.1 Aérodynamique des ailes d'avion

Mécanisme de la sustentation

Au chapitre 6 (sections 6.3.1 et 6.6.3), nous avons analysé les deux composantes de forces qui apparaissent sur un profil cylindrique (aile d'avion bidimensionnelle) en mouvement relatif par rapport à l'air environnant (Fig. 9.11a). La force de *portance* F_p est perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{U}$ et maintient l'avion en sustentation : on cherche donc à la rendre maximale. La force de *traînée* F_t est parallèle et opposée à la vitesse : elle a un effet de freinage, et on cherche à la minimiser. En pratique, on caractérise la portance et la traînée par deux coefficients adimensionnels (respectivement C_z et C_x), qui dépendent uniquement de la géométrie et de l'incidence α de l'aile ; C_z et C_x sont définis à partir de la portance, de la traînée, la surface S de l'aile et la densité ρ de l'air par :

$$F_p = \frac{1}{2}\rho U^2 \, S \, C_z(\alpha) \tag{9.69a}$$

et

$$F_t = \frac{1}{2}\rho U^2 \, S \, C_x(\alpha). \tag{9.69b}$$

La portance est due à la circulation de la vitesse du fluide autour de l'aile : c'est une manifestation de la force de Magnus que nous avons décrite au chapitre 6 (section 6.3.1, Éq. (6.44)). Cette circulation est induite par la forme du profil de l'aile, de telle manière que le point d'arrêt de l'écoulement sur l'extrados (ou face supérieure) de l'aile soit situé sur le bord de fuite : nous

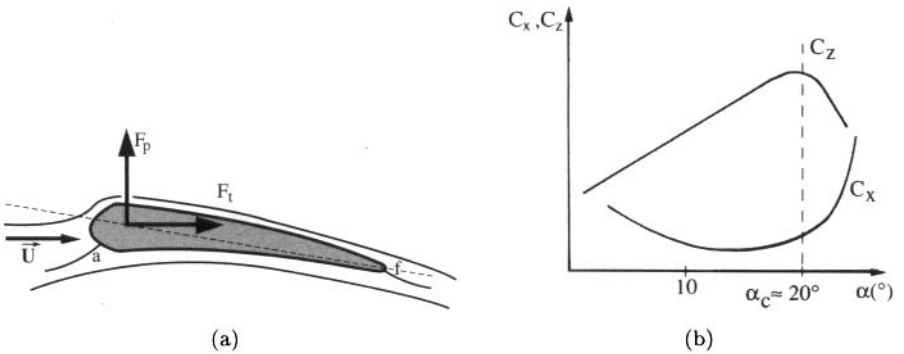


FIG. 9.11 – *(a) Vue schématique de l'écoulement autour d'une aile, et des forces de portance et de traînée, a et f sont les bords d'attaque et de fuite. On se reportera utilement à la discussion des figures 6.26 et suivantes ; (b) variation des coefficients de portance C_z et de traînée C_x en fonction de l'angle d'incidence α.*

avons d'ailleurs analysé cette condition, dite *condition de Kutta*, au chapitre 6 (section 6.6.3, Éq. (6.105)). La circulation Γ et la portance $\mathbf{F}_p$ augmentent avec la vitesse U de l'aile par rapport au fluide (Éq. (6.106)) : l'avion peut décoller lorsque U est suffisant pour que $\mathbf{F}_p$ excède son poids.

La figure 9.11b donne la variation des coefficients de portance et de traînée en fonction de l'angle d'incidence α. On remarque que C_z croît approximativement linéairement avec α jusqu'à une valeur critique α_c ; au-dessus de cet angle d'incidence, il y a chute brutale du coefficient de portance (phénomène de décrochage). Lorsque α augmente (tout en restant en dessous de α_c), la vitesse pour laquelle la force de portance équilibre le poids de l'avion diminue.

Ailes d'avion et théorème de Kelvin

Au chapitre 7 (section 7.2.1), nous avons montré que, dans un fluide parfait, si la circulation initiale de la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide est nulle le long d'une courbe $(\mathcal{C})$, elle le reste à tous les instants ultérieurs autour des courbes $(\mathcal{C}'(t))$, formées de particules de fluides situées initialement sur $(\mathcal{C})$ et entraînées par l'écoulement (théorème de Kelvin). Par contre, dans le cas de la couche limite, la présence d'une couche de vorticité concentrée près de la paroi permet l'apparition d'une circulation autour du profil d'aile et, par suite, d'une force de portance. On peut cependant appliquer le théorème de Kelvin à une courbe $(\mathcal{C})$ entourant l'aile en dehors de la couche limite (Fig. 9.12a) et assez loin pour que l'écoulement puisse être considéré comme parfait partout sur cette courbe. Prenons une aile mise en mouvement à un instant initial. La circulation restera nulle aux instants ultérieurs autour des courbes $(\mathcal{C}'(t))$, formées de particules

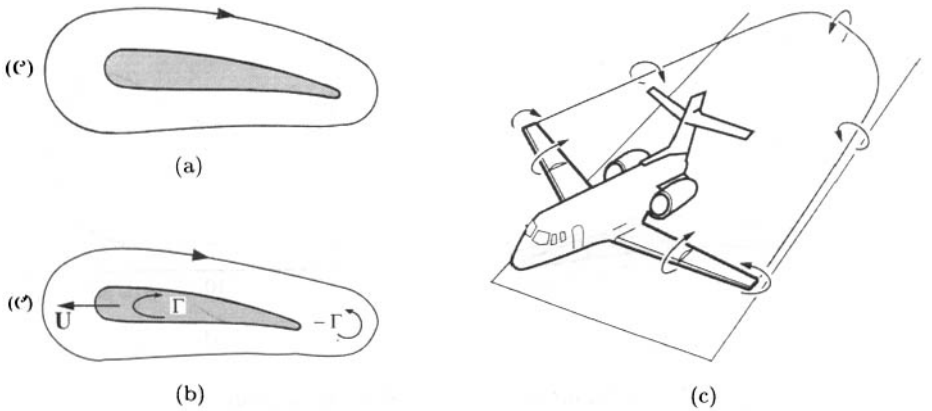
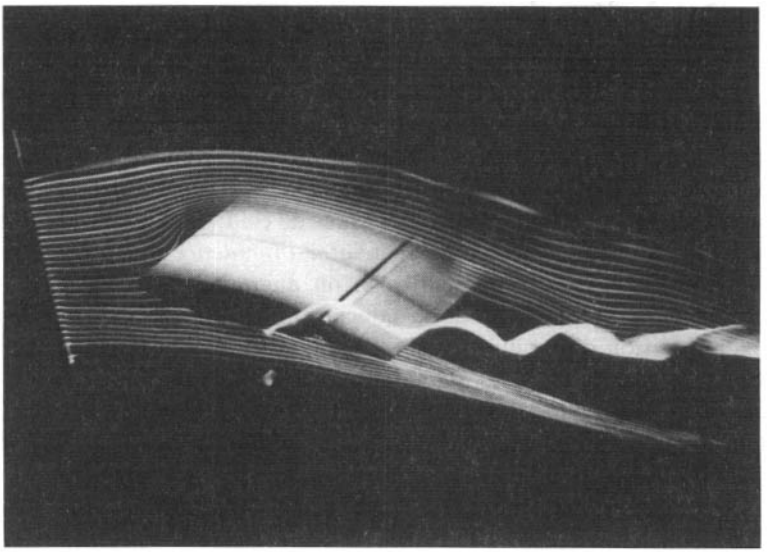


FIG. 9.12 – *(a, b) Apparition de la circulation autour d'une aile d'avion au moment du démarrage : (a) initialement la circulation de la vitesse du fluide le long d'un contour (C) tracé autour d'une l'aile au repos est nulle ; (b) la création de circulation autour de l'aile lors de la mise en mouvement est compensée par l'apparition d'un tourbillon laissé en arrière ; (c) structure tridimensionnelle de la distribution de la vorticité autour d'un avion : la ligne de tourbillon incluant l'aile d'avion et le tourbillon de démarrage se referme par deux tourbillons émis aux extrémités de l'aile.*

de fluides situées initialement sur $(\mathcal{C})$ et entraînées par l'écoulement. On voit alors apparaître un tourbillon sur le bord de fuite de l'aile ; la circulation $-\Gamma$ de la vitesse du fluide autour de ce *tourbillon de démarrage* est égale et opposée à la valeur Γ autour de l'aile pour maintenir nulle la circulation sur $(\mathcal{C}'(t))$ (Fig. 9.12b). Ce phénomène s'observe bien sur le « bord de fuite » d'une cuillère déplacée parallèlement à elle-même, dans un bol de café. Le tourbillon de démarrage est laissé en arrière quand la vitesse devient constante (de plus, dans un fluide réel, la distribution de la vorticité s'étale par diffusion visqueuse).

Au chapitre 7 (section 7.2.1), nous avons également montré que, dans un fluide parfait, une ligne de tourbillon doit être refermée sur elle-même ou avoir ses deux extrémités localisées sur une paroi solide ; comme la longueur des ailes est finie, le circuit de vorticité qui comprend l'aile de l'avion et le tourbillon de démarrage se referme donc par deux tourbillons d'axes parallèles à $\mathbf{U}$ et émis en bout d'aile (Figs. 9.12c et 9.13). En arrière d'un gros avion de transport, ces tourbillons peuvent être d'amplitude suffisante pour déséquilibrer un autre avion le suivant de trop près ; c'est particulièrement le cas lorsque la vitesse du premier avion est faible et que les valeurs de C_z, de α, et donc de la circulation Γ doivent être élevées. Ces tourbillons sont aussi une source de dissipation d'énergie inutile : des petits ailerons placés aux extrémités de l'aile permettent de limiter leur influence sur les avions de transport actuels.



(a)

(b)

FIG. 9.13 – *(a) Visualisation de l'écoulement autour d'une aile avec apparition d'un tourbillon de bout d'aile (cliché ENSTA) ; (b) visualisation, par injection de fumée près du sol, du vortex de bout d'aile d'un avion de pulvérisation de produits agricoles (document NASA).*

Phénomène de décrochage

Revenons au problème de la portance et de la traînée illustré par les figures 9.11a et b. Pour assurer la sustentation de l'avion, la portance F_p doit équilibrer le poids de l'appareil ; F_p est par ailleurs proportionnel au carré de la vitesse U (Éq. (6.106)) et augmente linéairement avec l'incidence α (aux faibles valeurs de α). Pour diminuer les longueurs d'atterrissage et de décollage d'un avion, il faut *réduire* la vitesse de celui-ci pendant les phases de vol correspondantes et, par suite, *augmenter l'incidence de l'aile* (le produit U^2C_z doit en effet rester constant). Si on augmente α au-delà de l'angle critique α_c, on a décollement de la couche limite sur la face supérieure de l'aile, et apparition d'un sillage turbulent de grande dimension. La pression sur la face supérieure de l'aile augmente, la portance diminue rapidement et la traînée croît (Fig. 9.11b) ; cela mène à une chute de l'avion souvent difficile à contrôler. Il est indispensable de retarder l'apparition de ce phénomène dit de *décrochage* pour pouvoir obtenir des valeurs de portance suffisante lors du vol de l'avion à basse vitesse. Dans ce but, les constructeurs cherchent essentiellement à :

- augmenter la valeur de l'angle d'incidence critique α_c à l'aide de *volets de bord d'attaque* ;
- augmenter le coefficient de portance C_z pour une valeur de α donnée à l'aide de *volets de bord de fuite*.

Notons que l'utilisation d'angles d'incidence élevés présente également l'avantage d'ajouter à la force de portance sur les ailes une composante verticale représentant une fraction significative de la force de poussée des réacteurs de l'appareil.

Contrôle de la couche limite à l'aide de volets de bord d'attaque

L'utilisation d'un volet de bord d'attaque, tel que celui représenté sur la figure 9.14a permet d'augmenter la valeur de l'angle critique α_c dans la variation du coefficient C_z avec α (Fig. 9.14b). Grâce à ce volet, de l'air provenant de l'intrados est injecté tangentiellement sur l'extrados : il « réactive » ainsi la couche limite d'extrados en augmentant la vitesse du fluide près de la paroi. À grande incidence, l'effet du gradient inverse de pression se trouve donc diminué, et l'angle d'incidence critique α_c est augmenté.

Contrôle de la couche limite à l'aide de volets de bord de fuite

Un volet de bord de fuite (Fig. 9.14c) permet, lorsqu'il est déployé, d'augmenter la circulation autour du profil d'aile à une vitesse donnée ; il en résulte une translation vers le haut de la courbe $C_z(\alpha)$ (Fig. 9.14d). Sur les gros avions de transport, ces volets peuvent eux-mêmes supporter d'autres volets (jusqu'à trois étages successifs sur le Boeing 747 et l'Airbus A340) ; on a ainsi une série de plusieurs volets sortis l'un derrière l'autre, le volet

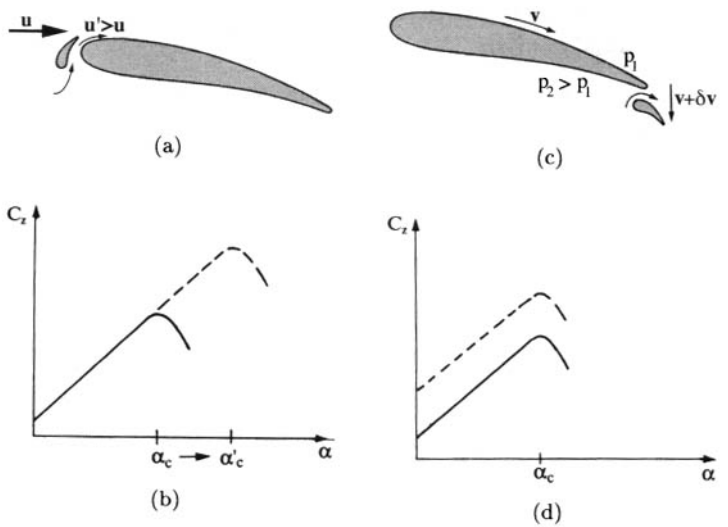


FIG. 9.14 – *(a) Volet de bord d'attaque sur une aile d'avion. (b) Comparaison des variations du coefficient de portance C_z avec l'angle d'incidence, obtenues avec (tirets) et sans mise en place d'un volet de bord d'attaque. (c) Volet de bord de fuite sur une aile d'avion, permettant d'augmenter fortement la circulation autour d'une aile à angle d'incidence et à vitesse donnés. (d) Comparaison des variations du coefficient de portance C_z avec l'angle d'incidence α, avec (tirets) et sans volet de bord de fuite.*

le plus en arrière étant presque vertical. Remarquons que ces systèmes augmentent considérablement la traînée de l'aile et ne sont donc utilisés qu'au décollage et à l'atterrissage lorsque la vitesse de l'appareil est trop faible pour que la portance soit suffisante en configuration normale. Le principe de fonctionnement des volets de bord de fuite combine deux effets :

- leur détachement par rapport à la voilure principale pemet de « réactiver » la couche limite à l'extrados, en induisant un écoulement de l'intrados vers l'extrados (analogue à celui que nous avons rencontré précédemment pour les volets avant). On évite ainsi d'avoir un décollement de la couche limite sur les volets, en dépit de leur fort angle d'incidence par rapport à l'écoulement principal ;
- ils induisent une forte déviation $\delta\mathbf{v}$ vers le bas de la vitesse de l'écoulement fluide sur la partie arrière de l'aile et dans le sillage : il en résulte une forte augmentation de la portance et de la circulation.

Remarque Ce principe a été poussé à l'extrême dans certains prototypes d'avions à décollage très court en plaçant les propulseurs de façon à ce qu'ils soufflent de l'air le long de l'extrados de l'aile, air dévié ensuite vers le bas par des volets du type de ceux que nous venons de décrire.

9.6.2 Contrôle du décollement des couches limites par aspiration

Un autre moyen de retarder le décollement des couches limites est d'aspirer le fluide voisin de la paroi (donc de faible vitesse). Cela permet d'éviter que le gradient de pression adverse, dû à la décroissance de la vitesse de l'écoulement extérieur, ne parvienne à inverser le sens de l'écoulement de ces particules de fluide : nous avons discuté plus haut le comportement des couches limites sous aspiration (section 9.5.3). Ce principe a été utilisé notamment dans le contrôle des couches limites le long de la turbovoile du catamaran *Moulin à vent* de Malavard et Cousteau (Fig. 9.15). Cette aspiration permet de limiter le décollement de la couche limite, même à des forts angles d'incidence : on peut ainsi obtenir des circulations très élevées de la vitesse autour de la turbovoile. Il en résulte une force de Magnus importante avec une composante motrice élevée dans la direction de l'écoulement. Dans l'aviation, ce principe se heurte au problème de la puissance supplémentaire nécessitée par l'aspiration de l'air ; il fait cependant actuellement l'objet d'un regain d'intérêt.

Remarque Le terme de « turbovoile » risque de prêter à confusion avec d'autres systèmes essayés il y a quelques dizaines d'années (bateaux à rotor de Flettner), où les voiles étaient remplacées par des cylindres verticaux mis en rotation pour créer la circulation. La turbovoile n'est pas en rotation, c'est en fait une aile épaisse verticale équipée d'un système d'aspiration de couche limite.

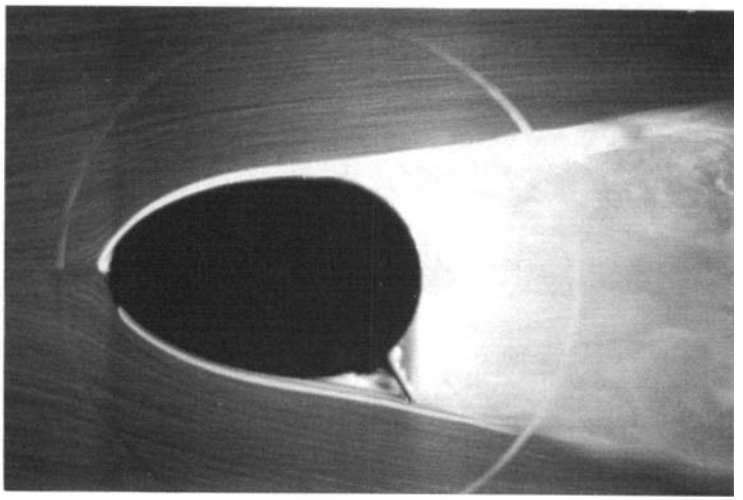
9.6.3 Contrôle du décollement des couches limites par action sur le profil du corps solide

Profilage en « *fastback* » d'une voiture

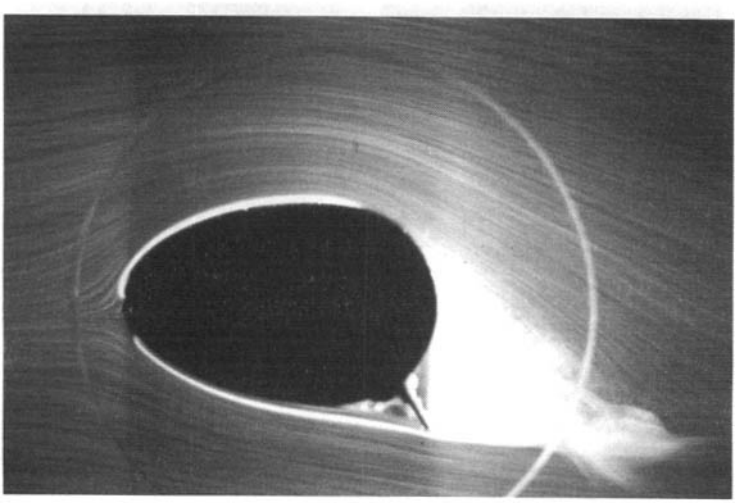
L'utilisation d'un vitrage arrière de faible inclinaison (inférieur à 30° dans le cas de la figure 9.16a) permet d'obtenir un décollement de couche limite à l'extrémité inférieure de la vitre, et non plus en arrière du toit. La taille du sillage turbulent et, par suite, la traînée sont ainsi sensiblement réduits par rapport à un arrière plus incliné (Fig. 9.16b).

Profilage de l'intervalle entre tracteur et remorque dans les semi-remorques

Si aucune précaution n'est prise, une région importante de recirculation turbulente apparaît dans cet intervalle (Fig. 9.17a), en particulier si le tracteur et la remorque sont de hauteurs très différentes. Il peut en résulter une importante traînée supplémentaire. La mise en place d'un profilage ou de déflecteurs (Fig. 9.17b) permet de réduire ces perturbations en assurant une meilleure continuité du profil entre le tracteur et la remorque, même si leurs hauteurs diffèrent.



(a)



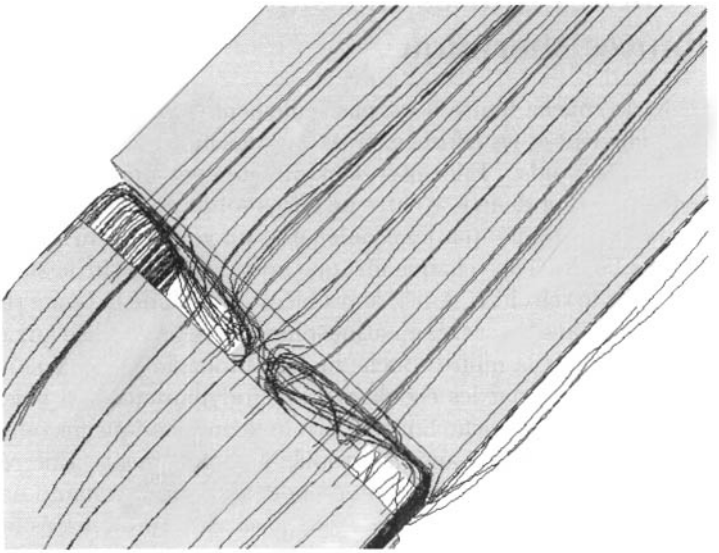
(b)

FIG. 9.15 – *Contrôle du décollement de la couche limite le long des turbovoiles du navire à propulsion éolienne de Malavard et Cousteau. (a) Sans aspiration, la couche limite est décollée du profil peu après le bord d'attaque ; (b) avec aspiration à l'intérieur du cylindre constituant la turbovoile (à l'aide d'un système de ventilateurs placés à l'intérieur de l'aile), le décollement de la couche limite est retardé, et on peut utiliser des angles d'incidence beaucoup plus grands. On obtient ainsi une circulation élevée de la vitesse autour de l'aile : la force de portance résultante est, elle aussi, élevée, et est utilisée pour la propulsion du navire (Éqs. (6.44) et (6.106)) (clichés ONERA).*

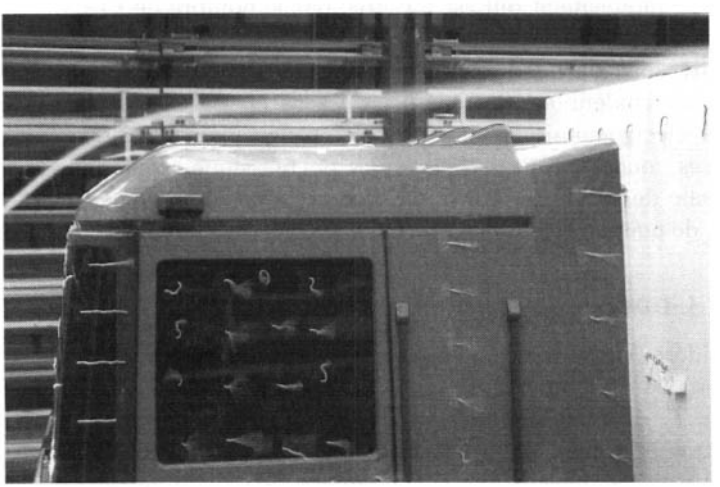
(a)

(b)

FIG. 9.16 – *Différence de largeur de sillage dans le cas d'un véhicule à hayon arrière (a) faiblement incliné (Renault Laguna), et (b) plus fortement incliné (Renault Clio). La faible remontée du profil à l'aplomb du bord arrière dans le premier cas crée une zone de haute pression en cet endroit : il en résulte une composante de la force dirigée vers le bas (augmentant l'adhérence), et vers l'avant (réduisant la traînée). La hauteur de cette remontée doit être judicieusement choisie car, si elle est trop importante, elle crée une zone turbulente qui augmente la traînée. Ces visualisations ont été obtenues en soufflerie ; les véhicules sont immobiles et le courant fluide est dirigé de la droite vers la gauche (documents Renault).*



(a)



(b)

FIG. 9.17 – *(a) Simulation numérique de l'écoulement (vu de dessus) autour d'un ensemble tracteur-remorque avec apparition d'une zone de recirculation et de turbulence entre la cabine et la remorque. (b) Visualisation de l'écoulement autour de la cabine d'un véhicule semi-remorque. Un petit obstacle déflecteur placé en arrière de la cabine permet de réduire les perturbations de l'écoulement au moment de la transition vers la remorque (documents Renault–Véhicules Industriels).*

9.7 Couches limites massiques et couches limites thermiques

La notion de couche limite n'est pas seulement utile pour caractériser les régimes d'écoulement et les efforts exercés sur un solide dans une large gamme de nombre de Reynolds. Elle intervient directement dans l'évaluation des transferts de chaleur et de masse entre un corps solide et le fluide environnant. Ces transferts sont modifiés par les écoulements au voisinage du solide, comme nous en faisons l'expérience chaque fois que nous soufflons sur la surface d'un corps chaud pour le refroidir. Ainsi, le problème crucial de la tenue thermique d'une tête d'ogive dans la rentrée en atmosphère terrestre est liée aux échanges qui se produisent dans la mince couche limite autour de la tête : dans ce cas, la chaleur est produite par les écoulements aérodynamiques au voisinage de l'obstacle. La notion de couche limite thermique ou massique découle de celle de la couche limite hydrodynamique étudiée précédemment. Elle résulte de l'association des effets de la convection de la chaleur par le champ de vitesse, et du transfert diffusif transverse. Néanmoins, sa structure est très influencée par sa coexistence avec la couche limite de vitesse. Plus précisément, cette structure dépend de l'efficacité relative des transferts diffusifs de chaleur et de quantité de mouvement qui est mesurée par le nombre de Prandtl, $Pr = \nu/\kappa$ défini au chapitre 2 (section 2.3.2). Les notions de couches limites thermique et massique ont de nombreuses applications pratiques dans le domaine du transfert de chaleur ou de masse. Ce sera en particulier le cas pour des réactions électrochimiques sur des électrodes planes. Nous verrons que, lorsque ces couches limites thermiques ou massiques sont d'épaisseur faible devant celle de la couche limite de vitesse, la mesure des caractéristiques de transfert de masse permet de déterminer le gradient de vitesse près des parois.

9.7.1 Couches limites thermiques

Considérons de nouveau la géométrie de la figure 9.2a, en introduisant une différence de température entre la température T_0 de la plaque et celle, uniforme, T_1 du fluide loin de l'obstacle. Lorsque les profils stationnaires de température et de vitesse se sont établis, la température ne diffère de T_1 d'une façon appréciable que sur une couche mince près de la paroi. Pour étudier la structure de cette *couche limite thermique*, nous devons adjoindre à l'équation de Navier-Stokes, qui conduit au profil de Blasius, une équation de transport de la chaleur. Celle-ci s'établit comme l'équation de mouvement du fluide en écrivant que, dans un repère lié au mouvement moyen de celui-ci, la variation $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ de la température vérifie l'équation de Fourier (1.17) ; elle prend alors la forme :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})T = \kappa\,\Delta T. \tag{9.70a}$$

Nous avons utilisé l'équation (3.1b) établie au chapitre 3 pour relier les dérivées temporelles $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ et $\partial T/\partial T$ de la température respectivement le long

de la trajectoire d'une particule de fluide et en un point fixe. Comme pour la couche limite de vitesse, les dérivées spatiales dans le sens de l'écoulement sont d'un ordre de grandeur plus faible que celles dans la direction normale à la paroi. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{9.70b}$$

en négligeant le terme diffusif $\kappa(\partial^2 T/\partial x^2)$ devant $\kappa(\partial^2 T/\partial y^2)$. Le second et le troisième terme – convectifs – du premier membre de l'équation, jouent pour la chaleur le même rôle que celui de l'équation de Navier Stokes pour la quantité de mouvement. Ajoutons les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} &T(x,\, y=0) = T_0 && \text{pour } x > 0 \\ &T(x,\, y) = T_1 && \text{pour } y \text{ grand.} \end{aligned}$$

Notons que la forme des équations (9.70a et b) suppose les hypothèses suivantes :

- il n'existe pas de sources de chaleur telles que celles qui apparaîtraient en présence d'écoulements rapides et de forts gradients de vitesse au voisinage de parois solides (c'est le cas de la rentrée de l'ogive citée plus haut) ;
- nous négligeons l'effet de la poussée d'Archimède sur le fluide chaud moins dense. Celui-ci sera pris en compte au chapitre 10, quand nous discuterons les mouvements induits par la convection ;
- enfin, nous supposons que la viscosité ne dépend pas de la température.

Quand ces hypothèses sont vérifiées, le problème thermique peut en principe être résolu à partir de la seule donnée du champ de vitesse du fluide ; il n'y a pas d'effet en retour de la variation du champ thermique sur le comportement hydrodynamique en raison de l'absence de couplage entre les champs de température et de vitesse du fluide. Étudions maintenant les structures de couches limites rencontrées pour différentes valeurs du nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$.

Cas d'un nombre de Prandtl largement supérieur à l'unité

C'est le cas des liquides isolants thermiquement, et/ou visqueux. La diffusion transverse de la chaleur est alors peu efficace devant celle de la quantité de mouvement. Or, c'est cette diffusion transverse qui détermine la croissance de l'épaisseur des couches limites lorsqu'on se déplace vers l'aval de l'écoulement. Cette épaisseur marque en effet la distance de la paroi pour laquelle les transports diffusif et convectif s'équilibrent (nous avons signalé ce résultat pour la couche limite de vitesse à la fin de la section 9.3.1).

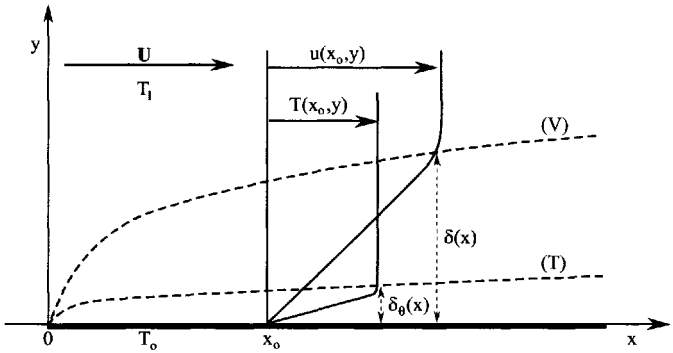


FIG. 9.18 – *Couches limites thermiques (T) et de vitesse (V) dans le cas d'un nombre de Prandtl très supérieur à l'unité.*

L'épaisseur $\delta_\theta(x)$ de la couche limite thermique est donc petite devant celle de la couche de vitesse $\delta(x)$ (Fig. 9.18) : on peut alors supposer que, dans l'épaisseur de la couche limite thermique ($0 < y < \delta_\theta$), la vitesse varie linéairement avec y, et que :

$$u = U\frac{y}{\delta(x)} \tag{9.71}$$

où $\delta(x) = \sqrt{\nu\, x/U}$ est l'épaisseur de la couche limite de vitesse. En combinant la relation (9.71) avec l'équation (9.2) de conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = U\frac{y}{\delta^2(x)}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \qquad \text{soit :} \qquad v \approx U\frac{y^2}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\,. \tag{9.72}$$

Évaluons, par analogie avec le calcul de la section 9.3.1, l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (9.70) du transport de la chaleur sur le bord de la couche limite thermique ($y = \delta_\theta(x)$) : on utilisera, pour la température, la variable réduite $\theta(y) = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ (attention à la signification différente de θ par rapport au début du chapitre !). On obtient tout d'abord :

$$v\frac{\partial\theta}{\partial y} \approx U\frac{\delta_\theta^2}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\frac{\theta(\delta_\theta)}{\delta_\theta(x)} \approx U\frac{\delta_\theta}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\,. \tag{9.73}$$

En effet, au bord de la couche limite thermique ($y = \delta_\theta(x)$), on a $T(\delta_\theta) = T_1$ soit : $\theta \simeq 1$. Le deuxième terme convectif $u(\partial\theta/\partial x)$, et le terme de diffusion $\kappa(\partial^2\theta/\partial y^2)$, vérifient (toujours pour $y = \delta_\theta(x)$) :

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x} \approx U\frac{\delta_\theta}{\delta}\frac{\theta}{\delta_\theta}\frac{\mathrm{d}\delta_\theta}{\mathrm{d}x} \approx \frac{U}{\delta}\frac{\mathrm{d}\delta_\theta}{\mathrm{d}x} \tag{9.74a}$$

et

$$\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \approx \kappa\frac{\theta(\delta_\theta)}{\delta_\theta^2} \approx \frac{\kappa}{\delta_\theta^2} \tag{9.74b}$$

(nous avons estimé, pour obtenir la première relation, que $(\partial\theta/\partial x) \approx (\partial\theta/\partial y)(\mathrm{d}\delta_\theta/\mathrm{d}x) \approx (\theta/\delta_\theta)(\mathrm{d}\,\delta_\theta/\mathrm{d}x)$). Supposons maintenant (ce que nous vérifierons) que tous les termes de l'équation (9.70b) sont du même ordre, et écrivons l'égalité des termes $v(\partial\theta/\partial y)$ et $\kappa(\partial^2\theta/\partial y^2)$ en prenant $\delta \approx \sqrt{\nu x/U}$; on obtient :

$$U\frac{\delta_\theta}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\kappa}{\delta_\theta^2} \qquad \text{or :} \qquad \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U\,x}} \approx \frac{\nu}{U\,\delta}$$

donc :

$$\left(\frac{\delta_\theta}{\delta}\right)^3 \approx \frac{\kappa}{\nu}$$

soit :

$$\frac{\delta_\theta}{\delta} \approx \sqrt[3]{\kappa/\nu} = \sqrt[3]{1/Pr}. \tag{9.75}$$

Ainsi, le rapport δ_θ/δ est indépendant de x, et on a $(1/\delta_\theta)\,(\mathrm{d}\delta_\theta/\mathrm{d}x) = (1/\delta)\,(\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}x)$.

Remarque Comme Pr est très supérieur à 1, l'épaisseur δ_θ est très supérieure à δ et, d'après l'équation (9.75), vérifie la relation $\delta_\theta = (\kappa/\nu^{5/2})\sqrt{x/U}$.

Estimons maintenant l'ordre de grandeur du terme $u\,(\partial\theta/\partial x)$; on trouve, à l'aide du résultat précédent et des équations (9.73) et (9.74) :

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x} \approx \frac{U}{\delta}\frac{\mathrm{d}\delta_\theta}{\mathrm{d}x} \approx U\frac{\delta_\theta}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \approx v\frac{\partial\theta}{\partial y}\,.$$

On vérifie bien ainsi, *a posteriori*, que les trois termes de l'équation du transport de la chaleur sont du même ordre. On vérifie également, d'après l'équation (9.75), que, si Pr est plus grand que l'unité, l'épaisseur $\delta_\theta(x)$ de la couche limite thermique est faible devant celle de la couche limite de vitesse, $\delta(x)$. Par ailleurs, $\delta_\theta(x)$ croît proportionnellement à $\sqrt{x}$, tout comme $\delta(x)$.

À partir de ce calcul, on peut évaluer le flux de chaleur échangé entre le solide et le fluide. On peut supposer en effet que, à l'intérieur de la couche limite thermique, les échanges diffusifs de chaleur dominent ; ils deviennent d'un ordre de grandeur comparable aux transferts convectifs à la frontière de la couche. Appelons k la conductivité thermique du fluide, le flux de chaleur $\mathrm{d}Q$ à travers un élément de surface de longueur $\mathrm{d}x$ dans la direction de la vitesse U et de dimension unité dans la direction Oz vérifie :

$$\mathrm{d}Q = -k\frac{T_0 - T_1}{\delta_\theta}\mathrm{d}x = -k\,(T_1 - T_0)\frac{Pr^{1/3}}{\delta}\mathrm{d}x. \tag{9.76}$$

En intégrant sur la longueur totale L de la plaque, et en notant $\Delta T = T_0 - T_1$, on trouve un flux Q :

$$Q \propto k\,\Delta T\,Pr^{1/3}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\nu x/U}} \propto k\,\Delta T\sqrt{\frac{U}{\nu}}L^{1/2}\,Pr^{1/3} \propto k\,\Delta T\,Re^{1/2}Pr^{1/3}. \tag{9.77}$$

Le nombre de Reynolds Re est ici pris égal à UL/ν où L est la longueur totale de la paroi parallèlement à l'écoulement. La loi (9.77) de dépendance du flux thermique en fonction de Pr et Re est le résultat crucial de ce calcul : on la récrit souvent en remplaçant Q par la combinaison adimensionnelle $Nu = Q/(k\,\Delta T)$. Ce *nombre de Nusselt* Nu est le rapport entre le flux en présence de l'écoulement, et celui qui serait obtenu dans les mêmes conditions de géométrie et de température sans effet convectif. On obtient :

$$Nu = C\,Re^{1/2}\,Pr^{1/3}. \tag{9.78}$$

Cette forme est celle-là même que trouve l'ingénieur qui cherche dans les tables la solution d'un problème de transfert thermique. Dans le cas particulier de l'écoulement parallèle à une plaque chauffée, le coefficient de proportionnalité C vaut 0,339. Ce préfacteur varie suivant la géométrie, mais les exposants $1/3$ et $1/2$ de Pr et de Re sont caractéristiques des transferts de chaleur pour des nombres de Prandtl très grands devant l'unité.

Cas d'un nombre de Prandtl très inférieur à l'unité

Cette situation se rencontre avec les métaux liquides ($Pr = 0,01$ pour le mercure). La couche limite visqueuse est, contrairement au cas précédent, beaucoup plus mince que la couche limite thermique ; la vitesse est donc uniforme et de valeur U dans presque toute l'épaisseur δ_θ. Dans ce cas, on peut alors utiliser les raisonnements de la section 9.2, en remplaçant le rapport u/U par θ, et la viscosité ν par la diffusivité thermique κ (on peut aussi faire le même calcul que dans la section 9.7.1, en prenant la vitesse constante au bord de la couche limite). On a alors :

$$\delta_\theta(x) \approx \sqrt{\frac{\kappa x}{U}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta(x)}{\delta_\theta(x)} \approx \sqrt{\frac{\nu}{\kappa}}\,. \tag{9.79}$$

En poursuivant le calcul comme précédemment, on arrive à une variation du nombre de Nusselt du type $Nu \approx Re^{1/2}\,Pr^{1/2}$; ainsi, on conserve la dépendance en $Re^{1/2}$ par rapport à la vitesse, mais la variation des épaisseurs relatives des couches limites de vitesse et de température fait passer l'exposant du nombre de Prandtl de $1/3$ à $1/2$.

Cas d'un nombre de Prandtl de l'ordre de l'unité

Dans ce cas, la croissance de la couche limite thermique se fait à la même vitesse que celle de la couche limite visqueuse, et les deux épaisseurs sont du même ordre (ce qui correspond d'ailleurs à la limite pour $Pr = 1$ des formules de cette section et de la précédente). Cette situation correspond physiquement au cas des gaz, où les coefficients de diffusion thermique et de quantité de mouvement sont du même ordre.

Une application des lois d'échange de chaleur entre un solide et un écoulement : l'anémomètre à fil chaud

Ce dispositif est couramment utilisé en laboratoire pour l'analyse des fluctuations de vitesse dans les écoulements turbulents. Dans les gaz, on utilise des fils de platine ou d'alliage, de quelques micromètres de diamètre et d'une longueur de l'ordre du millimètre, chauffés par un courant électrique à une température supérieure à celle de l'écoulement (Fig. 9.19).

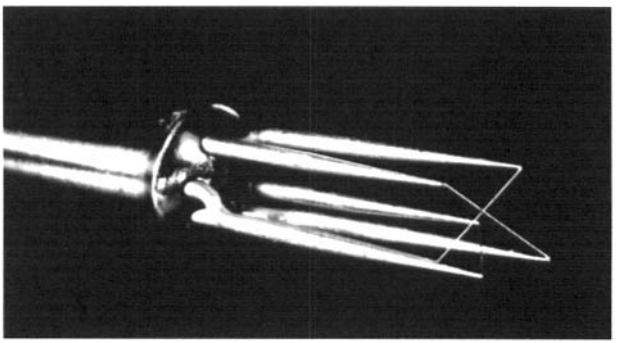


FIG. 9.19 – *Extrémité d'un anémomètre à fil chaud : le dispositif à trois fils présenté ici permet de déterminer les trois composantes de la vitesse locale du fluide (cliché TSI).*

La mesure de la vitesse U du fluide se fait en analysant le refroidissement du fil par la convection thermique. Dans les liquides, on utilise des sondes à film métallique déposé sur un substrat de quartz et protégé par un film de quartz : elles sont en effet plus résistantes mécaniquement que des fils. Pratiquement, on tire parti de la variation de la résistance du film ou du fil avec la température. Un circuit d'asservissement applique un courant de chauffage variable afin de maintenir constante la température du fil ; la mesure du courant de chauffage donne la vitesse. Cette technique a l'avantage, par rapport à une mesure de résistance qui utiliserait un chauffage à courant constant, de supprimer la constante de temps associée à l'échauffement et au refroidissement du fil. On peut ainsi atteindre une réponse en fréquence de l'ordre du mégahertz : cette réponse très rapide, ainsi que le petit diamètre de ce dispositif, permettent son utilisation pour l'analyse fine des fluctuations de vitesse turbulentes.

La température des fils est déterminée par l'équilibre entre l'échauffement du fil par effet Joule, et le refroidissement par la convection forcée et par la diffusion thermique. Pratiquement, seule la composante U_n de la vitesse du fluide perpendiculaire au fil intervient pour le refroidissement ; la composante parallèle a pour seul effet de convecter la chaleur parallèlement à la paroi. On réalise parfois des sondes comprenant trois fils perpendiculaires afin de déterminer les trois composantes de la vitesse. On trouve, à partir des

mesures expérimentales, que le nombre de Nusselt, qui correspond à l'échange thermique du fil avec l'écoulement, vérifie la relation :

$$Nu = 0,42\, Pr^{1/5} + 0,57\, Pr^{1/3}\, Re^{1/2}.$$

À haute vitesse, la loi d'échange de chaleur est donc la même que pour une couche limite laminaire près d'une paroi. On peut s'étonner de ce résultat puisque ces sondes sont précisément utilisées dans des écoulements turbulents. De fait, la sonde est suffisamment petite par rapport à la taille des tourbillons intervenant dans l'écoulement pour que, à l'échelle de son diamètre, l'écoulement apparaisse comme laminaire. Le fait que la sonde ne soit pas une plaque plane parallèle à l'écoulement, mais un barreau circulaire avec des points de stagnation, explique l'origine du terme additif indépendant du nombre de Reynolds.

Justification expérimentale Les mesures de résistance du fil chaud R en fonction de la vitesse normale au fil U_n donnent la formule empirique :

$$\frac{RI^2}{R - R_0} = A + B\, U_n^{0,5}$$

avec:

$$A = 0,42\pi \frac{k\, l\, Pr^{1/5}}{a\, R_0}, \qquad B = 0,57\pi \frac{k\, l\, Pr^{1/3}}{a\, R_0} \sqrt{\frac{\mathrm{d}}{\nu}}$$

où :

R_0 = résistance du fil à la température T_0 du fluide loin de la sonde ;
I = intensité du courant ;
l = longueur du fil ;
k = conductivité thermique du fluide ;
U_n = composante de la vitesse du fluide perpendiculaire au fil ;
d= diamètre du fil ;
a = constante de variation de la résistance du fil avec la température ($R = R_0(1 + a(T_f - T_0))$;
T_f = température du fil.

Introduisons les nombres de Nusselt et de Reynolds du problème, en prenant $\pi\, l\, k\, (T_f - T_0)$ comme ordre de grandeur du flux diffusif de chaleur en l'absence d'écoulement, et en écrivant $R - R_0$ en fonction de $T_f - T_0$. Comme RI^2 est la puissance électrique dissipée dans le fil chaud et que $(R - R_0)/R_0 = a\,(T_f - T_0)$, on a :

$$Nu = \frac{RI^2}{\pi\, l\, k\, (T_f - T_0)} = \frac{a\, R_0}{\pi\, l\, k}\, \frac{R\, I^2}{R - R_0} = \frac{a\, R_0}{\pi\, l\, k}(A + B\, U_n^{0,5}).$$

Remplaçons A et B par les expressions données plus haut et utilisons, pour le nombre de Reynolds Re, la valeur : $Re = U_n \mathrm{d}/\nu$.

On obtient bien alors la forme indiquée plus haut.

La technique d'anémométrie à fil chaud permet, tout comme les techniques d'anémométrie laser, d'analyser les fluctuations turbulentes de vitesse. Par rapport à ces dernières, elle présente les inconvénients de donner une réponse non linéaire requérant une calibration, et de rendre nécessaire l'introduction d'une sonde dans l'écoulement.

9.7.2 Couches limites de concentration, polarographie

Couche limite de concentration induite par une électrode noyée dans une paroi

Le phénomène de couche limite de concentration apparaît chaque fois qu'on a une réaction chimique sur une paroi solide, avec absorption ou émission d'un des composants du mélange en écoulement. C'est en particulier le cas pour les réactions électrochimiques induites par une électrode métallique placée à l'intérieur d'un écoulement. Nous allons illustrer ces phénomènes par l'exemple de la technique de polarographie qui permet de mesurer le gradient de vitesse d'un liquide près d'une paroi solide. Elle utilise une réaction électrochimique contrôlée d'oxydo-réduction dans un réactif en écoulement ; on prend par exemple la réaction ferricyanure–ferrocyanure en présence d'une solution de soude peu résistante, qui pemet de réduire les différences de potentiel parasites dues aux courants électriques dans le volume de la solution.

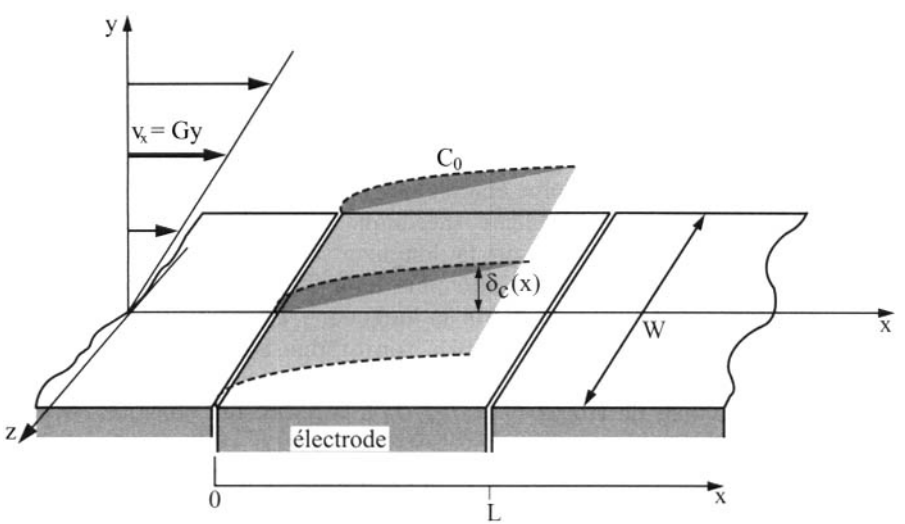


FIG. 9.20 – *Formation d'une couche limite de concentration (représentée par la courbe en tirets) au voisinage d'une électrode sur laquelle est induite une réaction d'oxydo-réduction.*

La réaction est induite par injection de courant dans une électrode de petite dimension (longueur L parallèlement à l'écoulement, largeur W) noyée dans la paroi près de laquelle on veut mesurer le gradient de vitesse (Fig. 9.20). Supposons par exemple que la solution contienne initialement uniquement des ions Fe^{2+} (en général sous forme du complexe Fe $(CN)_6^{4-}$) en concentration C_0 ; on injecte un courant électrique qui oxyde les ions Fe^{2+} en ions Fe^{3+}.

Cette réaction d'oxydation réduit la concentration d'ions Fe^{2+} à la paroi, C_P, et fait apparaître un gradient de concentration par rapport à la valeur C_0 : ce gradient crée un flux diffusif $J = -D\,(\partial C/\partial y)$ d'ions vers la paroi, compensé par un apport d'ions entraînés par le courant convectif venant de l'amont. Plus on augmente l'intensité, plus on augmente le gradient de concentration, jusqu'à ce que la concentration C_P devienne nulle. Alors, tous les ions Fe^{2+} apportés sur l'électrode par diffusion et convection sont oxydés. Cette condition aux limites est équivalente à une condition de température constante ou de vitesse nulle aux parois. Comme dans le cas des couches limites thermiques et de vitesse, l'épaisseur δ_c de la couche limite de concentration représente la distance pour laquelle les flux diffusifs et convectifs sont du même ordre.

Dans la plupart des solutions liquides, le coefficient de diffusion moléculaire D des ions est beaucoup plus faible que la viscosité cinématique ν. Le problème est donc très proche de celui d'une couche limite thermique pour un nombre de Prandtl très supérieur à l'unité. Le rapport $Sc = \nu/D$ qui joue le rôle du nombre de Prandtl pour ce problème est le *nombre de Schmidt*, introduit au chapitre 2 (section 2.3.2 – Tab. 2.1) ; des valeurs de ce nombre de l'ordre de 1 000 sont courantes pour les liquides. De ce point de vue, la dynamique des échanges est donc analogue à celle que nous avons rencontrée à la section 9.7.1 pour la couche limite thermique (dans le cas d'un nombre de Prandtl très grand devant l'unité) : la couche limite de concentration sera donc, elle-aussi, beaucoup moins épaisse que celle de vitesse.

La différence avec le problème thermique vient de ce que l'électrode n'occupe qu'une faible partie de la longueur de la paroi solide suivant l'écoulement (dans l'exemple discuté plus haut (9.7.1), la plaque était au contraire supposée chauffée sur toute sa longueur). En particulier, la couche limite de quantité de mouvement qui a son origine très en amont est déjà développée au niveau de l'électrode : on supposera donc que son épaisseur et, par suite, le gradient de vitesse $G = \partial v_x/\partial y$ à la paroi sont constants le long de l'électrode.

Comme nous le montrerons plus loin, l'épaisseur δ_c de la couche limite de concentration varie comme :

$$\delta_c \approx \sqrt[3]{\frac{3\,D\,x}{G}}$$

avec la distance x au bord amont de l'électrode. On a donc une croissance en $x^{1/3}$ de la couche limite de concentration avec la distance, au lieu de $x^{1/2}$ dans l'exemple plus haut (9.7.1) : la différence vient de ce que le gradient de vitesse G, normal à la paroi, peut être considéré comme constant dans la zone active des électrodes, au lieu de diminuer avec la distance x. Notons que des couches limites de concentration peuvent apparaître même dans des écoulements développés où il n'existe pas de couche limite au sens de la vitesse.

Il suffit que l'on ait :

$$\frac{\delta_c(x)}{x} \approx \sqrt[3]{\frac{3\,D}{Gx^2}} \ll 1.$$

Démonstration Évaluons la variation de l'épaisseur $\delta_c(x)$ de cette couche limite en prenant comme origine $x = 0$ la limite amont de l'électrode. C_0 est la concentration d'ions dans la solution incidente en dehors de la couche limite. L'équation de transport de la concentration de traceur vérifie en régime stationnaire :

$$u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\,.$$

Estimons les différents termes de l'équation ; comme à la section 9.7.1, nous déterminerons l'épaisseur δ_c de la couche limite de concentration en écrivant que c'est la distance à la paroi pour laquelle le transport convectif et le transport diffusif sont du même ordre. Comme on suppose le gradient de vitesse constant avec la distance x, on a un écoulement parallèle avec $v = 0$: le deuxième terme convectif $v\,(\partial C/\partial y)$ est donc nul. Par ailleurs, au bord de la couche limite de concentration ($y = \delta_c(x)$), on a : $u = G\,\delta_c(x)$; ainsi le premier terme convectif a pour ordre de grandeur :

$$u\frac{\partial C}{\partial x} \approx u\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \delta_c(x)}{\partial x} \approx G\,\delta_c(x)\frac{C_0}{\delta_c(x)}\frac{\partial \delta_c(x)}{\partial x} \approx G\,C_0\frac{\partial \delta_c(x)}{\partial x}\,.$$

(Comme plus haut (section 9.7.1), on a pris : $\partial C/\partial x \approx (\partial C/\partial y)(\partial \delta_c(x)/\partial x) \approx (C_0/\delta_c(x))(\partial \delta_c(x)/\partial x)$). Le terme de diffusion $D\,(\partial^2 C/\partial y^2)$ est, lui, de l'ordre de $D\,(C_0/\delta_c^2)$ puisque l'échelle caractéristique de la distance de variation de la concentration dans la direction Oy est δ_c. L'équation de mouvement du fluide devient donc :

$$\delta_c^2\frac{\partial \delta_c(x)}{\partial x} = \frac{D}{G}$$

d'où, en intégrant par rapport à x :

$$\delta_c \approx \sqrt[3]{\frac{3\,D\,x}{G}}\,.$$

Nous allons maintenant voir que l'analyse du transfert de masse dans la couche limite de concentration permet de mesurer le gradient de vitesse transverse G près des parois solides.

Mesure de la vitesse près d'une paroi par polarographie

En pratique, on impose la différence de potentiel ΔV entre l'électrode de mesure et une électrode de référence (cette dernière est, par construction, placée à un potentiel bien déterminé par rapport à la solution). Après stabilisation, on mesure le courant I sur l'électrode pour plusieurs valeurs de ΔV (Fig. 9.21).

Une tension minimale est nécessaire pour pouvoir induire la réaction d'oxydation $Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+}$; au-delà de cette valeur, le courant augmente avec

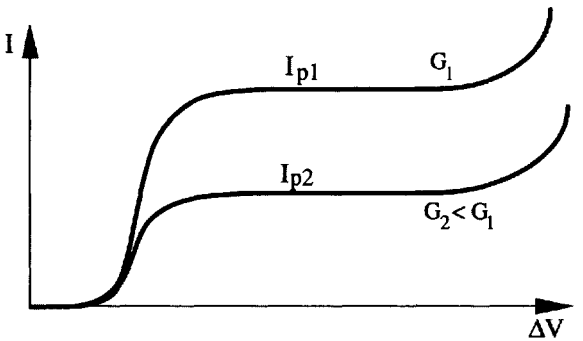


FIG. 9.21 – *Forme des variations du courant sur l'électrode de mesure en fonction de la différence de potentiel par rapport à une électrode de référence, lors d'une réaction d'oxydo-réduction. Les deux courbes correspondent à des valeurs différentes du gradient de vitesse G à la paroi. Les différences de potentiel dépendent des réactions ioniques utilisées et sont de l'ordre de quelques centaines de millivolts ; les intensités dépendent de la surface des électrodes et peuvent aller d'une fraction de microampère à plusieurs milliampères.*

ΔV en même temps que la concentration C_P de traceur sur la paroi diminue. La valeur palier du courant est atteinte quand $C_P = 0$ et que tous les ions apportés par diffusion à partir de la couche limite sont oxydés (quand il s'agit d'ions Fe^{2+}). Aux valeurs de ΔV encore plus élevées, le courant augmente de nouveau, soit parce qu'on induit d'autres réactions d'oxydo-réduction, soit parce qu'il y a électrolyse du solvant. La valeur palier I_p du courant est reliée au gradient de vitesse $G = \partial V_x/\partial y$ près de la paroi par :

$$I_p \propto G^{1/3}$$

c'est donc la mesure de I_p qui permet de déterminer G. Cette variation du signal en $G^{1/3}$ complique l'exploitation de la mesure, mais les lectures sont fidèles, et la perturbation de l'écoulement due à la mesure est très faible. Cette mesure de gradient de vitesse à la paroi est particulièrement fiable.

Démonstration La densité de courant locale $j(x)$ sur l'électrode est reliée au gradient $\partial C/\partial y$ de la concentration de réactif dans la direction normale à la paroi par :

$$j(x) = -\beta\, F\, D \frac{\partial C}{\partial y} \approx \beta\, F\, D \frac{C_0}{\delta_c}$$

où :

D = diffusivité moléculaire du réactif ;
β = nombre d'électrons actifs par molécule de réactif ;
F = constante de Faraday.

Le courant total par unité de largeur d'électrode (perpendiculairement à l'écoulement) vaut donc :

$$I = -\beta F D C_0 \int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\delta_c(x)}$$

d'où, en remplaçant δ_c par l'expression que nous avons trouvée précédemment :

$$I \propto \beta F C_0 D^{2/3} G^{1/3} L^{2/3}$$

où L est la longueur de l'électrode parallèlement à l'écoulement.

Remarque On peut aussi mesurer les gradients de vitesse de fluides de nombre de Prandtl élevé, à l'aide d'un dispositif équivalent à la polarographie basé sur le transfert thermique. Il suffit de coller sur une paroi solide un film chauffant de largeur faible dans la direction de l'écoulement, et n'occupant qu'une faible fraction de la surface totale de la paroi (c'est une situation très différente du chauffage uniforme vu plus haut (9.7.1)). Dans ce cas, on mesure l'intensité nécessaire pour maintenir le film à un écart de température donné avec un écoulement incident. La diffusion de chaleur remplace alors celle du réactif et la diffusivité thermique κ remplace D. La puissance chauffante nécessaire pour maintenir constante la température du film varie aussi comme $G^{1/3}$.

9.8 Sillage laminaire

9.8.1 Approche qualitative du problème

On étudie un solide de taille finie qui se déplace à une vitesse U dans un fluide immobile à l'infini (Fig. 9.22). On analyse l'écoulement à une distance suffisamment grande en aval du corps par rapport à sa taille caractéristique pour que :

- la forme exacte du solide n'intervienne pas ;
- l'équation d'Oseen soit valable (Éqs. (8.74) et (8.75) du chapitre 8) ;
- le terme de convection de cette équation soit dominant.

Dans ces conditions, on peut supposer que la vorticité générée au passage du solide est entraînée vers l'aval sans avoir le temps de diffuser dans toutes les directions.

À une distance L en aval de l'obstacle, un temps $\Delta t \approx L/U$ s'est écoulé depuis le passage du corps au point d'observation. La vorticité et, par suite, les gradients de vitesse, ont diffusé sur une distance transverse à l'écoulement de l'ordre de :

$$e \approx \sqrt{\nu\,\Delta t} \approx \sqrt{\frac{\nu L}{U}}\,. \tag{9.80}$$

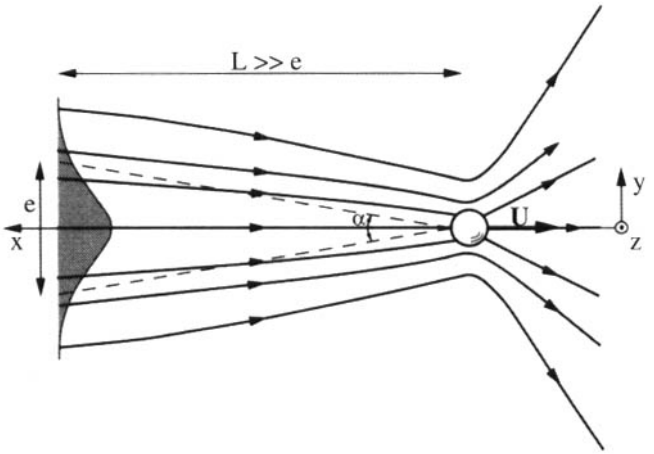


FIG. 9.22 – *Sillage en aval d'un corps solide se déplaçant à la vitesse* **U** *dans un fluide au repos loin du corps. Ce schéma peut être rapproché de celui de la figure 8.14, que nous avons utilisé pour la discussion de l'équation d'Oseen.*

Ils sont donc concentrés sur un *sillage* d'épaisseur e qui augmente comme $\sqrt{L}$, donc plus lentement que la distance L au solide ; la section de ce sillage présente donc un angle solide de plus en plus faible quand L augmente.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans ce chapitre, ce type de profil est typique des écoulements où le transport de quantité de mouvement et de vorticité par convection s'opère dans une seule direction (le transport dans la direction perpendiculaire étant uniquement diffusif).

À partir du corps, l'épaisseur e du sillage à la distance L est vue sous un angle :

$$\alpha \approx \frac{\mathrm{e}}{L} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U\,L}} = \sqrt{\frac{\nu}{U\,a}}\sqrt{\frac{a}{L}} = \frac{1}{\sqrt{Re_a}}\sqrt{\frac{a}{L}} \tag{9.81}$$

où Re_a est le nombre de Reynolds obtenu en prenant la taille a du solide comme échelle de longueur. Ainsi, même si le nombre de Reynolds n'est pas très grand, l'angle α deviendra petit, si la distance L vérifie :

$$\frac{L}{a} \gg \frac{1}{Re}\cdot \tag{9.82}$$

Les gradients de vitesse et la vorticité sont alors concentrés dans une très faible region de l'espace. Admettons à présent que la vitesse du fluide décroisse en $1/L$ avec la distance L au corps (nous le justifierons par la suite) ; on a alors :

$$v_x \approx U\frac{a}{L}\cdot \tag{9.83}$$

Le débit total de fluide à travers la section du sillage vaut donc :

$$Q \approx v_x \, e^2 \approx \frac{U\,a\,\nu\,L}{L\;U} = a\,\nu = \text{constante}. \tag{9.84}$$

D'une façon inattendue, Q ne dépend pas de la vitesse du solide : l'augmentation de vitesse caractéristique est en effet exactement compensée par la diminution de largeur du sillage. Le passage du solide crée un courant de fluide orienté vers le solide et concentré à l'intérieur du sillage. Ce courant est ensuite compensé par un écoulement vers l'extérieur réparti dans tout l'espace.

9.8.2 Équation du mouvement dans le sillage

Sillage derrière un corps dont toutes les dimensions sont finies

Par une analyse plus complète utilisant l'équation d'Oseen, nous allons montrer que :

$$v_x = \frac{Q\,U}{4\pi\,\nu\,x}\,e^{-\dfrac{U r^2}{4\nu x}} \tag{9.85}$$

où Q est le débit de fluide à travers le sillage, et $r^2 = (y^2 + z^2)$. À une distance du solide de l'ordre de a, v_x doit être de l'ordre de grandeur de U : on retrouve donc bien que le débit Q est de l'ordre du produit $\nu\,a$, ce qui confirme l'hypothèse précédente selon laquelle v_x est de l'ordre de $U\,a/L$. Nous déterminerons ensuite exactement Q à partir de la valeur de la force de traînée sur le corps.

Démonstration À distance assez grande du corps pour avoir $|\mathbf{v}| \ll U$, on utilise l'équation d'Oseen (Éq. (8.75)) qui s'écrit :

$$\rho\,(-\mathbf{U}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,p + \eta\,\Delta\mathbf{v}. \tag{9.86}$$

Comme les lignes de courant dans le sillage sont presque parallèles, on a :

$$v_y = v_z \approx v_x\,\frac{e}{L} \ll v_x. \tag{9.87}$$

En prenant les différentes composantes de l'équation (9.86) suivant les directions x, y et z, on trouve que les termes qui déterminent $\partial p/\partial y$ et $\partial p/\partial z$ sont d'un ordre de grandeur en e/L inférieurs à ceux qui déterminent $\partial p/\partial x$. On peut donc négliger les variations de pression dans les directions perpendiculaires à la vitesse du fluide, dans le sillage, comme en dehors. Par ailleurs, comme on néglige la pesanteur, la pression en dehors du sillage (là où la vitesse du fluide est très faible) est uniforme, dès qu'on est suffisamment loin du corps en mouvement. On peut donc négliger les variations de pression dans la direction parallèle à l'axe de l'écoulement à l'extérieur du sillage. En combinant les deux résultats précédents, on conclut que la pression à l'intérieur du sillage peut être considérée comme uniforme.

Par ailleurs:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \approx \frac{e^2}{L^2}\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,. \tag{9.88}$$

En tenant compte de ces résultats, la composante suivant Ox de la relation (9.86) devient :

$$-\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\nu}{U}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right). \tag{9.89}$$

On a donc une équation de diffusion de la chaleur à deux dimensions (où la variable temps est remplacée par x/U). Étant donné que v_x doit s'annuler à l'infini, on trouve comme solution de révolution satisfaisant cette condition :

$$v_x = \frac{C\,U}{\pi\,\nu\,x}\,\mathrm{e}^{-\frac{U\,(y^2+z^2)}{4\nu x}} = \frac{C\,U}{\pi\,\nu\,x}\,\mathrm{e}^{-\frac{U\,r^2}{4\nu x}}. \tag{9.90}$$

Le débit Q à travers le sillage sera donc donné par :

$$Q = \int 2\pi\,r\,v_x(r)\,\mathrm{d}r \approx 4C\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta^2}\,\mathrm{d}(\theta^2) \tag{9.91}$$

avec :

$$\theta^2 = \frac{U\,r^2}{4\,\nu\,x}$$

d'où :

$$Q = 4C = \text{constante}$$

ce qui donne le résultat (9.85).

Sur les paraboloïdes d'équation $Ur^2/4\nu x =$ constante, la vitesse est une fraction constante de la vitesse maximale $QU/4\pi\nu x$ sur l'axe. Leur axe est parallèle à la direction du déplacement. Ce sont en même temps des tubes de courant : en effet, d'après l'équation (9.85), le débit $Q(r_0(x))$ à travers une section de rayon $r_0(x)$ d'un tel paraboloïde vérifie :

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0(x)} 2\pi\,v_x\,r\,\mathrm{d}r &= \int_0^{r_0(x)} \frac{Q\,U}{2\,\nu\,x}\mathrm{e}^{-\frac{U\,r^2}{4\nu x}}\,r\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{r_0(x)} Q\mathrm{e}^{-\frac{U\,r^2}{4\nu x}}\,\mathrm{d}\left(\frac{Ur^2}{4\nu x}\right) = Q\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{U\,r_0^2}{4\nu x}}\right).\end{aligned}$$

Ce flux est donc indépendant de x pour un paraboloïde donné ($r_0^2(x)/x =$ constante).

Sillage derrière un cylindre de longueur infinie

Pour un écoulement bidimensionnel derrière un cylindre de longueur infinie suivant Oz, le profil du sillage reste toujours parabolique. En supprimant les dérivées par rapport à z dans l'équation d'Oseen et en intégrant, on trouve :

$$v_x = Q\sqrt{\frac{U}{4\pi\,\nu\,x}}\,\mathrm{e}^{-\frac{U y^2}{4\nu x}} \tag{9.92}$$

Q représente là encore le flux en volume à l'intérieur du sillage (par unité de longueur suivant Oz) ; il est indépendant de x comme dans le cas précédent. En revanche, la décroissance du maximum de vitesse avec la distance est nettement plus lente, en $1/\sqrt{L}$ au lieu de $1/L$.

9.8.3 Force de traînée sur un corps – relation avec le profil de vitesse dans le sillage

Dans la discussion précédente, le débit Q de fluide à travers le sillage était une inconnue. Nous allons montrer qu'il s'exprime en fonction de la force de traînée F sur le corps par :

$$F = -\iint \rho\, U\, v_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\rho\, U\, Q. \tag{9.93}$$

Cette expression n'est valable sous cette forme que pour des corps ayant la symétrie d'une sphère ou d'un polyèdre régulier pour lesquels la force $\mathbf{F}$ est parallèle à la vitesse $\mathbf{U}$. Ainsi, pour une sphère, on a :

$$\mathbf{F} = -6\pi\,\eta\, R\,\mathbf{U} \qquad \text{et} \qquad Q = 6\,\pi\,\nu\, R. \tag{9.94}$$

La constante C introduite dans (9.90) vaut donc :

$$C = \frac{3}{2}\,\pi\,\nu\, R. \tag{9.95}$$

Donc la composante v_x de la vitesse dans le sillage vérifie :

$$v_x = \frac{3\,R\,U}{2\,x}\,\mathrm{e}^{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}} \tag{9.96a}$$

où x représente la distance au centre de la sphère en aval de celle-ci. Le problème d'une sphère immobile placée dans un écoulement de vitesse $\mathbf{U}$ uniforme à l'infini (Fig. 9.23) est équivalent, à un mouvement global de translation de vitesse $\mathbf{U}$ près, au problème du mouvement dans un fluide immobile. Dans ce cas, la fonction

$$v_{xs} = \frac{3\,R\,U}{2\,x}\,\mathrm{e}^{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}} \tag{9.96b}$$

représente le défaut de la composante suivant Ox de la vitesse v_x du fluide à l'intérieur du sillage par rapport à l'écoulement uniforme $\mathbf{U}$ à l'extérieur.

Démonstration Pour faciliter la démonstration, on prend le cas d'un référentiel où le corps est immobile et le fluide en mouvement avec une vitesse U à l'infini. La composante $v_x(y,\, z)$ parallèle à l'axe Ox de la vitesse dans le sillage (à suffisamment grande distance en aval du solide) vaut donc : $U - v_{xs}(y,\, z)$ ($v_{xs}(y,\, z)$ est ici la fonction de sillage donnée par l'équation (9.96b)). Cette équation montre que l'influence de la perturbation de vitesse $v_{xs}(y,\, z)$ est limitée à une distance r de l'axe de l'ordre de $\sqrt{\nu x/U}$, et elle décroît exponentiellement avec r^2.

En dehors du sillage et, en particulier, en amont du corps, la perturbation par rapport à la vitesse moyenne U diminue rapidement en $1/L^2$ avec la distance L au corps (au lieu de $1/L$ dans le sillage). Loin du corps, on a un écoulement approximativement radial de vitesse de l'ordre de Q/L^2 dirigée vers l'extérieur, qui compense le débit volumique Q dans le sillage (l'allure du champ de vitesse a été montrée sur la figure 9.22). Écrivons la conservation du débit total à travers les

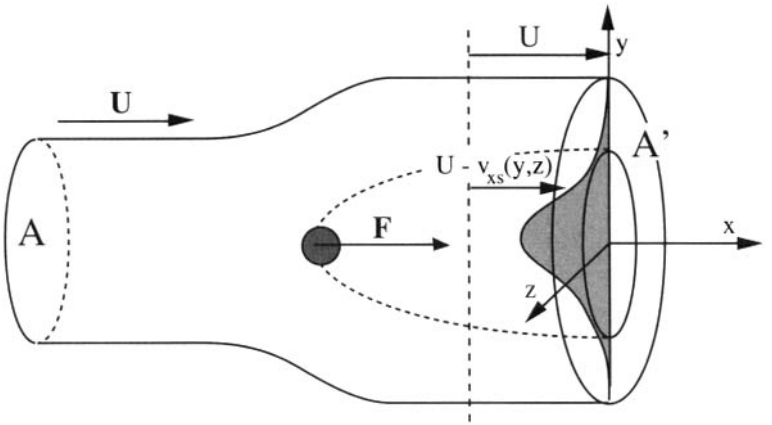


FIG. 9.23 – *Évaluation de la force de traînée sur un corps de révolution au repos à partir du débit de fluide dans le sillage. Loin du corps, le fluide est en mouvement à la vitesse U.*

sections A et A' d'un même tube de courant, situées respectivement en amont et en aval du corps (Fig. 9.23).

$$A\,U = \iint_{(A')} [U - v_{xs}(y,\,z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = A'\,U - \iint_{(A')} v_{xs}(y,\,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \qquad (9.97)$$

En effet, si la section A est choisie suffisamment en amont du corps, la contribution de l'écoulement radial (qui décroît en $1/L^2$) à l'intégrale sur la section A sera négligeable devant celle due au sillage (décroissance en $1/L$ du défaut de vitesse dans le sillage). Écrivons de même l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le volume du tube de courant limité par A et A' (relation (5.12)) :

$$\iint_{\text{(nappe de courant)}} \rho\, v_x\, v_j\, n_j\, \mathrm{d}S = \iint_{\text{(nappe de courant)}} \sigma_{xj}\, n_j\, \mathrm{d}S + (-F_x). \qquad (9.98)$$

La seule force en volume qui apparaît est la force $(-F_x)$, égale et opposée à la traînée, et qu'il faut appliquer au corps pour le maintenir en équilibre. La contribution des parois du tube de courant à l'intégrale du premier membre de l'équation (9.98) est nulle. Elle se réduit donc à la contribution due aux sections A et A' perpendiculaires à la direction Ox. Le premier membre de (9.98) devient donc, en négligeant les termes du deuxième ordre en v_{xs} (qui tendent vers zéro puisque l'intégrale $\iint v_{xs}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est finie et que v_{xs} tend vers zéro à l'infini) :

$$\iint_{(A')} \rho(U - v_{xs})(U - v_{xs})\mathrm{d}S - \iint_{(A)} \rho\, U^2\, \mathrm{d}S \simeq \rho\, U^2 (A' - A)$$
$$- 2\,\rho\, U \iint_{(A')} v_{xs}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad (9.99)$$

En combinant (9.97, 9.98) et (9.99), on trouve :

$$-\rho U \iint_{(A')} v_{xs}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint \sigma_{xj}\,n_j\,\mathrm{d}S - F_x. \tag{9.100}$$

Le terme σ_{ij} comprend les composantes associées à la fois aux forces visqueuses et aux forces de pression. En dehors du sillage, on peut négliger l'influence des forces de viscosité. À l'intérieur (partie de l'intégrale sur la surface A'), seul σ'_{xy} est non nul et ne contribuera pas à l'intégrale ; d'où :

$$\iint \sigma'_{xj}\,n_j\,\mathrm{d}S = 0.$$

L'intégrale $\iint(-p)\,n_x\,\mathrm{d}S$ (contribution de la pression) est, elle aussi, nulle. En effet, en dehors du sillage, on peut appliquer l'équation de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{constante}$$

U et, par suite, p sont donc constants. À l'intérieur du sillage, les lignes de courant sont presque parallèles ; la pression ne varie donc pas quand on se déplace perpendiculairement aux lignes de courant. Elle a, par conséquent, la même valeur constante à l'intérieur du sillage qu'à l'extérieur. L'intégrale $\iint(-p)\,n_x\,\mathrm{d}S$ se ramène à $-p\iint n_x\,\mathrm{d}S$ et est nulle sur toute surface fermée. L'équation (9.100) redonne donc bien l'expression (9.93).

La relation traînée – débit de fluide dans le sillage a un sens physique très général qui ne se limite pas aux écoulements laminaires. Derrière un corps bien profilé, le sillage a une faible largeur et le débit à l'intérieur du sillage est donc petit (le défaut de vitesse $v_x(y,\,z)$ est de l'ordre de grandeur de **U**) ; on a donc, d'après (9.93), une faible force de traînée induite. En revanche, derrière un corps mal profilé, la couche limite décolle, se déstabilise et se disperse rapidement. Cela occasionne une dissipation supplémentaire et est généralement associé à l'apparition de turbulence en aval de l'obstacle (comme dans le cas de la figure 9.1b). Le débit à l'intérieur de la couche limite et la force de traînée sont alors très augmentés.

Chapitre 10

Instabilités hydrodynamiques

NOUS AVONS DÉJÀ *souvent eu l'occasion de souligner l'efficacité du transport convectif (entraînement par le champ de vitesse de l'écoulement) par rapport aux mécanismes de diffusion ; c'est en particulier le cas lorsque le nombre de Péclet ($Pe = Ua/\kappa$ ou $Pe_m = Ua/D$), qui mesure le rapport du temps de diffusion (de chaleur $\tau_Q = a^2/\kappa$, ou de masse $\tau_m = a^2/D$) au temps de transport convectif (a/U), est suffisamment grand. En suivant l'exemple du transport de la chaleur, nous allons montrer le couplage entre les mécanismes de diffusion et les champs d'écoulement qui constitue le phénomène de convection thermique (section 10.1). La convection de Rayleigh–Bénard, obtenue dans le cas d'un fluide contenu entre deux plaques parallèles horizontales portées à des températures différentes, nous donnera un premier exemple d'instabilité avec seuil (section 10.2). Nous montrerons ensuite la correspondance avec d'autres instabilités classiques gouvernées par les gradients de tension superficielle (instabilité de Bénard–Marangoni), ou par la force centrifuge (instabilité de Taylor–Couette) (section 10.3). Il existe bien d'autres façons de déstabiliser des écoulements laminaires ou des interfaces, et nous en donnerons plusieurs exemples à la section 10.4. Ainsi, les écoulements de Poiseuille entre deux plans et dans un tube se comportent de manières très différentes. Nous illustrerons plus en détail la nature des instabilités des écoulements de cisaillement dans le cas de l'instabilité de Kelvin–Helmholtz pour deux jets parallèles de vitesses différentes. Enfin, nous aborderons à la section 10.5 le problème des modes de transition des écoulements vers la turbulence, lorsqu'on s'éloigne progressivement du seuil d'apparition des instabilités. Dans certains cas, une séquence d'un petit nombre de bifurcations conduit à un état chaotique ou faiblement turbulent. On peut rapprocher ce problème de celui de l'écoulement autour d'un cylindre traité au chapitre 2.*

10.1 Convection thermique

10.1.1 Équations de transport convectif de la chaleur

Dans cette section, nous étudions le couplage entre les variations de température au sein d'un fluide et les champs d'écoulements de ce fluide. Le couplage entre la température et la vitesse du fluide apparaît dans les deux équations qui gouvernent ce type de problème : l'équation de la chaleur et l'équation de Navier–Stokes. Dans la première, les termes de transport de chaleur par convection sont à l'origine de variations de température induites par l'écoulement. Dans la deuxième, ce sont les variations de masse volumique avec la température qui influent sur l'écoulement du fluide.

En présence d'un écoulement de vitesse $\mathbf{v}$ et en l'absence de sources de chaleur en volume, l'équation de transport de la chaleur déjà établie au chapitre 9 (section 9.7.1, Éq. (9.70a)) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, T = \kappa \Delta T. \tag{10.1}$$

Rappelons que cette équation représente simplement l'application, à une particule de fluide en mouvement, de *l'équation de Fourier* de transport de la chaleur établie au chapitre 1 (Éq. (1.17)). La dérivée $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ représente la variation de température d'une particule que l'on suit pendant son déplacement : c'est la dérivée lagrangienne que nous avons appliquée au cours de cet ouvrage aux diverses grandeurs qu'il est possible d'associer à une particule de fluide (vitesse, température, concentration d'un traceur ...). La dérivée $\partial T/\partial t$ représente la variation de température en un point fixe donné. Le deuxième terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, T$ de l'expression de $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ décrit le transport de chaleur associé à l'écoulement du fluide.

Le champ de vitesse $\mathbf{v}$ qui apparaît dans l'équation de diffusion–convection (10.1) peut représenter un écoulement imposé : on parle alors de *convection forcée*. Nous nous intéressons ici au cas opposé de la *convection libre*, où les écoulements sont induits par des variations spatiales de température : c'est par exemple le cas de la circulation d'air chaud au-dessus d'un radiateur.

La seconde équation à considérer est l'équation de Navier–Stokes (4.30) établie au chapitre 4 (section 4.2.2) ; après division par ρ, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\, p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}. \tag{10.2}$$

L'origine essentielle du couplage entre la vitesse du fluide et les variations spatiales de la température est la variation de la masse volumique ρ du fluide avec la température T. Ces variations de ρ interviennent en effet dans le terme $-(1/\rho)\,\mathbf{grad}\, p$ de l'équation de Navier–Stokes.

10.1.2 Convection thermique créée par un gradient horizontal de température

Considérons d'abord l'exemple de la figure 10.1 : un fluide est placé entre deux plaques verticales infiniment étendues, portées à des températures constantes différentes T_1 et T_2. Il apparaît donc une répartition de température $T(x)$ dont le gradient est horizontal. En résolvant l'équation (10.1) en régime stationnaire et en l'absence d'écoulement, on obtient :

$$T(x) = T_0 + \Delta T \frac{x}{a} \tag{10.3}$$

avec :

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} \qquad \text{et} \qquad \Delta T = T_2 - T_1.$$

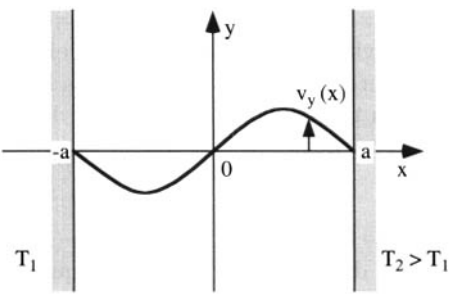


FIG. 10.1 – *Profil de vitesse de l'écoulement d'un fluide induit par une différence de température entre deux plaques verticales infinies.*

Supposons que la densité ρ du fluide dépende de la température, mais non de la pression (fluide incompressible), avec une variation :

$$\rho(x) = \rho_0 + \delta\rho(x) = \rho_0 \left[1 - \alpha(T(x) - T_0)\right] = \rho_0 \left[1 - \alpha \Delta T \frac{x}{a}\right] \tag{10.4}$$

(T_0 est la température uniforme du fluide en l'absence de gradient de température et α le coefficient de dilatation qui est généralement positif). Les surfaces d'égale densité ρ (isochores) sont donc verticales. Si le fluide est initialement au repos ($\mathbf{v} = 0$), l'équation de mouvement se réduit à l'équation fondamentale de l'hydrostatique vérifiée par la pression p_0 :

$$\mathbf{grad}\, p_0 = \rho \mathbf{g}. \tag{10.5}$$

Les lignes d'égale pression (isobares) sont alors horizontales avec $p_0 = p_0(y)$. Il est alors impossible de satisfaire l'équation (10.5) car ses membres dépendent de deux variables différentes, y (dans la pression), et x (dans la masse

volumique). Comme nous l'avons montré au chapitre 7 (section 7.2.2), il va donc y avoir création de vorticité, car les isochores du fluide ne sont pas confondues avec les isobares : le fluide se met donc en mouvement.

De façon générale, il n'existe pas d'équilibre hydrostatique (même instable) d'un fluide dans un champ de pesanteur en présence d'un gradient de température ayant une composante horizontale. Pour analyser l'écoulement de fluide qui s'établit alors, repartons de l'équation (10.2) et supposons le régime stationnaire atteint $(\partial \mathbf{v}/\partial t) = 0)$. Nous obtenons, en projection sur l'axe vertical :

$$0 = -\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \cdot \tag{10.6}$$

Pour écrire cette équation, nous avons utilisé la propriété d'invariance de l'écoulement par translation dans les directions y et z parallèles à la surface des plaques (nous supposons en effet les plaques infiniment étendues). Le champ de vitesse $\mathbf{v}$ dépend alors uniquement de la variable x et la condition d'incompressibilité $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ se réduit à $\partial v_x/\partial x = 0$. Compte tenu de la condition aux limites de vitesse nulle aux parois, cela entraîne $v_x \equiv 0$. Les termes en $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ n'interviennent donc pas dans l'équation (10.6). En ne gardant que les termes du premier ordre en $\delta\rho$, elle devient :

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{\partial \rho}{\rho_0}g. \tag{10.7}$$

Par ailleurs, la composante horizontale de l'équation (10.2) donne la condition $\partial p/\partial x = 0$. L'apparition du gradient de densité équivaut donc à introduire un terme de force supplémentaire sur chaque élément de volume de fluide, qui s'écrit compte tenu de l'équation (10.4) :

$$\delta\rho\,\mathbf{g} = -(\alpha\rho_0\delta T)\,\mathbf{g} \tag{10.8}$$

δT est l'écart de température locale par rapport à la valeur T_0. Supposons maintenant qu'on n'applique pas de gradient de pression extérieur et que le gradient de pression vertical $\partial p/\partial y$ soit le même que le gradient de pression hydrostatique en l'absence d'écoulement, qui est donné par l'équation (10.5) en prenant la densité ρ égale à la densité moyenne ρ_0. L'équation (10.7) s'écrit alors (compte tenu des équations (10.3) et (10.5)) :

$$\nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + g\alpha\frac{\Delta T}{a}x = 0. \tag{10.9}$$

D'où la solution :

$$v_y(x) = -\frac{g\,\alpha\,\Delta T}{\nu a}\frac{x^3}{6} + A\,x + B \tag{10.10}$$

soit, en tenant compte des conditions aux limites sur les plaques verticales $v_y(x = \pm a/2) = 0$:

$$v_y = -\frac{g\,\alpha\,\Delta T\,x}{6\,\nu a}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \tag{10.11}$$

Remarquons que ce profil de vitesse est antisymétrique par rapport au plan $x = 0$. Cela permet d'obtenir un débit moyen nul entre les plaques, et correspond bien à la représentation de la figure 10.1.

Remarques

- On peut obtenir la relation $\partial p/\partial y = -\rho_0 g$ prise comme hypothèse en intégrant l'équation (10.7) par rapport à Ox et en tenant compte de l'antisymétrie du champ de vitesse et de la distribution de densité.
- Dans cette géométrie, l'écoulement vertical n'induit pas de transport convectif de chaleur puisque le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, T$ est identiquement nul (la direction de la vitesse est perpendiculaire à celle du gradient de température).
- Dans la pratique, pour une géométrie réelle avec des plaques verticales d'extension finie, il existe un écoulement horizontal de composante v_x différente de zéro à l'extrémité des plaques pour assurer la conservation de la masse. Cela induit un échange de chaleur par convection puisqu'il apparaît une composante v_x de la vitesse dans la direction de la variation de température.

La vitesse de l'écoulement induit par le gradient horizontal est proportionnelle à ΔT : il n'y a aucun effet de seuil, et la configuration sans écoulement n'est *jamais* stable. Cela confirme le fait qu'il y a impossibilité d'équilibre hydrostatique du fluide lorsqu'il existe les gradients horizontaux de température. Soulignons que ce problème est différent de celui de l'exemple que nous allons d'écrire maintenant : dans ce cas, suivant des gradients de température verticaux appliqués au fluide, il existe des *états d'équilibre stable ou instable.*

10.2 Instabilité de Rayleigh–Bénard

Nous considérons le problème d'un fluide contenu entre deux plaques horizontales à des températures différentes. Dans cette situation, où le gradient de température est vertical, nous allons montrer que le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, T$ de transport de chaleur par convection contrôle l'écoulement (il était nul dans le cas précédent).

Si la température de la plaque inférieure est plus faible que celle de la plaque supérieure, la stratification de densité (fluide dense par dessous) est stable. Cet effet apparaît dans l'atmosphère de certaines villes, lorsque les nappes d'air chaud sont au-dessus de celles d'air plus frais. Cette situation ne permet pas l'élimination correcte de la pollution (Fig. 10.2) et il se forme un brouillard (*smog*) dans la partie supérieure de l'atmosphère : celui-ci renforce ce processus en arrêtant le rayonnement solaire (ce qui l'échauffe), et en empêchant le réchauffement des couches basses (phénomène d'inversion de température).

Dans le cas opposé d'un fluide chauffé par en-dessous, on se trouve dans une situation instable, car les particules de fluide de plus faible densité sont situées au-dessous de celles de plus grande densité (en effet, la

FIG. 10.2 – *Accumulation d'une nappe de polluants (dus pour 80 % à la circulation automobile) au-dessus de la ville de Los Angeles : on aperçoit à peine au centre de l'image le centre-ville et ses gratte-ciels ainsi que quelques montagnes dans le lointain. Ce phénomène est observé dans le cas d'une atmosphère stable due à l'existence d'une couche d'air chaud à une altitude de l'ordre de 500 mètres au-dessus de masses d'air frais venant de l'océan. C'est le classique « smog » de Los Angeles (Document B. Gaitley, Jet Propulsion Laboratory).*

masse volumique diminue lorsque la température augmente). Cependant, contrairement au cas d'un gradient horizontal, un mouvement du fluide n'apparaît que lorsque la différence de température excède une certaine valeur, appelée seuil de l'instabilité. Pour un fluide limité par deux plaques horizontales parallèles, ce problème est appelé *instabilité de Rayleigh–Bénard.* L'apparition de cette instabilité au-dessus du seuil peut être décrite comme une transition de caractéristiques générales analogues à l'émission de tourbillons dans l'écoulement autour d'un cylindre. Ces deux phénomènes peuvent, par analogie avec des exemples thermodynamiques, être décrits par un modèle de Landau, comme nous l'avons montré au chapitre 2 (section 2.4.2). Nous utiliserons ici une présentation hydrodynamique directe pour analyser la notion de seuil d'instabilité du point de vue de la structure de l'écoulement.

10.2.1 Description de l'instabilité de Rayleigh–Bénard

Décrivons tout d'abord les résultats expérimentaux obtenus (T_1 est la température de la plaque supérieure ($y = a$), et $T_2 > T_1$ celle de la plaque inférieure ($y = 0$) (Fig 10.4) :

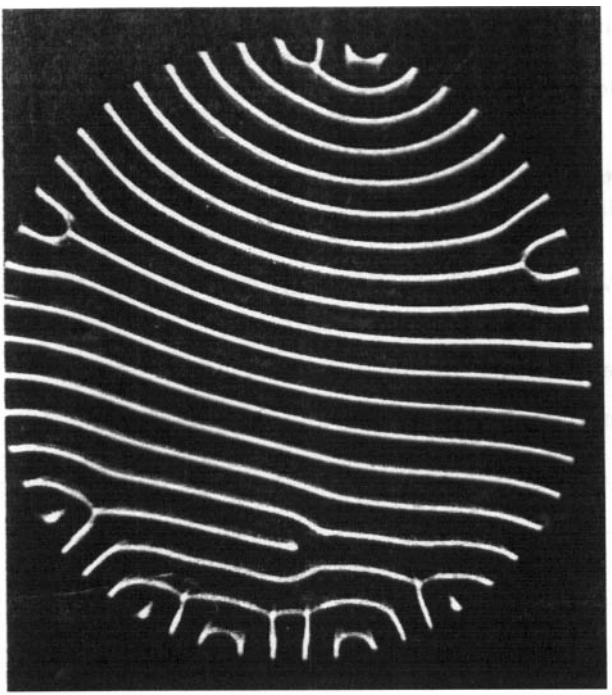


FIG. 10.3 – *Système de rouleaux de convection d'une couche d'huile circulaire entre deux plaques à des températures différentes (vue de dessus). Les défauts et branchements du réseau de rouleaux sont dus aux conditions aux limites circulaires imposées, les rouleaux se raccordant à angle droit aux parois verticales (cliché V. Croquette, P. Legal, A. Pocheau, CEN Saclay).*

- tant que la différence de température $T_2 - T_1 = \Delta T$ est inférieure à une valeur critique ΔT_c, les échanges de chaleur sont purement diffusifs (comme dans le cas où l'on chauffe le fluide par le dessus) ;

- à une valeur $\Delta T = \Delta T_c$, on observe une mise en mouvement du fluide : un ensemble de rouleaux contrarotatifs parallèles apparaît simultanément dans l'ensemble de la cellule (Fig. 10.3). Leur diamètre est très voisin de la distance entre plaques. La vitesse du fluide dans les rouleaux croît continûment et réversiblement lorsqu'on fait varier l'écart $(\Delta T - \Delta T_c)$ *au-dessus du seuil* ;

- suffisamment au-dessus du seuil ΔT_c, on peut identifier d'autres seuils où se produisent des phénomènes instationnaires : on les détecte en analysant la variation du signal de thermocouples mesurant localement la température sur les plaques. On constate l'existence de fluctuations de température couplées à celles du champ de vitesse. Nous décrirons

plus en détail, à la section 10.5, les caractéristiques essentielles de ces régimes : ils représentent différentes étapes d'apparition du *chaos* dans l'écoulement du fluide.

Nous allons proposer plusieurs déterminations approchées du seuil ΔT_c qui nous permettront de nous familiariser avec les diverses façons d'aborder ce type de problème d'instabilité.

10.2.2 Mécanisme de l'instabilité de Rayleigh–Bénard et ordres de grandeur

Mécanisme qualitatif de l'instabilité

Le mécanisme peut être compris à partir du diagramme de la figure 10.4.

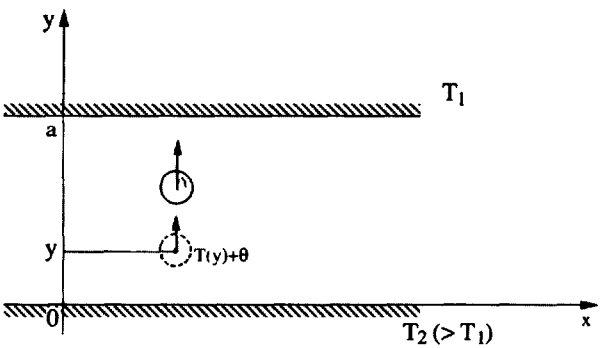


FIG. 10.4 – *Schéma qualitatif du démarrage de l'instabilité de Rayleigh–Bénard. Une fluctuation locale de température θ initie un mouvement convectif vertical. La particule (en traits pleins), une fois déplacée, se trouve soumise à une différence de température d'autant plus grande qu'elle échange moins sa chaleur avec l'extérieur, ce qui renforce la fluctuation initiale.*

- Supposons qu'une perturbation initiale θ de température par rapport à la température d'équilibre $T(y)$ apparaisse en un point du volume.
- Par suite de la poussée d'Archimède, un mouvement vertical est induit sur les particules de fluide correspondantes : ainsi, si θ est positif, la densité des particules diminue et le mouvement est ascendant.
- Il en résulte un apport convectif local de fluide ascendant chaud entraîné par ces particules : il vient des couches inférieures plus chaudes et renforce la perturbation initiale de température. Le processus pourra alors s'auto-entretenir si la diffusion de la chaleur et le freinage visqueux ne le modèrent pas suffisamment.

Cette boucle de réaction positive conduit à l'instabilité convective si les mécanismes stabilisants, que sont la conductivité thermique (qui diffuse la pertubation de température) et la viscosité (qui atténue la perturbation de vitesse), ne sont pas trop importants. Les conditions de démarrage de l'instabilité sont étroitement contrôlées par les valeurs relatives des constantes de temps d'échange de chaleur et de quantité de mouvement qui interviennent dans le problème. Un paramètre très important est le *nombre de Prandtl* $Pr = \nu/\kappa$ défini au chapitre 2 (section 2.3.2), qui caractérise les diffusivités relatives de la quantité de mouvement et de la chaleur. L'analyse qualitative que nous présenterons dans le paragraphe suivant correspond au cas où le nombre de Prandtl est très supérieur à l'unité : cela est vérifié pour de nombreuses huiles visqueuses. On peut alors considérer que la vitesse du fluide est une variable *rapide* qui s'ajuste rapidement aux changements de force verticale dus aux variations de densité. Dans ce cas, par contre, la température est une variable *lente* : nous supposerons donc que c'est la mise en équilibre thermique des particules déplacées de leur point d'équilibre qui contrôle cette force verticale et, par suite l'amplification de l'instabilité. Dans le cas contraire ($Pr \ll 1$), par exemple pour le mercure, ce raisonnement n'est plus valable : la valeur du seuil d'instabilité reste cependant la même comme nous le verrons à la section 10.2.3.

Critère physique d'instabilité – cas d'un nombre de Prandtl grand devant l'unité

Nous analysons le mouvement d'une particule sphérique de rayon R. Supposons que, par suite d'une fluctuation, on l'anime brusquement d'une vitesse v (comptée positivement si elle est dirigée vers le haut). Nous allons chercher si cette fluctuation de vitesse s'atténue par la suite ou tend au contraire à s'amplifier. Estimons d'abord la différence de température δT que la particule acquiert par rapport au fluide environnant. Dans la limite des nombres de Prandtl élevés, cette différence est limitée par la relaxation thermique de la particule avec le fluide (en revanche, on peut supposer qu'elle atteint immédiatement son équilibre de vitesse). Le temps caractéristique τ_Q correspondant vérifie :

$$\tau_Q = A\frac{R^2}{\kappa} \tag{10.12}$$

où A est une constante géométrique. Pendant ce temps-là, la particule s'est déplacée de $\delta y = v\tau_Q$ et ses différences de température δT et de densité $\delta\rho$ par rapport au fluide environnant deviennent respectivement :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial y}\delta y = A\,v\,\frac{R^2}{\kappa}\frac{\Delta T}{a} \tag{10.13}$$

et

$$\delta\rho = -\rho_0\,\alpha\,\delta T = -A\,\rho_0\,\alpha\,v\,\frac{R^2}{\kappa}\frac{\Delta T}{a}\cdot \tag{10.14}$$

On a donc, sur la sphère, une force motrice (ici la force d'Archimède) :

$$F_m = -\frac{4}{3}\pi R^3 \delta\rho g = \frac{4}{3}\pi A \rho_0 \alpha g v \frac{R^5}{\kappa}\frac{\Delta T}{a} \cdot \tag{10.15}$$

La vitesse v de la particule augmentera donc si la force motrice est supérieure à la force de freinage visqueuse de Stokes $F_{\text{visc}} = -6\pi\eta R v$ (Éq. (8.55)) que nous avons calculée au chapitre 8 (section 8.4.2). Le critère d'instabilité devient donc :

$$F_m > F_{\text{visc}} \tag{10.16a}$$

soit :

$$\frac{4}{3}\pi A \rho_0 \alpha g v \frac{R^5}{\kappa}\frac{\Delta T}{a} > 6\pi \eta R v. \tag{10.16b}$$

Plus la perturbation sera de grande étendue spatiale, plus elle sera instable. En prenant comme taille maximale $R = a/2$ et en remplaçant η/ρ_0 par la viscosité cinématique ν, on obtient la condition d'instabilité :

$$Ra = \frac{\alpha \Delta T g a^3}{\nu\kappa} > \frac{72}{A} = Ra_c. \tag{10.17}$$

Le rapport Ra est le *nombre de Rayleigh*. Pour que l'instabilité convective se déclenche, il est nécessaire que Ra dépasse la valeur critique Ra_c, à laquelle correspond une différence de température critique ΔT_c. La valeur expérimentale de ce nombre de Rayleigh critique pour un fluide contenu entre deux plaques rigides horizontales est de 1 708.

Citons un ordre de grandeur correspondant à une expériences réalisée avec une huile silicone : $\nu \approx 10^{-4}$ m^2 s^{-1}, $\kappa = 10^{-7}$ m^2 s^{-1}, $a = 10^{-2}$ m, $\alpha = 10^{-3}$ K^{-1} ; on trouve une valeur $\Delta T_c \approx 1,7$ K. On remarque en particulier la variation très rapide du seuil avec la distance a entre les plaques : ainsi, pour une épaisseur deux fois plus faible, la différence de température critique ΔT_c est huit fois plus élevée.

Remarques

- La valeur de la vitesse v de la particule n'intervient pas pour l'établissement du critère d'instabilité en raison de la linéarité des équations utilisées. Pour déterminer l'amplitude stationnaire de la convection une fois développée, il est nécessaire de faire intervenir des termes non linéaires supplémentaires.
- La valeur expérimentale Ra_c correspond à $A \approx 0,04$, ce qui est un ordre de grandeur raisonnable pour une sphère.
- Si on avait pris un cylindre à la place de la sphère liquide pour respecter la symétrie des rouleaux, on aurait simplement supprimé un facteur a dans les expressions (10.15) et (10.16) ; la force sur un cylindre dépend en effet seulement logarithmiquement de son diamètre comme nous l'avons vu au chapitre 8 (section 8.4.4). Le résultat final (10.17) serait donc inchangé à un coefficient géométrique près.

10.2.3 Solution bidimensionnelle du problème de Rayleigh–Bénard

Calcul approché du seuil de stabilité

Expérimentalement, au-dessus du seuil d'instabilité, on observe des rouleaux parallèles de section à peu près circulaire et contigus : chaque rouleau tourne en sens inverse du voisin. Aidons-nous de ce résultat et supposons d'autre part la couche de liquide infinie dans les deux directions horizontales ; nous prendrons comme approximation de la composante verticale v_y de la vitesse convective la fonction périodique :

$$v_y(x,t) = v_{yo}(t) \cos kx. \tag{10.18}$$

Nous choisissons $k = \pi/a$ comme valeur du vecteur d'onde : cette valeur permet de rendre compte du fait que les rouleaux sont circulaires et d'un diamètre de l'ordre de a. Cette formulation correspond simplement à une analyse en *modes*, dans laquelle on recherche la solution à partir de ses différentes composantes de Fourier de vecteur d'onde k. L'amplitude $v_{yo}(t)$ joue le rôle d'un paramètre d'ordre pour l'instabilité de Rayleigh–Bénard, tout comme l'angle θ dans l'exemple mécanique que nous avons décrit au chapitre 2 (section 2.4.2). L'équation (10.18) ne représente qu'une approximation et ne vérifie pas en particulier les conditions aux limites sur les parois horizontales d'équation $y = \pm a/2$: elle vérifie cependant la condition d'incompressibilité et permet d'obtenir une bonne approximation pour le nombre de Rayleigh critique. Les équations pour le transport vertical de la vitesse et de la chaleur s'écrivent :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \nu\, \Delta v_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g \tag{10.19a}$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa\, \Delta T. \tag{10.19b}$$

Remarque Nous n'avons pas écrit l'équation pour la composante horizontale v_x ; elle serait nécessaire pour une étude plus fine, où nous ferions entrer en ligne de compte la dépendance de v_y par rapport à y. Il faut alors faire intervenir la composante v_x afin de vérifier la condition d'incompressibilité, et de reproduire de façon réaliste le champ de vitesse des rouleaux.

À l'ordre le plus bas en perturbation, la solution des deux équations (10.19) donne $v_y = 0$, et la variation de température avec la coordonnée y est linéaire. Ces solutions représentent l'état du système en l'absence de convection, au-dessous du nombre de Rayleigh critique. Dans ce régime, où le transfert de chaleur est purement diffusif, les champs de vitesse, de pression et de température vérifient :

$$v_y = 0 \tag{10.20a}$$

$$p_0 = \text{constante} - \rho_0\, g\, y \tag{10.20b}$$

et

$$T_0 = T_2 + \frac{(T_1 - T_2)\, y}{a} = T_2 - \frac{\Delta T}{a} y. \tag{10.20c}$$

La solution du développement en perturbation à l'ordre suivant correspond à l'apparition de l'état convectif : si l'on reste infiniment près du seuil, la vitesse v_y est infiniment petite. On écrira donc les champs de vitesse et de pression sous la forme :

$$T(x, y, t) = T_0(y) + \theta(x, t) \tag{10.21a}$$

$$p(x, y, t) = p_0(y) + \delta p\,(x, t) \tag{10.21b}$$

et :

$$\rho(x, y, t) = \rho_0\,(y) + \delta\rho\,(x, t). \tag{10.21c}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (10.19a) p et ρ par les expressions (10.21), et conservons uniquement les termes du premier ordre en v_y, $\delta\rho$ et δp. On obtient alors, en tenant compte des solutions (10.20) correspondant au régime diffusif :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu\, \Delta v_y + \frac{\delta\rho}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\delta p)}{\partial y}\,. \tag{10.22}$$

En combinant les équations (10.8, 10.20, 10.21) et (10.22) et en supposant que δp est seulement fonction de x et de t, on obtient :

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} = \alpha\, g\, \theta \tag{10.23}$$

d'où on tire une première équation couplant la vitesse v_y et la température :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu\, \Delta v_y + \alpha\, g\, \theta. \tag{10.24a}$$

De même, l'équation (10.19b) devient, à l'aide des formules (10.20c) et (10.21a) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa\, \Delta\theta + v_y \frac{\Delta T}{a}\,. \tag{10.24b}$$

Les deux expressions symétriques (10.24a) et (10.24b) représentent la formulation du problème de Rayleigh–Bénard dans l'approximation des petites perturbations, dite *approximation de Boussinesq* : elles expriment un équilibre entre une variation temporelle et un terme diffusif freinant l'établissement des instabilités. Ce sont les termes de couplage $v_y\,(\Delta T/a)$

et $\alpha\, g\, \theta$ dans les équations (10.24a) pour v_y et (10.24b) pour θ qui sont responsables du démarrage du mouvement de convection.

Remarque Dans les équations (10.24a et b), on n'a retenu que des infiniment petits du premier ordre en v et θ. Il apparaît donc un terme de convection dans l'équation de la chaleur, mais pas dans l'équation de Navier–Stokes : il serait en effet du second ordre en v.

Nous allons maintenant chercher les solutions pour lesquelles la variation temporelle de l'amplitude $v_{yo}(t)$ est de la forme (Éq. (10.18)) :

$$v_{yo}(t) = v_0 \mathrm{e}^{\sigma t}. \tag{10.25}$$

Le paramètre σ est homogène à l'inverse d'un temps. La dépendance exponentielle en $\mathrm{e}^{\sigma t}$ traduit le fait qu'une pertubation de vitesse infiniment petite tend à croître exponentiellement avec le temps ($\sigma > 0$) si ΔT est supérieur à ΔT_c et à s'amortir exponentiellement ($\sigma < 0$) dans le cas contraire. La valeur $\sigma = 0$ correspond au seuil d'instabilité où $\Delta T = \Delta T_c$. Nous avons déjà rencontré ce type de variation au chapitre 2 (section 2.4.2) lors de l'étude du modèle de Landau des instabilités. À cette variation du champ de vitesse, correspond une variation analogue du champ de température avec :

$$T(x, y, t) = T_0(y) + \theta(x, t) = T_0(y) + \theta_0 \cos(kx)\, \mathrm{e}^{\sigma t}. \tag{10.26}$$

Le fait que le même facteur $\cos(kx)$ se retrouve dans les deux expressions pour v_y et T vient de ce que les extrema de vitesse verticale et de température se trouvent en phase dans les colonnes ascendantes ou descendantes. En portant ces lois de variation dans les équations de mouvement (10.24a et b) et en simplifiant par le facteur $\cos(kx)\, \mathrm{e}^{\sigma t}$, on obtient :

$$\sigma\, v_0 = -\nu\, k^2\, v_0 + \alpha g\, \theta_0 \tag{10.27}$$

et

$$\sigma\, \theta_0 = -\kappa\, k^2\, \theta_0 + \frac{\Delta T}{a} v_0. \tag{10.28}$$

Le terme $\alpha g\, \theta_0$ est dû à la modulation de la poussée d'Archimède du liquide due à la variation périodique de sa température dans un plan horizontal. La condition de compatibilité de ces deux équations homogènes en v_0 et θ_0 s'exprime par l'équation :

$$(\nu\, k^2 + \sigma)\, (\kappa\, k^2 + \sigma) - \alpha\, g \frac{\Delta T}{a} = 0. \tag{10.29}$$

En particulier, à la limite de convection ($\sigma = 0$), on obtient le seuil sous la forme :

$$\frac{\Delta T_c}{a} = |\mathbf{grad}\, T|_c = \frac{\nu\, \kappa\, k^4}{\alpha\, g} \tag{10.30a}$$

ou

$$Ra_c = \frac{\alpha\,\Delta T_c\,g\,a^3}{\nu\,\kappa} = \pi^4. \tag{10.30b}$$

Ce rapport sans dimension représente la valeur seuil, Ra_c, du nombre de Rayleigh que nous avons introduit plus haut. Rappelons que le résultat expérimental pour une couche de fluide maintenue entre deux plaques rigides est $Ra_c = 1\,708$. Cette différence de valeur n'est pas surprenante compte tenu des approximations que nous avons utilisées ; le point important est l'obtention de la forme dimensionnelle correcte de Ra.

Remarquons enfin qu'on peut calculer le taux de croissance σ de l'instabilité au voisinage de Ra_c (faibles valeurs de σ), à partir de l'équation (10.29) en négligeant le terme en σ^2 ; cela conduit à :

$$\sigma = \left(\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}\right)\left(\frac{\nu\,\kappa}{\nu + \kappa}\right) k^2. \tag{10.31}$$

Au voisinage du seuil, la croissance des perturbations (vitesse, température ...) est infiniment lente. Un phénomène semblable de *ralentissement critique* a été discuté en relation avec la figure 2.12. Le passage continu de valeurs réelles négatives de σ à des valeurs positives lorsque le nombre de Rayleigh passe par sa valeur critique s'appelle *principe d'échange des stabilités*. Il caractérise la transition continue de l'*état thermodynamique* d'échange de chaleur par diffusion au-dessous du seuil, à l'*état d'ordre dynamique* convectif au-dessus.

Remarque Dans le cas d'un liquide mauvais conducteur de la chaleur, le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ est généralement très supérieur à l'unité. Le préfacteur du taux de croissance (ou de décroissance) est alors de l'ordre de κk^2 d'après l'équation (10.31) ; il est donc déterminé par la diffusion thermique. Ainsi, lorsque $Ra = 0$, une perturbation de vecteur d'onde $k \approx 1/a$ proche de celle des rouleaux relaxe avec une constante de temps de l'ordre de la valeur $\tau_Q = a^2/\kappa$ donnée par l'équation (10.12). Cela justifie l'hypothèse faite à la section 10.2.2 suivant laquelle, lorsque Pr est très supérieur à l'unité, c'est la diffusion thermique qui est responsable de l'amortissement des rouleaux ; la variable vitesse qui correspond à un phénomène plus rapide, est asservie à l'évolution du champ de température. Mais lorsque Pr est très inférieur à l'unité, c'est la diffusion des perturbations de vitesse qui contrôle l'atténuation du mouvement convectif.

Domaine de stabilité en fonction du vecteur d'onde

La solution complète du problème linéaire bidimensionnel conduit au diagramme de la figure 10.5. La courbe sépare un domaine (S), où le système est stable par rapport à des perturbations linéaires du problème stationnaire, d'un deuxième domaine (I) ; dans celui-ci, le système est linéairement instable, c'est-à-dire instable vis-à-vis de perturbations d'amplitude infinitésimale. Le minimum de la courbe est obtenu pour une valeur du vecteur d'onde

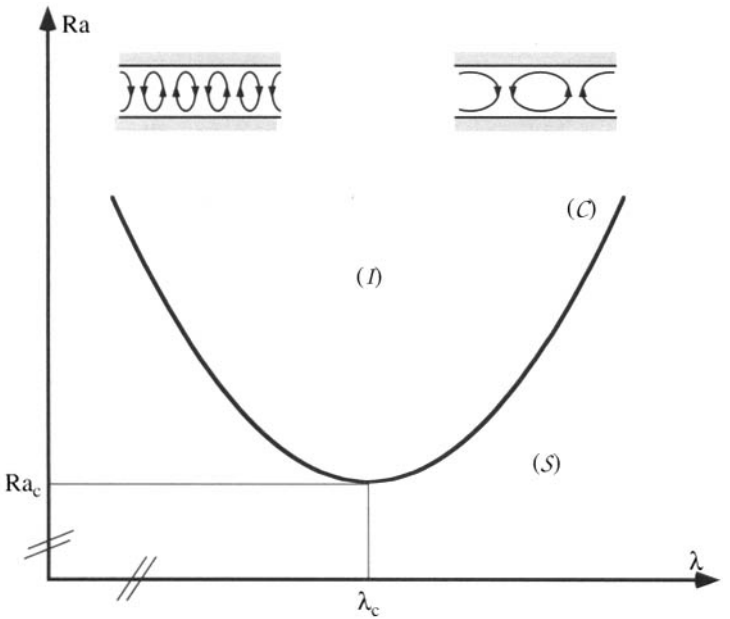


FIG. 10.5 – *Diagramme de stabilité de l'instabilité de Rayleigh–Bénard obtenu lorsque les paramètres de contrôle sont le vecteur d'onde du système de rouleaux et le nombre de Rayleigh. La courbe (C), dite de stabilité marginale, correspondant à un taux de croissance $\sigma = 0$, sépare le domaine instable (I) du domaine (S) qui est stable devant des perturbations infinitésimales. Les configurations de rouleaux correspondant aux longueurs d'onde λ inférieures et supérieures à la valeur critique λ_c sont représentées schématiquement.*

$k_c \approx \pi/a$ dans le cas de conditions aux limites de vitesse nulle sur les plaques horizontales rigides : cette valeur est en accord avec l'hypothèse du calcul simplifié que nous avons mené plus haut. La valeur correspondante du nombre de Rayleigh critique est de 1 708. Analysons qualitativement l'augmentation du nombre de Rayleigh critique, observée dans la figure 10.5 lorsque k s'écarte de la valeur k_c. Dans le cas de rouleaux très serrés, les effets de la viscosité dus aux contre-écoulements à l'intérieur d'un même tourbillon retardent l'apparition de la convection ; de plus, l'uniformisation de la température par convection thermique d'un rouleau à l'autre est facilitée. Par ailleurs, dans le cas de rouleaux très larges, le transport convectif est peu efficace : en effet, le même gradient de pression doit mettre en mouvement une masse de fluide beaucoup plus grande et la vitesse de convection est plus faible.

Variation de l'amplitude de l'instabilité avec la distance au seuil

L'analyse linéaire que nous avons faite nous renseigne sur la valeur du seuil et sur la forme des solutions au voisinage de Ra_c (lorsqu'on suppose que le système est bidimensionnel). En revanche, elle ne nous dit rien sur l'évolution de l'instabilité aux temps longs lorsque $Ra > Ra_c$ et, en particulier, sur l'amplitude d'équilibre de la vitesse ; le terme exponentiel de l'expression (10.25) conduirait en effet à une divergence de celle-ci aux temps longs ! Les effets non linéaires de ce problème ont un rôle stabilisant lorsque l'amplitude augmente suffisamment. L'origine est décrite schématiquement par la figure 10.6. Les échanges de chaleur par convection réduisent les écarts de température dans la partie centrale de la couche de fluide : les variations importantes de température se font alors dans des couches limites thermiques près des parois où la vitesse v_y est plus faible et les effets, dus à la diffusion, importants.

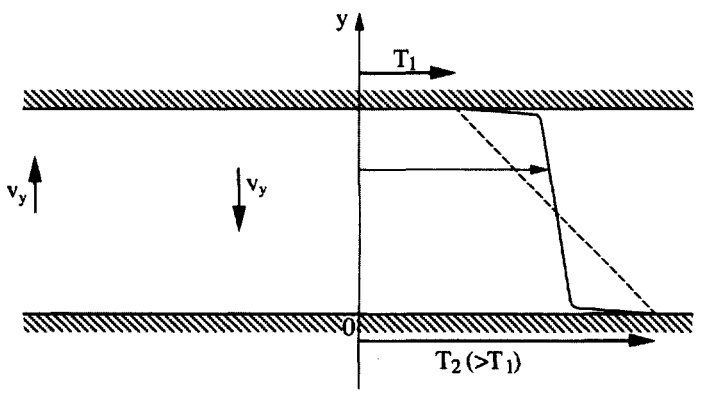


FIG. 10.6 – *Profil de température entre deux plaques horizontales chauffées en présence d'un écoulement de convection schématisé par la composante verticale du vecteur vitesse, lorsque la vitesse de convection est suffisante pour qu'apparaissent des couches limites thermiques près des parois.*

Cette diminution du gradient thermique $(\mathbf{grad}\, T)_0$ dans la partie centrale entraîne une diminution du nombre de Rayleigh construit à partir de ce gradient : l'augmentation de la vitesse $v_0(t)$ est, par conséquent, réduite. De façon quantitative, on prévoit que :

$$(\mathbf{grad}\, T)_0 \approx (1 - \alpha\, v_y^2)\, \mathbf{grad}\, T \tag{10.32}$$

où $\mathbf{grad}\, T$ est le gradient appliqué ; la présence du terme en v_y^2 traduit le fait que les vitesses $-v_y$ et v_y induisent toutes deux la même diminution du gradient. Prenons comme ordre de grandeur de $(\mathbf{grad}\, T)_0$ la valeur seuil $(\mathbf{grad}\, T)_c$: c'est en effet la valeur limite inférieure du gradient de température

dans la partie centrale. On trouve alors :

$$v_y^2 = \frac{\dfrac{(\mathbf{grad}\,T) - (\mathbf{grad}\,T)_c}{\mathbf{grad}\,T}}{\alpha}\,. \tag{10.33}$$

Ce résultat est en accord avec des mesures de vitesse par anémométrie laser réalisées sur l'expérience de Rayleigh–Bénard. On trouve que la vitesse v_y mesurée varie continûment au-dessus du seuil comme :

$$v_y \propto [(\mathbf{grad}\,T) - (\mathbf{grad}\,T)_c]^\beta$$

avec un exposant $\beta = 1/2$ (Fig. 10.7a). Cette valeur de β est identique à celle que nous avions prédite au chapitre 2, à l'aide du modèle de Landau (section 2.4.2) : expérimentalement, elle était déjà apparue au chapitre 2 avec l'exemple de la bille dans un anneau en rotation et dans celui de l'émission de tourbillons derrière un cylindre. La valeur 1/2 de l'exposant β est en fait caractéristique de toute une famille de transitions de phase du second ordre, dites de champ moyen.

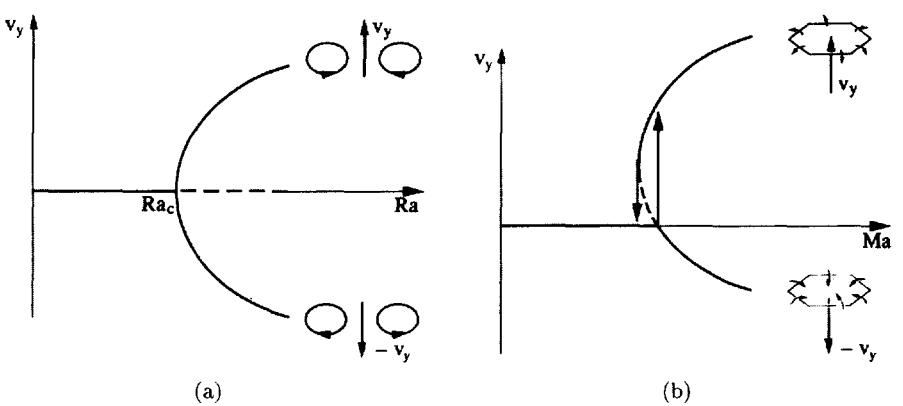


FIG. 10.7 – *(a) Variation de la composante verticale de la vitesse avec le nombre de Rayleigh dans l'expérience de Rayleigh–Bénard. Les deux branches qui apparaissent au-dessus du seuil correspondent à deux sens possibles de rotation : elles sont symétriques par rapport à l'échange $v_y \to -v_y$, qui décale simplement d'un rouleau le système de cellules convectives. (b) Variation, avec le nombre de Marangoni, de la composante verticale de la vitesse au centre des cellules hexagonales dans l'expérience de Bénard–Marangoni. Cette variation est dissymétrique pour l'échange $v_y \to -v_y$ qui traduit la différence de la forme du champ de vitesse entre les zones au centre des hexagones où le fluide monte, et celles sur les bords où il descend.*

Remarque Dans le problème de Rayleigh–Bénard, il apparaît un effet de brisure de symétrie, analogue au cas de la bille dans un anneau en rotation. Cet effet correspond ici au choix de la phase φ de la fonction $\cos(kx + \varphi)$ qui décrit la structure du système des rouleaux : en effet, pour une position donnée des rouleaux, il existe deux sens de rotation possibles respectant l'inversion du sens de rotation d'un rouleau à l'autre. Ces deux solutions sont équivalentes aux deux positions symétriques d'équlibre de la bille au-dessus du seuil d'instabilité.

Pour une différence de température donnée, on peut également caractériser l'importance du mouvement convectif par le nombre de Nusselt Nu, déjà rencontré au chapitre 9 (section 9.7.1) :

$$Nu = \frac{\text{flux de chaleur en présence de convection}}{\text{flux de chaleur diffusif en l'absence de convection}} \cdot \tag{10.34}$$

On peut mesurer le terme au dénominateur en chauffant la cellule par au-dessus : dans ce cas, la stratification de densité est stable, et les échanges thermiques se font uniquement par diffusion. D'après la définition du nombre de Nusselt Nu, on a :

$$Nu = 1 \quad \text{pour} \quad \Delta T < \Delta T_c. \tag{10.35a}$$

Par ailleurs, les mesures expérimentales du flux de chaleur d'une plaque à l'autre en présence du mouvement du fluide montrent une variation de Nu de la forme :

$$Nu - 1 \propto (\Delta T - \Delta T_c) \quad \text{pour} \quad \Delta T \geq \Delta T_c. \tag{10.35b}$$

Ce comportement linéaire au voisinage du seuil traduit le fait que le terme de transport convectif de chaleur (et, par suite, Nu) doit varier comme v_y^2 ; comme nous l'avons déjà signalé, cette contribution ne doit pas dépendre du signe de v_y puisque $+v_y$ transporte de la chaleur vers le haut, et $-v_y$ du froid vers le bas. Puisque v_y^2 est proportionnel à $(\Delta T - \Delta T_c)$ (relation (10.33)), on retrouve la dépendance linéaire de la relation précédente.

10.3 Autres exemples d'instabilité avec seuil

10.3.1 Instabilité de Taylor–Couette

L'écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques a été étudié dans le chapitre 4 (section 4.5.5). La forme du champ de vitesse stationnaire obtenu aux faibles vitesses de rotation correspond à un écoulement purement orthoradial, de vitesse donnée par la relation (4.102). Si le cylindre intérieur est maintenu fixe et le cylindre extérieur mis en rotation, l'écoulement est stable jusqu'à une vitesse suffisamment élevée où il devient turbulent, sans qu'apparaissent des structures caractéristiques dans l'écoulement. C'est ce problème que Maurice Couette avait étudié dans sa thèse en 1901. En

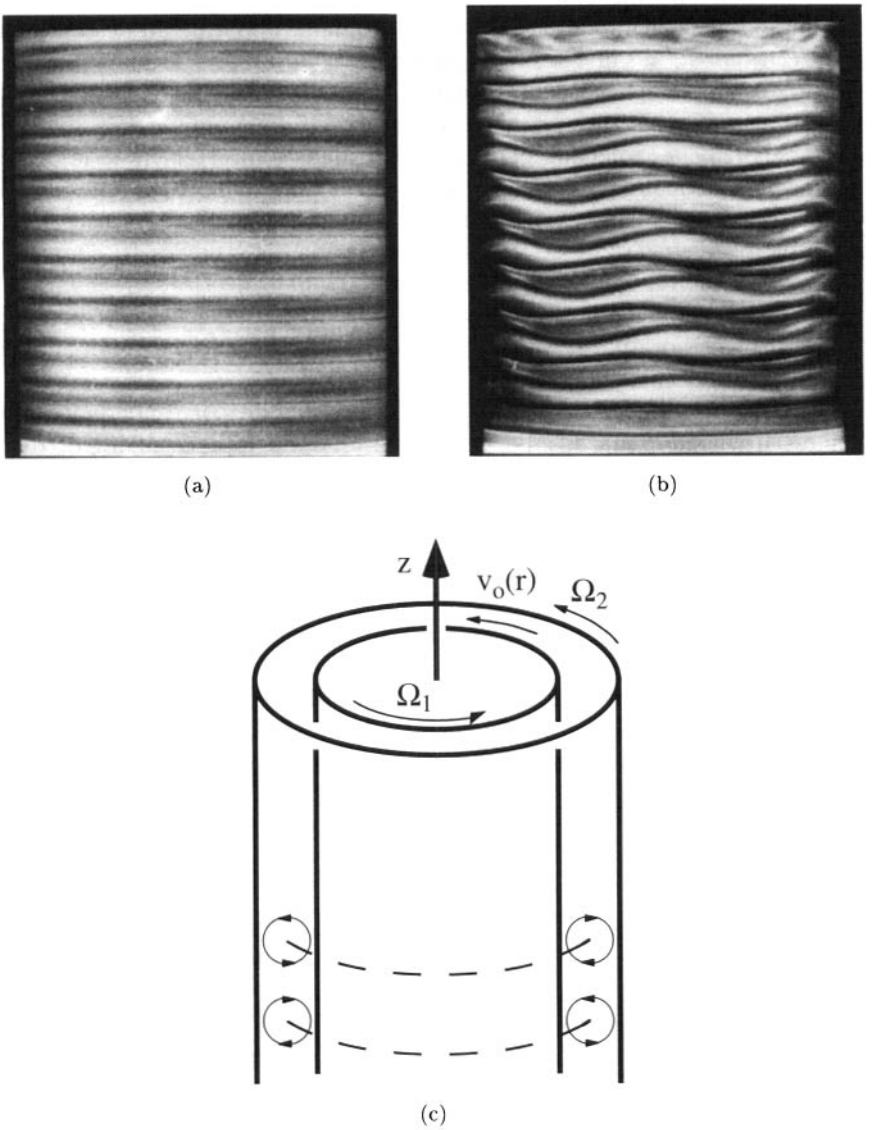


FIG. 10.8 – *Photos d'un système de rouleaux de Taylor–Couette visualisés par des particules réfléchissantes en suspension dans le fluide. (a) Peu au dessus du seuil Ta_c ; (b) plus au dessus du seuil, on observe des vortex ondulés, ce qu'on peut rapprocher de la première oscillation observée dans les scénarios de la transition vers la turbulence décrits dans la section 10.5 (clichés D. Andereck et H. Swinney) ; (c) schéma de principe des rouleaux apparaissant dans l'instabilité de Taylor–Couette pour l'écoulement entre deux cylindres de vitesses de rotation Ω_1 et Ω_2 différentes.*

revanche, si on fait tourner le cylindre intérieur en laissant le cylindre extérieur fixe, une circulation fluide en rouleaux toroïdaux apparaît au-dessus d'une valeur critique Ω_c de la vitesse angulaire de rotation Ω ; le plan des tores est horizontal et leur corde est égale à la distance a entre les cylindres (Fig. 10.8). Cette structure a été décrite pour la première fois par G.I. Taylor en 1923 : les rouleaux peuvent être visualisés directement si le liquide contient des particules allongées qui permettent de visualiser les zones de fort gradient de vitesse. Ils peuvent être étudiés quantitativement en utilisant les sondes de gradient de vitesse localisées sur les parois étudiées au chapitre 9 (section 9.7.2), ou bien par vélocimétrie Doppler décrite au chapitre 3 (section 3.5.2). Le champ de vitesse résultant est la somme de l'écoulement non perturbé orthoradial et d'un mouvement convectif perpendiculaire à l'axe des rouleaux.

Ce problème d'instabilité peut être mis en étroite correspondance avec celui de Rayleigh–Bénard. Le gradient radial de force centrifuge, dû à l'existence de fluide de plus grand moment cinétique près de l'axe, remplace, dans ce problème, l'effet de la poussée d'Archimède dû à la stratification instable de densité. Les gradients de vitesse remplacent ceux de température : enfin, la viscosité, qui a un effet stabilisant (car elle permet à un élément de fluide écarté de sa position d'équilibre de se mettre en équilibre de vitesse avec le fluide environnant), remplace la diffusion thermique.

Pour trouver le nombre sans dimension qui gouverne cette instabilité (équivalent du nombre de Rayleigh pour l'instabilité de Rayleigh–Bénard), on peut reprendre le même raisonnement d'équilibre de forces qui a été utilisé pour l'instabilité de Rayleigh–Bénard. Nous montrons ci dessous qu'on trouve le nombre caractéristique :

$$Ta = \frac{\Omega^2 a^3 R}{\nu^2} \tag{10.36}$$

appelé *nombre de Taylor* (a est l'intervalle entre les cylindres, et $R \gg a$ est leur rayon moyen ; Ω est la vitesse angulaire de rotation du cylindre intérieur). Le tableau 10.1 établit le parallèle entre les paramètres et les forces caractéristiques de ces deux instabilités et de l'instabilité de Bénard–Marangoni qui sera étudiée à la section 10.3.2 (les constantes géométriques n'ont pas été indiquées dans ce tableau).

Démonstration Supposons, comme pour l'instabilité de Rayleigh–Bénard, qu'on communique à une sphère fluide, de petit rayon r_0 et densité ρ, une vitesse de *convection* v_c radiale et donc *perpendiculaire* à l'écoulement orthoradial moyen. La sphère perdra la quantité de mouvement $p = mv_c$ par ralentissement visqueux dans un temps caractéristique τ_ν ($m = (4\pi/3)r_0^3$ est la masse de la sphère fluide). Comme la force de freinage visqueux F_{visc} exercée sur la sphère est égale à $6\pi\eta\, r_0\, v_c$, on trouve :

$$\frac{4}{3}\pi\,\rho\, r_0^3 \frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} = -6\pi\,\eta\, r_0\, v_c \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\tau_\nu} = \frac{1}{v_c}\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} = A\frac{\nu}{r_0^2}$$

où A est un coefficient numérique de nature géométrique. L'expression du temps de diffusion visqueuse τ_ν est, par ailleurs, équivalente à celle du temps de diffusion

TAB. 10.1 – *Tableau comparatif des paramètres caractéristiques des instabilités de Rayleigh–Bénard, Taylor–Couette et Bénard–Marangoni. Notons que, pour les deux premières, la correspondance s'étend jusqu'à donner des valeurs numériques très voisines pour les seuils.*

	Instabilité de Rayleigh–Bénard	Instabilité de Taylor–Couette	Instabilité de Bénard–Marangoni
force de freinage visqueuse	$F_{\text{visc}} = \eta\, v_c\, a$	$F_{\text{visc}} = \eta\, v_c\, a$	$F_{\text{visc}} = \eta\, v_c\, a$
force motrice	$F_{\text{poussée d'Archimède}}$ $\rho_0\, \alpha\, g \dfrac{a^5}{\kappa} \dfrac{\Delta T}{a} v_c$	$F_{\text{force centrifuge}}$ $\rho_0\, a^2 \dfrac{\Omega^2 R}{a} \dfrac{a^5}{\nu} v_c$	$F_{\text{tension superficielle}}$ $\dfrac{a^3}{\kappa} \dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}T} \dfrac{\Delta T}{a} v_c$
temps caractéristique de relaxation de la perturbation avec le fluide environnant	$\dfrac{a^2}{\kappa}$	$\dfrac{a^2}{\nu}$	$\dfrac{a^2}{\kappa}$
paramètre caractéristique de l'instablité	$Ra = \dfrac{\alpha\, \Delta T\, g\, a^3}{\nu\, \kappa}$	$Ta = \dfrac{\Omega^2 R\, a^3}{\nu^2}$	$Ma = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}T} \Delta T\, a}{\eta\, \kappa}$
valeurs critiques d'apparition des instabilités	$Ra_c = 1\,708$ $k_c = \dfrac{3,11}{a}$	$Ta_c = 1\,712$ $k_c = \dfrac{3,11}{a}$	$Ma_c = 80$

thermique de l'équation (10.12). Au bout du temps τ_ν, la particule s'est déplacée transversalement d'une distance $\delta r \approx v_c \tau_\nu$. L'ordre de grandeur de la force motrice F_m correspondra à la variation de la force centrifuge $m\,\Omega^2\,(r)\,r$ sur la distance δr. La vitesse angulaire $\Omega\,(r)$ de rotation locale passe de Ω sur le cylindre intérieur ($r = R$), à 0 sur le cylindre extérieur ($r = R + a$). On prendra donc comme ordre de grandeur de F_m :

$$F_m = \frac{4}{3}\pi\, \rho\, r_0^3 \frac{\partial}{\partial r}(\Omega^2\,(r) r)\delta r \approx B\, r_0^3\, \rho \frac{\Omega^2 R}{a} v_c \tau_\nu = \frac{B}{A}\frac{\rho}{\nu} v_c \Omega^2 \frac{r_0^5 R}{a}$$

où B est une constante géométrique. La condition d'instabilité équivalente à l'équation (10.16) est donc :

$$F_m > F_{visc} \qquad \text{soit :} \qquad \frac{B}{A}\frac{\rho}{\nu} v_c \Omega^2 \frac{r_0^5 R}{a} > 6\pi\, \rho\, \nu\, r_0\, v_c.$$

Comme dans le cas de l'instabilité de Rayleigh–Bénard, ce sont les perturbations de plus grande taille qui vérifient le plus facilement la condition avec une limite supérieure $r_0 \approx a/2$. En ne tenant pas compte des coefficients géométriques, on

trouve bien que le rapport F_m/F_{visc} est égal au nombre de Taylor donné par la formule (10.36).

Remarquons que la viscosité cinématique ν intervient à double titre dans le nombre de Taylor. Elle apparaît, une première fois, dans l'évaluation du temps τ_ν de mise en équilibre de vitesse d'une perturbation par frottement visqueux avec le fluide environnant (dans l'instabilité de Rayleigh–Bénard, on faisait intervenir un temps de mise en équilibre thermique). Elle intervient une deuxième fois dans le calcul de la force de frottement visqueux qui s'oppose à la force motrice. Le dénominateur en ν^2 dans le nombre de Taylor remplace donc celui en $\nu\kappa$ dans le nombre de Rayleigh.

Comme dans le cas de l'instabilité de Rayleigh–Bénard, le vecteur d'onde critique k_c est celui qui correspond aux modes d'instabilité apparaissant au nombre de Taylor le plus faible ; il est de l'ordre de π/a (cela correspond pour les deux instabilités à un diamètre de rouleaux de l'ordre de la distance entre les parois solides). La courbe de stabilité dans le plan (Ta, k) est également très similaire à celle obtenue dans le plan (Ra, k) pour l'instabilité de Rayleigh–Bénard (Fig. 10.5).

Remarque L'instabilité de Taylor–Couette fait partie d'une classe plus large d'instabilités induites par des effets de force centrifuge dans des fluides en rotation ou pour des écoulements courbes. Ainsi, l'*instabilité de Gortler* correspond à l'apparition de rouleaux de convection, au-delà d'une vitesse seuil, dans une couche limite se développant le long d'une paroi concave courbe (écoulement parallèle aux plans de courbure). L'instabilité se développe alors dans un profil de vitesse de Blasius (chapitre 9, section 9.4.1) au lieu d'un profil de Couette pour l'instabilité de Taylor–Couette. On observe aussi ce type d'instabilités dans les profils de Poiseuille : c'est par exemple le cas dans des canaux courbes de section rectangulaire de plus grande dimension parallèlement aux parois courbes que perpendiculairement. Cette *instabilité de Dean* apparaît dans la partie centrale de la paroi concave au-dessus d'une vitesse seuil : elle ne doit pas être confondue avec les écoulements secondaires de Dean décrits au chapitre 7 (Fig. 7.34). Ces derniers peuvent d'ailleurs être observés simultanément, mais sont localisés près des parois latérales et apparaissent même à très faible vitesse.

10.3.2 Instabilité thermocapillaire de Bénard–Marangoni

L'instabilité dite de *Bénard–Marangoni* apparaît lorsqu'on chauffe la face inférieure d'une mince couche de liquide, dont la surface supérieure est libre : elle est due aux forces induites sur la surface libre par les gradients de tension superficielle étudiés au chapitre 4 (section 4.8.3). Ce phénomène a été étudié par Bénard au début de ce siècle, et a été longtemps confondu avec l'instabilité de Rayleigh–Bénard étudiée plus haut (rappelons que celle-ci est due aux forces en volume de poussée d'Archimède et est seule active pour un volume limité par deux parois solides). Au-dessus d'une valeur critique ΔT_c de la différence de température, il apparaît, comme nous l'avons déjà indiqué au

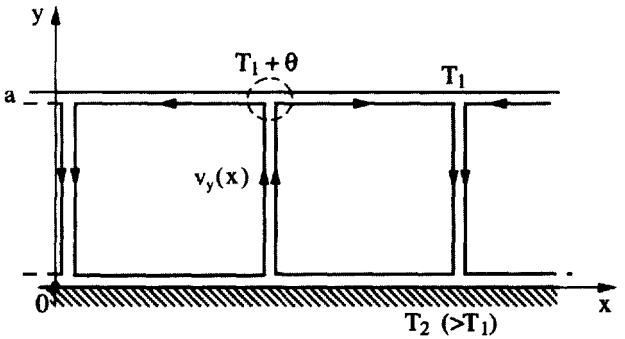


FIG. 10.9 – *Schéma de l'écoulement dans les cellules de l'instabilité de Bénard–Marangoni visualisée en figure 3.16.*

chapitre 3, des cellules hexagonales d'écoulement entre la base de la couche de liquide et la surface libre (Fig. 3.16). Le mouvement du fluide est ascendant au centre des hexagones et descendant sur les bords (Fig. 10.9). La taille des hexagones est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la couche de fluide.

Le mécanisme qualitatif de l'instabilité est le suivant : supposons qu'en un point de la surface libre, la température s'élève légèrement d'une quantité θ. Par suite de la diminution de la tension superficielle lorsque la température augmente, le fluide est expulsé radialement de cette région plus chaude vers l'extérieur. Pour conserver le débit, on a une remontée de fluide plus chaud qui vient de la partie inférieure de la cellule : cet apport de chaleur vient donc renforcer la perturbation initiale. Ainsi, l'effet moteur de l'instabilité est la différence de tension superficielle entre les parties du liquide à des températures différentes. Comme pour l'instabilité de Rayleigh–Bénard, les processus stabilisants sont la diffusion thermique et la viscosité qui, respectivement, uniformisent la distribution de température et ralentissent le mouvement des particules de fluide.

Le paramètre sans dimension qui gouverne cette instabilité est le *nombre de Marangoni* Ma qui vérifie :

$$Ma = \frac{b\gamma\,\Delta T\,a}{\eta\,\kappa} \tag{10.37}$$

$b = -(1/\gamma)(\partial\gamma/\partial T)$ représente le taux de variation relative de la tension superficielle avec la température T défini à la section 1.4.1 du chapitre 1 (Tab. 1.1), et a est l'épaisseur de la couche de fluide (nous avons déjà étudié des écoulements induits par ces gradients de tension superficielle au chapitre 4 (section 4.8.3)). Nous montrons plus bas que, comme pour les instabilités de Rayleigh–Bénard et de Taylor–Couette, Ma est le rapport d'une force motrice (due aux variations de tension de superficielle) et d'une force de freinage visqueuse.

Démonstration On supposera ici que l'échelle de variation de la vitesse et de la température dans la direction horizontale est la même que dans la direction verticale (c'est-à-dire l'épaisseur a de la couche de fluide). Cela revient à dire que la section des cellules de convection par un plan vertical est très grossièrement carrée (Fig. 10.9b).

Le principe du calcul est, de nouveau, très similaire à celui que nous avons utilisé pour l'instabilité de Rayleigh–Bénard : la seule différence vient de ce que la force motrice de l'effet Marangoni est exercée sur la surface libre du fluide. Nous allons toujours supposer qu'on anime un élément de fluide d'une vitesse de convection v_c et nous allons analyser si cette vitesse décroît ou non avec le temps. Dans les deux autres exemples, nous avons vu que le critère d'instabilité était obtenu en comparant les forces sur des éléments de fluides d'une taille a de l'ordre de $a/2$. Nous nous limiterons donc ici à des éléments de fluide de cette taille dont une face coïncide avec l'interface du fluide. En évaluant alors, comme plus haut (section 10.2.2), la différence de température qui s'établit entre l'élément de volume et le fluide environnant, on retrouve l'équation (10.13) sous la forme :

$$\delta T = A\, v_c \frac{a^2}{\kappa} \frac{\Delta T}{a} \cdot \tag{10.38}$$

La force motrice F_m sur l'élément du volume est reliée à la valeur absolue de la dérivée $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}T$ de la tension superficielle par rapport à la température par :

$$F_m \approx \frac{a}{2} \left| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}T} \right| \delta T \approx v_c \frac{a^3}{\kappa} \left| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}T} \right| \frac{\Delta T}{a} \cdot \tag{10.39}$$

Nous avons supposé que la face de l'élément de fluide qui coïncide avec l'interface est carrée et a deux côtés perpendiculaires à l'écoulement de convection v_c ; nous obtenons alors l'équation (10.39), en admettant que la différence de température entre ces deux côtés est de l'ordre que δT et que F_m est la différence entre les forces de tension superficielle sur ceux-ci. L'ordre de grandeur de la force de freinage F_{visc} est, comme dans les deux exemples précédents :

$$F_{\text{visc}} \approx \eta\, v_c\, a.$$

La condition pour avoir croissance de l'instabilité s'écrit donc, comme dans les autres exemples que nous avons étudiés :

$$F_m > F_{\text{visc}} \qquad \text{soit} \qquad v_c \frac{a^3}{\kappa} \left| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}T} \right| \frac{\Delta T}{a} > \eta\, v_c\, a. \tag{10.40}$$

Le rapport F_m/F_{visc} est donc bien égal au nombre de Marangoni donné par l'équation (10.37) : c'est sa valeur qui détermine l'existence éventuelle de l'instabilité.

Le rapport du nombre de Rayleigh au nombre de Marangoni vérifie :

$$\frac{Ra}{Ma} = \frac{\alpha\, \rho\, g\, a^2}{|\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}T|} = \frac{|\delta\rho|\, g\, a^2}{|\delta\gamma|} \tag{10.41}$$

où $\delta\rho$ et $\delta\gamma$ sont les valeurs absolues des variations respectives de densité et de tention superficielle induites par une même différence de température δT.

Le rapport caractérise l'efficacité relative des effets de poussée d'Archimède et de tension superficielle induits par des variations de température sur une couche limite horizontale dont la surface supérieure est libre. Ce rapport équivaut donc, pour les variations de ces deux paramètres, au nombre de Bond introduit au chapitre 1 (Éq. (1.60)). À différence de température fixée, le rapport Ra/Ma varie en a^2. Il en résulte que les effets de tension superficielle seront dominants pour les petites épaisseurs de la couche de fluide, et ceux de gravité pour les grandes épaisseurs.

Remarque En apesanteur, où l'effet de la poussée d'Archimède dû à la gravité disparaît, l'effet Marangoni subsiste seul. Les expériences de réalisation de monocristaux dans les satellites se justifient par le fait que les mouvements de convection induits par la gravité qui perturbent la croissance régulière des cristaux n'existent pas. On peut ainsi préparer des cristaux de plus grande taille, ou dont l'obtention est habituellement difficile (cristaux de protéines par exemple). Il reste cependant nécessaire de prendre en compte l'effet Marangoni qui joue alors un rôle dominant.

Entre les deux phénomènes, il existe une nuance plus subtile et plus profonde que la simple différence de dépendance du nombre de Rayleigh et de Marangoni par rapport à l'épaisseur : on peut la rattacher à la symétrie différente des deux problèmes. Dans l'expérience de Rayleigh–Bénard, il existe une symétrie entre les états de vitesse $+v_y$ ascendante et $-v_y$ descendante : c'est en effet le même effet de poussée d'Archimède qui entraîne le fluide chaud vers le haut et le fluide froid vers le bas. Il suffit de décaler les rouleaux d'une demi-période pour échanger la situation du fluide montant en fluide descendant et *vice versa*. Dans le problème de Bénard–Marangoni, cette symétrie de départ n'existe pas : les forces de tension superficielle s'exercent seulement sur la surface libre du fluide et non au fond. D'ailleurs l'instabilité se fait sous forme d'hexagones (Fig. 3.16), où le fluide monte par le centre et descend sur les bords par un écoulement plus réparti qu'à la montée. On ne peut pas changer cette situation en une autre, où le liquide descendrait au centre et monterait par les bords, grâce à une simple translation des hexagones. Cette absence de symétrie se retrouve aussi dans la courbe donnant l'amplitude de la composante v_y de la vitesse au centre des hexagones, en fonction du nombre de Marangoni (Fig. 10.7b) : la valeur minimale du nombre de Marangoni sur la courbe critique correspond en effet à une valeur non nulle de v_y.

Expérimentalement, lorsqu'on abaisse la température, la structure convective disparaît brusquement un peu au-dessous de la valeur critique ΔT_c pour laquelle elle apparaît quand on chauffe. En effet, le point de disparition correspond à la valeur minimale de Ma sur la courbe de la figure 10.7b ; en revanche, la valeur ΔT_c correspondant à l'intersection de la courbe avec l'axe $v_y = 0$ représente le seuil obtenu en augmentant la différence de température en présence de perturbations infiniment petites. Ce comportement rappelle les transitions du premier ordre, telles que la solidification d'un liquide. Le faible hystérésis que nous venons de décrire est analogue au sur-refroidissement

observé lorsqu'on diminue la température d'un liquide : celui-ci ne devient en effet solide qu'à une température légèrement inférieure à son point de fusion.

10.4 Quelques autres classes d'instabilités

Dans les exemples précédents, il existait un seuil d'instabilité bien défini. Par ailleurs, les effets non linéaires conduisent à une saturation de l'amplitude à une valeur finie et à un état stationnaire.

Dans cette section, nous allons d'abord traiter en détail le problème de l'instabilité d'un écoulement de cisaillement (*instabilité de Kelvin–Helmholtz*) pour laquelle la valeur du seuil est indépendante des effets de viscosité. Cette étude va nous permettre de revoir tout un ensemble de notions liées au fluide parfait, à la vorticité et aux ondes. Puis, nous évoquerons le cas des écoulements de Poiseuille qui montrera la richesse et la complexité des mécanismes de transition vers la turbulence.

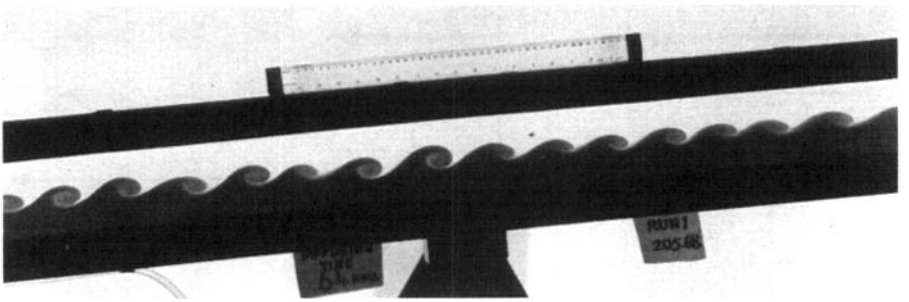
10.4.1 Instabilité de Kelvin–Helmholtz

Le vent soufflant parallèlement à la surface libre de l'eau induit la formation de vagues, qui peuvent s'amplifier jusqu'au moutonnement ou au déferlement correspondant à un vent de force 7 sur l'échelle de Beaufort (c'est-à-dire environ 60 km/h). Ce phénomène est une manifestation de l'instabilité de Kelvin–Helmholtz. Celle-ci peut aussi être observée dans l'expérience de la figure 10.10a : inclinons une cellule parallélépipédique, initialement horizontale, contenant deux liquides non miscibles superposés. Pour restaurer l'horizontalité de l'interface, le mouvement des liquides correspond à un cisaillement de l'interface. On observe alors que celle-ci se ride en même temps qu'elle retourne à l'horizontale. De tels effets peuvent apparaître naturellement à grande échelle dans l'atmosphère (Fig. 10.10b).

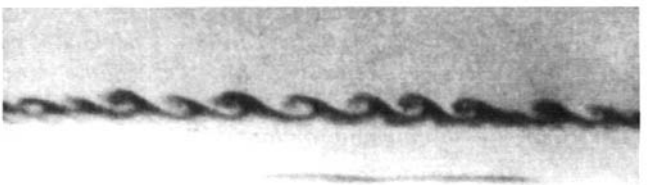
Remarque Ces structures de vortex parallèles produites à l'interface de deux jets de vitesses différentes persistent même à des nombres élevés où la turbulence est très présente. De telles *couches de mélange* constituent un exemple des *structures cohérentes* turbulentes qui seront discutées à la fin du chapitre 11.

Nous modélisons ces problèmes par l'écoulement de deux fluides superposés (1) et (2), se déplaçant parallèlement à des vitesses différentes U_1 et U_2 le long de la direction x (Fig. 10.11). Nous avons déjà montré au chapitre 7 (section 7.4.2) qu'un tel écoulement introduit une nappe continue de vorticité. Nous remplaçons cet écoulement par la superposition d'une translation globale de vitesse $(U_1 + U_2)/2$, et d'un écoulement symétrique par rapport à un plan horizontal $y = 0$ (Fig. 10.11) et de vitesse $\pm U/2$ ($U = U_1 - U_2$).

Nous négligeons les effets de la viscosité, ce qui est justifié si l'épaisseur de la couche limite reste faible devant la perturbation qui s'amplifie. C'est le cas pour un écoulement à suffisamment grande vitesse pour que le nombre de Reynolds associé à l'écoulement soit grand devant l'unité. Nous supposons



(a)



(b)

FIG. 10.10 – *(a) Visualisation expérimentale de l'instabilité de la surface de séparation de deux fluides (cliché S. A. Thorpe,* J. Fluid Mech. *(1971) et* An Album of Fluid Motion*). (b) Vue d'une instabilité entre deux couches atmosphériques se déplaçant à des vitesses différentes (cliché P. B. Branstine). Une observation semblable faite dans les Alpes suisses a été publiée en 1886 par le théoricien allemand Hermann Helmholtz a qui on doit les premières études sur cette instabilité.*

aussi (c'est un résultat général pour des écoulements à deux dimensions) que la première instabilité qui se développe est une pertubation bidimensionnelle : celle-ci est caractérisée par la hauteur $\xi(x,t)$ de l'interface au-dessus du plan de base $y = 0$ du film (Fig. 10.12). Nous cherchons la solution du problème

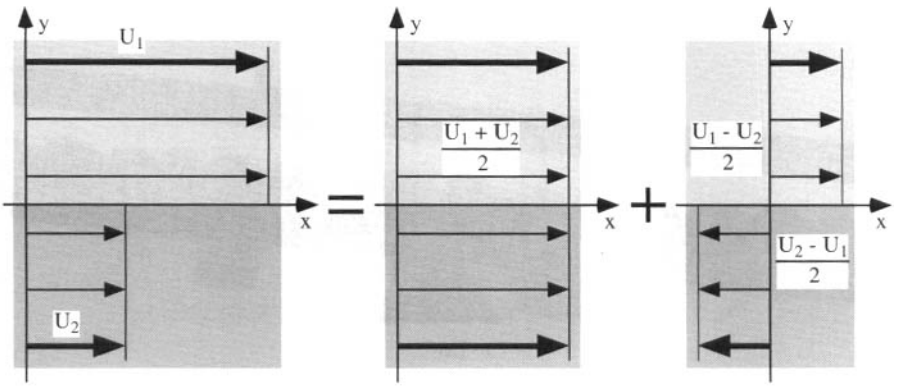


FIG. 10.11 – *Écoulement de deux fluides en contact se déplaçant parallèlement à des vitesses différentes et représentation du champ de vitesse de cet écoulement comme la superposition d'une translation globale et d'un écoulement relatif de vitesse moyenne nulle.*

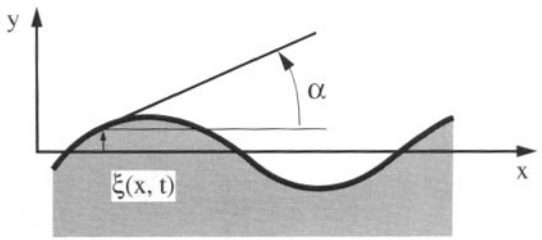


FIG. 10.12 – *Déformation de l'interface entre deux fluides superposés se déplaçant parallèlement à des vitesses différentes dans la direction Ox.*

en utilisant les potentiels Φ_1 et Φ_2 dont dérivent les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{grad}\left[\frac{Ux}{2} + \Phi_1(x,y,t)\right] \tag{10.42a}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{grad}\left[-\frac{Ux}{2} + \Phi_2(x,y,t)\right]. \tag{10.42b}$$

Le premier terme de chaque expression entre crochets est le potentiel des vitesses de l'écoulement non perturbé, le second celui de la perturbation du potentiel associée à la déformation $\xi(x,t)$. Le calcul est fait dans une approximation linéaire valable si l'amplitude $\xi(x,t)$ des perturbations est petite devant leur longueur d'onde, ou encore si l'angle α de la tangente à l'interface avec l'axe Ox (Fig. 10.12) est faible (c'est-à-dire si $\alpha \simeq \tan\alpha = \partial\xi/\partial x \ll 1$).

Le couplage entre les deux quantités Φ_1 et Φ_2 intervient dans la condition aux limites sur la composante $v_\perp$ de la vitesse des fluides *normale* à l'interface : sur cette dernière, $v_\perp$ doit, en effet, être identique pour chacun des deux fluides et égale à la vitesse de l'interface soit :

$$[v_{1\perp}]_{y=\xi} = [v_{2\perp}]_{y=\xi} \cong \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{10.43}$$

où nous avons pris $\cos\alpha = 1$ (les composantes *tangentielles* peuvent cependant être différentes puisqu'on a supposé les fluides parfaits). En projetant la vitesse de chacun des deux fluides sur la normale à l'interface, la relation précédente devient donc :

$$v_{\mathrm{i}y} - v_{\mathrm{i}x}\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial t} \qquad (\mathrm{i} = 1, 2) \tag{10.44}$$

ou encore :

$$v_{\mathrm{i}y} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_{\mathrm{i}x}\alpha\right) \qquad (\mathrm{i} = 1, 2). \tag{10.45}$$

On peut donc écrire l'égalité (10.45) sous la forme :

$$v_{\mathrm{i}y} \cong \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_{\mathrm{i}x}\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\mathrm{i} = 1, 2). \tag{10.46}$$

Remarques

- Le second membre de l'expression (10.46) représente la dérivée lagrangienne de la position $\xi(x, t)$ de l'interface ; elle est obtenue en suivant une particule de fluide située près de l'interface.

- Le fait de prendre la composante normale de la vitesse de l'interface égale à $\partial\xi/\partial t$ revient à remplacer cette vitesse par sa projection verticale. L'erreur ainsi introduite n'est que du deuxième ordre par rapport à α, alors que les autres termes des équations (10.44, 45 et 46) sont du premier ordre.

Compte tenu de la forme (10.42) des champs de vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, et en ne gardant que les termes du premier ordre en perturbations ξ, Φ_1 et Φ_2, les relations (10.46) ($i = 1, 2$) s'écrivent :

$$v_{1y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{U}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{10.47a}$$

$$v_{2y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{U}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\,. \tag{10.47b}$$

À ce stade de notre étude, nous allons négliger l'effet de la capillarité et de la différence de densité entre les deux liquides : nous étudierons ensuite comment sont modifiés les résultats obtenus lorsqu'on prend en compte ces deux effets.

(i) Cas où la tension interfaciale et la différence de densité sont négligées

Dans ce cas, nous pouvons écrire la continuité de la pression à la traversée de l'interface :

$$p_1(x,y,t) = p_2(x,y,t) \qquad \text{pour} \qquad y = \xi. \tag{10.48}$$

Par ailleurs, la relation de Bernoulli nous permet d'écrire, pour chacun des deux fluides :

$$p_\mathrm{i} + \rho \frac{\partial \Phi_\mathrm{i}}{\partial t} + \rho\, g\, y + \frac{1}{2}\rho\, v_\mathrm{i}^2 = \text{constante} \quad (\mathrm{i} = 1,2) \tag{10.49}$$

(dans cette équation, nous avons pris $\rho_1 = \rho_2 = \rho$). En reportant l'égalité (10.48) dans cette relation, nous obtenons, pour l'égalité des termes du premier ordre en perturbation :

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)_{y=0} + \frac{U}{2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)_{y=0} - \frac{U}{2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{y=0}. \tag{10.50}$$

On a remplacé la condition en $y = \xi$ par celle en $y = 0$, ce qui est justifié car l'influence des variations sur la distance infinitésimale ξ serait du deuxième ordre. Nous allons rechercher, pour les variables couplées ξ, Φ_1 et Φ_2, des solutions de la forme :

$$\frac{\xi}{A} = \frac{\Phi_1}{B_1\,\mathrm{e}^{-ky}} = \frac{\Phi_2}{B_2\,\mathrm{e}^{ky}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+\sigma t}. \tag{10.51}$$

La présence des termes $B_1\mathrm{e}^{-ky}$ et $B_2\mathrm{e}^{ky}$ est imposée par la structure même de l'équation de Laplace, de la même manière que dans l'étude de l'équation des ondes de surface que nous avons effectuée au chapitre 6 (section 6.4.1). À la variation sinusoïdale le long d'une direction x, est associée une variation exponentielle le long de l'axe perpendiculaire, telle que la portée de cette variation soit égale à la longueur d'onde. Les signes « − » et « + » assurent que la solution physique correspond à une atténuation de l'onde dans les deux demi-espaces supérieur et inférieur respectivement. Le terme $\mathrm{e}^{\sigma t}$ indique que l'on cherche des modes d'amplitude variant exponentiellement avec le temps comme dans le problème de Rayleigh–Bénard. On ne peut exclure l'existence d'une partie imaginaire de σ : de fait, pour des ondes de surface d'amplitude stationnaire, seule existe cette dernière composante. En substituant la forme (10.51) de l'expression des potentiels Φ_1 et Φ_2 dans les équations (10.47a et b) et (10.50), on obtient un ensemble de trois équations homogènes avec les coefficients inconnus A, B_1, B_2 :

$$k\,B_1 + \left(\sigma + \mathrm{i}\,k\frac{U}{2}\right) A = 0 \tag{10.52a}$$

$$k\,B_2 - \left(\sigma - \mathrm{i}\,k\frac{U}{2}\right) A = 0 \tag{10.52b}$$

$$\left(\sigma + \mathrm{i}\,k\frac{U}{2}\right) B_1 - \left(\sigma - \mathrm{i}\,k\frac{U}{2}\right) B_2 = 0. \tag{10.52c}$$

On obtient la condition de compatibilité entre ces équations linéaires, en écrivant que le déterminant de la matrice des coefficients du système est nul soit :

$$k\left(\sigma + \mathrm{i}\,k\frac{U}{2}\right)\left(\sigma + \mathrm{i}\,k\frac{U}{2}\right) + k\left(\sigma - \mathrm{i}\,k\frac{U}{2}\right)\left(\sigma - \mathrm{i}\,k\frac{U}{2}\right) = 0 \tag{10.53}$$

ou :

$$\sigma^2 = \left(k\frac{U}{2}\right)^2 \tag{10.54}$$

soit :

$$\sigma = \pm k\frac{U}{2}\cdot \tag{10.55}$$

La relation entre le taux de croissance et le vecteur d'onde k, qui correspond à la relation de dispersion d'une onde, montre qu'il existe toujours un mode instable. Remarquons *a posteriori* que cette relation est la seule forme dimensionnelle possible, car il n'existe pas d'autre échelle de longueur naturelle du problème que la longueur d'onde $2\pi/k$. On voit aussi, d'après la formule (10.55), que les modes de courte longueur d'onde sont les plus amplifiés.

(ii) Effets de la tension interfaciale et de la différence de densité

La capillarité limite la croissance des perturbations de petite longueur d'onde, et la gravité celle des perturbations de grande longueur d'onde (du moins si le fluide dense est au-dessous de l'autre). Regardons maintenant comment les effets de la gravité et de la capillarité modifient les calculs précédents.

- Dans la condition aux limites sur la pression il faut remplacer $p_1 = p_2$ par

$$(p_1)_{y=\xi} = (p_2)_{y=\xi} + \gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = (p_2)_{y=\xi} - \gamma k^2\xi. \tag{10.56}$$

- Dans la relation de Bernoulli, il faut introduire le terme hydrostatique $\rho_i\, g\,\xi\,(i = 1, 2)$ avec $\rho_1 \neq \rho_2$.

Le calcul de la condition de compatibilité des trois équations se poursuit ensuite comme dans le cas précédent et conduit cette fois à la condition d'instabilité :

$$4\rho_1\,\rho_2\left(\frac{U}{2(\rho_1+\rho_2)}\right)^2 > c_0^2 = \frac{g}{k}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1} + \frac{\gamma\,k}{\rho_2+\rho_1} \tag{10.57}$$

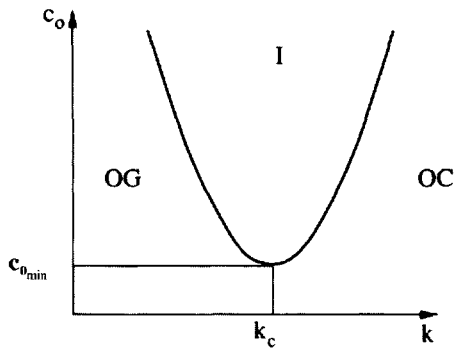


FIG. 10.13 – *Domaine de stabilité pour l'instabilité de Kelvin–Helmholtz en fonction du vecteur d'onde k. La célérité c_0 est proportionnelle à la vitesse relative des deux fluides (Éq. (10.57)). I représente le domaine de l'instabilité, OG et OC sont les domaines d'existence d'ondes contrôlées respectivement par la gravité et par la capillarité.*

où c_0 représente la vitesse des ondes en l'absence d'écoulement ($U = 0$). On voit clairement les effets stabilisants de la différence de densité $(\rho_1 - \rho_2)$ (premier terme), et de la tension superficielle γ (second terme). Le minimum $c_{0_{\min}}$ de c_0 et le vecteur d'onde critique k_c correspondant vérifient :

$$c_{0_{\min}} = \sqrt{\frac{4\,\gamma\,g\,(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_1 + \rho_2)^2}} \tag{10.58a}$$

et

$$k_c = \sqrt{\frac{g\,(\rho_2 - \rho_1)}{\gamma}}\,. \tag{10.58b}$$

On reconnaît que k_c est l'inverse de la longueur capillaire définie au chapitre 1 (section 1.4.2). L'ensemble des valeurs seuils qui correspondent aux différents vecteurs d'onde est représenté par la courbe de la figure 10.13. Cette courbe est la limite de stabilité linéaire du problème : elle est analogue à celle de la figure 10.5 relative à l'instabilité de Rayleigh–Bénard. Le minimum de la courbe correspond à un *vecteur d'onde critique* k_c pour lequel les effets de la gravité et de la capillarité sont du même ordre de grandeur. La zone intérieure correspond au domaine où les perturbations de vecteur d'onde donné sont amplifiées. Dans le domaine à l'extérieur de cette courbe, les ondes de gravité et de capillarité excitées par une perturbation imposée ont une amplitude décroissant exponentiellement avec le temps sous l'effet de la viscosité quand l'excitation cesse.

On peut déterminer expérimentalement cette courbe à l'aide d'un canal rempli d'eau, et d'un écoulement d'air de vitesse variable parallèle à la surface

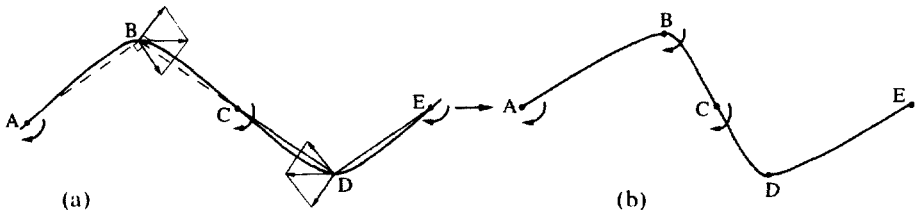


FIG. 10.14 – *Évolution d'un ensemble de quatre filaments de tourbillons de même sens, perpendiculaires au plan de figure et faisant partie d'une nappe de vorticité : (a) forme initiale de la nappe de tourbillons après apparition d'une bosse sur celle-ci ; (b) évolution de la forme de la nappe sous l'effet de l'interaction entre les champs de vitesse.*

libre. On « force », à l'aide d'un batteur placé à une extrémité du canal, une oscillation locale de la surface de fréquence ajustable : on contrôle ainsi dans le même temps le vecteur d'onde. Pour chaque fréquence de forçage, on mesure la vitesse minimale à partir de laquelle apparaît l'instabilité : c'est celle pour laquelle l'amplitude des ondes augmente lorsqu'on s'éloigne du point d'excitation au lieu de décroître sous l'effet de la viscosité. Ces mesures permettent de construitre l'équivalent de la courbe de stabilité de la figure 10.13 (le vecteur d'onde est simplement remplacé par la fréquence).

L'étude linéaire précédente ne s'applique pas aux effets de grande amplitude où la description en terme de croissance exponentielle d'un seul mode est insuffisante. Pour comprendre le mécanisme d'évolution ultérieure de l'instabilité, nous utilisons une représentation discrète de la discontinuité de vitesse par un ensemble de lignes tourbillons parallèles : nous avons déjà utilisé cette approche au chapitre 7 (section 7.4.2). De telles représentations sont largement utilisées en pratique dans des calculs numériques : celui de l'évolution non linéaire du problème de Kelvin–Helmoltz fut d'ailleurs fait dès les années 30 ! Analysons par exemple le comportement de quatre lignes de tourbillons parallèles A, B, C et D : ces lignes font partie d'une nappe de tourbillons (d'axes perpendiculaires au plan de figure), dont le contour présente une bosse en B. Pour analyser l'évolution du profil de la bosse, regardons l'effet, sur le tourbillon B, des deux tourbillons A et C placés symétriquement (Fig. 10.14a).

Par suite de la déformation du profil, le champ induit par ces tourbillons a une composante horizontale qui tend à rapprocher le tourbillon en B de celui en C ; de même le tourbillon en D se rapproche de C. Ainsi, la vorticité se trouve renforcée autour de C : par contre, autour de A, la vorticité se trouve affaiblie. Sous l'effet de l'écoulement supplémentaire dû à cette vorticité, l'interface se raidit, et prend la forme montrée à la figure 10.14b (on parle d'onde de « type N » par référence à la forme asymétrique de la lettre). Finalement, on obtient un effet de déferlement comme dans le cas des vagues.

10.4.2 Écoulement de Poiseuille dans un tube et entre deux plans parallèles

L'instabilité des écoulements paraboliques parallèles obtenus dans un tube de section circulaire, ou entre deux plans parallèles, illustre la complexité et la variété des mécanismes de transition vers la turbulence.

Dans un tuyau de *section circulaire*, le profil parabolique de Poiseuille devient instable pour une valeur du nombre de Reynolds qui dépend des conditions de l'écoulement (conditions d'entrée dans le tube, vibrations, état de surface ...). Elle peut varier entre quelques milliers et quelques centaines de milliers ! La raison en est que le profil parabolique est stable devant toutes les pertubations infinitésimales quel que soit le nombre de Reynolds : il est donc nécessaire d'introduire une perturbation d'amplitude finie pour le déstabiliser. L'instabilité apparaît alors sous forme de zones turbulentes : celles-ci se propagent le long du tube comme des bouchons, et alternent avec des zones laminaires. Cette « intermittence » se manifeste par l'observation d'un jet saccadé à l'extrémité du tuyau. Ces phénomènes furent mis en évidence par Osborne Reynolds dans une expérience classique réalisée à Manchester en 1881. Au chapitre 11, la figure 11.1 montre le résultat obtenu par Reynolds sur l'instabilité de l'écoulement.

En revanche, pour un écoulement de Poiseuille entre deux plans parallèles, on a un seuil bien défini pour l'apparition d'instabilités infinitésimales ($Re = 5\,900$) : on parle dans ce cas de *seuil linéaire*, car il correspond à un cas où on peut appliquer des approximations linéaires à l'évolution des perturbations. Cependant, il est possible d'amplifier des perturbations d'amplitude *finie* pour un nombre de Reynolds (de l'ordre de 1 000) inférieur à cette valeur : on pourra ainsi observer des instabilités si l'écoulement amont n'est pas complètement débarrassé de toutes perturbations. Un seuil d'instabilité linéaire est donc une condition suffisante d'instabilité au-delà de la valeur seuil : mais, on n'a pas nécessairement stabilité au-dessous du seuil. On voit ainsi que deux écoulements pourtant très voisins peuvent avoir des comportements très différents.

10.4.3 Rôle de la forme du profil de vitesse et de la vorticité

Il existe une différence importante entre les écoulements dont le profil des vitesses ne présente pas de point d'inflexion (écoulements de Poiseuille, écoulements à l'intérieur d'une couche limite, ...) et ceux qui en présentent (écoulement de Kelvin–Helmholtz). Nous allons montrer tout d'abord que, si on néglige l'effet de la viscosité, les écoulements ne présentant pas de point d'inflexion seront stables.

Considérons un écoulement bidimensionnel de vitesse u parallèle à l'axe Ox dont nous ne précisons pas le profil $u(y)$, mais tel que sa courbure $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}y^2$ (négative dans le cas de la figure 10.15a) ne change pas de signe avec y.

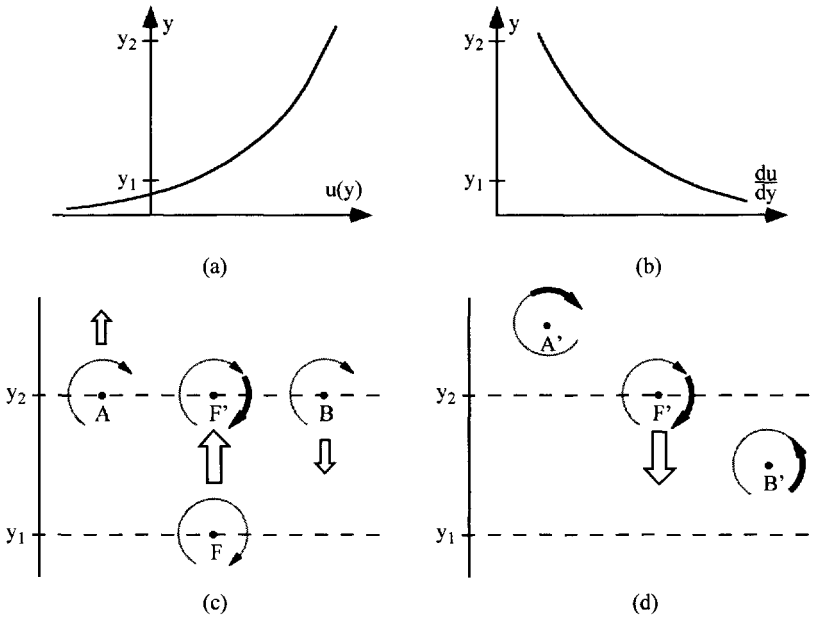


FIG. 10.15 – *Évolution d'une perturbation d'un écoulement parallèle d'un fluide parfait dans le cas où la variation de la vitesse $u(y)$ du fluide avec la distance y, normale au déplacement, ne présente pas de point d'inflexion : (a) profil de vitesse $u(y)$; (b) variation de la dérivée $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ du profil de vitesse avec la distance y ; (c) perturbation de l'écoulement due au déplacement d'un élément de fluide de F en F'. L'élément de fluide déplacé a une vorticité différente de celle des éléments de fluides environnants, et induit sur les points A et B des déplacements dans la direction indiquée sur la figure ; (d) dans leurs nouvelles positions A' et B', ces éléments de fluides induisent une vitesse ramenant l'élément de fluide F' vers sa position de départ. Dans les schémas (c) et (d), les flèches en traits fins représentent la vorticité locale, et les flèches en traits gras la vorticité effective correspondant au déséquilibre de l'élément de fluide déplacé par rapport au champ de vorticité environnant.*

La vorticité $\omega_z = -\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ a alors une variation monotone avec la coordonnée y (Fig. 10.15b). Déplaçons une particule de fluide d'une petite longueur $y_2 - y_1$ du point F au point F' (Fig. 10.15c). Si on néglige la viscosité, la vorticité n'est que convectée, et ne diffuse pas comme nous l'avons vu au chapitre 7 (section 7.3.1). On supposera donc que la particule de fluide conserve sa vorticité initiale quand elle arrive au point F' : par rapport au champ de vorticité d'équilibre, elle apparaît comme un petit tourbillon de vorticité effective (flèche en gras sur la figure) proportionnelle à la différence entre les valeurs de ω_z aux points F et F' (flèches en traits fins). Ce tourbillon réagit à son tour sur les éléments de fluide A et B voisins de F' : A et B se déplacent

en sens opposé vers deux points A' et B' en conservant leur vorticité de départ (Fig. 10.15d). Il en résulte pour chacun un déséquilibre avec le fluide environnant, équivalent à l'apparition de deux nouveaux tourbillons de sens contraire en A' et B' (leur vorticité effective est de nouveau montrée par une flèche en noir sur la figure). Le sens de la vitesse induite en F' est telle qu'elle ramène vers F la particule de fluide considérée initialement. Un profil d'écoulement sans point d'inflexion est donc stable devant une perturbation infinitésimale dans la limite d'un fluide parfait, où seuls interviennent les effets de convection de la vorticité.

Notons cependant que, pour des fluides visqueux, même les profils d'écoulement sans points d'inflexion peuvent être instables. Cela peut sembler paradoxal car la viscosité était jusqu'à présent toujours apparue comme un effet stabilisant : dans le cas présent, au contraire, les transferts de quantité de mouvement dus à la viscosité sont le moteur de l'instabilité aux grandes valeurs du nombre de Reynolds.

10.5 Transition vers le chaos

10.5.1 Comportement de l'instabilité de Rayleigh–Bénard au-delà du seuil

Dans cette section et la suivante, nous décrivons les comportements de systèmes à faible nombre de degrés de liberté (une cellule par exemple ne contenant que quelques rouleaux de convection), lorsqu'on s'écarte de plus en plus du seuil d'apparition de la première instabilité. Ainsi, en analysant l'instabilité de Rayleigh–Bénard entre deux plaques horizontales (section 10.2), nous avons montré qu'elle se présente tout d'abord sous la forme de rouleaux stationnaires convectifs horizontaux : à des nombres de Rayleigh plus élevés, on voit apparaître d'autres phénomènes qui dépendent du temps et font passer progressivement du régime ordonné (rouleaux) à un *régime chaotique*.

Considérons donc l'expérience de Rayleigh–Bénard, et suivons l'apparition du régime convectif en mesurant par exemple la température locale instantanée $T(t)$ près d'une des plaques qui limitent la couche de fluide. Pratiquement, on analyse l'évolution temporelle de la composante fluctuante de la température (ou de la vitesse) ou encore le spectre en fréquence de celles-ci. Juste au-dessus du seuil d'instabilité, la vitesse et la température restent constantes, et l'écoulement reste stationnaire. Par contre, lorsque la différence de température ΔT entre les plaques excède une nouvelle valeur seuil ΔT_1, la température oscille périodiquement avec une fréquence f_1 très bien définie. Des fluctuations périodiques du champ de vitesse se superposent alors au mouvement convectif stationnaire. Lorsqu'on continue d'augmenter la différence de température, on observe d'autres transitions conduisant, sur un intervalle de différence de température limité, à un comportement chaotique représentant une forme particulière de turbulence.

10.5.2 Scénarios de transition vers le chaos

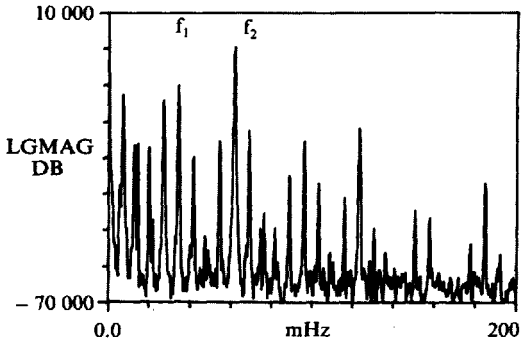
Suivant les valeurs du nombre de Prandtl du fluide et la géométrie de la cellule, on identifie, à partir des variations temporelles ou de leur spectre plusieurs « scénarios » d'évolution vers le chaos. L'application de ceux-ci n'est pas limitée à l'hydrodynamique, ils ont aussi été observés sur des systèmes mécaniques, électroniques ou même chimiques. On classe généralement ces scénarios en trois types :

♦ Pour une valeur $\Delta T_2 > \Delta T_1$, il apparaît dans le spectre de fréquence $S(f)$ des fluctuations de température une nouvelle composante de fréquence f_2 bien définie mais incommensurable avec f_1 (Fig. 10.16a). On observe également dans le spectre de nombreux pics, dont les fréquences sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de f_1 et f_2. En augmentant encore la température, on s'attendrait à l'apparition d'une troisième, quatrième, etc, fréquence et à un comportement asymptotiquement turbulent lorsqu'une infinité de fréquences coexistent. C'est ce que prédisait le modèle classique de la turbulence développé par Landau dans les années quarante. En fait, au-delà d'une valeur seuil du nombre de Rayleigh, on observe une brusque transition du spectre à deux fréquences vers un comportement chaotique (Fig. 10.16b). Le spectre $S(f)$ a une composante continue et non nulle pour toutes les fréquences : l'amplitude de celle-ci augmente avec ΔT alors que les composantes à fréquences discrètes sont de moins en moins visibles.

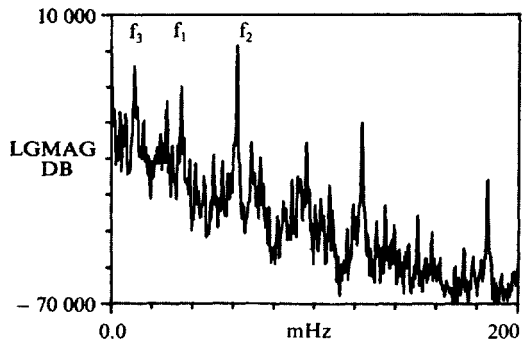
Prédite par les mathématiciens Ruelle et Takens, cette forme de passage au chaos est également observée sur des systèmes simples tels que deux oscillateurs mécaniques couplés non linéairement : leur comportement résultant devient chaotique et imprévisible lorsque les amplitudes d'oscillation sont suffisantes. Les lois gouvernant chaque oscillateur individuel sont parfaitement connues, mais l'état du système est imprévisible au bout d'un temps fini quelle que soit la précision avec laquelle est connu l'état initial.

♦ Un second mode d'évolution vers le chaos est la transition par « intermittence ». Elle consiste en un dérèglement intermittent des oscillations du système observé aux faibles différences de température : on observe alors des bouffées chaotiques de grande amplitude entrecoupant des oscillations régulières bipériodiques du système (Fig. 10.17). L'intervalle entre les phases désordonnées devient de plus en plus court, lorsque le nombre de Rayleigh augmente au dessus du seuil, jusqu'à ce qu'on atteigne le régime où l'écoulement est turbulent en permanence.

♦ Un troisième scénario consiste en l'apparition successive de doublements de la période $1/f_1$ avec apparition successive de composantes de périodes $2/f_1$, $4/f_1$, $8/f_1$ ... (Fig. 10.18) : les seuils d'apparition correspondent à des valeurs de la différence de température et du nombre de Rayleigh Ra_1, Ra_2, Ra_3, de plus en plus resserrées, jusqu'à une valeur d'accumulation Ra_∞. Au-delà de la température correspondant à cette limite, le comportement devient chaotique. L'opération de division de fréquence $f \rightarrow f/2$ est classique en physique



(a)



(b)

FIG. 10.16 – *(a) Spectre en fréquence des fluctuations de température observées dans l'état quasi périodique au-dessus de la valeur seuil ΔT_2 (ΔT_2 correspond à l'apparition d'une deuxième fréquence caractéristique indépendante de f_2 dans le spectre des fluctuations de température). Les différents pics du spectre correspondent à des fréquences $f = n_1 f_1 + n_2 f_2$ (n_1 et n_2 sont des entiers positifs ou négatifs). (b) Apparition d'une composante continue du spectre des fluctuations de température au-dessus du seuil de transition vers l'état chaotique. L'amplitude de la composante continue décroît exponentiellement avec la fréquence (document A. Libchaber, S. Fauve, C. Laroche, École Normale Supérieure).*

et s'appelle une *oscillation paramétrique* : une balançoire en mouvement pendulaire à une fréquence f peut être entretenue par un mouvement à une fréquence $2f$ de la personne située dessus ; en effet, celle-ci devra déplacer son corps deux fois par période par rapport à une position médiane. La division itérative de fréquence a été introduite indépendamment dans les problèmes d'instabilité par Feigenbaum aux USA et par Coullet et Tresser en France.

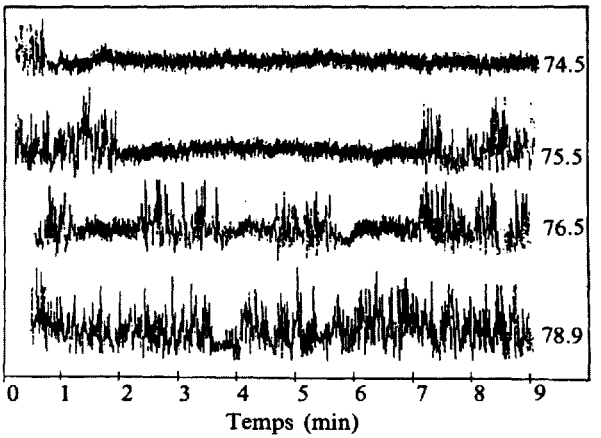


FIG. 10.17 – *Signal temporel de variation de température observé pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra lors d'une expérience de convection dans l'hélium liquide. Les nombres indiqués représentent le rapport Ra/Ra_c (Ra_c = seuil de convection). La durée moyenne τ des phases bipériodiques suit une loi $\tau \propto (Ra - Ra_i)^{-\beta}$ ($Ra_i = 74,5\ Ra_c$ et $1 < \beta < 1,5$) (document J. Maurer et A. Libchaber, École Normale Supérieure).*

Les valeurs critiques R_1, R_2 ... R_n, R_{n+1} du paramètre de contrôle R (par exemple le nombre de Rayleigh Ra dans le cas présent) qui correspondent à chaque étape de la division vérifient la relation :

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+2} - R_{n+1}} \approx 4,67.$$

Ces valeurs de R sont de plus en plus rapprochées lorsque n croît et tendent vers une limite finie R_∞ qui correspond à l'apparition du chaos. Le nombre δ (nombre de Feigenbaum) a une valeur universelle indépendante du système étudié.

Globalement, les résultats de cette section heurtent notre bon sens habitué aux problèmes classiques de la mécanique rationnelle, où des lois exactes mènent à des comportements parfaitement prévisibles. De nombreux autres exemples de chaos ont cependant été mis en évidence, et de tels comportements semblent d'ailleurs plutôt être la règle même pour des systèmes simples ! Un des résultats essentiels de ces études est d'avoir montré qu'on pouvait observer un comportement aléatoire de systèmes présentant un faible nombre de degrés de liberté, comme ceux que nous venons de décrire. Il faut cependant distinguer l'état désordonné obtenu après la transition vers le chaos et la *turbulence développée* que nous étudierons au chapitre 11 : celle-ci correspond à des écoulements avec des nombres considérablement plus grands de degrés de liberté. La correspondance entre ces deux classes de problèmes

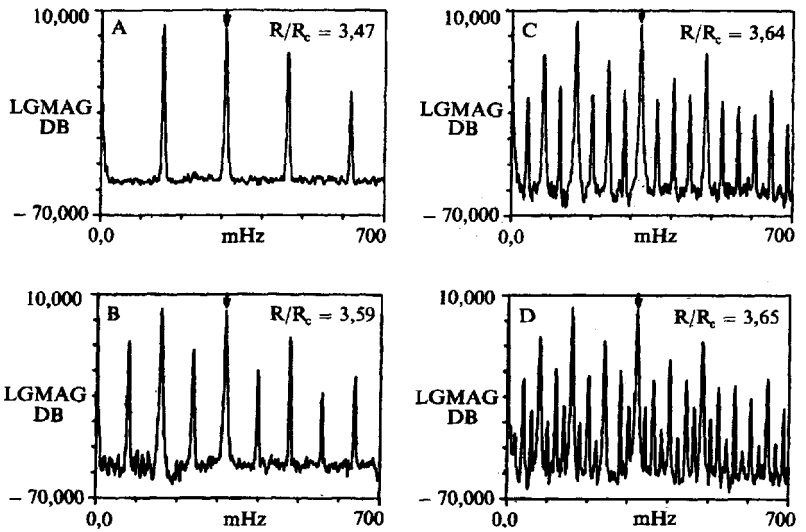


FIG. 10.18 – *Spectres en fréquence de la température mesurés par une sonde locale, dans une expérience de convection de Rayleigh–Bénard, dans le mercure pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra (les nombres indiqués sont les valeurs du rapport Ra/Ra_c ; Ra_c = nombre de Rayleigh correspondant au seuil de convection). Les courbes présentées correspondent respectivement à l'apparition des fréquences $f/2$, $f/4$, $f/8$ et $f/16$ (document A. Libchaber, S. Fauve, C. Laroche, École Normale Supérieure).*

n'est pas évidente et, en particulier, il est difficile de dégager des scénarios simples d'apparition du désordre dans les écoulements turbulents habituels. Dans ces derniers, on rencontre cependant le phénomène d'intermittence que nous avons aussi évoqué plus haut pour les écoulements à faible nombre de degrés de liberté.

Chapitre 11

Turbulence

CET OUVRAGE *se termine par le plus redoutable chapitre de la mécanique des fluides : l'étude de la turbulence. En dépit d'efforts de caractérisation et de description théorique étalés sur plusieurs siècles, le « simple » effet de la non linéarité des équations de Navier-Stokes reste mal compris.*

Nous avons rencontré tout au long de cet ouvrage des manifestations de la turbulence. Au chapitre 2, nous avons vu que l'écoulement derrière un obstacle cylindrique devient turbulent à des nombres de Reynolds de quelques centaines. L'étude de la dynamique du tourbillon, au chapitre 7, présente probablement l'aspect le plus physique de la turbulence, dont les vortex sont les éléments constitutifs. La déstabilisation de la couche limite laminaire étudiée au chapitre 9 provoque une turbulence associée au comportement erratique de la couche limite décollée aux nombres de Reynolds élevés. Enfin, l'étude des instabilités hydrodynamiques au chapitre 10 représente en quelque sorte un prélude à l'étude de la turbulence développée : le développement d'instabilités convectives au-dessus d'un seuil conduisait à une turbulence faible où l'écoulement était déjà instationnaire et imprévisible.

Ce chapitre commence par un bref rappel historique de la turbulence (section 11.1). Ensuite (section 11.2), nous établissons les équations de base en décomposant le champ de vitesse local et instantané en une composante moyenne et des fluctuations indépendantes du temps. On fait de même pour les autres variables (vorticité, pression, énergie). Les fluctuations sont corrélées et ont donc une efficacité résultante non nulle : ce mécanisme de transport turbulent joue un rôle clé, aussi bien pour les transferts d'énergie et de quantité de mouvement, que pour ceux de chaleur ou de concentration de solutés.

La théorie de Kolmogorov (section 11.3) s'applique à la turbulence homogène et s'appuie sur une description spectrale (décomposition de Fourier) des variables fluctuantes (vitesse, vorticité ...) : elle décrit, dans les écoulements tridimensionnels, le transfert d'énergie de l'écoulement moyen et des composantes turbulentes de petits vecteurs d'onde (grandes échelles spatiales) vers celles de grand vecteur d'onde (petites échelles spatiales). On

établit ainsi des lois d'échelle caractérisant le transport, et on voit réapparaitre les effets d'amplification de la vorticité par étirement des tourbillons vus au chapitre 7. À la section 11.4, au contraire, nous abordons les écoulements turbulents hétérogènes au voisinage de parois solides. Cette analyse présente cependant des analogies notables avec le cas homogène (en remplaçant l'espace des vecteurs d'onde par l'espace réel). Ainsi, au voisinage immédiat d'un obstacle, les effets de dissipation visqueuse deviennent importants (comme pour les plus petits tourbillons en turbulence homogène), et le transfert d'énergie s'effectue de l'écoulement extérieur vers les parois. Dans les deux cas, ce transfert s'effectue par étapes à travers toute une gamme d'échelles de tailles intermédiaires des tourbillons (domaine inertiel dans le cas homogène) ou de distances à la paroi (couche inertielle dans le cas hétérogène).

Enfin, à la section 11.5, nous évoquons le cas des écoulements bidimensionnels, où le mécanisme d'étirement de la vorticité est absent, ainsi que celui des grandes structures cohérentes turbulentes évoquées à plusieurs reprises dans cet ouvrage (et illustrées depuis des siècles par les artistes comme par les savants).

11.1 Une longue histoire

La turbulence constitue un chapitre essentiel de l'étude des écoulements de fluides. Elle a fait l'objet de descriptions souvent précises et imagées depuis l'antiquité. Lorsque Héraclite écrit : « *on ne se baigne jamais deux fois dans le même fleuve* », il fait référence au caractère toujours changeant – instationnaire et imprévisible – des écoulements turbulents. Dans le *De natura rerum*, Lucrèce s'attache à la description de la surface de la mer alternativement calme ou très agitée. Il introduit, à la suite d'Epicure, la notion de *clinamen* (en français « déviation ») qui traduit la modification de la trajectoire des « atomes » qui, amplifiée, conduit à la formation des corps de manière imprévisible, de même que l'obtention du mouvement turbulent d'un fluide. Au chapitre précédent, nous avons déjà évoqué cette sensibilité aux conditions initiales dans l'étude des instabilités hydrodynamiques qui conduisent à des comportements chaotiques.

Par ailleurs, les écoulements turbulents font apparaître des formes géométriques bien reconnaissables, où l'on distingue souvent des tourbillons et des structures de filaments tels que les a dessinés en particulier Léonard de Vinci, et qui sont attachés à la notion moderne de *structures cohérentes*. Les tourbillons de Bénard–Von Karman étudiés au chapitre 2 (section 2.4), ainsi que les structures de couche de mélange à l'interface de deux fluides se déplaçant à des vitesses différentes (chapitre 10, section 10.4.1), sont des exemples de telles structures. Le même Léonard donnera une première description des transferts au sein d'un écoulement turbulent dont nous empruntons la traduction à l'excellent livre d'Uriel Frisch sur ce sujet :

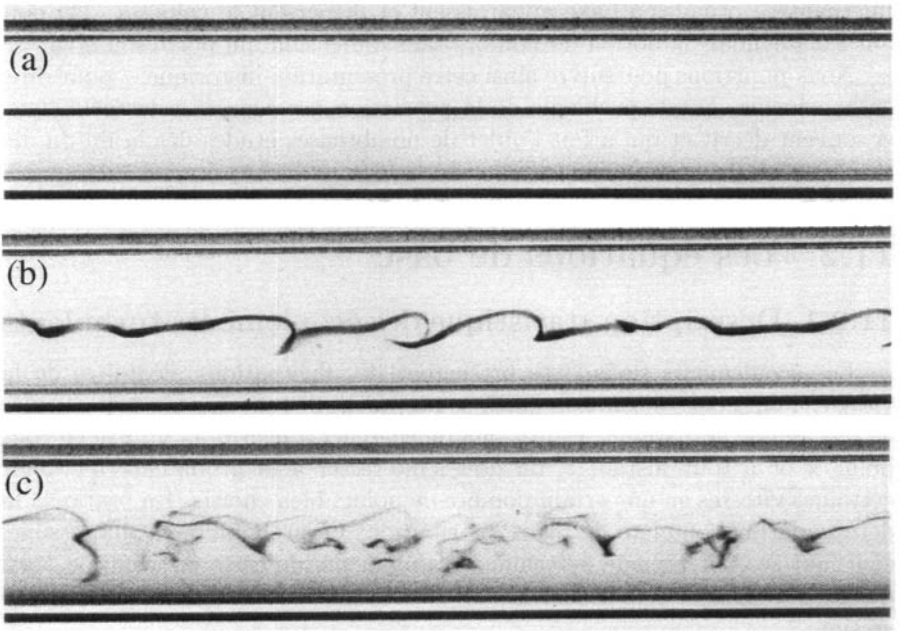


FIG. 11.1 – *Reproduction de l'expérience historique de Reynolds ; (a) à basse vitesse, l'écoulement dans un tube est laminaire et un filet de colorant injecté en amont à l'entrée du tube loin à gauche de la figure, reste identifiable sur une grande distance ; (b), (c) au-dessus d'une valeur critique de l'ordre de quelques milliers, l'écoulement devient turbulent, ce qui se traduit par un important mélange de colorant entre le centre et le bord de l'écoulement induit par les composantes de vitesse transverse aléatoire du fluide (clichés N. H. Johannesen et C. Lowe,* An Album of Fluid Motion*).*

> « *Où la turbulence de l'eau se crée* ;
>
> *où la turbulence de l'eau se maintient longtemps* ;
>
> *où la turbulence retourne au repos.* »

Nous verrons à la section 11.3 que cela peut être mis en correspondance avec la cascade d'énergie – dite de Kolmogorov – qui va de l'échelle des plus grands tourbillons vers celle des plus petits, et dont nous avons pu nous faire une idée à l'occasion de l'étude du vortex de Rankine au chapitre 7 (Fig. 7.4 et section 7.1.3). Enfin, citons Osborne Reynolds qui, au cours d'un ensemble d'expériences réalisées à partir de 1880, a observé l'ondulation (nous disons aujourdhui la *déstabilisation*) d'un filet de liquide coloré à l'intérieur d'un liquide en écoulement dans un tube (Fig. 11.1). Cette déstabilisation marque la transition entre un régime d'écoulement laminaire où la vitesse est constante et parallèle à l'axe et un régime turbulent où des composantes de vitesse

fluctuantes normales à l'axe apparaissent et dispersent le colorant. On doit aussi à Reynolds la notion du nombre sans dimension qui porte son nom.

Nous pourrions poursuivre ainsi cette présentation historique... pour dire, en conclusion, que le problème de la prédiction des écoulements turbulents, si souvent décrit et qui a fait l'objet de nombreuses études dès la fin du dix neuvième siècle, reste, aujourd'hui encore, bien mal compris.

11.2 Les équations de base

11.2.1 Description statistique des écoulements turbulents

Les écoulements turbulents présentent des fluctuations aléatoires de la vitesse. Pour cette raison, leur étude se rapproche de celle des gaz de particules en mécanique statistique. Plutôt que de chercher à décrire la vitesse en tout point $\mathbf{x}$ et à tout instant t, on doit s'intéresser à la probabilité d'obtenir certaines vitesses en un certain nombre de points bien choisis. En pratique, la détermination complète de telles distributions de probabilité est impossible, et il faut se contenter de déterminer les moments de cette distribution ainsi que les fonctions de corrélation entre les fluctuations de la vitesse en des points voisins.

Les variables décrivant le fluide en écoulement turbulent (vitesse, pression, température, composition ...) seront décomposées en des valeurs moyennes et des fluctuations de valeur moyenne nulle liées à la turbulence. Appliquons cette décomposition – dite *décomposition de Reynolds* – à la composante v_i de la vitesse sous la forme :

$$v_i = \overline{v_i} + v_i' \quad \text{avec} \quad \overline{v_i'} = 0. \tag{11.1}$$

Nous nous intéresserons à l'écriture des lois qui régissent les variations de la valeur moyenne $\overline{v_i}$ et celles des corrélations entre les composantes v_i' des fluctuations. En toute rigueur, pour déterminer ces valeurs moyennes, il faudrait produire un grand nombre de réalisations du même écoulement pour des conditions initiales et des géométries identiques, et effectuer une *moyenne d'ensemble* sur des valeurs obtenues sur toutes ces réalisations. Cela n'est évidemment guère réalisable en pratique, et on supposera donc souvent que la turbulence vérifie l'hypothèse d'*ergodicité* : si on attend un temps assez long, l'écoulement passe par tous ses états possibles, et le temps passé dans chacun d'eux est proportionnel à sa probabilité. On en déduit la définition suivante de la composante $\overline{v_i}$ de la vitesse moyenne de la vitesse d'écoulement en un point $\mathbf{x}$ donné :

$$\overline{v_i}\,(x) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v_i(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{11.2}$$

T est la durée d'observation : elle doit être grande devant le temps caractéristique τ des fluctuations de vitesse les plus lentes associées aux

mouvements turbulents, mais plus courte que le temps d'évolution à grande échelle de l'écoulement global. Si l'écoulement n'est pas stationnaire, par suite d'une variation des paramètres extérieurs, la définition d'une fonction $\overline{v_i}(\mathbf{x}, t_0)$ n'a de sens que si le temps caractéristique de ces variations est très supérieur à T. En pratique, donc, il ne sera possible de définir des moyennes temporelles significatives que si l'écoulement est presque stationnaire statistiquement. On pourra alors utiliser l'hypothèse d'ergodicité et supposer que l'écoulement explore un échantillon représentatif de ses états d'écoulement possibles pendant le temps de moyennage.

On utilisera aussi la moyenne des moments supérieurs de la distribution de probabilité des vitesses qui indique comment sont reliées entre elles les vitesses instantanées en des points et des temps différents : ils caractérisent donc les *corrélations spatio-temporelles.* On utilise le plus souvent des moments d'ordre 2 « centrés », calculés sur les fluctuations par rapport aux valeurs moyennes :

$$b_{ij}\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2\right) = \overline{\left(v_i\left(\mathbf{x}_1, t_1\right) - \overline{v_i(\mathbf{x}_1, t_1)}\right)\left(v_j(\mathbf{x}_2, t_2) - \overline{v_j(\mathbf{x}_2, t_2)}\right)}. \quad (11.3)$$

Tandis que la valeur moyenne des fluctuations $v_i' = v_i - \overline{v_i}$ est nulle, leurs valeurs à des instants proches t_1 et t_2 et en des points voisins $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont corrélées, et b_{ij} est non nulle. Par contre, les composantes v_i' en deux points, éloignés et/ou à des intervalles de temps élevés, ne sont pas corrélées, et la valeur de b_{ij} correspondante est nulle. Dans le cas où l'écoulement est statistiquement stationnaire, $b_{ij}\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2\right)$ ne dépend que de la différence $t = t_2 - t_1$ rapportée à un temps de référence t_1 ; ce sera le cas le plus fréquent dans notre étude.

Enfin, si la turbulence est homogène dans l'espace, seule la différence des vecteurs $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ intervient dans les fonctions de corrélation, comme pour la variable temps. On définit également des moments d'ordre 3, 4 ..., à partir des produits du nombre correspondant de composantes de la vitesse : la détermination pratique de ces moments est d'autant plus difficile que leur ordre est plus élevé, notamment pour des raisons de convergence statistique.

L'étude des corrélations spatio-temporelles à partir de mesures instantanées de vitesse en deux points a constitué un des grands volets des études expérimentales de la turbulence, en liaison avec le développement de modèles statistiques. Les outils expérimentaux ont été, en particulier, les anémomètres à fil chaud (chapitre 9, section 9.7.1) et les anémomètres laser Doppler (chapitre 3, section 3.5.2). Ces études ont souvent sous-estimé l'importance des informations sur la géométrie de la turbulence auxquelles les techniques de visualisations classiques (ou plus récentes comme la vélocimétrie par images de particules) décrite au chapitre 3.5.3 donnent accès.

11.2.2 Dérivation des valeurs moyennes

En appliquant l'équation (11.2), qui définit les grandeurs moyennes, aux dérivées spatiales de la vitesse et en échangeant l'ordre des opérations

d'intégration par rapport au temps, et de dérivation par rapport aux variables spatiales, on trouve que :

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} = \overline{\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}} \tag{11.4}$$

(c'est l'hypothèse d'ergodicité qui permet d'échanger les moyennes spatiales et temporelles dans le raisonnement précédent). La moyenne des dérivées temporelles de la vitesse est en général plus difficile à calculer : on devrait l'obtenir en principe par passage à la limite $\delta t \to 0$ dans l'équation :

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} = \frac{\overline{v_i(t_0+\delta t)} - \overline{v_i(t_0)}}{\delta t} + \frac{\overline{v_i'(t_0+\delta t)} - \overline{v_i'(t_0)}}{\delta t}\,. \tag{11.5}$$

On est alors tenté d'écrire que :

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} \tag{11.6}$$

puisque la première partie de l'expression de droite correspond à la définition de $\partial \overline{v_i}/\partial t$ et que la valeur moyenne des fluctuations v_i' de la vitesse est nulle. L'expresssion (11.6) n'est cependant valable que si le temps T minimal pour calculer la moyenne $\overline{v_i}$ dans l'équation (11.2) est suffisamment faible devant le temps caractéristique T_I d'évolution globale de l'écoulement moyen. C'est donc sous la condition $T_I > \delta t > T > \tau$ qu'on obtient une valeur significative de la dérivée $\partial \overline{v_i}/\partial t$ à partir du rapport $(\overline{v_i\,(t_0+\delta t)} - \overline{v_i\,(t_0)})/\delta t$ en utilisant des valeurs de $\delta t > T$ (minimum nécessaire pour calculer la moyenne $\partial \overline{v_i}/\delta t$) (on rappelle que τ est la durée caractéristique des fluctuations de vitesse les plus lentes). Le passage à la limite $\delta t \to 0$ est donc souvent problématique, mais on admettra néanmoins dans ce qui suit que l'équation (11.6) est vérifiée.

11.2.3 Équations du mouvement turbulent

Équation de Reynolds

L'équation de Navier–Stokes continue de s'appliquer à la vitesse instantanée v_i tant que l'échelle des plus petits mouvements turbulents des particules de fluide est grande devant le libre parcours moyen des molécules individuelles (nous considérerons dans la suite que cette hypothèse est valable). Nous supposerons également, comme dans le reste de cet ouvrage, que le fluide est incompressible.

Établissons maintenant l'équation de mouvement – appelée *équation de Reynolds* – vérifiée par la valeur moyenne $\overline{v_i}$ de la vitesse. Reportons la décomposition (11.1) dans l'équation de Navier–Stokes normalisée par la densité ρ. On obtient, en utilisant comme précédemment la convention d'Einstein de sommation implicite sur l'indice j lorsqu'il est répété dans un

terme :

$$\frac{\partial \overline{v_i} + v_i'}{\partial t} + (\overline{v_j} + v_j')\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v_i} + v_i') = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{p} + p') + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\overline{v_i} + v_i') + f_i. \tag{11.7}$$

Moyennons maintenant l'équation (11.7) dans le temps. Tous les termes ne faisant intervenir qu'une fois les fluctuations p' ou v_i' disparaissent lors du moyennage. Seul, le produit croisé $\overline{v_j'\partial v_i'/\partial x_j}$ et les termes ne contenant que les moyennes de v_i et de p sont non nuls, d'où :

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \overline{v_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v_i} + \overline{v_j'\frac{\partial}{\partial x_j}v_i'} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\overline{v_i} + f_i. \tag{11.8}$$

Cette équation de Reynolds ne diffère que par le terme $\overline{v_j'\partial v_i'/\partial x_j}$ de celle qu'on obtiendrait en remplaçant, dans l'équation de Navier–Stokes, p et v_i par leurs moyennes $\overline{p}$ et $\overline{v_i'}$.

Par ailleurs, la condition d'incompressibilité, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, s'applique à la fois instantanément et en moyenne dans le temps. À partir de ces deux conditions, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v_j}) = 0 \tag{11.9}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v_j') = 0. \tag{11.10}$$

Comme l'équation de Navier–Stokes usuelle, l'équation (11.8) peut être transformée en une équation de conservation de la quantité de mouvement en la multipliant par ρ et en utilisant l'équation (11.10) pour récrire le produit croisé :

$$\overline{v_j'\frac{\partial}{\partial x_j}v_i'} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v_j'v_i'} - \overline{v_i'\frac{\partial}{\partial x_j}v_j'} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v_j'v_i'}. \tag{11.11}$$

En effectuant la même opération sur le terme $\overline{v_j}\partial\overline{v_i}/\partial x_j$, l'équation (11.8) devient :

$$\rho\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\sigma_{ij}} - \rho\,\overline{v_i}\,\overline{v_j} - \rho\overline{v_i'v_j'}) + \rho f_i \tag{11.12a}$$

où :

$$\overline{\sigma_{ij}} = -\overline{p}\,\delta_{ij} + \rho\nu\left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i}\right). \tag{11.12b}$$

Le terme $\tau_{ij} = -\rho\,\overline{v_i'v_j'}$ de l'équation (11.12a) est le *tenseur de Reynolds*. La moyenne $\overline{\Pi_{ij}}$ du flux de quantité de mouvement $\Pi_{ij} = \rho\, v_i\, v_j - \sigma_{ij} = \rho\, v_i\, v_j + p\delta_{ij} - \sigma'_{ij}$ introduit au chapitre 5 (section 5.2.2) vérifie :

$$\overline{\Pi_{ij}} = -\overline{\sigma_{ij}} + \rho\,\overline{v_i}\,\overline{v_j} + \rho\overline{v_i'v_j'} = -\overline{\sigma'_{ij}} + \rho\,\overline{v_i}\,\overline{v_j} + \rho\,\overline{v_i'v_j'} + \overline{p}\,\delta_{ij}. \qquad (11.12c)$$

De nouveau, les équations (11.12a) et (11.12c), vérifiées par les moyennes $\overline{v_i}$ et $\overline{p}$, sont presque identiques aux expressions obtenues en remplaçant dans les équations correspondantes (5.6) et (5.11) v_i et p par leurs moyennes. La seule différence – mais elle est fondamentale en ce qui concerne le transport turbulent – est le terme supplémentaire $\tau_{ij} = -\rho\,\overline{v_i'v_j'}$.

Signification du tenseur de Reynolds

Le terme τ_{ij} caractérisant la corrélation entre des composantes instantanées de la vitesse fluctuante, rend compte du transport par les fluctuations turbulentes. Il est souvent aussi appelé *tenseur des contraintes turbulentes*. Les composantes non diagonales $\tau_{i\neq j}$ jouent un rôle plus important que les composantes diagonales τ_{ii} : elles correspondent en effet à des contraintes de cisaillement qui facilitent l'apparition de nouveaux mouvements de rotation et permettent, par conséquent, de maintenir élevé le rotationnel de la vitesse et de faire apparaître de nouveaux tourbillons. On le comprend simplement en se rapportant à la description de la viscosité comme une diffusion de quantité de mouvement (chapitre 2, Section 2.1.2) et en faisant jouer un rôle symétrique aux deux composantes de vitesse qui interviennent.

Comparons les significations physiques de τ_{ij} et des termes de transport convectif de quantité de mouvement faisant intervenir la vitesse moyenne comme, par exemple, $\rho\,\overline{v_x}\,\overline{v_y}$. Si $\overline{v_x}$ et $\overline{v_y}$ sont de signes opposés, le fluide transporte dans son écoulement, soit une composante négative de quantité de mouvement selon Ox vers les y positifs ($\overline{v_x} < 0$, $\overline{v_y} > 0$), soit une composante positive dans la direction des y négatifs ($\overline{v_x} > 0$, $\overline{v_y} < 0$). Du point de vue de l'échange de quantité de mouvement, le résultat est le même. De même, quand $\overline{v_x'\,v_y'} < 0$, v_y' est plus souvent inférieure à 0 pendant les périodes où v_x' est supérieure à 0 et vice versa. Dans un tel cas, où les signes des deux composantes de la fluctuation de vitesse sont corrélés, ces deux contributions à la variation de quantité de mouvement vont donc dans le même sens. Bien que les deux composantes v_x' et v_y' des fluctuations de vitesse soient individuellement de valeur moyenne nulle, elles peuvent donc contribuer à la variation de $\overline{v_x}$ ou $\overline{v_y}$. Nous appliquerons un peu plus loin (section 11.2.4) un raisonnement de ce type au cas d'un écoulement cisaillé de vitesse moyenne $\overline{v_x}\,(y)$.

Transport turbulent de chaleur ou de matière

Jusqu'à présent, nous avons cherché à établir des équations vérifiées par la vitesse moyenne d'un l'écoulement turbulent et qui régissent, par conséquent, le transport de quantité de mouvement dans l'écoulement. On peut traiter de même le problème du transport de la chaleur et des fluctuations de température dans un écoulement turbulent. Là aussi, le transport de la chaleur par les fluctuations turbulentes de vitesse présente des analogies avec le modèle de la théorie cinétique des gaz discuté au chapitre 1 (section 1.3.2). Dans ce cas, le transport de la chaleur est associé au déplacement adiabatique des particules sous l'effet de l'agitation thermique à l'intérieur d'un gradient de température. La vitesse associée à cette dernière est remplacée ici par les composantes de vitesse turbulentes.

Dans le cas général, l'équation du transport de la chaleur dans un fluide en écoulement en l'absence de source de chaleur est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \tag{11.13}$$

où v_j est la vitesse locale du fluide et $\kappa = k/(\rho\, C_p)$ la diffusivité thermique. Comme pour la vitesse, on a souvent, dans un écoulement turbulent, de fortes fluctuations de la température T, qu'on peut décomposer sous la forme $T = \overline{T} + T'$. Les dérivées spatiales et temporelle de $\overline{T}$ sont prises, comme pour la vitesse, égales aux valeurs moyennes des dérivées. En combinant la décomposition de T avec celle de la vitesse : $v_i = \overline{v_i} + v_i'$, et en moyennant l'équation de transport de la chaleur, on obtient l'équation équivalente de l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{T}\,\overline{v_j} + \overline{T' v_j'}\right) + \kappa\, \Delta\, \overline{T}. \tag{11.14}$$

La moyenne $\overline{T' v_j'}$ joue un rôle équivalent au tenseur de Reynolds et assure un transport net de chaleur à partir du transport des fluctuations de température par celles de la vitesse. De l'équation (11.14), on déduit, comme précédemment, l'expression du flux de chaleur $\mathbf{Q}_T$ à l'intérieur de l'écoulement turbulent en introduisant la capacité calorifique massique C_p du fluide, sa masse spécifique ρ et sa conductivité termique $k = \rho\, C_p\, \kappa$. On a :

$$Q_{Tj} = -k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} + \rho\, C_p \overline{v_j}\,\overline{T} + \rho\, C_p \overline{v' T'}. \tag{11.15}$$

Intéressons-nous maintenant, au lieu du transfert thermique, au transport d'un composé soluble (ion, colorant, traceur radioactif, polluant chimique ...) de concentration C exprimée en masse de soluté par unité de volume de solvant. On obtient de la même façon l'expression suivante pour le flux massique $\mathbf{Q}_m$ de soluté par unité de surface et de temps en l'absence de

terme de source (réaction chimique par exemple) :

$$Q_{mj} = -D_m \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j} + \overline{v_j}\,\overline{C} + \overline{v'_j\,C'}. \tag{11.16}$$

Comparons, dans ce dernier cas, les ordres de grandeur des composantes de flux associées aux différents mécanismes. Pour une valeur $D_m = 10^{-9}$ m^2/s, typique d'un ion simple, des gradients de concentration de l'ordre de $10^{-2}\,\overline{C}$, des valeurs de C' de l'ordre de $10^{-1}\,\overline{C}$ et des fluctuations turbulentes de vitesse de 10^{-2} m/s, on trouve : $\overline{v'_j C'} \approx 10^{-3}\,\overline{C}$ et $D_m \partial\overline{C}/\partial x_j \approx 10^{-7}\,\overline{C}$. Cela peut s'exprimer par la valeur d'un nombre de Péclet turbulent (flux convectif / flux diffusif), $Pe_t \approx 10^4$. La diffusion turbulente l'emporte donc largement sur la diffusion moléculaire, et l'effet de celle-ci est donc généralement négligeable pour les écoulements turbulents courants. La turbulence a ainsi un effet de mélange très efficace. C'est bien ce que nous réalisons, sans y penser, lorsque nous homogénéisons les composants de notre café au lait du matin avec une cuillère !

11.2.4 Expressions empiriques du tenseur de Reynolds

« Fermeture » des équations

L'ensemble des équations (11.8) et (11.9) fait intervenir plus d'inconnues que d'équations : aux quatre inconnues $\overline{v_i}$ et $\overline{p}$ s'ajoutent les six composantes différentes de τ_{ij} (les fonctions de corrélation). On peut établir des équations vérifiées par τ_{ij} en multipliant les équations (11.8) par v'_j, puis en calculant des moyennes temporelles. Mais les équations résultantes contiennent alors des moments d'ordre supérieur mettant en jeu trois composantes fluctuantes. On pourrait itérer encore le processus pour ces moments, ce qui ferait apparaître, dans le même temps, des moments d'ordre 4 ! On n'arrivera jamais ainsi à obtenir un système « fermé » contenant autant d'équations que d'inconnues. Ce problème, dû à la présence du terme non linéaire $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ dans les équations de mouvement, est essentiel dans l'étude de la turbulence : on en sera réduit à trouver des solutions approchées en imaginant des expressions possibles de τ_{ij} en fonction des gradients de vitesse $(\partial v_i/\partial x_j)$ qui permettent d'assurer la *fermeture* des équations et de résoudre les équations de mouvement moyennées. Leur défaut majeur est de ne pas reposer sur des bases théoriques rigoureuses : ces modèles ne font pas, en effet, intervenir de grandeurs universelles ayant une signification physique claire mais introduisent des paramètres ajustables à déterminer pour chaque écoulement. Néanmoins, ces expressions, qui voulaient être au départ des modèles théoriques de la turbulence, continuent souvent à être utilisées, faute de mieux, pour des applications pratiques !

Remarque Il faut noter que, dans de telles approches, on veut relier des quantités statistiques (essentiellement des moments d'ordre 1 et 2) obtenues par des opérations de moyenne, plutôt que d'établir des équations reliant des valeurs instantanées et

valables à tout instant et en tout point de l'espace. On cherchera en particulier des relations entre des moments du second ordre (comme le tenseur de Reynolds) et des moments du premier ordre, comme le gradient de la vitesse moyenne.

Viscosité turbulente

Dans cette approche, on rend compte de l'augmentation de la friction et du transport de quantité de mouvement dans un écoulement turbulent en introduisant une viscosité ν_T qui s'ajoute à la viscosité classique des fluides. Ce concept fut introduit par Boussinesq vers 1890 dans son *traité sur les eaux courantes.* Pour cela, on pose par analogie avec le tenseur de viscosité :

$$\tau_{ij} = -\rho\,\overline{v'_x v'_y} = \frac{\rho\,\nu_T}{2}\left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i}\right) \cdot \tag{11.17}$$

Ce concept n'a cependant pas de base physique solide : ν_T est indépendante des propriétés du fluide, mais dépend en revanche de l'écoulement et également du point de mesure dans un même écoulement.

Longueur de mélange

Cette approche différente, proposée par L. Prandtl en 1903, est inspirée de la théorie cinétique des gaz. Elle consiste à rechercher une longueur qui jouerait le même rôle que le libre parcours moyen des molécules, tout en faisant jouer aux composantes fluctuantes de la vitesse le même rôle que la vitesse d'agitation thermique.

Supposons par exemple qu'on ait un gradient de vitesse moyenne $\partial\overline{v_x}/\partial y$ non nul (> 0 par exemple comme à la figure 11.2). Dans un plan $y = y_0$ donné, les particules de fluide convectées par une fluctuation turbulente $v'_y > 0$ viennent de zones $y < y_0$, où la vitesse moyenne $\overline{v_x}\,(y)$ est plus faible que la vitesse moyenne locale $\overline{v_x}\,(y_0)$. L'arrivée de telles particules apparaît donc comme une fluctuation de vitesse v'_x négative. On aura donc une contribution instantanée $\rho\,v'_x v'_y < 0$. Le même raisonnement appliqué à une particule venant du haut donne aussi un terme négatif pour cette corrélation instantanée. On a donc en moyenne $\rho\,\overline{v'_x v'_y} < 0$ dans un écoulement unidimensionnel avec un gradient de vitesse $\partial\overline{v_x}/\partial y > 0$.

Précisons maintenant ces idées un peu plus quantitativement : le déplacement d'un élément matériel de fluide d'un point $M(y_0)$ à un point $M(y_0 + \Delta y)$ sous l'effet d'une fluctuation v'_y de la vitesse suivant Oy y induit une variation de la vitesse v_x :

$$v_x(y_0) - v_x(y_0 + \Delta y) = -\Delta y \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \tag{11.18}$$

de la composante de vitesse suivant Ox. En faisant une moyenne sur les différents trajets et vitesses possibles de l'élément matériel, on obtient un flux

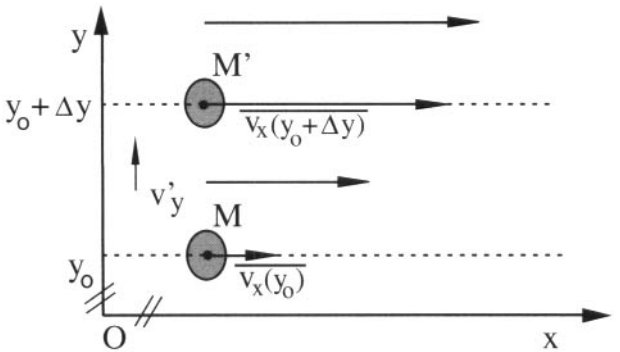


FIG. 11.2 – *Vue schématique du transport de quantité de mouvement dans le modèle de longueur de mélange. On suppose que l'on a un écoulement moyen parallèle à l'axe Ox avec une vitesse dépendant uniquement de la coordonnée y.*

de quantité de mouvement :

$$\tau_{xy} = \rho \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \overline{\Delta y \, v'_y}. \tag{11.19}$$

Nous exprimons la corrélation introduite dans cette formule sous la forme :

$$\overline{\Delta y \, v'_y} = \kappa \, \ell \sqrt{\overline{v'^2_y}} \tag{11.20}$$

où $\sqrt{\overline{v'^2_y}}$ est la vitesse quadratique moyenne des fluctuations et κ un coefficient numérique. La longueur ℓ, appelée *longueur de mélange*, représente la distance moyenne sur laquelle la vitesse d'un élément fluide reste corrélée à sa valeur initiale. Dans ce modèle, les grands « rouleaux » de taille voisine de la largeur totale de l'écoulement sont essentiels pour déterminer le transport de quantité de mouvement. Dans un écoulement de cisaillement simple le long d'une paroi, il sera raisonnable de prendre la valeur locale de ℓ égale à la distance à la paroi puisque c'est la seule échelle de longueur caractéristique disponible. Nous verrons plus loin à la section 11.4 comment la forme du tenseur des contraintes qui en résulte conduit à la variation logarithmique de la vitesse avec la distance à la paroi qui est effectivement observée.

Cette approche est donc bien analogue à celle utilisée en théorie cinétique des gaz pour le calcul de la viscosité (ou de la diffusivité) et décrite au chapitre 1. Dans ce cas, on suppose que le transport de quantité de mouvement s'effectue sur une distance égale au libre parcours moyen des molécules de gaz (dont le rôle est joué ici par ℓ). De même, en théorie de la turbulence, $\sqrt{\overline{v'^2_y}}$ joue, pour le transport de quantité de mouvement, le même rôle que la vitesse d'agitation thermique en théorie cinétique.

La différence essentielle est que, dans le cas du calcul microscopique de la viscosité, on a une *séparation d'échelles* entre les petites échelles

des mouvements désordonnés dus à l'agitation thermique et la distance sur laquelle on fait une moyenne pour calculer la viscosité. Une telle séparation n'existe plus dans les mouvements turbulents, pour lesquels les plus grandes échelles turbulentes sont de la taille des mouvements moyens. Cette non-séparabilité en échelle des mouvements turbulents est un obstacle majeur à toute tentative de rapprochement entre la théorie cinétique des gaz et l'étude de la turbulence.

11.2.5 Conservation de l'énergie dans un écoulement turbulent

La conservation de l'énergie dans un écoulement turbulent fait intervenir un bilan d'énergie pour l'écoulement moyen et un autre pour les fluctuations turbulentes.

Variations d'énergie cinétique des fluctuations turbulentes en l'absence de gravité

On calcule ce bilan en partant de l'équation de Navier–Stokes qu'on multiplie par v_i' avant de sommer sur les différentes composantes et de moyenner (on suppose la force en volume f_i nulle). On obtient alors, après avoir décomposé chaque composante de la vitesse suivant l'équation (11.1) et divisé par ρ pour avoir l'énergie par unité de masse :

$$\frac{\partial \overline{v_i'^2}}{\delta t} = -\overline{v_i' v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} - \overline{v_i' v_j'} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} - \overline{v_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{v_i'^2}}{2} \right) - \overline{\frac{v_i'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \nu \overline{v_i' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j^2}} \cdot \quad (11.21)$$

En utilisant les équations (11.9) et (11.10), on peut récrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial \overline{v_i'^2}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{v_i'^2}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\overline{v_i'^2 v_j'}}{2} - \frac{\overline{p' v_j'}}{\rho} + \nu \overline{v_i' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} \right)$$
$$- \nu \overline{\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \right)^2} - \overline{v_i' v_j'} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \cdot \quad (11.22)$$

La dérivée lagrangienne du premier membre représente les effets d'instationnarité et la convection de l'énergie des fluctuations turbulentes (rappelons que l'équation de l'énergie correspond à une somme sur les indices j et i).

- Les trois premiers termes du second membre – tous sous forme de divergence – représentent des flux d'énergie de diverses origines, mais dépendant tous uniquement des fluctuations de vitesse et de pression.

- Le terme $-\nu \overline{(\partial v_i'/\partial x_j)^2}$ exprime, en se référant à la section 5.3.1 du chapitre 5, la perte d'énergie des fluctuations turbulentes par dissipation

visqueuse (il suffit de remplacer v_i par v'_i dans l'équation (5.26) pour retrouver aisément ce terme).

- Le dernier terme $-\overline{v'_i v'_j}\,\partial\overline{v_i}\partial x_j$ de l'équation (11.22) représente le transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes : il fait intervenir à la fois le gradient de vitesse de l'écoulement moyen et le tenseur de Reynolds $\tau_{ij} = -\rho\overline{v'_i v'_j}$ du transport de quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes.

Variations d'énergie cinétique de l'écoulement moyen

On obtient la variation $\partial(\overline{v_i})^2/\partial t$ de l'énergie cinétique par unité de masse de l'écoulement moyen en multipliant cette fois l'équation de Navier–Stokes par la vitesse moyenne $\overline{v_i}$ avant de moyenner la somme des composantes. En procédant comme précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,(\overline{v_i})^2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{\overline{p}\,\overline{v_j}}{\rho} + \nu\,\overline{v_i}\,\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j} - \overline{v_i}\,\overline{v'_i v'_j}\right)\\ &\quad - \nu\left(\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j}\right)^2 + \overline{v'_i v'_j}\,\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j}\,. \qquad (11.23)\end{aligned}$$

Cette équation est similaire dans sa forme à l'équation (11.22) en remplaçant des composantes fluctuantes par des valeurs moyennes. Le terme $(\overline{v'_i v'_j})\partial\overline{v_i}/\partial x_j$ apparaît dans les deux équations (11.22 et 23), mais avec un signe opposé : cela traduit bien son rôle dans l'échange d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations.

Remarque Le terme de dissipation visqueuse de l'écoulement moyen $-\nu(\partial\overline{v_i}/\partial x_j)^2$ dans l'équation (11.23) est très inférieur au terme correspondant $-\nu\overline{(\partial v'_i/\partial x_j)^2}$ dans l'équation (11.22). Nous verrons plus loin en effet que les gradients de vitesse associés aux tourbillons (et en particulier à ceux de petite taille) sont beaucoup plus élevés que ceux du champ de vitesse d'écoulement moyen.

On peut récrire ce terme de dissipation visqueuse sous la forme $-(\nu\partial\overline{v_i}/\partial x_j) \times (\partial\overline{v_i}/\partial x_j)$ où $\nu\partial\overline{v_i}/\partial x_j$ représente les contraintes visqueuses associées à l'écoulement moyen. Les deux derniers termes de (11.23) sont alors similaires : on passe de l'un à l'autre en remplaçant $-\nu\,\partial\overline{v_i}/\partial x_j$ par le tenseur $\overline{v'_i v'_j}$ qui est généralement dominant sauf, nous le verrons, très près des parois.

11.2.6 Transport de la vorticité dans un écoulement turbulent

Conservation de la vorticité des fluctuations turbulentes

On peut, comme pour les champs de vitesse et de pression, décomposer la vorticité $\omega = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ sous la forme $\omega_i = \overline{\omega_i} + \omega'_i$. En valeur absolue, les termes fluctuants ω'_i sont en général beaucoup plus élevés que les termes $\overline{\omega_i}$ ($\omega'_i \gg \overline{\omega_i}$) puisqu'ils correspondent à des combinaisons de gradients des composantes

de la vitesse. Nous nous intéresserons donc uniquement à l'équation de conservation de ω_i', ou plutôt, puisque ces composantes sont en moyenne nulles, de l'*enstrophie* $\omega_i'^2$ (on somme sur i) . Comme pour la quantité de mouvement et l'énergie, on calcule l'équation de conservation de l'enstrophie $\omega'^2 = \sum_i \omega_i'^2$ des fluctuations turbulentes à partir de l'équation (7.36) de transport de la vorticité. En ne conservant que les termes dominants, on obtient :

$$\frac{\overline{\mathrm{d}\omega'^2}}{\mathrm{d}t} = -\nu\overline{\left(\frac{\partial\omega_i'}{\partial x_j}\right)^2} + \overline{\omega_i'\omega_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}\,. \tag{11.24}$$

Démonstration Multiplions l'équation de transport (7.36) par ω_i' et moyennons. On obtient les différents termes

$$\overline{\omega_j' v_j \frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}} = \overline{v_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\overline{\omega_i'^2}}{2} + \overline{\omega_j' v_j'}\frac{\partial\overline{\omega_i}}{\partial x_j} + \overline{v_j'\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\omega_i'^2}{2}} \quad \text{avec} \quad \overline{v_j'\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\omega_i'^2}{2}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v_j'\frac{\omega_i'^2}{2}}$$

$$-\overline{\omega_i'\omega_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = -\overline{\omega_i'\omega_j'}\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j} - \overline{\omega_i'\omega_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} - \overline{\omega_i' v_j'}\frac{\partial\overline{\omega_i}}{\partial x_j}$$

$$\nu\overline{\omega_i'\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_j^2}} = \nu\overline{\omega_i'\frac{\partial^2\omega_i'}{\partial x_j^2}} = \nu\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\omega_i'\frac{\partial\omega_i'}{\partial x_j}\right)} - \nu\overline{\left(\frac{\partial\omega_i'}{\partial x_j}\right)^2} = \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2\overline{\omega_i'^2}}{\partial x_j^2} - \nu\overline{\left(\frac{\partial\omega_i'}{\partial x_j}\right)^2}.$$

Les termes contenant la vorticité moyenne $\overline{\omega_j}$ sont négligeables. Il en est de même des termes : $\overline{\omega_i'\omega_j'}\,\partial\overline{v_i}/\partial x_j$ qui font intervenir la dérivée d'une valeur déjà moyennée, et sont négligeables par rapport aux termes du type $\overline{\omega_i'\omega_j'\,\partial v_i'/\partial x_j}$. En tenant compte de ces remarques, on trouve les deux termes dominants de (11.24).

L'équation (11.24) joue pour la vorticité (et, à travers elle, pour le moment cinétique) le rôle du bilan d'énergie (11.22) pour l'énergie cinétique. Le terme $-\nu\overline{(\partial\omega_i'/\partial x_j)^2}$ représente la dissipation de vorticité par diffusion visqueuse. Le second terme $\overline{\omega_i'\omega_j'\,\partial v_i'/\partial x_j}$ découle du terme $-\omega_j\,\partial v_i/\partial x_j$ de l'équation (7.36) : celui-ci correspond à la variation de vorticité turbulente due à l'étirement des tubes de vorticité par les fluctuations de vitesse. Pour compenser la diffusion visqueuse, ce terme doit être supérieur à 0, et il y a donc en moyenne plus d'étirement que de contraction des tubes de vorticité. Ainsi, les rouleaux de plus grande taille qui apparaissent, s'étirent continuellement en tubes de section plus petite : ce processus continue jusqu'à ce que les pertes dues à la viscosité équilibrent l'augmentation de vorticité. Notons finalement qu'un tel modèle ne s'applique qu'aux écoulements à trois dimensions : pour un écoulement purement bidimensionnel, la vorticité est toujours perpendiculaire au plan de l'écoulement et le terme d'étirement est donc toujours nul.

Divergence de la vorticité en l'absence de viscosité

En l'absence de viscosité, l'amplification de la vorticité par étirement pourrait conduire à une divergence de celle-ci en un temps fini. Reprenons l'équation (11.24) en négligeant l'effet de la viscosité. Dimensionnellement, le terme de droite est d'ordre ω^3, car les termes de gradient de vitesse peuvent s'écrire sous forme d'une combinaison de composantes ω_i de la vorticité. D'une manière symbolique, la vorticité vérifie donc l'équation :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}t} = A\,\omega^3 \tag{11.25}$$

où A est une constante de l'ordre de l'unité. Cette équation possède une solution de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega} = At \tag{11.26}$$

où ω_0 est la vorticité au temps initial $t = 0$, soit :

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{1 - A\omega\, t_0} = \frac{\omega_0\, t_0}{t_0 - t} \tag{11.27a}$$

avec :

$$t_0 = \frac{1}{A\,\omega_0}\,. \tag{11.27b}$$

Dans ce modèle, la vorticité ω diverge au bout du temps $t_0 = 1/(A\,\omega_0)$, *ou temps de catastrophe*, qui est de l'ordre de grandeur du temps de retournement des mouvements tourbillonnaires initiaux. En pratique, c'est l'effet de la viscosité qui empêche cette divergence de se produire. On peut analyser cette catastrophe et le rôle stabilisant de la viscosité en utilisant des configurations initiales simples de vorticité ; par exemple, un ensemble de deux tubes de vorticité de circulations opposées conduit à une telle divergence en un temps fini. Cependant, la question de savoir si, de façon générale, la vorticité diverge en un temps fini reste actuellement un problème ouvert.

11.3 Turbulence homogène – théorie de Kolmogorov

Nous avons établi, à la section précédente, des bilans globaux d'échanges d'énergie et de vorticité entre l'écoulement moyen et l'ensemble des fluctuations turbulentes de vitesse. Le but de la théorie développée par Kolmogorov en 1941, et modifiée ensuite en 1961, est de préciser ces bilans et d'étudier la distribution et l'échange d'énergie entre les tourbillons de tailles différentes. La multiplicité de tailles des échelles dans la turbulence est en effet, comme nous l'avons vu, une de ses caractéristiques essentielles. Il est donc nécessaire d'obtenir des informations sur la répartition de l'énergie ou de la vorticité entre les tourbillons de différentes tailles. Pour cela, il faut tout d'abord décomposer le champ de vitesse turbulent en des « composantes » de différentes échelles spatiales.

11.3.1 Décomposition spectrale d'un champ de vitesse turbulent

Définition des composantes spectrales

L'approche la plus simple consiste à réaliser une décomposition « spectrale » du champ de vitesse en prenant la *transformée de Fourier* à trois dimensions des composantes v'_j. On définit ainsi :

$$v'_{j,\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint v'_j(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}} \mathrm{d}^3\mathbf{r} \tag{11.28a}$$

et, par transformation de Fourier inverse :

$$v'_j(\mathbf{r}) = \iiint v'_{j,\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}\, \mathrm{d}^3\mathbf{k} \tag{11.28b}$$

(i représente ici $\sqrt{-1}$ comme il est d'usage en notation complexe, et ne doit pas être confondu avec l'indice i utilisé souvent par ailleurs pour désigner les composantes de la vitesse et d'autres grandeurs vectorielles). Cela revient à représenter l'ensemble des fluctuations de vitesse comme une superposition d'ondes sinusoïdales. Celles-ci, contrairement aux fluctuations turbulentes, ont une extension spatiale infinie. On doit donc considérer plutôt les tourbillons de différentes tailles comme des paquets d'onde correspondant à un intervalle Δk de valeurs de k centrées autour d'un vecteur d'onde k_0. En fait, ces distributions sont larges, et on a $\Delta k \approx k_0$: la taille du tourbillon est alors de l'ordre de $2\pi/k_0$. Tout comme dans le principe d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas localiser parfaitement les fluctuations turbulentes à la fois dans l'espace réel et dans celui des vecteurs d'onde : plus Δk est grand, plus leur étendue spatiale sera faible. Calculons maintenant l'énergie en fonction des composantes $v'_{j,\mathbf{k}}$ à partir de l'équation (11.28b). L'énergie cinétique par unité de masse vérifie (en sommant sur l'indice j) :

$$\frac{\overline{v'^2_j}}{2} = \iiint \frac{\overline{v'^2_{j,\mathbf{k}}}}{2} \mathrm{d}^3\mathbf{k} \tag{11.29}$$

$\left(\overline{v'^2_{j,\mathbf{k}}}/2\right) \mathrm{d}^3\mathbf{k}$ représente donc l'énergie par unité de masse associée aux composantes de *vecteur d'onde* voisin de $\mathbf{k}$, situées dans un volume $\mathrm{d}^3\mathbf{k}$ de l'espace spectral. Dans un écoulement turbulent homogène et isotrope, elle ne dépend que du module $|\mathbf{k}|$ et non de l'orientation de $\mathbf{k}$. Soit $E(k)$ la densité spectrale d'énergie : $E(k)\,\mathrm{d}k$ est l'énergie associée aux composantes dont le *module du vecteur d'onde* est compris entre k et $k + \mathrm{d}k$. Comme le volume correspondant dans l'espace spectral est $4\pi\, k^2\, \mathrm{d}k$, on obtient alors (en sommant également sur j) :

$$E(k) = 2\,\pi\, k^2\, \overline{v'^2_{j,\mathbf{k}}}. \tag{11.30}$$

La transformée de Fourier n'est qu'une des approches possibles de la décomposition d'un champ de vitesse turbulent en composantes de différentes tailles caractéristiques. Son défaut principal est d'utiliser des fonctions (sinusoïdales) d'étendue spatiale infinie comme base, alors que les structures turbulentes ont une portée finie. D'autres approches, telles que la *transformée en ondelettes*, ont été mises en oeuvre. Les ondelettes, au contraire des sinusoïdes, ont une étendue spatiale finie qui décroît avec celle des fluctuations turbulentes qu'elles représentent.

Remarque On pourrait calculer d'une manière mathématiquement similaire la dissipation d'énergie par viscosité donnée par l'équation (5.26). Cette dissipation vérifie, dans le volume $\mathcal{V}$ occupé par l'unité de masse de fluide :

$$\iiint_{\mathcal{V}} 2\nu\, e_{ij}^2 \,\mathrm{d}V = 2\nu \int k^2\, E(k)\,\mathrm{d}k.$$

Le facteur k^2 résulte du calcul des transformées de Fourier des dérivées spatiales de la vitesse intervenant dans e_{ij}^2 qui fait apparaître les différentes composantes de $\mathbf{k}$ comme coefficients multiplicatifs.

Détermination expérimentale des composantes spectrales

Une des difficultés de l'utilisation pratique de ces définitions est le fait que la décomposition est effectuée par rapport aux variations spatiales plus difficiles à mesurer expérimentalement que les variations temporelles. Dans certains cas, on peut obtenir $E(k)$ en déplaçant rapidement un détecteur à l'intérieur de l'écoulement, et en mesurant les variations de vitesse du fluide environnant : il est alors nécessaire que les tourbillons soient traversés par la sonde en un temps inférieur à leur temps caractéristique d'évolution. Si la distribution des fluctuations turbulentes est isotrope, on peut déduire $E(k)$ des fluctuations temporelles des composantes de vitesse parallèles et normales au déplacement de la sonde. Le passage des coordonnées spatiales aux coordonnées temporelles s'opère en remplaçant la pulsation ω par Uk_1 (où U est la vitesse de la sonde et k_1 le vecteur d'onde parallèle au mouvement).

On peut aussi utiliser une sonde fixe lorsque la vitesse moyenne $\overline{v}$ de l'écoulement est nettement plus grande que l'amplitude des fluctuations de vitesse. Dans cette approche, on considère que la turbulence est « gelée » et que la répartition du champ de vitesse engendré par les tourbillons ne change pas lorsqu'ils passent sur la sonde (hypothèse de la *turbulence gelée* de Taylor). On suppose alors que les variations de vitesse mesurées au cours du temps en un point sont identiques aux variations dans l'espace qui seraient mesurées instantanément par une sonde mobile à vitesse infinie.

Remarque Il ne sera pas possible de cette manière de mesurer les composantes $v'_{i,\mathbf{k}}$ pour toutes les composantes du vecteur d'onde $\mathbf{k}$, mais seulement pour la composante k_1 parallèle à l'écoulement moyen $\mathbf{U}$. De plus, on ne mesure pas en général les trois composantes de la vitesse, mais seulement en pratique une ou deux. On ne pourra donc pas, en général, déterminer la somme $1/2\,\overline{v'^2_{j,\mathbf{k}}}$ pour toutes les

composantes de **k** et tous les indices j mais seulement des grandeurs comme :

$$E_1(k_1) = \frac{v_{1,k_1}'^2}{2} \cdot \tag{11.31}$$

Il est cependant possible de montrer, que, sous réserve que l'isotropie des fluctuations turbulentes est vérifiée, $E_1(k_1)$ et $E(k)$ sont reliés par l'expression :

$$E(k) = 2\,k_1^3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_1}\left(\frac{1}{k_1}\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}k_1}\right) \cdot \tag{11.32}$$

On peut alors, au moins en principe, déterminer $E(k)$ en fonction de $E_1(k_1)$. En particulier si, comme nous le verrons plus loin, $E(k)$ varie avec k suivant une loi de puissance, $E_1(k_1)$ suit également une loi de puissance avec le même exposant et dans la même gamme de valeurs de vecteurs d'onde que $E(k)$.

11.3.2 « Cascade d'énergie » dans un écoulement turbulent homogène

Description qualitative

Reprenons l'équation (11.22) de transport de l'énergie des fluctuations, en supposant maintenant l'écoulement moyen stationnaire. On suppose également que l'écoulement évolue assez lentement avec la distance pour que la divergence des termes de flux d'énergie soit faible. Le bilan d'énergie des fluctuations turbulentes devient donc, en négligeant ces termes et ceux du premier membre :

$$-\nu\overline{\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)^2} = \overline{v_i'v_j'}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \cdot \tag{11.33}$$

On a donc, pour les fluctuations turbulentes, équilibre entre l'énergie reçue de l'écoulement moyen et celle dissipée par viscosité. Supposons plus précisément (ce que l'on vérifiera *a posteriori* : voir équation (11.36)) que les vitesses associées aux tourbillons augmentent avec leur taille mais que, par contre, les gradients de vitesse sont plus forts pour les petits tourbillons. Dans ce cas, dans le bilan d'énergie (11.33), les grands tourbillons contribueront de façon dominante au terme $-\overline{v_i'v_j'}\,(\partial\,\overline{v_i}/\partial x_j)$ et les plus petits au terme $\nu\,\overline{(\partial v_i'/\partial\,x_j)^2}$.

Dans le modèle de « cascade d'énergie » introduit par Kolmogorov, on considère donc que l'énergie injectée dans l'écoulement à grande échelle est transmise par celui-ci aux plus grands tourbillons de taille caractéristique ℓ (Fig. 11.3) ; elle se transmet ensuite de proche en proche jusqu'aux plus petits au niveau desquels elle est dissipée par viscosité.

L'image du vortex de Rankine présenté au chapitre 7 (section 7.1.3) était déjà conforme à cette idée. L'origine de l'échange d'énergie est l'étirement des tubes de vorticité qui intervient dans l'équation de bilan (11.24) à travers le terme $\overline{\omega_i'\omega_j'(\partial v_i'/\partial x_j)}$. Dans un écoulement stationnaire homogène, pour lequel $\mathrm{d}\omega'^2/\mathrm{d}t = 0$, ce terme doit être en moyenne positif pour que l'équation (11.24)

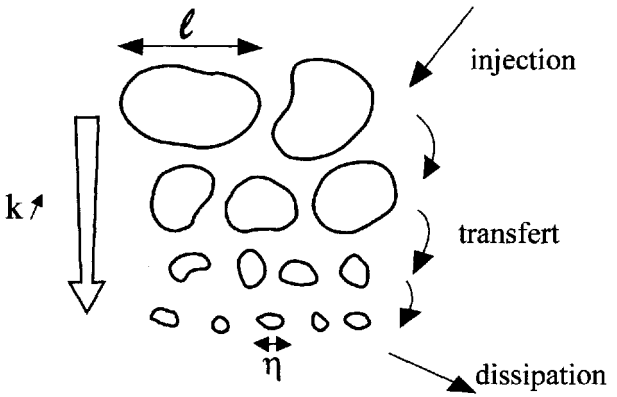


FIG. 11.3 – *Principe de la cascade de Kolmogorov de transfert d'énergie des plus grands vers les petits tourbillons. Soulignons que l'échelle verticale est définie dans ce schéma dans l'espace des vecteurs d'onde. En fait, il n'existe pas de séparation entre les différents tourbillons dans l'espace réel. Les résultats récents illustrés par les figures 11.16 remettent en cause cette représentation introduite par Richardson.*

soit vérifiée. Comme nous l'avons vu au chapitre 7 (section 7.3.1), si on étire un tube de vorticité de longueur L et de rayon R, la vorticité totale $\pi\,\omega' R^2$ et le volume $\mathcal{V} = \pi\, R^2 L$ restent constants au cours de la déformation du tube de vorticité. L'énergie cinétique de rotation du tube, qui est de l'ordre de $\rho\,\mathcal{V}\,R^2\,\omega'^2$, est en revanche proportionnelle à $1/R^2$ et, par suite, à L : le tourbillon gagne donc de l'énergie lors de l'étirement.

Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire que les tourbillons d'une taille donnée ne reçoivent d'énergie que de ceux de taille immédiatement supérieure, et qu'ils ne la restituent qu'à ceux de taille juste inférieure. Raisonnons maintenant dans l'espace des vecteurs d'onde $\mathbf{k}$, et supposons – comme nous l'avons déjà fait plus haut – que les composantes $v'_{i,\mathbf{k}}$ décroissent quand $\mathbf{k}$ augmente, tandis que les dérivées $\partial v'_{i,\mathbf{k}}/\partial x_j$ croissent. L'étirement des tubes de vorticité correspondant à une composante de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ du champ de vitesse turbulent est dû aux gradients de vitesse $\partial(v'_{i,\mathbf{k}})/\partial x_j$ créés par les composantes $k' < k$ (les composantes de vecteur d'onde plus grand donnent un effet moyen nul sur l'ensemble du tourbillon). Les composantes qui donnent les plus fortes valeurs de $\partial\,(v'_{i,\mathbf{k}})/\partial x_j$ et qui sont donc les plus efficaces, correspondent aux vecteurs d'onde immédiatement inférieurs à $\mathbf{k}$.

Précisons cependant avant de poursuivre ce qu'il faut entendre par « taille immédiatement supérieure ou inférieure » : des raisonnements comme celui que nous venons de présenter classent implicitement les tourbillons sur une échelle logarithmique, seule adaptée pour décrire les variations de tailles de tourbillons de plusieurs ordres de grandeur présentes dans une turbulence

fortement développée. On divisera alors l'échelle des valeurs utiles de log k en intervalles égaux correspondant, par exemple, à une variation d'un facteur 2 lors du passage d'une échelle de taille à sa voisine. Les tourbillons se repartissent alors entre les différents intervalles : on dira par exemple que les tourbillons de vecteur d'onde de l'ordre de k reçoivent de l'énergie des tourbillons de vecteur d'onde $k/2$ pour la redonner à ceux de vecteur d'onde typique $2k$ (le nombre 2 est pris arbitrairement).

Quelques ordres de grandeur de la cascade d'énergie

Appelons ε la quantité d'énergie par unité de masse (mesurée en $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-3}$) échangée pendant un intervalle de temps unité par l'écoulement moyen avec les plus grands tourbillons. Dans le processus de cascade que nous venons de décrire, ε est aussi égale à l'énergie échangée par des tourbillons de vecteur d'onde k quelconque, avec ceux de taille voisine tant que le vecteur d'onde k est assez petit (et que, par suite, la taille des tourbillons est assez grande) pour que la viscosité n'intervienne pas.

Plaçons-nous au niveau des grandes échelles de la turbulence. Soit ℓ la taille des plus grands tourbillons et v'_ℓ la vitesse caractéristique associée ; le temps t_ℓ mis par une particule matérielle pour parcourir l'ensemble du tourbillon a un ordre de grandeur $t_\ell \approx \ell/v'_\ell$. Supposons par ailleurs que t_ℓ représente également l'ordre de grandeur du temps mis par le tourbillon pour perdre son énergie de départ. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}v_\ell'^2}{\mathrm{d}t} \approx -A\frac{v_\ell'^2}{(\ell/v'_\ell)} \tag{11.34a}$$

soit :

$$\varepsilon \approx \frac{A\,v_\ell'^3}{\ell} \tag{11.34b}$$

A est une constante de l'ordre de l'unité. Pendant le temps t_ℓ, les grands tourbillons n'auront pas le temps d'atteindre un équilibre statistique par rapport à l'ensemble de l'écoulement, et on aura seulement un équilibre local sur des distances inférieures à ℓ. On peut vérifier expérimentalement la relation (11.34) en mesurant la perte d'énergie de la turbulence, créée par le passage d'un écoulement de vitesse U à travers une grille, suivant la distance à celle-ci. Les expériences confirment approximativement les hypothèses de départ, même lorsque la taille des plus grands tourbillons varie. Ces vérifications expérimentales suggèrent que les relations (11.34a et b) restent valables *quelle que soit la taille* ξ des tourbillons. On a alors, si v'_ξ est la vitesse caractéristique pour un tourbillon de taille ξ, la relation :

$$\frac{\mathrm{d}v_\xi'^2}{\mathrm{d}t} \approx A\,\frac{v_\xi'^2 v'_\xi}{\xi} \tag{11.35a}$$

soit

$$\varepsilon \approx \frac{A\, v_\xi'^3}{\xi} \cdot \tag{11.35b}$$

Cette hypothèse est fondamentale, et se justifie par le fait que le temps $t_\xi \approx \xi / v_\xi'$ est le seul temps caractéristique relatif à un tourbillon de taille donnée, intermédiaire entre celle des plus grands tourbillons et celle des très petits tourbillons sensibles à la viscosité. Cela revient à supposer que la dynamique des tourbillons de taille intermédiaire est indépendante à la fois de la structure globale de l'écoulement (très grands tourbillons) et de la viscosité qui n'intervient qu'aux très petites échelles : elle découle du modèle de cascade où chaque classe de taille de tourbillons n'interagit qu'avec les tourbillons de taille immédiatement inférieure ou supérieure.

Puisque le taux de transfert d'énergie ε est le même pour tous les tourbillons, on a :

$$v_\xi' \propto \xi^{1/3} \tag{11.36a}$$

et

$$(\partial v_\xi' / \partial \xi) \propto \xi^{-2/3}. \tag{11.36b}$$

Cela confirme l'hypothèse de décroissance de v_ξ' et de croissance du gradient, quand l'échelle spatiale ξ des tourbillons diminue par étirement moyen.

Comme la quantité totale d'énergie transférée doit être égale à l'énergie dissipée, ε représente aussi le taux d'énergie dissipée par unité de masse. Notons η la taille caractéristique des plus petits tourbillons (il s'agit d'une notation consacrée, à ne pas confondre avec la viscosité dynamique que nous notons η dans le reste de l'ouvrage). η représente la taille des tourbillons pour lesquels l'énergie dissipée par viscosité $\nu\, \overline{(\partial v_i' / \partial x_j)^2}$ devient de l'ordre de ε. En remplaçant cette dernière expression par la valeur approchée $\nu\, (v_\eta' / \eta)^2$, la longueur η et la vitesse correspondante v_η' doivent vérifier la double condition, en prenant $A = 1$ dans les équations (11.35) :

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{v_\eta'}{\eta} \right)^2 = \frac{v_\eta'^3}{\eta} \cdot \tag{11.37}$$

En résolvant cette double équation, on obtient :

$$\eta = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4} \tag{11.38}$$

et

$$v_\eta' = (\nu \varepsilon)^{1/4} \tag{11.39}$$

η et v_η' sont appelées respectivement *longueur de Kolmogorov et vitesse de Kolmogorov.* Comme les tourbillons de taille inférieure perdent leur

énergie extrêmement vite par dissipation visqueuse, on peut considérer que η représente la limite inférieure typique de la taille des tourbillons. Une autre manière d'exprimer le même résultat consiste à calculer le nombre de Reynolds $Re_\eta = v'_\eta \, \eta/\nu$ en prenant la vitesse et la longueur de Kolmogorov comme échelles caractéristiques. On trouve $Re_\eta = 1$, ce qui confirme bien que η est l'échelle de longueur pour laquelle les effets convectifs et les effets visqueux deviennent du même ordre de grandeur.

Distribution de l'énergie suivant les tailles de tourbillons

Dans la gamme de tailles de tourbillons où l'équation (11.35b) est valable, l'énergie cinétique E_ξ par unité de masse de fluide associée aux tourbillons de taille ξ vaut :

$$E_\xi \propto v'^2_\xi \propto (\varepsilon\xi)^{2/3} \tag{11.40a}$$

ou

$$E_\xi \propto \varepsilon^{2/3} k^{-2/3} \tag{11.40b}$$

où $k \approx 1/\xi$ représente l'ordre de grandeur des vecteurs d'onde correspondant aux tourbillons de taille ξ. On peut estimer que la densité d'énergie $E(k)$ qui correspond aux tourbillons de vecteur d'onde k est reliée à E_ξ par $E_\xi \approx E(k)\, k$.

Remarque Comme nous l'avons dit plus haut, on raisonne sur la taille des tourbillons en termes d'échelle logarithmique, en parlant, par exemple, d'échange d'énergie entre des tourbillons d'une certaine taille et d'une taille double : la gamme Δk de vecteurs d'onde sur laquelle on calcule E_ξ à partir de $E(k)$ est donc toujours de l'ordre de $k \approx 1/\xi$. Donc, $E(k)\Delta k \approx E(k)\, k$.

On obtient alors :

$$E(k) = K_0 \varepsilon^{2/3}\, k^{-5/3}. \tag{11.41}$$

On trouve expérimentalement effectivement que K_0, appelée *constante de Kolmogorov*, est de l'ordre de 1,45, et qu'elle est indépendante de ℓ et de la viscosité ν. L'équation (11.41) indique que l'énergie est surtout concentrée dans les grands tourbillons et décroît avec la taille de ceux-ci. Par contre, en utilisant les relations (11.40) et en prenant toujours $k \approx 1/\xi$, on trouve que l'enstrophie (carré de la vorticité) a une répartion spectrale $\omega^2(k) \propto v'^2_\xi/(k\xi^2) \propto \varepsilon^{2/3}\, k^{1/3}$: elle est donc concentrée dans les plus petits tourbillons, et augmente quand leur taille diminue.

La relation (11.41) est extrêmement importante : c'est la fameuse « loi de Kolmogorov en $k^{-5/3}$ » bien connue des physiciens de la turbulence. Précisons qu'elle n'est valable que dans une gamme de vecteurs d'onde qui correspond à des tourbillons assez grands pour que la viscosité soit négligeable, mais néanmoins petits par rapport aux échelles de taille de l'écoulement moyen où s'opère l'injection d'énergie. Nous allons maintenant préciser le comportement

de la fonction $E(k)$ dans un domaine de vecteurs d'onde plus large, où la relation (11.41) n'est plus toujours valable : aux faibles valeurs de k, la limite maximale de taille des tourbillons joue en effet un rôle, alors qu'aux grands vecteurs d'onde, l'influence de la viscosité devient importante.

Remarque La loi 11.41 est définie dans l'espace des vecteurs d'onde. Dans l'espace réel, on obtient une relation équivalente sur la corrélation entre les fluctuations de vitesse mesurées entre deux points séparés d'un intervalle $\delta x_{\parallel}$ parallèle à l'écoulement moyen dans un écoulement turbulent homogène. On trouve :

$$\langle (v_{\parallel}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{x}_{\parallel}) - v_{\parallel}(\mathbf{r}))^2 \rangle = C\,\varepsilon^{2/3}\,\delta x_{\parallel}^{2/3}$$

où $v_{\parallel}$ est la composante de la vitesse parallèle à l'écoulement moyen ; la fonction de corrélation du premier membre est directement reliée à la transformée de Fourier de $E(k)$ et est indépendante de $\mathbf{r}$ à cause de l'homogénéité de l'écoulement. Cette relation n'est bien entendu valable que dans la même la gamme d'échelles de longueur $\delta x_{\parallel}$ pour laquelle la relation (11.41) est elle-même valable.

11.3.3 Lois de similitude de Kolmogorov

Il est possible d'étudier séparément, par des arguments dimensionnels, le domaine des vecteurs d'onde assez grands pour que l'effet de la structure globale de l'écoulement moyen ne soit pas sensible. La viscosité donne par ailleursune limite aux grands vecteurs d'onde où la première loi de Kolmogorov s'appliquera également. En revanche, la seconde loi de Kolmogorov ne s'applique que dans un domaine de vecteurs d'onde intermédiaires, où ni la viscosité ni l'écoulement incident ne jouent de rôle : le *sous-domaine inertiel.*

Première loi de similitude de Kolmogorov

Supposons tout d'abord qu'on s'intéresse aux tourbillons de taille $\xi \approx 1/k \ll \ell$. Dans ce cas, la densité d'énergie $E(k)$ doit dépendre seulement des variables k, ν et ε, de dimensions respectives : L^{-1}, L^2T^{-1} et L^2T^{-3}, et pas de ℓ. Comme la longueur η est l'échelle de longueur caractéristique du problème, le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ interviendra uniquement par l'intermédiaire de la combinaison $k\eta$ (rappelons que la longueur de Kolmogorov η est la taille des tourbillons pour lesquels la dissipation d'énergie par viscosité devient de l'ordre de grandeur du taux de transfert d'énergie ε par l'écoulement moyen). On le voit (dans le cas particulier où on suppose de plus $k\eta \ll 1$) en réécrivant l'équation (11.41) sous forme :

$$E(k) = K_0 \varepsilon^{2/3} \eta^{5/3}\,(k\eta)^{-5/3} \tag{11.42a}$$

qui devient, en remplaçant η par son expression (11.38) en fonction de ν et ε :

$$E(k) = K_0 \nu^{5/4} \varepsilon^{1/4}\,(k\eta)^{-5/3}. \tag{11.42b}$$

Dans le cas, plus général, où on suppose simplement que $k\ell \gg 1$ on peut uniquement écrire que :

$$E(k) = \nu^{5/4}\varepsilon^{1/4}\, f(k\eta) \tag{11.43}$$

où la fonction $f(k\eta)$ est égale à $K_0(k\eta)^{-5/3}$ pour $k\eta \ll 1$ et diminue plus rapidement avec k aux vecteurs d'onde plus élevés. Cette expression représente la *première loi de similitude de Kolmogorov.*

Deuxième loi de similitude de Kolmogorov : sous-domaine inertiel

Analysons maintenant le cas des tourbillons de taille $\xi \gg \eta$. Au contraire du cas précédent, la viscosité n'intervient pas dans la dissipation de leur énergie. La densité d'énergie $E(k)$ doit être alors seulement fonction de k, ℓ et ε. En procédant comme précédemment, on trouve :

$$E(k) = \varepsilon^{2/3}\ell^{5/3} g\,(k\,\ell) \qquad \text{pour} \qquad k \ll 1/\eta. \tag{11.44}$$

Il faut cependant que k soit un peu supérieur à $1/\ell$ pour qu'un équilibre statistique se soit établi. Si ℓ est très largement supérieur à η (ce que nous notons $\ell \ggg \eta$ soit $\ell > 10^3\eta$, ou $10^4\eta$), il existe un domaine de valeurs de k pour lesquelles les conditions $k\eta \ll 1$ de la première loi de Kolmogorov, et $k\ell \gg 1$ sont simultanément vérifiées. Cest le *sous-domaine inertiel.* Dans ce cas, $E(k)$ doit être indépendant de ℓ dans l'équation (11.44), ce qui impose d'avoir $g(k\ell) = K_0(k\ell)^{-5/3}$. On obtient alors de nouveau l'équation (11.41).

La condition $\ell \ggg \eta$ implique $\ell \ggg \nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}$ avec $\varepsilon = (v_\ell'^3/\ell)$. Il en résulte :

$$\left(\frac{v_\ell'\ell}{\nu}\right)^{3/4} = Re_\ell^{3/4} \ggg 1 \tag{11.45}$$

où Re_ℓ est le nombre de Reynolds qui correspond aux échelles de longueur et de taille des grands tourbillons. Celles-ci sont en général d'ailleurs notablement inférieures aux échelles de longueur et de taille globales de l'écoulement (par exemple, pour une turbulence induite par une grille). Il sera donc très difficile de vérifier la condition (11.45) en laboratoire.

Remarque En plus de ces deux lois, Kolmogorov a établi une relation générale exacte, fondée sur la conservation de l'énergie, valable en turbulence homogène et faisant intervenir un moment du troisième ordre de la composante $v_\parallel$ de la vitesse parallèle à l'écoulement moyen :

$$\langle (v_\parallel(\mathbf{r}+\delta\mathbf{x}) - v_\parallel(\mathbf{r}))^3 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon\,\delta x.$$

Cette équation est connue sous le nom de loi des quatre cinquièmes de Kolmogorov, et est valable pour des incréments δx petits devant la taille des plus grands tourbillons ; elle est en particulier utilisée pour déterminer le paramètre ε (celui-ci joue en effet un rôle clé, comme nous venons de le voir, dans tout le modèle de cascade de Kolmogorov).

11.3.4 Vérification expérimentale de la théorie de Kolmogorov

Vérification de la loi en $k^{-5/3}$

Elle peut être effectuée tout d'abord sur des écoulements naturels. Dans l'atmosphère, on atteint aisément un nombre de Reynolds $Re \approx 10^7$, avec $\ell = 100$ m, $v'_\ell = 1$ m/s, $\nu \approx 10^{-5}$ m^2/s. Des mesures effectuées sur des tours météorologiques, ou à partir d'une sonde traînée par un avion dans l'atmosphère, permettent de vérifier la dépendance en $k^{-5/3}$ de $E(k)$ sur près de trois ordres de grandeur de k (tourbillons de taille variant entre quelques centimètres et cent mètres) et de vérifier l'isotropie de la turbulence établie. La loi est également vérifiée sur des écoulements océaniques (chenaux parcourus par des marées), où les nombres de Reynolds globaux atteignent 3×10^8. Enfin, des expériences récentes dans la grande soufflerie de Modane ont permis de mettre en évidence, d'une manière très contrôlée, des lois de ce type sur une gamme importante de vecteurs d'onde (là encore, un peu moins de trois ordres de grandeur) (Fig. 11.4). On voit très nettement apparaître un effet de coupure aux vecteurs d'onde élevés, mais aussi pour les plus grands tourbillons à faible vecteur d'onde.

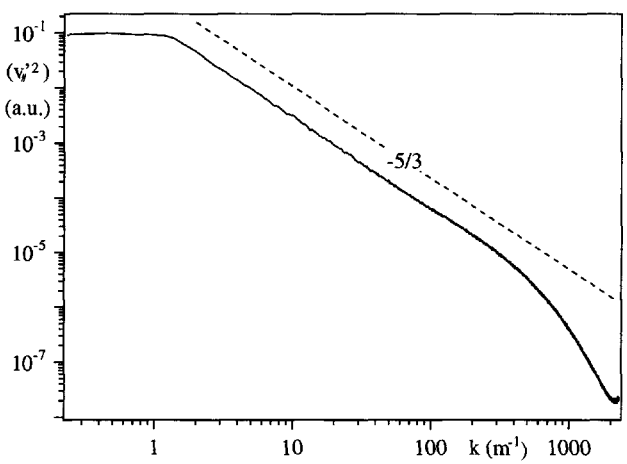


FIG. 11.4 – *Spectre spatial, en unités arbitraires, des fluctuations turbulentes de la composante longitudinale $v'_\parallel$ de vitesse, mesurées dans la soufflerie ONERA S1 de Modane-Avrieux en fonction du vecteur d'onde k. La droite pointillée correspond à une variation en $k^{-5/3}$. Paramètres expérimentaux : vitesse moyenne $\overline{v_\parallel} = 20,6$ $m.s^{-1}$, $\sqrt{\overline{v'^2_\parallel}} = 1,66$ $m.s^{-1}$, diamètre de la section expérimentale $D = 24$ m, longueur de Kolmogorov $\eta = 0,31$ mm ($k_\eta = 1/\eta = 3,2 \times 10^3$ m^{-1}). Le spectre a été calculé en fonction du vecteur d'onde k à partir des fluctuations temporelles de la vitesse en tenant compte des variations de la vitesse locale d'écoulement $\overline{v_\parallel} + v'_\parallel$. (document Y. Gagne et Y. Malécot).*

Vérification de la première loi de Kolmogorov

Elle peut être effectuée en laboratoire, à l'aide d'anémomètres à fil chaud qui donnent une mesure très localisée. Expérimentalement, on vérifie que, si $k\ell \gg 1$, le rapport $(E(k)/(\varepsilon^{1/4}\,\nu^{5/4}))$ est une fonction universelle de $k\eta$. En laboratoire, les mesures couvrent surtout le domaine dissipatif ; dans l'atmosphère, l'océan ou les grandes souffleries (Fig. 11.4), elles s'étendent au sous-domaine inertiel. ε peut être déterminée indirectement car elle est égale à l'énergie totale dissipée par les plus petits tourbillons (il est ainsi possible de montrer que, si $\eta \ll \ell$, $\varepsilon = 15\nu \int_0^\infty k^2 E_1(k)\,\mathrm{d}k$, où $E_1(k)$, déjà évoquée plus haut, est l'énergie associée à la composante de vitesse parallèle à l'écoulement). On vérifie que, pour des nombres de Reynolds et des méthodes de production de l'écoulement très diverses, les mesures suivent correctement une loi universelle pour $k\ell \gg 1$.

11.3.5 Intermittence de la turbulence et théorie de Kolmogorov modifiée (K61)

La théorie de Kolmogorov donne une bonne vision globale de la turbulence isotrope et reste une référence incontournable pour une première approche de la turbulence homogène. Cependant, les grands tourbillons ne sont jamais en équilibre statistique dans les expériences réelles. Comme ce sont eux qui déterminent l'amplitude des échanges d'énergie, cela implique qu'il y aura des variations temporelles de la valeur de ε : les mesures expérimentales montrent en effet des variations considérables de la dissipation d'énergie ε avec le temps et d'un point à un autre. Physiquement, ces fluctuations peuvent être reliées au défilement de structures turbulentes que l'on observe facilement à la surface d'une rivière. Les « bouffées » turbulentes sont étroitement reliées au concept d'*intermittence*. L'importance de ces fluctuations oblige à introduire de nouveaux termes dans l'expression des moments d'ordre supérieur de la vitesse où la théorie de Kolmogorov est en défaut ; ces termes ne font pas seulement intervenir la valeur moyenne, mais aussi des moments plus élevés de la distribution de ε. On suppose ainsi souvent que c'est la distribution de probabilité du logarithme de ε (et non pas celle de ε) qui est gaussienne : on a donc une très large gamme de valeurs possibles de ε avec des fluctuations très importantes.

11.4 Écoulements près d'une paroi solide

11.4.1 Introduction

Ce problème, d'une grande importance pratique, se rencontre dans de nombreux exemples d'écoulements en conduite et au voisinage d'obstacles. Il intervient, couplé au transfert de masse, dans les écoulements industriels

du génie chimique et, couplé aux transferts de chaleur, en thermique. En aérodynamique, il apparaît dans l'évaluation des pertes de charge et des forces de frottement associées aux écoulements turbulents.

Nous verrons en particulier comment un écoulement turbulent en conduite a un profil de vitesse logarithmique beaucoup plus aplati que le profil parabolique obtenu en écoulement laminaire. Dans le même temps, la variation linéaire des forces de frottement avec la vitesse devient, pour les écoulements turbulents, approximativement proportionnelle au carré de la vitesse. Enfin, tant qu'on n'atteint pas des distances à la paroi de l'ordre de grandeur de la taille transverse globale de l'écoulement (diamètre de la conduite ou épaisseur de la couche limite), la structure de l'écoulement et le profil de vitesse dépendent peu de cette géométrie globale : le profil de vitesse est en particulier presque le même pour un écoulement turbulent en conduite ou pour une couche limite turbulente.

Nous allons analyser tout d'abord les simplifications des équations de mouvement de la turbulence pour un écoulement de cisaillement unidimensionnel. Nous verrons qu'il existe une échelle naturelle de longueur qui caractérise, en régime turbulent, la région proche d'une paroi où les effets de viscosité sont dominants et les contraintes turbulentes faibles (en effet, à la paroi, la vitesse du fluide, ainsi que ses fluctuations, s'annulent).

Nous étudierons ensuite les écoulements dans une conduite et le long d'une plaque. Dans le premier cas, il existe une seconde échelle de longueur naturelle, qui est la taille transverse de la conduite ; de plus, au-delà d'une distance suffisante des extrémités, l'écoulement turbulent ne varie plus le long de la conduite. Nous verrons comment gérer ce problème à échelles multiples. Dans le second cas, il apparaît une couche limite turbulente marquant la frontière entre l'écoulement au voisinage de la paroi et l'écoulement extérieur : sa structure est différente de celle des couches limites laminaires que nous avons étudiées au chapitre 9. En particulier, la frontière de cette couche limite est fluctuante dans le temps, et son épaisseur varie le long de l'écoulement cependant que la turbulence convectée par l'écoulement n'est pas stationnaire.

Il sera utile de transposer à l'espace réel l'analyse faite dans celui des vecteurs d'onde pour la théorie de Kolmogorov. Les écoulements globaux d'un écoulement homogène correspondent à ceux définis à grande distance des parois ou en amont de l'écoulement. Il existe une sous-couche visqueuse très près des parois qui correspond aux tourbillons de taille inférieure à la longueur de Kolmogorov. Entre ces deux échelles, existe toute une gamme intermédiaire d'échelles de longueur de transfert de quantité de mouvement et d'énergie : souvent, la taille caractéristique des tourbillons les plus efficaces sera la distance à la paroi.

11.4.2 Écoulement turbulent stationnaire à une dimension parallèle à une paroi plane

Équations de mouvement

Considérons un écoulement turbulent parallèle à une direction Ox le long d'un plan $y = 0$; supposons de plus que l'écoulement est établi et que les propriétés statistiques des fluctuations turbulentes sont indépendantes de la distance le long de l'écoulement. La composante $\overline{v_y}$ de la vitesse moyenne est donc nulle ; la composante longitudinale $\overline{v_x}$ et les moments des composantes des fluctuations de vitesse (comme $\overline{v_y'^2}$ et $\overline{v_x' v_y'}$) sont seulement fonction de y. L'application des équations de Reynolds (Éqs. (11.12)) en régime stationnaire conduit alors à :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} - \overline{v_x' v_y'}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = 0 \tag{11.46a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v_y' v_y'}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = 0. \tag{11.46b}$$

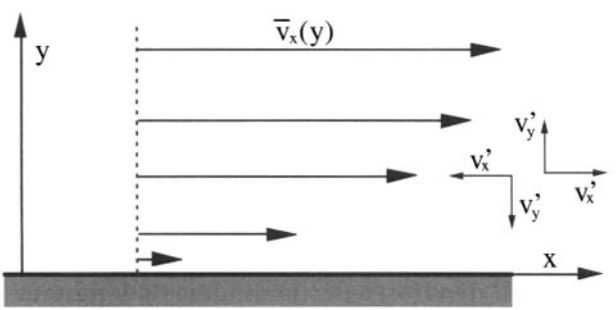


FIG. 11.5 – *Schéma d'un champ de vitesse turbulent pour un écoulement parallèle à une plaque plane.*

D'après l'équation (11.46b), on a $\overline{p} + \rho\,\overline{v'^2}_y = p_0$, où la pression p_0 à la paroi est fonction seulement de x (on rappelle que $\overline{v_y'^2}$, comme toutes les composantes de la vitesse et de ses fluctuations, s'annule sur la paroi). Comme $\overline{v_y'^2}$ est indépendant de x, on en déduit l'égalité des dérivées $\partial\overline{p}/\partial x = \partial\overline{p_0}/\partial x$. Ces gradients sont indépendants de x puisque les termes de l'équation (11.46a) ne dépendent que de y. En intégrant l'équation (11.46a) par rapport à y, on obtient :

$$\rho\nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} - \rho\,\overline{v_x' v_y'} = \tau_0 + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x}\, y. \tag{11.47}$$

Nous vérifions bien que que, lorsque les fluctuations turbulentes sont nulles (écoulements laminaires), on retrouve les équations de Navier–Stokes pour les écoulements parallèles. Sur la paroi ($y = 0$), l'équation (11.47) se réduit à $\rho\nu\,\partial\overline{v_x}/\partial y = \tau_0$: τ_0 est égale à la contrainte sur la paroi, puisque celle-ci se réduit à la contrainte visqueuse à cause de la condition de vitesse nulle. Posons $\tau_0 = \rho u^{*2}$. La vitesse u^*, que l'on appelle *vitesse de frottement*, représente une échelle de vitesse caractéristique des fluctuations turbulentes et est définie sans ambiguïté .

Cette analyse conduit à trois résultats principaux :

- Très près de la paroi, on a, comme conditions aux limites, $v'_x = v'_y = 0$; le transport de quantité de mouvement est alors uniquement assuré par diffusion visqueuse. La force par unité de surface de paroi est égale à la force visqueuse moyenne : $\rho\nu\,(\partial\overline{v_x}/\partial y)(0)$.

- La pression n'est pas constante sur une perpendiculaire à une paroi, contrairement au cas laminaire (mais le gradient de pression suivant l'écoulement est, lui, constant).

- Les flux de quantité de mouvement peuvent être beaucoup plus importants que dans un écoulement laminaire par suite des mouvements turbulents convectifs qui remplacent les flux diffusifs dominants dans le cas de la couche limite laminaire. Si les gradients de vitesse sont concentrés à la paroi, ils seront plus élevés près de celle-ci que pour un écoulement laminaire de même vitesse moyenne; le flux de quantité de mouvement $\rho\nu\,\partial\overline{v_x}/\partial y(0)$ et, par conséquent, la friction, sont donc plus importants que dans le cas laminaire. Plus loin de la paroi, le terme de convection $-\rho\,\overline{v'_x v'_y}$ prend le relais et assure le transport de quantité de mouvement avec une excellente efficacité.

Évaluation du profil de vitesse par le modèle de longueur de mélange

La structure du champ de vitesse aux distances intermédiaires entre la couche visqueuse proche de la paroi et la zone externe peut être obtenue simplement à partir de la notion de longueur de mélange (dans le cas où le nombre de Reynolds est assez élevé). Assez loin de la paroi, le transport de quantité de mouvement par viscosité est négligeable devant le transport convectif par les fluctuations turbulentes, et l'équation (11.47) devient :

$$\tau_{xy} = -\rho\,\overline{v'_x v'_y} = \tau_0 + \frac{\partial\overline{p}}{\partial x}\,y. \tag{11.48}$$

Si y est faible, le terme en $\partial\overline{p}/\partial x$ est négligeable, et on a : $\tau_0 = -\rho\,\overline{v'_x v'_y} = \rho\,u^{*2}$. La vitesse u^* est directement reliée à l'amplitude des fluctuations turbulentes, et on prendra : $\sqrt{\overline{v'^2_y}} \approx u^*$. En combinant ce résultat avec

les équations (11.19) et (11.20), on obtient :

$$\tau_{xy} = \rho \kappa u^* \ell \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} = \rho u^{*2}. \tag{11.49}$$

Pour un écoulement uniforme parallèle à une paroi plane, on fait l'hypothèse que la longueur de mélange ℓ est de l'ordre de la distance y à la paroi. Cela sous-entend que, dans la gamme d'échelles de longueur pour laquelle l'équation $\tau_0 = -\rho \overline{v'_x v'_y}$ est valable, la structure de l'écoulement et le transport de quantité de mouvement à une distance donnée de la paroi ne sont influencés ni par les tourbillons de taille de l'ordre de celle du canal, ni par la couche très proche de la paroi, où la viscosité domine. Dans ce cas, la distance y à la paroi représente la seule échelle de longueur significative. Cela signifie aussi que le transport de quantité de mouvement se fait sur une distance de l'ordre de la distance à la paroi. L'équation (11.49) donne alors :

$$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y} \tag{11.50}$$

soit :

$$\overline{v_x} = \frac{1}{\kappa} \ln y + cst. \tag{11.51}$$

Comme nous le verrons plus loin, ce résultat correspond bien à la réalité et reflète en fait des contraintes dimensionnelles associées au problème. Le problème ici est relativement simple car, à une distance donnée de la paroi, on doit seulement faire intervenir une longueur caractéristique y et une échelle de temps y/u^*. Un des problèmes essentiels des modèles de longueur de mélange est le fait qu'on est loin de pouvoir faire des hypothèses aussi simples pour tous les écoulements, surtout quand interviennent des échelles de longueur et de temps caractéristique multiples. Notons qu'une définition un peu plus générale due à Von Karman, pour des profils d'écoulement quelconques, détermine ℓ à partir de la courbure des profils de vitesse par $\ell = -k(\partial \overline{v_x}/\partial y)/(\partial^2 \overline{v_x}/\partial y^2)$.

11.4.3 Écoulement turbulent entre deux plaques parallèles

Équations de mouvement en coordonnées réduites

Ce cas introduit une nouvelle échelle de longueur caractéristique – la distance entre plaques – et une simplification due à la symétrie de l'écoulement. En effet, on aura $\partial \overline{v_x}/\partial y = 0$, dans le plan parallèle aux plaques et à mi-distance de celles-ci ($y = h$), par raison de symétrie, le flux convectif $\rho \overline{v'_x v'_y}$ dans la direction y doit être également nul. Pour $y = h$, l'équation (11.47) devient donc :

$$\tau_0 + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} h = 0. \tag{11.52}$$

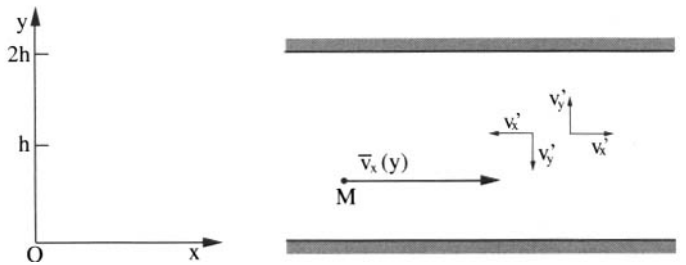


FIG. 11.6 – *Configuration d'écoulement turbulent entre deux plans parallèles, distants d'une longueur 2h.*

Définissons de nouveau une vitesse de frottement u^*, telle que $\tau_0 = \rho u^{*2}$. En divisant ses deux membres par ρ, et en utilisant la relation (11.52), l'équation (11.47) devient :

$$\nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} - \overline{v_x' v_y'} = u^{*2} \frac{h-y}{h} \cdot \tag{11.53}$$

Il existe donc deux échelles de longueur caractéristiques possibles : la taille globale h et la distance caractéristique ν/u^* à la paroi, qui représente l'*épaisseur de la sous-couche visqueuse*. C'est celle pour laquelle on a transition entre un transport convectif ($y \gg \nu/u^*$) et un transport diffusif visqueux de quantité de mouvement (distances $y \ll \nu/u^*$ pour lesquelles le terme $\overline{v_x' v_y'}$ est petit). Par intégration de l'équation (11.53), on obtient :

$$\frac{\overline{v_x}}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu} \cdot \tag{11.54}$$

L'échelle locale est donnée par ν/u^*, qui est la distance pour laquelle la vitesse $\overline{v_x}$ devient de l'ordre des fluctuations turbulentes mesurées par u^*. Alors, le terme $\overline{v_x' v_y'}$ devient de l'ordre de u^{*2}, et cesse d'être négligeable (on suppose que les fluctuations de vitesse représentent une fraction non négligeable de la vitesse globale). Pour étudier un tel problème, on introduit (suivant une approche proposée par Lumley) deux variables réduites différentes associées aux deux échelles caractéristiques h et ν/u^* :

$$Y = \frac{y}{h} \tag{11.55a}$$

et

$$y^+ = y \frac{u^*}{\nu} \tag{11.55b}$$

dont le rapport est donné par un nombre de Reynolds :

$$\frac{y^+}{Y} = \frac{u^* h}{\nu} = Re^* . \tag{11.55c}$$

On utilise l'une ou l'autre variable, suivant qu'on s'intéresse à la structure de l'écoulement au cœur de celui-ci, ou près des parois (dans la littérature, on trouve souvent également la notation η pour y/h ; nous utilisons ici Y pour éviter des confusions avec la viscosité dynamique ou encore la longueur de Kolmogorov). Près des parois, le profil de vitesse n'est pas sensible à la structure globale de l'écoulement, mais la viscosité peut jouer un rôle, et la variable y^+ est mieux adaptée ; loin des parois, en revanche, la viscosité n'intervient plus pour déterminer le profil de vitesse, et on utilise la variable Y. En écoulement laminaire, il n'y a pas lieu de faire la distinction entre les deux variables réduites, car la viscosité joue un rôle important dans tout l'écoulement. On obtient donc, à partir de l'équation (11.53), deux formes d'équations réduites. On utilise la première (avec la variable Y) assez loin de la paroi pour que le transport par viscosité soit négligeable (soit pour $y \gg \nu/u*$) :

$$Re^{*-1}\frac{\partial\left(\dfrac{\overline{v_x}}{u^*}\right)}{\partial Y} - \frac{\overline{v'_x\,v'_y}}{u^{*2}} = -Y + 1. \tag{11.56}$$

On utilise la seconde (avec la variable y^+) près des parois ($y \ll h$) :

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\overline{v_x}}{u^*}\right)}{\partial y^+} - \frac{\overline{v'_x\,v'_y}}{u^{*2}} = -y^+\,Re^{*-1} + 1. \tag{11.57}$$

On supposera par la suite que Re^* est très supérieur à l'unité, ce qui correspond à un régime d'écoulement turbulent bien développé : le terme $-y^+\,R^{*-1}$ de l'équation (11.57) est donc négligeable, pourvu qu'on ait $y \ll h$. Le terme $Re^{*-1}\partial(\overline{v_x}/u^*)/\partial Y$ de l'équation (11.56) l'est également tant qu'on est en dehors de la sous-couche visqueuse proche des parois où le transport de quantité de mouvement par viscosité est important (en effet, d'après l'équation (11.54), ce terme est de l'ordre de 1 dans celle-ci). Ces deux remarques déterminent la forme que prendront les équations de mouvement pour chacune des deux variables réduites dans la zone où chacune d'entre elles sera adaptée. Les équations (11.56) et (11.57) peuvent alors s'écrire :

$$-\frac{\overline{v'_x\,v'_y}}{u^{*2}} = -Y + 1 \tag{11.58}$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\overline{v_x}}{u^*}\right)}{\partial y^+} - \frac{\overline{v'_x\,v'_y}}{u^{*2}} = 1. \tag{11.59}$$

Lorsqu'on s'intéresse à l'écoulement près des parois, on utilise comme variable réduite pour la vitesse moyenne $\overline{v_x}/u^*$ (cette normalisation apparaissait déjà dans l'équation (11.54)). On prend par ailleurs le déficit de vitesse normalisée

$(\overline{v_x} - U_0)/u^*$ lorsqu'on s'intéresse au champ de vitesse au cœur de l'écoulement (la vitesse de référence naturelle à utiliser est alors la vitesse U_0 dans le plan de symétrie $y = h$). Par analogie avec la solution des équations de Navier-Stokes sans dimension, nous supposerons que les deux variables de vitesse réduite moyennées peuvent s'écrire en fonction de Y et y^+ sous la forme :

$$\overline{v_x(\eta^*)} - U_0 = u^* f_1(Y)$$

soit

$$\overline{v_x\left(\frac{y}{h}\right)} - U_0 = u^* f\left(\frac{y}{h}\right) \quad \left(y \gg \frac{\nu}{u^*},\ Re^* \gg 1\right). \tag{11.60}$$

De même, près de la paroi :

$$\overline{v_x(y^+)} = u^* f(y^+)$$

$$\text{soit} \quad \overline{v_x\left(\frac{u^* y}{\nu}\right)} = u^* f\left(\frac{u^* y}{\nu}\right) \qquad (y \ll h,\ Re^* \gg 1). \tag{11.61}$$

De plus, on a $f(0) = f_1(0) = 0$. Les deux fonctions f et f_1 sont en principe universelles, si on a laissé à l'écoulement turbulent suffisamment de temps pour se développer et perdre la « mémoire » de sa configuration initiale.

Sous-couche inertielle – loi de variation logarithmique de la vitesse

La sous-couche inertielle est le domaine éventuel de valeurs de y telles que les deux expressions (11.60) et (11.61) soient simultanément valables; cela impose la double inégalité :

$$\frac{\nu}{u^*} \ll y \ll h \qquad \text{donc nécessairement :} \qquad Re^* = \frac{u^* h}{\nu} \ggg 1. \tag{11.62}$$

Typiquement, un tel domaine avec $30\,\nu/u^* < y < 0,1\,h$ n'existe que si $Re^* > 10^3$. Dans cette zone, le transport de quantité de mouvement par convection joue un rôle essentiel. Les expressions (11.60) et (11.61) doivent, bien entendu, donner dans ce domaine la même valeur de la vitesse moyenne pour une valeur de y donnée. Dans la *méthode de raccordement asymptotique*, qui est très générale en mécanique des fluides et que nous utilisons ici implicitement, nous identifions les deux formes limites dans cette région intermédiaire

En dérivant les expressions (11.60) et (11.61) par rapport à y on doit obtenir la même fonction ; en multipliant le résultat par y, on obtient :

$$Y \frac{\partial f_1(Y)}{\partial Y} = y^+ \frac{\partial f(y^+)}{\partial y^+}\,. \tag{11.63}$$

Comme f et f_1 doivent être des fonctions universelles dépendant uniquement soit de Y, soit de y^+, modifiables indépendamment en faisant varier Re^*, les deux membres doivent être égaux à une même constante que nous noterons $1/\kappa$ d'où :

$$f_1(Y) = \frac{1}{\kappa} \ln Y + C$$

ou, en unités non réduites :

$$\overline{v_x}(y) - U_0 = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{h} + C \right) \tag{11.64a}$$

et :

$$f(y^+) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C'$$

ou, en unités non réduites :

$$\overline{v_x}(y) = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu^*}{\nu} + C' \right). \tag{11.64b}$$

Ces équations ne sont valables qu'assez près de la paroi ($y \ll h$), et les valeurs des constantes ne seront pas sensibles à la géométrie globale du tube. On trouve expérimentalement que $1/\kappa \approx 2,5$, qui représente presque une constante universelle (κ est appelée *constante de Karman*). Puisque les deux expressions (11.64a et b) doivent être identiques dans la zone intermédiaire, on a :

$$\frac{U_0}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln Re^* + C' - C. \tag{11.65}$$

Cela permet de déterminer la vitesse maximale une fois connus le gradient de pression et la largeur du canal. On a des lois du type (11.64) dans tous les écoulements turbulents, que ce soit entre deux plans parallèles, dans un tube circulaire, ou pour un écoulement de couche limite près d'une paroi. Cette universalité montre que, dans la sous-couche inertielle, ni la géométrie de l'écoulement, ni l'influence des parois n'interviennent.

Profils de vitesse d'écoulements turbulents établis

La figure 11.7 montre ainsi la variation de vitesse $\overline{V_x}/u^*$ en fonction de $\log(y^+)$ pour un écoulement développé à l'intérieur d'un tube circulaire et pour une couche limite turbulente créée par un écoulement uniforme près d'une paroi plane (ce cas sera discuté en détail à la section 11.4.5). On remarque que les deux profils sont presque identiques tant qu'on est suffisamment près de la paroi (en pratique, à des distances suffisamment faibles par rapport au diamètre du tube (0,1 D) ou à l'épaisseur de la couche limite). Dans ce domaine, on observe sur la figure une variation linéaire (c'est-à-dire logarithmique avec la variable y^+) dès lors que $y^+ \geq 25$; $\overline{v_x(y)}$ vérifie alors l'équation (11.64b) avec $C' \approx 5,0$ et $1/\kappa = 2,5$ (droite en pointillés).

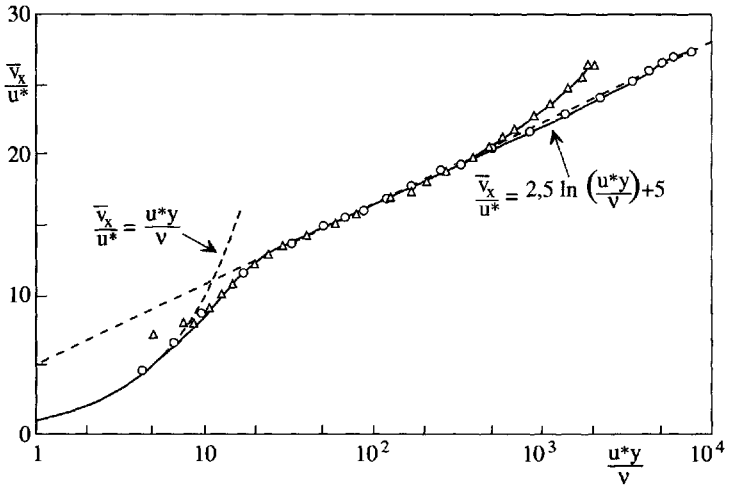


FIG. 11.7 – *Profil de variation de la vitesse réduite moyenne $\overline{v_x}/u^*$ en fonction de la variable de position réduite u^*y/ν pour des écoulements turbulents dans un tube circulaire de diamètre 200 mm (○) et dans une couche limite créée par un écoulement uniforme près d'une paroi plane (△) (d'après Patel, 1965).*

Remarque Au croisement des lois (11.54) et (11.64b) ($y^+ = u^*y/\nu = 11$), on doit avoir :

$$\frac{\overline{v_x}}{u^*} = 11 = 2,5 \ln 11 + C'. \tag{11.66}$$

On retrouve bien : $C' = 11 - 2,5 \ln 11 \approx 5$.

Très près de la paroi, on trouve la « sous-couche visqueuse » dans laquelle on a $\overline{v_x}/u^* = y/\nu$, (Éq. (11.54)) et qui s'étend à peu près jusqu'à $y^+ = yu^*/\nu = 5$ avec, au-delà, une zone de transition vers la loi logarithmique (il faut noter que cette loi linéaire apparaît avec une courbure dans la figure 11.7 en raison de l'utilisation d'une coordonnée horizontale logarithmique). Pour $y^+ = 5$, la valeur relative des deux termes de transport de quantité de mouvement est telle que :

$$-\frac{\overline{v'_x\, v'_y}}{u^{*2}} \approx 0,1 \frac{\partial \frac{\overline{v_x}}{u^*}}{\partial y^+}. \tag{11.67}$$

Ainsi, dans la sous-couche visqueuse, les fluctuations de vitesse ne sont pas nécessairement négligeables, mais le transport de quantité de mouvement par viscosité est dominant par rapport au transport convectif. Pour $y^+ = 11$, correspondant à l'intersection des deux courbes représentant les lois (11.54) et (11.64b), les deux termes deviennent équivalents. Bien entendu, plus

Re^* est grand, plus la sous-couche inertielle, où la loi logarithmique est appliquable, couvre une large gamme de distances à la paroi.

Il existe une certaine correspondance entre l'évolution du transport de quantité de mouvement dans l'espace réel près d'une paroi et celle du transport d'énergie dans l'espace des vecteurs d'onde pour un écoulement homogène. La dissipation visqueuse domine très près de la paroi dans un cas et pour les plus petits tourbillons (vecteurs d'onde élevés) dans l'autre. Aux grandes distances, et pour les faibles vecteurs d'onde, la géométrie globale de l'écoulement joue un rôle dominant. Enfin, il existe un domaine intermédiaire entre ces deux cas, où le profil de vitesse $\overline{v_x(y)}$ près d'une paroi et la distribution $E(\mathbf{k})$ pour l'écoulement homogène suivent des lois universelles (respectivement logarithmique et en $k^{-5/3}$).

Relation vitesse moyenne–vitesse maximale pour des écoulements turbulents

Nous avons vu plus haut que, dans le cas de la figure 11.7, l'équation (11.64b) devient :

$$\frac{\overline{v_x}}{u^*} = 2,5 \ln \frac{yu^*}{\nu} + 5. \tag{11.68}$$

Des valeurs du même ordre seront obtenues indépendamment de la géométrie de l'écoulement. En ce qui concerne la partie centrale de l'écoulement, il sera nécessaire d'utiliser un terme de correction. Pour un écoulement entre plans parallèles, on peut ajouter un terme correctif sinusoïdal proportionnel à $\sin \alpha Y$. Dès que $Y < 0,1$, la loi logarithmique redevient cependant valable, et on peut utiliser la formule (11.64a) qui donne des résultats satisfaisants en première approximation avec $C = 0$. En combinant les équations (11.65) et (11.66) (et en négligeant le terme correctif dans la région centrale), on obtient la relation approximative :

$$\frac{U_0}{u^*} = 11 + 2,5 \ln \frac{Re^*}{11} = 2,5 \ln Re^* + 5. \tag{11.69}$$

Pour un écoulement entre plaques, on peut alors calculer, en combinant ce résultat avec l'équation (11.68), un ordre de grandeur de la valeur moyenne U_m de la vitesse entre plaques, avec :

$$\frac{U_m}{u^*} = \frac{1}{h} \int_0^h \overline{v_x} \, \mathrm{d}y = 2,5 \ln Re^* + 2,5. \tag{11.70a}$$

Pour un tube circulaire de diamètre D, on obtient une expression très voisine en prenant $Re^* = u^* D/\nu$:

$$\frac{U_m}{u^*} = 2,5 \ln Re^* - 0,5. \tag{11.70b}$$

En prenant $Re^* = 10^3$ dans les relations (11.69) et (11.70a), on trouve pour l'écoulement entre plaques $U_m/U_0 = 0,88$. Cette valeur est nettement

supérieure au rapport 0,66 obtenu pour un écoulement laminaire entre deux plans. Cette différence très significative reflète le fait que le profil turbulent est beaucoup plus aplati que le profil parabolique laminaire : cela sera également le cas pour les couches limites turbulentes, comme le montre plus loin la figure 11.11.

11.4.4 Perte de charge pour des écoulements entre plans parallèles et dans des tubes

Écoulements entre plans ou dans des tubes à parois lisses

L'équation (11.70a) permet de déterminer la relation entre la vitesse moyenne et le gradient de pression $\Delta p/L$ parallèlement à l'écoulement entre deux plaques. La force $(2\,\Delta p\,h/L)$ sur un élément de fluide de longueur unité suivant x et z et occupant l'intervalle $2h$ entre les plaques, doit en effet équilibrer la contrainte de paroi $\tau_0 = 2\rho u^{*2}$ sur l'ensemble des deux plaques.

D'où :

$$u* = \sqrt{\frac{\Delta p\,h}{\rho\,L}} \tag{11.71a}$$

et

$$Re^* = \sqrt{\frac{\Delta p\,h^3}{\rho\,\nu^2\,L}}\,. \tag{11.71b}$$

Le débit Q entre plaques par unité de profondeur suivant Oz vaut $Q = 2U_m\,h$. L'équation (11.70a) peut donc se transformer en la relation débit–gradient de pression :

$$Q = 2U_m\,h = 2\sqrt{\frac{\Delta p\,h^3}{\rho\,L}}\left(2,5\,\ln\sqrt{\frac{\Delta p\,h^3}{\rho\,\nu^2\,L}} + 2,5\right). \tag{11.72}$$

Cette relation montre que le débit Q entre les plaques est approximativement proportionnel à la racine carrée du gradient de pression $\Delta p/L$, en raison de la lente variation du terme logarithmique $\left(Q \propto \sqrt{\Delta p/L}\right)$. La vitesse d'écoulement augmente donc beaucoup plus lentement que pour un écoulement laminaire pour lequel $Q \propto \Delta p/L$). Dans le cas d'un tube de diamètre D à parois lisses, on obtiendrait de même : $\tau_0 = (D/4)(\Delta p/L) = \rho u^{*2}$.

D'où :

$$u* = \sqrt{\frac{\Delta p\,D}{4\,\rho\,L}} \tag{11.73a}$$

et :

$$Re^* = \sqrt{\frac{\Delta p\, D^3}{4\,\rho\,\nu^2\,L}} \tag{11.73b}$$

d'où :

$$Q = \frac{\pi\, D^2}{4}\sqrt{\frac{\Delta p\, D}{4\,\rho\, L}}\left(2,5\,\ln\sqrt{\frac{\Delta p\, D^3}{4\rho\,\nu^2\,L}} - 0,5\right). \tag{11.74}$$

Introduisons maintenant, toujours dans le cas d'un tube, un coefficient de frottement C_d (souvent appelé également f dans la littérature), avec :

$$C_d = \frac{\Delta p}{\dfrac{L}{D}\dfrac{\rho U_m^2}{2}} = \frac{8u^{*2}}{U_m^2}\cdot \tag{11.75}$$

Avec une telle définition, C_d est, en écoulement laminaire, proportionnel à l'inverse du nombre de Reynolds $Re_D = U_m D/\nu$ avec :

$$C_d = \frac{64}{Re_D}\cdot \tag{11.76}$$

Nous avions déjà noté ce type de comportement, aussi bien pour les écoulements parallèles ou quasi parallèles laminaires, que pour les écoulements à bas nombre de Reynolds. L'expression (11.70b) peut alors être réécrite

$$\sqrt{\frac{8}{C_d}} = 2,5\,\ln\left(\frac{u^* D}{\nu}\right) - 0,5 = 2,5\,\ln\left(\sqrt{C_d}Re_D\right) - 1,5. \tag{11.77}$$

On en tire l'expression de C_d en remplaçant, comme c'est le cas pour les applications pratiques, le logarithme népérien par un décimal :

$$C_d = \frac{1}{\left(2,03\log\left(\sqrt{C_d}Re_D\right) - 0,53\right)^2}\cdot \tag{11.78}$$

De fait, on trouve expérimentalement une relation très voisine sur des tubes commerciaux à section circulaire et à paroi lisse, avec (en utilisant encore cette fois des logarithmes décimaux) :

$$C_d = \frac{1}{\left(2\log\left(\sqrt{C_d}Re_D\right) - 1,1\right)^2}\cdot \tag{11.79}$$

Cette variation correspond à la plus basse des courbes de la figure 11.8 où on remarque la variation très lente de C_d avec le nombre de Reynolds $Re_D = U_m D/\nu$ (variation d'un facteur 3 ou 4 pour une variation de Re_D d'un facteur 100). Cette variation logarithmique de C_d avec Re est souvent reproduite approximativement par des lois empiriques du type $C_d = Re^\alpha$, où α

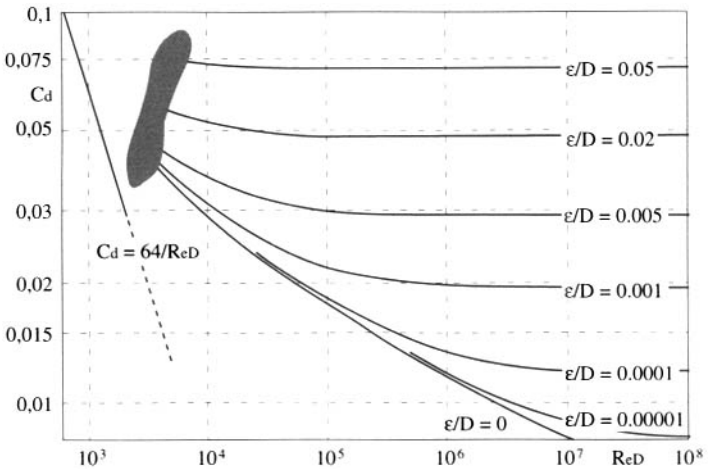


FIG. 11.8 – *Variation du coefficient de frottement C_d en fonction du nombre de Reynolds $Re_D = U_m D/\nu$ pour différents tubes de sections circulaires à parois lisses et à parois rugueuses. La rugosité est caractérisée sur chaque courbe par le rapport entre la hauteur caractéristique ε des accidents de surface et le diamètre D du tube. La variation linéaire à gauche correspond à un écoulement laminaire. La courbe la plus basse du groupe de droite correspond à un tube à parois lisses. La zone grisée correspond à la zone de transition laminaire-turbulent (d'après L. F. Moody, 1944).*

est pris de valeur faible (1/4 par exemple). Cela se rapproche de l'utilisation de profils de vitesse en $r^{1/7}$ en lieu des profils logarithmiques discutés plus haut. Cette variation lente de C_d avec le nombre de Reynolds contraste avec les lois en $1/Re$ (Éq. (11.76)) obtenues pour les écoulements laminaires développés (Poiseuille et Couette) et les lois en $1/Re^{1/2}$ obtenues pour les écoulements de couches limites laminaires. C'est cette variation lente qui justifie l'utilisation pratique de cette définition du coefficient de frottement, bien adaptée aux écoulements industriels de fluides peu visqueux qui sont généralement turbulents.

Écoulements dans des conduits à parois rugueuses

La hauteur moyenne ε des aspérités (Fig. 11.9) introduit un nouveau paramètre dans le problème. Si on a $\varepsilon \ll \nu/u^*$, la présence des aspérités ne modifie pas la structure de la sous-couche visqueuse, et les résultats précédents restent valables.

Si $\varepsilon \gg \nu/u^*$, c'est l'échelle de longueur ε et non plus l'épaisseur ν/u^* de la sous-couche visqueuse qui détermine la structure du champ de vitesse près de la paroi. On doit donc remplacer la variable réduite y^+ par la

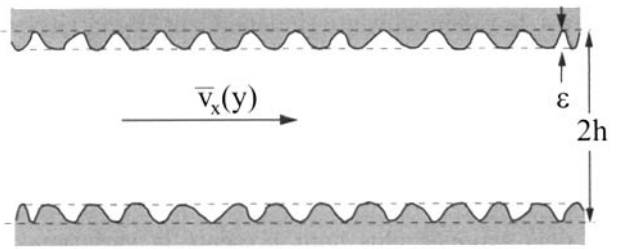


FIG. 11.9 – *Schéma d'un écoulement entre deux plans à surface rugueuse séparés d'une distance $2h$ avec une épaisseur ε des aspérités sur les parois.*

variable $y_\varepsilon = y/\varepsilon$ (cependant, on ne peut espérer de prédictions simples que pour des distances $y \gg \varepsilon$, telles que la géométrie détaillée locale des aspérités n'intervienne plus). En utilisant la variable réduite y/ε, l'équation de mouvement (11.57) devient :

$$\frac{\nu}{u^*\varepsilon}\frac{\partial\dfrac{\overline{v_x}}{u^*}}{\partial y_\varepsilon} - \frac{\overline{v'_x\,v'_y}}{u^{*2}} = 1 - \frac{y}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{h} \tag{11.80}$$

d'où :

$$-\frac{\overline{v'_x\,v'_y}}{u^{*2}} = 1 \tag{11.81}$$

dans la limite où $\dfrac{\nu}{u^*} \ll \varepsilon \ll y \ll h$ (cas dit « de parois rugueuses », c'est-à-dire telles que les aspérités soient de hauteur supérieure à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse). En reprenant les développements précédents, et en admettant, pour simplifier, que $\overline{v_x} = 0$ pour $y = \varepsilon$, on trouve :

$$\overline{v_x} = \frac{u^*}{\kappa}\ln\frac{y}{\varepsilon} \tag{11.82}$$

d'où :

$$U_m \approx \frac{u^*}{\kappa}\left(\ln\frac{h}{\varepsilon} - 1\right) \tag{11.83}$$

en effectuant comme précédemment le calcul de la relation entre la vitesse moyenne d'écoulement, et en intégrant entre ε et h.

En procédant comme pour les équations (11.74) à (11.79), on trouve que le débit entre les plaques est alors exactement proportionnel à $\sqrt{\Delta p/L}$, et que le coefficient de frottement C_d est constant (sans terme de variation lente logarithmique). Effectivement, on trouve expérimentalement, pour des tubes

à parois rugueuses, la valeur suivante (indépendante de la vitesse) de la limite de C_d aux nombres de Reynolds élevés :

$$C_d = \frac{1}{\left(2 \log \frac{D}{2\varepsilon} + 1,74\right)^2} \cdot \tag{11.84}$$

La figure 11.8 déjà évoquée plus haut présente la variation de C_d avec le nombre de Reynolds Re_D pour différentes valeurs du rapport ε/D. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, on a, sur chaque courbe, transition entre le régime où l'épaisseur ν/u^* de la sous-couche visqueuse est grande par rapport à ε et le régime où $\nu/u* \ll \varepsilon$. Dans la première partie (nombres de Reynolds plus faibles), on suit la loi universelle obtenue pour des tubes lisses ; dans la seconde, C_d prend une valeur constante dominée par la rugosité.

11.4.5 Couches limites turbulentes

Profil de vitesse à l'intérieur d'une couche limite turbulente

Dans la section 11.4.3, nous avons présenté des écoulements entre deux plans et dans un tube, et nous avons supposé qu'ils avaient atteint un profil de vitesse stationnaire établi sur toute la section de l'écoulement et invariant le long de celui-ci. Nous allons maintenant analyser le développement d'une couche limite turbulente le long d'un plan lisse semi-infini placé dans un écoulement uniforme **U** parallèle à l'axe Ox (Fig. 11.10) ; on supposera que les distances caractéristiques d'évolution suivant Ox de la vitesse de l'écoulement sont grandes devant celles suivant Oy. Comme pour la couche laminaire étudiée au chapitre 9, on suppose l'écoulement potentiel de vitesse uniforme **U** en dehors de la couche limite. Dans le cas turbulent, la valeur de l'épaisseur $\delta(x)$ de la couche limite fluctue, bien que la limite entre l'écoulement potentiel et la zone turbulente soit à chaque instant très nette dans les visualisations expérimentales.

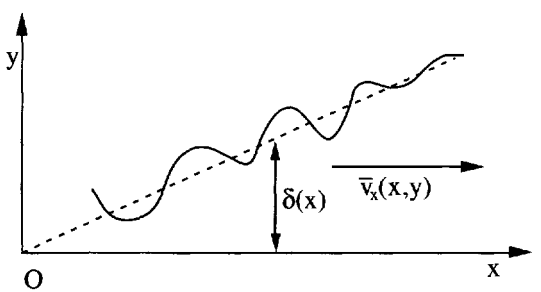


FIG. 11.10 – *Vue schématique de l'écoulement dans une couche limite turbulente.*

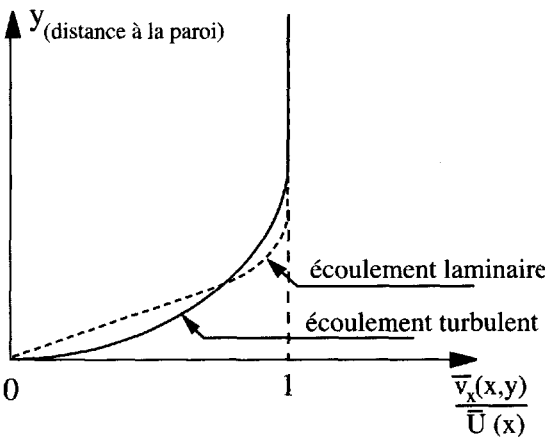


FIG. 11.11 – *Comparaison entre le profil de vitesse de la couche limite laminaire (tirets) et turbulente (traits pleins).*

Très près de la paroi, comme pour l'écoulement entre plans parallèles, la viscosité domine et on a :

$$\overline{v_x(y)} \approx \frac{u^{*2}(x)\, y}{\nu} \tag{11.85a}$$

$$\tau(x) = \rho\, u^{*2}(x). \tag{11.85b}$$

Il existe, comme pour deux plans, une sous-couche inertielle, $\nu/u* \ll y \ll \delta$, à l'intérieur de laquelle l'écoulement ne ressent ni l'influence de la viscosité à la paroi, ni celle des conditions aux limites à la surface de la couche ; le profil de vitesse y vérifie également l'équation (11.64b). Plus généralement, tant que $y \ll \delta$, et comme nous l'avons vu à la figure 11.7, on a, dans les sous-couches inertielle et visqueuse, le même profil de variation de vitesse avec la distance à la paroi qu'entre deux plans ou dans un tube.

Profil de vitesse près du bord d'une couche limite turbulente

Aux nombres de Reynolds élevés, on s'écarte de la loi de profil logarithmique dès que $y > 0,15\,\delta$ environ. En effet, aux points correspondants, l'écoulement est alternativement potentiel et turbulent en raison de la très grande amplitude des mouvements du contour de la couche limite : il faut donc pondérer la valeur de la vitesse donnée par l'équation (11.64b) par le temps relatif pendant lequel l'écoulement est turbulent. On peut simplement prédire que :

$$\frac{U - \overline{v_x(y,x)}}{u^*(x)} = f_1\left(\frac{y}{\delta(x)}\right). \tag{11.86}$$

La démonstration est analogue à celle que nous avons utilisé plus haut (section 11.4.3), à condition de remplacer h par $\delta(x)$). Comme à la section 11.4.3, on trouve que la variation de $\overline{v_x(y)}$ doit être de la forme :

$$\frac{\overline{v_x(y)}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u^* y}{\nu} + C + W\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{11.87}$$

où la fonction $W(y/\delta)$ s'annule dans la couche inertielle et a, comme dans l'écoulement entre plaques, une variation presque sinusoïdale près de la limite de la couche.

Par ailleurs, comme pour l'écoulement entre deux plaques lisses, le coefficient de frottement C_d (pris égal à u^{*2}/v^2) varie avec le nombre de Reynolds $Re_\delta^* = u^*\delta/\nu$ comme :

$$\frac{1}{\sqrt{C_d}} = \frac{1}{\kappa} \ln Re_\delta^* + C'' \tag{11.88}$$

C_d diminue donc très lentement avec Re_δ^* pour une surface plane lisse. Pour une surface rugueuse, C_d prend une valeur déterminée par l'épaisseur des rugosités. Comme pour l'écoulement dans une conduite (Éq. (11.84)), $\ln Re_\delta^*$ est remplacé par $\ln(\delta/\varepsilon)$.

Variation de l'épaisseur avec la distance le long de la plaque

Les éléments de fluide sont entraînés parallèlement à la paroi à une vitesse de l'ordre de U, tandis que les fluctuations de vitesse mesurées par la vitesse de frottement à la paroi u^* tendent à éloigner de la plaque la limite de la turbulence (la croissance transverse est ainsi convective et non diffusive, comme c'était le cas pour la couche limite laminaire). On aura donc, en suivant la même raisonnement qualitatif qu'au chapitre 9 :

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \approx \frac{u^*}{U} \tag{11.89a}$$

soit

$$\delta \approx \frac{u^* x}{U} \tag{11.89b}$$

si on prend l'origine $x = 0$ sur l'arête de la plaque. En prenant $y = \delta$ dans la relation (11.87) et en posant $C''' = C + W(1)$, on trouve

$$\delta(x) \approx \frac{x}{\dfrac{1}{\kappa} \ln Re_\delta^* + C'''} \tag{11.90}$$

ce qui correspond à une variation approximativement linéaire avec x (en fait plutôt en $\delta \propto x^{0,9}$ puisque $\ln Re_\delta^*$ augmente comme $\ln x$). De plus, le rapport δ/x ne dépend que très peu de la vitesse extérieure U. Rappelons qu'il ne s'agit que d'une épaisseur moyenne, et que le contour de la couche limite est extrêmement fluctuant et géométriquement très tortueux.

Comparaison des couches limites laminaires et turbulentes

Pour conclure cette courte présentation des caractéristiques des couches limites turbulentes, résumons leurs principales différences avec les couches limites laminaires :

- Dans une couche laminaire, la vitesse varie linéairement avec la distance à la paroi près de celle-ci, puis rejoint exponentiellement sa valeur asymptotique. Pour la couche turbulente, le profil de vitesse moyenné dans le temps varie en $\log(y)$ sauf très près de la paroi. La pente $(\partial u/\partial y)$ près de la paroi est plus importante que pour un écoulement laminaire; les contraintes à la paroi sont donc plus élevées, mais la vitesse atteint plus lentement la valeur limite de l'écoulement extérieur.

- En écoulement turbulent, le transport de quantité de mouvement transverse à la paroi se fait par convection et résulte des fluctuations turbulentes de la vitesse dans la majeure partie de l'épaisseur de la couche limite (sauf très près de la paroi). Ce mode de transport est plus efficace que la diffusion visqueuse en écoulement laminaire, d'où un coefficient de frottement plus élevé.

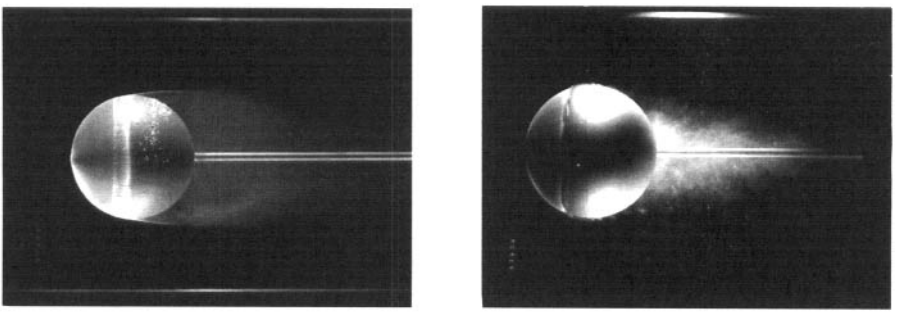
- L'épaisseur de la couche limite augmente proportionnellement à la distance x à l'arête dans la couche turbulente (en x au lieu de $\sqrt{x}$ pour la couche laminaire).

- Le coefficient de frottement C_d sur une paroi plane varie plus lentement avec le nombre de Reynolds pour la couche turbulente (en $\log(1/Re)$) que pour la couche laminaire (en $1/\sqrt{Re}$). C_d sera donc le plus souvent plus élevé dans le cas turbulent (C_d augmente de plus avec la rugosité de la paroi aux nombres de Reynolds élevés).

- le gradient $\partial U/\partial x < 0$ nécessaire pour produire le décollement (chapitre 9, section 9.5.4) est beaucoup plus important pour une couche turbulente que pour une couche laminaire : cela est dû au fait que le transfert convectif de quantité de mouvement par les tourbillons dans la couche turbulente est beaucoup plus efficace que le transfert purement diffusif dans la couche laminaire. L'apport de quantité de mouvement vers les zones de faible vitesse près de la paroi est ainsi plus important et retarde l'inversion du sens de l'écoulement.

On peut ainsi stabiliser les couches limites en provoquant leur transition vers la turbulence en amont du point normal de décollement (par exemple en mettant un fil sur la surface du corps). Le décollement de la couche limite se produit alors beaucoup plus loin que si elle était restée laminaire. La largeur du sillage turbulent arrière est considérablement réduite (Fig. 11.12b) par rapport à une couche limite laminaire (Fig. 11.12a).

Cette réduction de taille du sillage réduit considérablement la dissipation d'énergie dans celui-ci. Cet effet peut être très supérieur à l'augmentation du



(a) (b)

FIG. 11.12 – *Différence entre la position du point de décollement d'une couche limite laminaire (a) et turbulente (b). Dans ce dernier cas, une aspérité placée en amont du point de décollement permet d'induire la transition vers une couche limite turbulente, et donc d'en retarder le décollement (clichés H. Werlé,* ONERA*).*

frottement sur la partie non décollée de la couche limite évoquée plus haut. La traînée globale peut donc nettement diminuer, ce qui est utile dans certaines applications pratiques. Les ailes de certains avions de transport anciens portaient un grand nombre de petites lamelles perpendiculaires à la paroi. Celles-ci génèrent des petits tourbillons longitudinaux qui mélangent le fluide lent proche de la paroi avec le fluide extérieur en mouvement. La vitesse de l'écoulement à proximité immédiate de la paroi est donc augmentée ce qui tend à empêcher le décollement de la couche limite ; le « décrochement » de l'aile lorsqu'on augmente l'incidence est ainsi retardé et la portance est plus grande. De telles approches sont cependant abandonnées car elles provoquent une augmentation de la friction sur la paroi : un meilleur dessin des profils d'aile – souvent joint à l'utilisation de volets – permet d'obtenir les caractéristiques recherchées que nous avons décrites au chapitre 9 (section 9.6.1).

Une des manifestations les plus spectaculaires de tels effets est le phénomène de *crise de traînée* : il est observé, vers un nombre de Reynolds de quelques centaines de milliers, sur les sphères et les cylindres circulaires. Il résulte d'une transition spontanée (et non plus induite par une aspérité) de la couche limite vers la turbulence : ce phénomène s'accompagne d'une réduction brusque de la traînée (Fig. 11.13) liée à celle de la taille du sillage.

Un effet relié au précédent est le *réattachement des couches limites* qui se produit parfois lorsqu'une couche limite devient turbulente juste après son décollement : le fluide proche de la paroi est alors suffisamment accéléré pour qu'on puisse avoir réattachement de la couche limite sur la paroi (Fig. 11.14).

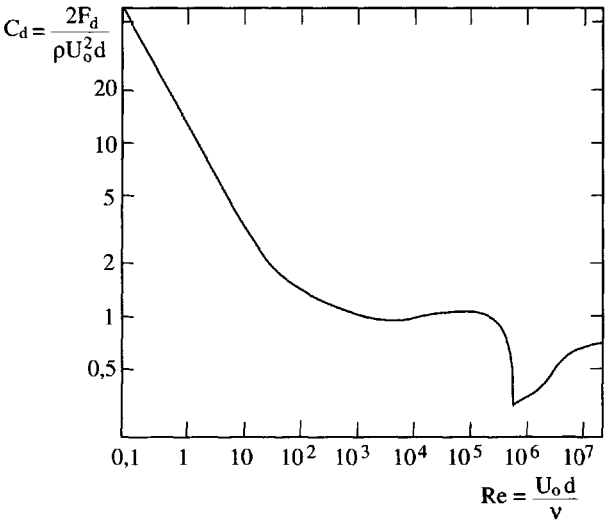


FIG. 11.13 – *Crise de traînée sur un cylindre circulaire : à un nombre de Reynolds de l'ordre de* 10^5, *la traînée, qui s'exerce sur un cylindre circulaire, chute brutalement d'un facteur de l'ordre de 2. Cela est dû à la transition de la couche limite d'un état laminaire vers un état turbulent.*

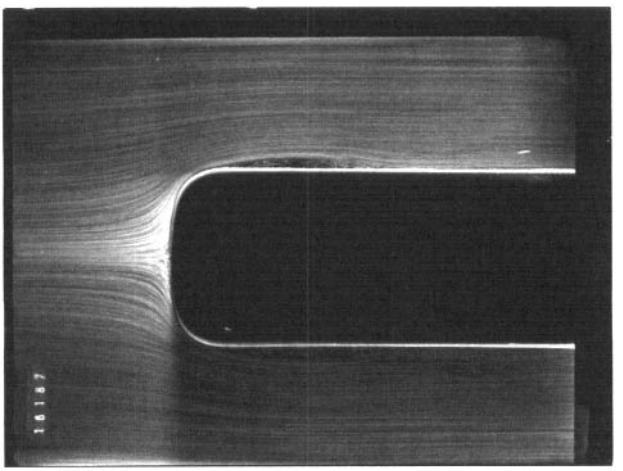


FIG. 11.14 – *Bulbe de recollement de couche limite turbulente autour d'un profil à nez presque plat. Juste en aval du point de décollement, la couche limite devient turbulente. Le fluide voisin de la paroi est alors suffisamment réaccéléré pour que se produise le réattachement de la couche limite sur la paroi. On peut observer ce phénomène en regardant la déformation d'une bâche de camion sur ses bords latéraux avants.*

11.5 Quelques autres aspects de la turbulence

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités à caractériser la turbulence par l'existence d'écoulements imprévisibles, avec de fortes non-linéarités et un transport convectif important (celui-ci est à l'origine de la grande efficacité du mélange turbulent). Nous sommes cependant loin d'avoir exploré toutes les phénomènes possibles de turbulence – qui sortent souvent du cadre de cette description. Nous présentons brièvement ici quelques unes de ces situations, en utilisant ce que nous avons pu apprendre au long de cet ouvrage et en renvoyant le lecteur à des ouvrages plus spécialisés pour une analyse détaillée.

11.5.1 Structures cohérentes et écoulements bidimensionnels turbulents

Structures bidimensionnelles de tourbillons

Nous avons vu à plusieurs occasions que la turbulence n'était pas incompatible avec l'existence de grandes structures remarquablement stables – les *structures cohérentes*. La tache rouge dans l'atmosphère de Jupiter en est un remarquable exemple à un nombre de Reynolds très élevé. Au chapitre 2, nous avons rencontré le phénomène de Bénard–Von Karman (Fig. 2.8), qui correspond à l'apparition d'une allée de tourbillons de sens de circulation alternés derrière un obstacle cylindrique placé dans un écoulement. Il est aussi observé pour des écoulements naturels à très grands nombres de Reynolds, comme par exemple dans l'exemple de l'écoulement atmosphérique derrière l'île de Guadalupe en Basse–Californie (Fig. 2.13).

On rencontre des structures similaires à la frontière entre deux écoulements plans parallèles de vitesses différentes. Nous avons étudié, au chapitre 10, (section 10.4.1), l'instabilité de Kelvin–Helmholtz pour des écoulements confinés entre deux plaques parallèles. Cette instabilité fait apparaître une rangée périodique de tourbillons d'axes perpendiculaires à l'écoulement et qui ont tous le même sens de circulation contrairement à l'allée de tourbillons de Von Karman (Figs. 10.10a et b). Si, au lieu d'avoir un écoulement entre parois, les écoulements parallèles sont non confinés, la taille des tourbillons augmente à peu près linéairement avec la distance au point de rencontre des jets. On parle également d'instabilités de *couche de mélange*, puisque de telles structures assurent un brassage entre les deux fluides.

Le physicien américain A. Roskho montra expérimentalement, en 1960, que ces grandes structures tourbillonnaires à deux dimensions subsistaient presque à l'identique à tous les nombres de Reynolds – aussi élevés soient-ils. Ces résultats surprirent les spécialistes de la turbulence axés sur des approches purement statistiques, qui considéraient que la turbulence devait être complètement désordonnée à grand nombre de Reynolds. Si elle laisse les grandes structures cohérentes inchangées, l'augmentation du nombre de Reynolds provoque par contre un enrichissement en petites structures tridimensionnelles à l'intérieur des grandes. Ce dernier résultat est bien, lui,

conforme à la théorie de Kolmogorov qui prédit la décroissance de l'échelle des structures dissipatives avec l'augmentation du nombre de Reynolds. On peut donc observer un régime intermédiaire inertiel, à des échelles de taille inférieures à celles des grandes structures. Cependant, ces dernières contrôlent par exemple le mélange entre les écoulements : celui-ci a des caractéristiques très différentes dans les zones d'enroulement des structures (ressemblant à un gâteau roulé), et dans celles d'étirement qui sont présentes de façon concomitante. Cela est particulièrement important si on s'intéresse à deux fluides réagissant entre eux comme, par exemple, dans un brûleur à gaz.

Une caractéristique spectaculaire des couches de mélange non confinées est l'évolution des tourbillons au cours de leur déplacement. Leur vitesse est intermédiaire entre celles des deux jets, soit $1/2(U_1 + U_2)$, comme nous l'avons vu aux chapitres 7 (section 7.4.2) et 10 (section 10.4.1). Comme les tourbillons grandissent en s'éloignant de leur point de création, ils finissent par se bousculer, de telle façon que deux tourbillons de même sens de circulation en contact fusionnent pour donner naissance à un troisième, plus gros que les deux premiers.

Dynamique des tourbillons en turbulence bidimensionnelle

Tant qu'on ne s'intéresse qu'aux grandes structures, le problème précédent peut être considéré comme un exemple de turbulence bidimensionnelle. On retrouve d'ailleurs le processus d'accrétion de tourbillons que nous venons juste de décrire dans des simulations numériques ou des écoulements bidimensionnels modèles – ceux des films de savon. En effet, on peut créer des structures de type allée de Karman en déplaçant un obstacle cylindrique à travers un tel film – c'est cette fois-ci l'obstacle qui se déplace par rapport au fluide contenu dans la faible épaisseur du film et non l'inverse comme précédemment (Fig. 11.15). Les variations d'épaisseur induites par les écoulements sont visualisées par observation de franges d'interférence sous un éclairage monochromatique. Si on déplace un peigne de cylindres au lieu d'un obstacle unique, on crée l'équivalent à deux dimensions d'une turbulence de grille. Dans ces deux cas, les structures observées grossissent par coalescence de tourbillons de même sens de circulation, comme dans le cas de la couche de mélange que nous venons d'évoquer. Dans le même temps, ces structures s'atténuent par viscosité, puisqu'on n'a pas de nouvel apport d'énergie après le passage de l'obstacle.

Ces écoulements diffèrent fortement de ceux à trois dimensions. Pour ceux-ci, le mécanisme essentiel d'évolution de la turbulence est l'étirement de la vorticité par les gradients de vitesse parallèles à son axe (nous avons discuté ces effets au chapitre 7 (section 7.3.2 et figure 7.16). Ce mécanisme est naturellement absent dans les écoulements à deux dimensions, puisque les gradients de vitesse sont alors perpendiculaires à l'axe de la vorticité. On parle de *cascade inverse* pour décrire le transfert de la turbulence vers des

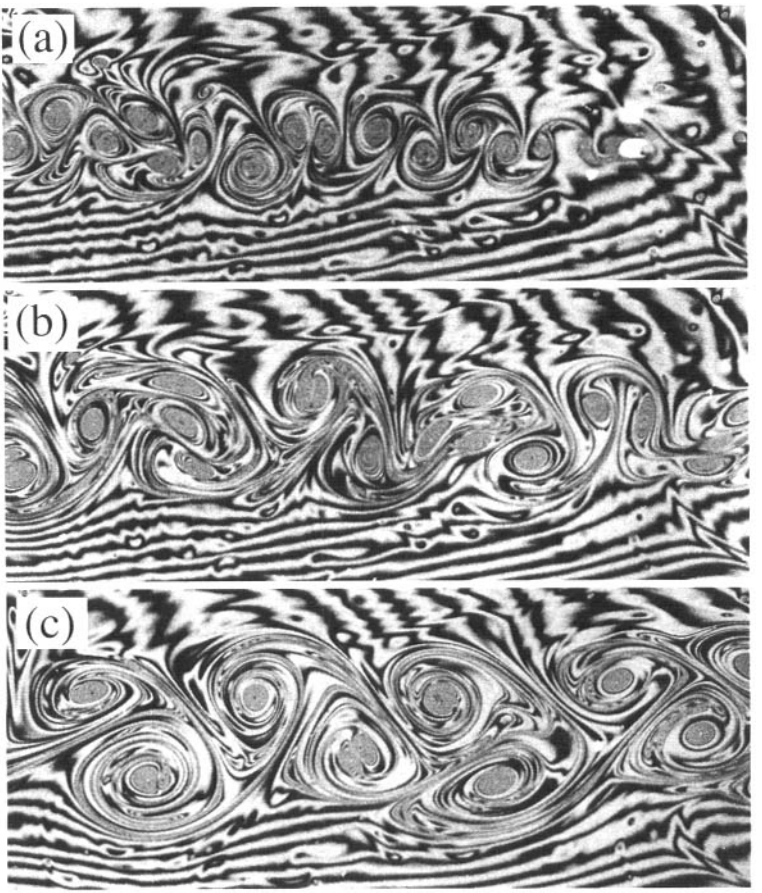


FIG. 11.15 – *Évolution d'une allée de tourbillons produites dans un film de savon par le déplacement de gauche à droite d'un cylindre (d'axe normal au film et d'un diamètre de l'ordre de 4 mm) visible sur la figure (a) à l'avant de l'allée de tourbillons. On observe sur les clichés (a) et (c), relatifs à la même zone du film, une coalescence par paires des tourbillons créés initialement (document Y. Couder, M. Rabaud et H. Thomé).*

grandes structures; celle-ci s'oppose à la cascade de Kolmogorov – *directe* – que nous avons étudiée plus haut pour les écoulements tridimensionnels.

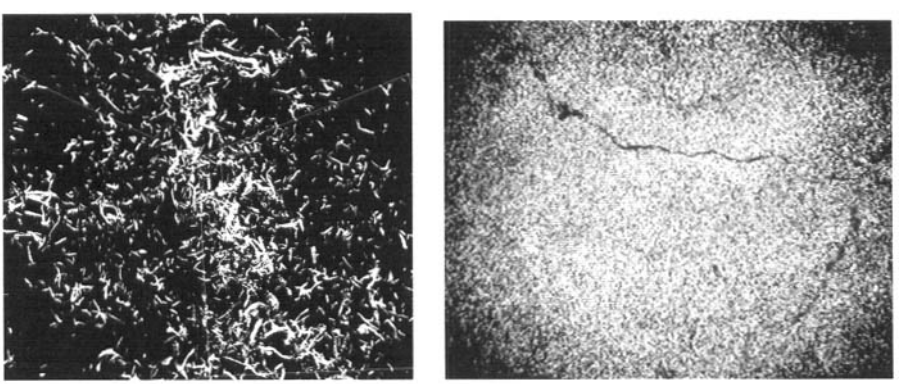
Un autre cas de turbulence presque bidimensionnelle est celui de la turbulence océanique, ou atmosphérique, à grande échelle. En effet, nous avons vu au chapitre 7 (section 7.5.2) que la force de Coriolis découple les mouvements perpendiculaires à l'axe de rotation de ceux le long de celui-ci. De plus, l'amplitude des mouvements verticaux perpendiculaires à la surface est limitée par la stratification thermique et l'épaisseur de l'atmosphère. Ces

effets influencent très fortement le mélange turbulent à grande échelle dans l'atmosphère et les océans.

11.5.2 Structures filamentaires en turbulence 3 D

Les grandes structures cohérentes – souvent de caractère bidimensionnel – que nous venons de présenter ne sont pas les seules structures géométriques intéressantes qu'on rencontre en turbulence. Plus récemment, et avec une échelle de taille et une durée de vie plus faibles, on a observé, dans des écoulements turbulents tridimensionnels, des filaments de tourbillons analogues à ceux discutés d'un point de vue purement théorique au chapitre 7 (section 7.1.3).

L'existence de tels objets a d'abord été prédite numériquement à partir de simulations numériques dans lesquelles on injecte une turbulence initiale homogène et isotrope dans une boîte cubique, que l'on laisse évoluer sous l'effet de la variation du champ de vitesse régi par l'équation de Navier–Stokes. On constate (Fig. 11.16a) que la vorticité peut se concentrer très fortement suivant des filaments entremêlés et désordonnés. L'évolution des structures



(a) (b)

FIG. 11.16 – *Apparition de filaments de tourbillons dans un écoulement turbulent tridimensionnel ; (a) simulation numérique : les zones de forte concentration de vorticité (les « cœurs » des filaments de tourbillons) apparaissent en clair. La taille du domaine de simulation est* 512^3*; l'écoulement est maintenu statistiquement stationnaire par une force aléatoire agissant aux grandes échelles de taille. Le nombre de Reynolds (basé sur une échelle de taille correspondant aux plus grands tourbillons) est de 5 000 (document M. Meneguzzi) ; (b) visualisation expérimentale d'un filament de tourbillon à l'aide de bulles venant se piéger sur le cœur de celui-ci (document Y. Couder, S. Douady et M.E. Brachet).*

filamentaires est déterminée par le champ de vitesse induit, en particulier, sur chaque filament par ses voisins. Compte tenu du caractère aléatoire de ces champs de vitesses, les tourbillons se déformeront très rapidement après leur apparition.

Des expériences récentes confirment cette image. Elles visualisent les tourbillons grâce des bulles gazeuses produites au sein du liquide, initialement sursaturé, qui se collectent dans la zone de basse pression présente au cœur des tourbillons. La figure 11.16b montre un tel filament qui se déforme par amplification des oscillations déjà visibles sur la figure. Le tourbillon disparaît finalement par éclatement et redistribution de la vorticité, et non par effet direct de la viscosité comme le proposait le mécanisme de Kolmogorov. La turbulence garde bien des mystères !

Références bibliographiques

RÉFÉRENCES GÉNÉRALES

G. K. Batchelor (1967), *Introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press.

Ouvrage de référence principal sur le sujet. On n'y trouvera cependant pas le traitement des instabilités convectives.

S. Candel (1990), *Mécanique des fluides*, Paris, Dunod.

P. Chassaing (1997), *Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours*, Toulouse, Cépaduès.

Ces deux derniers ouvrages généraux et récents en français abordent des problèmes d'écoulements compressibles ainsi que, pour le second, des calculs de profils de vitesse dans les couches limites et d'échanges thermiques, non traités dans le présent ouvrage.

M. Fermigier (1999), *Hydrodynamique physique. Problèmes résolus avec rappels de cours*, Paris, Dunod.

Livre de problèmes corrigés et très largement commentés. Constitue un excellent complément du présent ouvrage. Il a été réalisé dans le même esprit que celui-ci par un membre de l'équipe enseignante de l'ESPCI.

R. P. Feynman, R. Leighton et M. Sands (1988), *Le Cours de physique de Feynman*, tome 2, deuxième partie, Paris, Interéditions.

Les deux chapitres « L'écoulement de l'eau sèche » et « L'écoulement de l'eau mouillée » constituent une initiation particulièrement simple et profonde à la mécanique des fluides.

É. Guyon, C. Bétrencourt et J.-C. Deroche (1995), *Exploration de la matière*, de Boeck Université.

Livre d'exercices corrigés de niveau DEUG sur la structure et les propriétés de la matière; une large partie des thèmes est traitée dans le présent ouvrage.

Illustrated Experiments in Fluid Mechanics (1974), MIT Press.

Ce livre accompagne une remarquable série de films qui ont été produits dans les années 60 par le National Comittee for Fluid Mechanics Films, animé par A. H. Shapiro. Nous citons ces films sous la référence NCFMF

dans la bibliographie par chapitre mais le livre constitue par lui-même un ouvrage d'introduction très vivant.

L. Landau et E. M. Lifchitz (1971), *Mécanique des fluides*, Éd. Mir ; (1987) *Fluid Mechanics*, Pergamon Press.

Les chapitres I, II, IV constituent une introduction théorique dense de l'hydrodynamique avec un point de vue thermodynamique.

MMFM - *Multimedia Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, 2000.

Ce CDROM, avec une version française, diffusé par Cambridge University Press a été réalisé par une équipe d'universitaires animée par G. M. Homsy (Université de Stanford) et a été financé par la NSF. Il donne une présentation interactive de la mécanique des fluides à l'aide de documents photos et vidéo et de simulations sur ordinateur. L'esprit de ce document multimédia est, lui aussi, très proche de celui du présent ouvrage.

A. R. Paterson (1983), *A first course in fluid dynamics*, Cambridge University Press.

Version simplifiée du livre de Batchelor, avec un traitement détaillé des ondes.

D. J. Tritton (1988), *Physical fluid Dynamics*, seconde édition, Oxford University Press.

Contient des descriptions physiques très claires des propriétés des écoulements.

M. Van Dyke (1982), *An Album of Fluid Motion* (A.F.M.), Parabolic Press.

Cet album de photos d'écoulements commentées est un complément très utile de la lecture de ce livre.

RÉFÉRENCES PAR CHAPITRE

En plus des références générales, les autres références ont été regroupées par chapitres et divisées en quatre rubriques :

— des références propres au chapitre : ce sont en général des ouvrages de mécanique des fluides dans lesquels le contenu du chapitre est traité en détail ;

— des références particulières se rapportant à des points plus spécifiques traités dans des paragraphes du chapitre ;

— les films tirés de la série produite par le National Committee for Fluid Mechanics Films (NCFMF) et sur lesquels on trouvera un texte de commentaires dans l'ouvrage *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics* (IEFM) ;

— des expériences simples, généralement tirées des rubriques « expériences d'amateurs » de Jearl Walker ou « créations informatiques » de

A. Dewdney dans la revue *Pour la Science* et que l'on peut, pour la plupart, réaliser chez soi.

CHAPITRE 1

W. A. Adamson et A. P. Gasy (1997), *Physical chemistry of surfaces*, John Wiley.

R. B. Bird, W. E. Stewart et E. N. Lightfoot (1960), *Transport phenomena*, Wiley.

H. S. Carslaw et J. C. Jaeger (1959), *Conduction of heat in Solids*, Oxford Press.

D. Mc. Quarrie (1976), *Statistical Mechanics*, Harper et Row.

F. Reif (1972), *Physique statistique*, chapitre 8, A. Colin.

Références particulières

J. Barker et D. Henderson (1982), « La matière à l'état fluide », *Pour la Science*, janvier 1982, p. 58-71.

Simulations numériques de changements d'état à deux dimensions.

C. Bétrencourt, É. Guyon et L. G. Giraud (1980), « Teaching physics out of a bag of marbles », *Eur. J. Phys.* **1**, p. 206-211.

C. Bétrencourt, J.-C. Deroche, É. Guyon et P. Jenffer (1990), « Mesure de la conductivité et de la diffusivité thermique d'un solide en travaux pratiques », *Bull. de l'Union des physiciens*, **728**, p. 1185-1194.

F. Brochard-Wyart (1998), « Histoires de gouttes : capillarité et mouillage » (chap. 1), *La Juste Argile*, M. Daoud et C. Williams (éd.), Éditions de Physique.

É. Guyon, J. Prost, C. Betrencourt, C. Boulet et B. Volochine (1982), « Attention aux tensions superficielles », *Eur. J. Phys.* **3**, p. 159-168.

Sur les façons de traiter les problèmes de formes de surface liquide libre en termes d'énergie de surface plutôt que de tension superficielle.

P. Pieranski (1984), « An experimental model of a classical manybody system », *Am. J. Phys.* **52**, p. 68-73.

Expérience de simulation des changements d'états à deux dimensions.

Expériences

« Les gaz, les liquides et les masses critiques simulés sur ordinateur », *Pour la Science*, mai 1988, p. 116-119.
Simulation sur ordinateur de liquides et de gaz.

« Quelques considérations sur les bulles qui montent dans un écoulement de bière », *Pour la Science*, avril 1982, p. 116-120.

L'expérience de Rayleigh-Taylor décrite dans ce chapitre peut être facilement reproduite en retournant un récipient contenant une huile très visqueuse ou du miel. On observe aussi des dépôts réguliers de gouttes par un mécanisme du même type en déposant un film très mince d'huile sur une plaque transparente de verre que l'on retourne à l'horizontale.

Film

Surface tension in fluid mechanics, L. Trefethen, NCFMF (IEFM, p. 26).

CHAPITRE 2

Références particulières

S. Goujon-Durand, P. Jenffer et J. E. Wesfreid (1994). « Downstream evolution of the Bénard–von Karman instability », *Phys. Rev.* E **50**, 308.
Évolution de l'instabilité de Bénard–von Karman en aval d'un obstacle.

J. Koplik, J. Banavar et J.-F. Willemsen (1988), « Molecular dynamics of Poiseuille flow and moving contact lines », *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1282-5.
Simulations numériques de l'écoulement de Poiseuille plan par technique de dynamique moléculaire.

C. Mattis, M. Provansal et L. Boyer (1984), « The Bénard–von Karman instability : an experimental study near the threshold », *J. Phys. Lett.* **45**, L483-91.
Instabilité de Bénard–von Karman.

CHAPITRE 3

R. J. Adrian (1991), « Particle imaging techniques for experimental fluid mechanics », *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**.

W. Merzkirch (1979), *Flow visualization*, Academic Press.

Références particulières

M. Fermigier, M. Cloitre, É. Guyon et P. Jenffer (1982), « Utilisation de la diffusion Rayleigh forcée pour l'étude d'écoulements laminaires et turbulents », *J. Mécanique* **1**, 123-146.

La strophométrie par marquage laser est traitée par ailleurs en exercice dans l'ouvrage Exploration de la matière *cité plus haut dans les références générales.*

G. M. Quénot, J. Pakleza et T. A. Kowalewski (1998), « Particle image velocimetry with optical flow », *Experiments in fluids* **25**, 177-189.

G. I. Taylor (1934). « The formation of emulsions in definable fields of flow », *Proc. Roy. Soc.* A **146**, 501.

Déformation d'une goutte dans des écoulements variés.

Films

Deformation of continuous media, J. L. Lumley, NCFMF (IEFM, p. 11).

Flow visualisation, S. J. Kline, NCFMF (IEFM, p. 34).

Expériences

« Des méthodes simples pour réaliser des hologrammes et visualiser des écoulements de fluides », *Pour la Science*, avril 1980, p. 123-128.

CHAPITRE 4

H. A. Barnes, J. F. Hutton et K. Walters (1989), *An introduction to rheology*, Elsevier.

A. J. Collyer (1973), « Demonstrations in viscoelastic liquids » et « Time independent fluids », *Physics Education* **8**, p. 111-116 et p. 333-338; « Time dependent fluids » et « Viscoelastic liquids », *Physics Education* **9**, p. 38-44 et p. 313-321 (1974).

Articles décrivant les propriétés expérimentales des fluides dépendant du temps ou non et viscoélastiques.

G. Couarraze et J.-L. Grossiord (1991), *Initiation à la rhéologie*, Lavoisier.

P. Coussot et C. Ancey (1999), *Rhéophysique des pâtes et suspensions*, EDP Sciences.

Excellent ouvrage d'enseignement sur une thématique importante et généralement mal connue en dehors des spécialistes.

J. D. Ferry (1961), *Viscoelastic properties of polymers*, chapitre 5, J. Wiley.

S. Middleman (1995), *Modelling axisymmetric flows, dynamics of films, jets and drops*, Academic Press.

Contient de nombreuses situations d'écoulement simple tel le ressaut décrit dans le chapitre.

Références particulières

J.-F. Berret, G. Porte et J.-P. Decruppe (1997). « Inhomogeneous shear flow of wormlike micelles : a master dynamic phase diagram », *Phys. Rev.* E **55**, p. 1668-1676.

E. Charlaix, A. P. Kushnick et J.-P. Stokes (1988), « Experimental study of dynamic permeability of porous media », *Phys. Rev. Lett.* **61**, p. 1595-8.

Écoulement de Poiseuille alternatif.

L. Petit (1986), « Sustentation d'un mobile autoporteur sur une table à coussin d'air », *Bull. Union des Phys.* **685**, 98.

M. Reiner (1964), « The Deborah Number », *Physics Today*, janvier 1964, p. 62.

Film

Rheological behavior of fluids, H. Markovitz, NCFMF (IEFM, p. 18)

Expériences

« On peut s'amuser très sérieusement avec du polyox, de la pâte de silicone, du slime et d'autres fluides non newtoniens », *Pour la Science*, janvier 1979, p. 112-117.
Fluides viscoélastiques

« Pourquoi le vin pleure-t-il ? », *Pour la Science*, juillet 1983, p. 117-123.
Capillarité, effet Marangoni.

CHAPITRE 5

R. Comolet et J. Bonnin (1973), *Mécanique expérimentale des fluides, recueil de problèmes*, Masson.

Contient de nombreux exercices d'applications des lois de conservation.

S. Middleman (1995), *Modeling axisymmetric flows : dynamics of films, jets and drops*, Academic Press.

Contient de nombreuses descriptions de situations d'écoulements simples tels que le ressaut décrit dans le chapitre.

L. M. Milne Thompson (1979). *Theoretical Hydrodynamics*, Mac Millan.

Film

Pressure fields and fluid acceleration, A. H. Shapiro, NCFMF (IEFM, p. 39).

Expériences

« Le charme des ressauts hydrauliques peut aussi s'observer dans votre évier », *Pour la Science*, juin 1981, p. 139-145.
Ressaut hydraulique.

« L'effet théière ou comment éviter d'inonder la soucoupe quand on se prépare un petit crème », *Pour la Science*, décembre 1984, p. 117-122.
Effet Coanda.

« Arrosez rapidement votre jardin... en bouchant le tuyau », *Pour la Science*, octobre 1987, p. 94-97.
L'effet Venturi.

« Les rideaux de douche », *Pour la Science*, août 1988, p. 92-95.
Applications pratiques de l'effet Bernoulli.

CHAPITRE 6

J. J. Darrozes et C. François (1982), *Incompressible Fluid Mechanics*, vol. 2, Springer Verlag.

H. Lamb (1975), *Hydrodynamics*, Cambridge University Press (édition originale 1932).

M. J. Lighthill (1978), *Waves in fluids*, Cambridge University Press.

I. L. Rhyming (1985), *Dynamique des fluides*, chapitre 5, Presses polytechniques romandes.
Excellent ouvrage en français, en particulier sur les fluides parfaits et les écoulements compressibles (non traités dans le présent ouvrage).

J. J. Stoker (1957), *Water Waves*, J. Wiley.

Références particulières

P. Bourrier, É. Guyon et J.-P. Jorre (1984), « L'effet 'pop off' ou différents régimes d'accélération d'une balle légère dans l'eau », *Eur. J. Phys.* **5**, 225-231.

Films

Waves in fluids, A. E. Bryson, NCFMF (IEFM, p. 105).

Expériences

« Le sillage d'un bateau est une figure d'interférences complexes », *Pour la Science*, avril 1988, p. 98-101.
Ondes de surface dans le sillage d'un bateau.

CHAPITRE 7

B. Cushman-Roisin (1994), *Introduction to geophysical fluid dynamics*, Prentice Hall.

Ouvrage très clair et complet sur les écoulements en rotation.

H. P. Greenspan (1990), *The Theory of Rotating Fluids*, nouvelle édition révisée, Breukelen Press.

J. R. Holton (1992), *An Introduction to Dynamic Meteorology*, 3e édition, Academic Press.

P. K. Kundu (1990), *Fluid Mechanics*, Academic Press.

P. H. Roberts et A. M. Soward (1978), *Rotating Fluids in Geophysics*, Academic Press.

Références particulières

F. Le Guern, H. Tazieff, C. Vavisseur et P. Zettwoog (1982), « Resonance in the gas discharge of the bocca nuova, Etna (Italy), 1968-1969 », *J. Volcanol. Geotherm. Res.* **12**, 161-166.

Phénomènes conduisant à la formation d'un anneau tourbillon au-dessus de l'Etna.

Film

Vorticity, A. H. Shapiro, NCFMF (IEFM, p. 63).

Expériences

« Les merveilles de la physique qui apparaissent dans une tasse de café (ou dans une tasse de thé) », *Pour la Science*, janvier 1978, p. 110-115.

Écoulements secondaires.

Il est possible de produire des anneaux tourbillons en utilisant une boîte de conserve dont on a enlevé totalement l'un des fonds sur lequel on tend une membrane élastique mince et dont l'autre est percé d'un petit orifice circulaire. Après avoir introduit de la fumée dans la boîte, on peut en donnant une impulsion à la membrane émettre un anneau de fumée par l'autre orifice et évaluer sa trajectoire ou mesurer le déplacement d'un obstacle léger placé à distance de la boîte sur la trajectoire du tourbillon.

Appendice : hélium superfluide

R. J. Donnelly (1967), *Experimental Superfluidity*, Chicago Lectures in Physics Series, notes éditées par W. I. Glaberson et P. E. Parks, University of Chicago Press, Chicago.

« **He_3 and He_4** », numéro spécial de *Physics Today*, édité par R. J. Donnelly, **40**, n° 2, p. 23-78 (1987).

J. Wilks (1967), *The Properties of liquid and solid helium*, Clarendon Press.

Références particulières

É. Guyon, H. Kojima, W. Veith et I. Rudnick (1972), « Persistent current states in rotating superfluid helium », *J. Low Temp. Phys.* **9** : 187-193.

K. W. Schwarz (1988), « Homogeneous superfluid turbulence in He4 », *Phys. Rev.* B **38**, 2398.

G. A. Williams et R. E. Packard (1980),. « A technique for photographing vortex positions in rotating superfluid helium », *J. Low Temp. Physics.* **39**, p. 553-577.

CHAPITRE 8

J. Bear (1988), *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Dover Publications.

F. A. Dullien (1992), *Porous Media : Fluid Transport and Pore Structure*, 2e éd., Academic Press, San Diego.

J. Happel et H. Brenner (1965), *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice Hall.

Ce livre très complet contient la solution de nombreux problèmes d'écoulements de fluides visqueux.

E. J. Hinch (1988), Chap. 3 (p. 43-55) et 9 (p. 153 - 161), Disorder and Mixing (École de Cargèse, 1987), É. Guyon, J.-P. Nadal et Y. Pomeau (éd.), M. Nijhoff.

Écoulement aux faibles nombres de Reynolds et suspensions.

K. Moffatt (1974), « Six lectures on general fluid mechanics », dans *Hydrodynamics* (École des Houches, 1973), R. Balian (éd.), Gordon Breach, p. 151-212.

E. M. Purcell (1977), « Life at low Reynolds number », *Am. J. Phys.* **45**, p. 3-11.

Cet article sur la vie aux faibles nombres de Reynolds donne une présentation très physique des problèmes des petits nombres de Reynolds.

A. E. Scheidegger (1979), *The physics of flow through porous media*, University of Toronto Press.

G. I. Taylor (1952), « The action of waving cylindrical tails in propelling microorganisms », *Proc. Roy. Soc.* A **211**, 225.

Propulsion de microorganismes dans un fluide.

Références particulières

M. Coutanceau (1968), « Mouvement uniforme d'une sphère dans l'axe d'un cylindre contenant un liquide visqueux », *Journal de mécanique théorique et appliquée* **7**, p. 49-67.

É. Guyon et R. Blanc (1991), « La physique de la sédimentation », *La Recherche*, n° 234, juillet-août 1991, p. 866-873.

É. Guyon et J.-P. Hulin (1998), « Mélange et désordre figé (la physique du mélange) », *Pour la Science*, n° 249, juillet 1998, p. 70-77.

L. A. Lliboutry (1987), « Very Slow Flows of Solids. Basics of Modelling in Geodynamics and Glaciology », Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.

P. Z. Wong, J. Tomanic et J. Koplik (1984), « Conductivity and permeability of rocks », *Phys. Rev.* B **30**, 6606.

A. J. Katz et A. H. Thompson (1986), « Quantitative prediction of permeability in porous rocks », *Phys. Rev.* B **34**, 8179-8181.

Évaluation quantitative de la perméabilité de roches poreuses.

Film

Low Reynolds number flows, G. I. Taylor, NCFMF (IEFM, p. 47).

Expériences

« D'étranges serpentins qui apparaissent quand on verse du miel ou de la mélasse », *Pour la Science*, janvier 1982, p. 120-125.
La théorie simple du phénomène a été donnée par L. Mahadwan *et al.* (2000), *Nature* **52**, 532.

« Comment étudier les interfaces entre deux fluides et les écoulements fractals », *Pour la Science*, janvier 1988, p. 105-108.

CHAPITRE 9

L. Prandtl et O. G. Tietjens (1957), *Fundamental of hydro and aerodynamics*, Dover.

H. Schlichtling (1968), *Boundary Layer Theory*, Mac Graw Hill.

Références particulières

G. Comte Bellot (1976), « Hot wire anomemetry », *Ann. Rev. of Fluid Mechanics* **8**, 209-231.

Anémométrie à fil chaud.

P. Freymuth, W. Bank et M. Palmer (1983), « Flow visualisation and hot-wire anemometry », *TSI Quarterly*, **9**, 14.

P. Freymuth, W. Bank et M. Palmer (1984), « Flow around an airfoil in unsteady wind », *American Scientist*, **72** : 242.

P. Freymuth, W. Bank, M. Palmer (1984), « Movie sequences of flow patterns visualised by means of smoke in 2-dimensional starting flow around an airfoil », *Physics of Fluids*, **27** : 1045.

L. Malavard (1984), « Un nouveau propulseur éolien de navire », *C. R. Ac. Sc.*, série générale **1**, 57-72.

Le bateau Cousteau–Malavard.

J. Monder, G. Dippel et H. Gossage (1967), *The Great Airplane Paper Book*, Simon et Schuchier.

H. Werlé (1974), « Le tunnel hydrodynamique au service de la recherche aérospatiale », ONERA publications, n° 156, p. 43 ; *ibid.*, ONERA publication, n° 1303, p. 343.

Films

Fundamental of Boundary layers, F. H. Abernathy, NCFMF (IEFM, p. 75).

Expériences

« Les boomerangs, comment les construire et les faire voler », *Pour la Science*, mai 1979, p. 113-119.

« Revenons aux boomerangs et à leurs points communs avec les balles de golf piquetées », *Pour la Science*, juin 1979, p. 113-118.

CHAPITRE 10

P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal (1984), *L'ordre dans le chaos*, Hermann.

É. Guyon et P. Pieranski (1974), « Convective instabilities in nematic liquid crystals », *Physica* **73**, 184.

Contient une présentation simple des instabilités dans les liquides isotropes.

C. C. Lin (1955), *The Theory of hydrodynamic stability*, Cambridge University Press.

Références particulières

C. D. Andereck, S. S. Liu et H. L. Swinney (1986), « Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders », *J. Fluid Mech.*, 155-183.

S. Fauve (1984), « Transition vers la turbulence des écoulements convectifs », *Journal de mécanique théorique et appliquée*, numéro spécial, p. 45-76.

A. Libchaber, S. Fauve et C. Laroche (1983), « Two parameter study of the routes to chaos », *Physica D* **7**, 73-84.

S. A. Thorpe (1971), « Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids », *J. Fluid Mech.* **46**, 299-319.

Films

Flow Instabilities, E. L. Mollo-Christensen, NCFMF (IEFM, p. 113).

Expériences

« Ce que les panaches de fumée nous révèlent sur la structure de l'atmosphère », *Pour la Science*, juillet 1978, p. 110-115.

CHAPITRE 11

H. Tennekes et J.-L. Lumley (1972), *A first course in turbulence*, MIT Press.

Ouvrage classique et clair sur la turbulence.

U. Frisch (1995), *Turbulence, the legacy of Kolmogorov*, Cambridge University Press.

Ouvrage moderne, contenu très riche.

É. Guyon et J.-P. Hulin (1998), *Granites et Fumées*, Odile Jacob.

Description des différents mécanismes de mélange, incluant le mélange turbulent.

M. Lesieur (1982), « La turbulence développée », *La Recherche*, Décembre 1982, 1412- 1425.

M. Lesieur (1994), *La Turbulence*, Presses universitaires de Grenoble.

S. Orszag (1973), « Lectures on the statistical theory of turbulence », *Fluid dynamics*, Gordon Breach.

Références particulières

D. Bonn, Y. Couder, Ph. van Dam et S. Douady (1993), « From small to large scales in three dimensional turbulence : the effect of diluted polymers », *Phys. Rev.* E **47**, R28.

Visualisation d'éclatement de tourbillons.

O. Cadot, S. Douady et Y. Couder (1995), « Characterization of low pressure filaments in a three dimensional turbulent shear flow », *Phys. Fluids* **7**, 630-646.

Observation directe de filaments de vorticité.

Y. Couder J.-M. Chomaz et M. Rabaud (1989), « On the hydrodynamics of soap films », *Physica* D **37**, 384-405.

Turbulence bidimensionelle produite dans des bulles de savon.

L. P. Kadanoff, A. Libchaber, E. Moses et G. Zocchi (1991), « Turbulence dans une boîte », *La Recherche*, 628-638, mai 1991.

O. Reynolds (1883), « An experimental investigation on the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct of sinuous and the law of resistance in a parallel channel », *Phil. Trans. Roy. Soc.* **174**, 935-82.

Dans cet article est introduit pour la première fois le nombre de Reynolds.

A. Vincent et M. Meneguzzi (1991), « The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence », *J. Fluid Mech.* **225**, 1-20.

Films

Turbulence, R. W. Stewart, NCFMF (IEFM, p. 82).

Index

A

Agitation thermique, 49.
Aile d'avion 345, 534.
Aire spécifique, 486.
Ajutage de Borda, 281.
Allée de Bénard-von Karman, 107, 391, 651.
Allées de tourbillons, 390.
Analogie électrique, 336.
Analogies avec l'électromagnétisme, 142, 400.
Angle de contact dynamique, 238.
Anneaux tourbillons, 393, 436.
Anémomètrie à fil chaud, 153, 549.
Anémométrie (ou vélocimétrie) laser Doppler, 85, 154.
Approximation de Boussinesq, 574.
Approximation de lubrification, 223.
Autodiffusion, 38.
Autosimilitude, 93, 515, 518.

B

Barotrope, 374.
Bernoulli (équation de), 270.
Bénard–Marangoni, 152, 584.
Bilan de masse, 138.
Bilan de quantité de mouvement, 258.
Bilan d'énergie cinétique, 264.
Bingham (fluide de), 178, 219.
Biot et Savart, 366.
Blasius (profil de), 520.
Boussinesq, 574.
Brisure de symétrie, 110.
Brossé, 323.
Brownien, 478.
Bulle, 55.

C

Cœur du tourbillon, 365.
Cascade d'énergie de Kolmogorov, 385, 621.
Cavitation, 269.
Cellule de Hele-Shaw, 493.
Célérité d'une onde, 38.
Champ de vitesse autour d'une sphère en mouvement, 460.
Chaos, 106, 570, 598.
Circulation, 310.
Circulation complexe, 340.
Circulation de la vitesse, 299, 304, 373.
Cisaillement simple, 98.
Coefficient de diffusion moléculaire, 102.
Coefficient de frottement, 203, 641, 643.
Coefficient de mobilité, 50.
Coefficient de traînée, 467, 522, 535.
Coefficients de portance, 535.
Compacité, 22, 486.
Condition de Kutta, 350.
Conditions aux limites, 171, 297.
Conductivité thermique, 30.
Conduits à parois rugueuses, 642.
Conservation de l'énergie, 264, 615.
Conservation de la circulation, 369.
Conservation de la vorticité, 379, 617.
Conservation du moment cinétique, 370.
Constante de Kolmogorov, 625.
Contrainte normale, 160, 191.
Contrainte tangentielle ou de cisaillement, 90, 160, 166.
Contraintes, 28.
Contrôle du décollement des couches limites, 540.

Convection thermique, 564.
Couche d'Ekman, 421.
Couche de mélange, 387, 588, 650.
Couche limite, 30, 507, 508.
Couche limite laminaire, 507.
Couche limite de concentration, 551.
Couche limite décollée, 508.
Couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression, 525.
Couche limite près d'une plaque plane, 509.
Couche limite thermique, 544.
Couche limite turbulente, 524, 644.
Couche limite visqueuse, 634.
Couches limites d'épaisseur constante, 530.
Coupé, 323.
Cozeny-Karman, 495.
Courbure moyenne, 56.
Crise de traînée, 648.
Cylindre (écoulement autour d'un), 309.
Cylindre avec circulation (écoulement autour d'un), 310.

D

Darcy, 489.
Description eulérienne, 120.
Description lagrangienne, 121.
Décollement de la couche limite, 509, 527, 528, 532, 647.
Décrochage, 538.
Déferlement, 330.
Dérivée convective (ou totale), 23, 139.
Développement multipolaire, 308, 319.
Déviateur, 131.
Diagramme de stabilité, 109.
Diffusion anormale, 44.
Diffusion Brillouin, 82.
Diffusion Brillouin forcée, 84.
Diffusion élastique, 72, 73.
Diffusion de masse, 38, 80.
Diffusion inélastique, 75.
Diffusion moléculaire, 39, 45.
Diffusion Rayleigh, 77.
Diffusion Rayleigh forcée, 77.
Diffusion sous gradient, 38.
Diffusion thermique, 80.
Diffusivité moléculaire, 86.
Diffusivité thermique, 34, 47, 86.
Différences de contraintes normales, 192.
Dilatation volumique, 131, 565.
Dipôle, 306, 308, 341, 352.
Dièdre, 352.
Dissipation d'énergie cinétique, 266.
Downwelling, 431.
Drainage, 504.

E

Eau peu profonde (onde en), 329, 330.
Eau profonde (onde en), 329, 330.
Écoulement autour d'un cylindre circulaire, 106, 309, 352.
Écoulement autour d'un dièdre, 341, 352.
Écoulement autour d'une sphère, 352.
Écoulement bouchon, 178.
Écoulement dans les milieux poreux, 485.
Écoulement de cisaillement simple (ou de Couette plan), 90, 136, 145, 199.
Écoulement de Couette cylindrique, 210, 580.
Écoulements de Poiseuille, 101, 197.
Écoulement élongationnel, 147.
Écoulement géostrophique, 405.
Écoulement parallèle uniforme, 301, 340, 352.
Écoulement près d'un point d'arrêt, 341.
Écoulement secondaire, 89, 426, 433.
Écoulement turbulent, 106, 603.
Écoulement turbulent entre deux plaques parallèles, 633.
Écoulement uniforme, 340, 352.
Écoulement laminaire, 102, 105.
Écoulement parallèle, 102.
Écoulement potentiel, 142, 296.
Écoulement rampant, 440.
Écoulement rotationnel, 142.

Écoulement à petit nombre de Reynolds, 440.
Effet Coanda, 276.
Effet Marangoni, 54, 247.
Effet Weissenberg, 192.
Electrons lents, 72.
Énergie cinétique du fluide, 325.
Épaisseur de déplacement, 523.
Épaisseur de la couche limite, 511, 523.
Épaisseur de quantité de mouvement, 524.
Équation d'Euler, 170.
Équation d'Oseen, 474, 475.
Équation de Bernoulli, 268, 270, 275.
Équation de bilan, 138.
Équation de Blasius, 518.
Équation de conservation de la masse (ou de continuité), 138, 252.
Équation de dispersion des ondes de surface, 330.
Équation de Falkner–Skan, 526.
Équation de Fick, 39.
Équation de Fourier, 32, 34.
Équation de Helmholtz, 378.
Équation de Navier–Stokes, 169, 194, 252, 253, 255.
Équation de Reynolds, 232, 608.
Équation de Stokes, 195, 223, 441.
Équation de transport de la vorticité, 378.
Équation du mouvement d'un fluide, 167.
Ergodicité, 606.

F

Facteur de formation, 498.
Facteur de structure, 72.
Fermeture des équations, 612.
Filament de tourbillon, 367, 433, 653.
Film de Rollin, 355.
Films d'hélium superfluide, 355.
Fluctuations, 606.
Fluide à seuil, 178.
Fluide de Bingham, 178, 219.
Fluide de Maxwell, 189, 221.
Fluide en rotation, 397.
Fluide newtonien, 165, 174.
Fluide non newtonien, 174, 213.
Fluide parfait, 170, 172, 295.
Fluide réel, 172.
Fluide rhéo-épaisissant, 179, 218.
Fluide rhéo-fluidifiant, 179, 218.
Fluide thixotrope, 183.
Fluide viscoélastique, 185, 189.
Flux de quantité de mouvement, 610.
Fonction de courant, 143, 353, 465.
Fonction de courant de Stokes, 148.
Force centrifuge, 400.
Force de Coriolis, 373, 400.
Force de frottement sur une plaque plane, 522.
Force de Magnus, 313, 322, 323.
Force de traînée, 559.
Forces de Van der Waals, 25, 53.
Forces élastohydrodynamiques, 231.
Forces et couples sur un solide en mouvement, 453.
Forces exercées sur un obstacle bidimensionnel, 319.
Force enercée sur un obstacle tridimensionnel, 327.
Formule de Stokes, 467.

G

Goutte, 55.
Gradients de vitesse, 125.

H

Hele–Shaw, 492.
Hélium superfluide, 296, 353, 433.
Houle, 328, 330.

I

Imbibition, 506.
Impulsion, 327.
Incompressibilité, 139, 173.
Instabilité de Bénard–Marangoni, 250, 584.
Instabilité de Dean, 584.
Instabilité de Gortler, 584.
Instabilité de Kelvin–Helmholtz, 588.

Instabilité de Rayleigh–Bénard, 111, 567.
Instabilité de Rayleigh–Taylor, 68.
Instabilité de Taylor–Couette, 212, 580.
Instabilités absolues, 111.
Instabilités convectives, 111.
Instabilités hydrodynamiques, 563.
Intermittence de la turbulence, 629.
Irrotationnalité, 296.
Isobares, 374.
Isostères, 374.

K

Kolmogorov, 618.

L

Laminaires (écoulement), 508.
Lift, 323.
Ligne d'émission, 124.
Lignes de courant, 123.
Lignes de vorticité, 387.
Loi de Darcy, 489.
Loi de Jurin, 61.
Loi de Kolmogorov, 625–627.
Loi de Laplace, 55, 173.
Loi de Poiseuille, 202.
Loi de Tanner, 238.
Loi de variation logarithmique, 636.
Loi de Young–Dupré, 66.
Longueur capillaire, 59.
Longueur d'entrée, 511.
Longueur de Kolmogorov, 624.
Longueur de mélange, 613, 632.
Lubrification, 223, 227.

M

Magnétohydrodynamique, 374.
Magnus (force de), 313, 322.
Masse ajoutée, 328.
Méthode du Schlieren, 152.
Minimum de dissipation, 450.
Modes d'instabilité, 70, 573.
Module de conservation, 188.
Module de perte, 188.
Module de rigidité complexe, 187.
Module élastique de cisaillement, 222.
Mouillage, 64, 238.
Mouvement brownien, 50.
Multiplement connectée (géométrie), 298.

N

Neutrons thermiques, 72.
Nombre capillaire, 240.
Nombre d'Ekman, 401, 402.
Nombre de Nusselt, 548.
Nombre de Bond, 58.
Nombre de Deborah, 29, 183, 184, 186.
Nombre de Feigenbaum, 601.
Nombre de Froude, 285.
Nombre de Lewis, 103, 105.
Nombre de Mach, 140.
Nombre de Marangoni, 585.
Nombre de Nusselt, 580.
Nombre de Prandtl, 86, 103, 105, 571.
Nombre de Péclet, 102, 103, 105, 478.
Nombre de Rayleigh, 572.
Nombre de Reynolds, 101, 105, 171, 605.
Nombre de Rossby, 401, 402.
Nombre de Schmidt, 104, 105.
Nombre de Strouhal, 107, 209.
Nombre de Taylor, 582.

O

Onde capillaire, 330.
Onde de choc, 289.
Onde de cisaillement, 206.
Onde de compression, 206.
Onde de gravité, 285, 330.
Onde de Kelvin, 411.
Onde de Rossby, 415.
Onde inertielles, 411.
Onde linéaire, 328.
Onde solitaire, 334.

P

Paramètre d'ordre, 108.
Paramètre d'étalement, 65.
Paramètre de contrôle, 108.
Particule de fluide, 119.
Perméabilité, 489.
Perméabilité relative, 502.
Plan β, 415.
Point d'arrêt, 311, 342.
Point de décollement, 532.
Polarographie, 158, 553.
Poreux (écoulement dans les milieux), 485.
Porosimétrie, 499, 504.
Porosité, 486.
Portance, 312, 534.
Portance sur une aile, 351.
Potentiel complexe des vitesses, 338.
Potentiel de vitesse, 142, 296, 353.
Prandtl, 613.
Pression de stagnation, 269.
Pression dynamique, 268.
Pression hydrostatique, 160.
Profondeur de pénétration, 206, 222.
Puits, 304, 317.

Q

Quantification de la circulation, 435.

R

Raccordement asymptotique, 476, 522.
Ralentissement critique, 115.
Rapport de fréquences, 209, 227.
Rayonnement synchrotron, 72.
Relation d'Young–Dupré, 238.
Ressaut, 285, 288, 290.
Reynolds (expérience de), 605.
Réattachement des couches limites, 648.
Régime de Knudsen, 49, 120.
Réseau cristallin, 22.
Réversibilité, 444.
Rhéologie, 28, 174.
Rhéologie des suspensions, 479.
Rhéomètre cône–plan, 176, 214.
Rhéomètre de Couette cylindrique, 176, 210, 214.
Rugueuse (écoulement près de paroi), 642.

S

Section contractée, 281.
Seuil de stabilité, 573.
Sédimentation d'une suspension de particules, 482.
Sillage, 477, 508, 509, 556.
Simplement connexe (géométrie), 297.
Smog, 567.
Solide, 24, 28.
Solide de Kelvin–Voigt, 190.
Solide de Rankine, 315.
Source, 304, 306, 340, 341, 352.
Sous couche inertielle, 636.
Sous couche visqueuse, 634, 638.
Sous-domaine inertiel, 627.
Sphère dans un écoulement potentiel, 313.
Sphère dans un fluide visqueux, 360.
Spin-up, 429.
Spirale d'Ekman, 423.
Stabilité hydrodynamique d'une couche limite laminaire, 524.
Stokes (équation de), 195, 223, 441.
Stokeslet, 472.
Structures cohérentes, 117, 588, 650.
Surfactant, 54.
Suspensions, 478.
Suspensions concentrées, 483.
Suspensions diluées, 482.
Sustentation, 534.

T

Tenseur de Reynolds, 610, 612.
Tenseur des contraintes, 163, 252.
Tenseur flux de quantité de mouvement, 260, 263, 610.
Tenseur des gradients de vitesse, 125, 165.
Tenseur des taux de déformation, 125, 131.
Tension superficielle, 52, 173, 247.
Théorie cinétique, 47, 95, 613.
Théorie de Prandtl, 512.
Théorème de Kelvin, 369.
Théorème de Taylor–Proudman, 406.
Tortuosité, 487.
Tourbillon, 303, 317, 340, 341, 352, 361, 529.
Tourbillon de démarrage, 536.
Trainée, 312, 534.
Trajectoire, 124, 332.
Transformation conforme, 343.
Transformation de Joukovski, 345.
Transport de vorticité dans la couche limite, 515.
Transport turbulent de chaleur ou de matière, 611.
Trombes, 358.
Tube de Pitot, 154, 271.
Tube de Venturi, 272.
Tube de vorticité, 372.
Turbulence, 108, 603.
Turbulence bidimensionnelle, 651.
Turbulence développée, 601.
Turbulence gelée, 620.
Turbulence homogène, 618.
Tuyère, 289.

U

Unicité du potentiel des vitesses, 297.
Upwelling, 431.

V

Valeurs moyennes, 606.
Van der Waals (forces de), 110.
Vanne de décharge, 292.
Vecteur tourbillon, 134.
Vélocimétrie (voir anémométrie).
Vélocimétrie par images de particules, 156.
Viscosimètre de Couette, 176.
Viscosité cinématique, 51, 86, 92, 96.
Viscosité de volume, 167.
Viscosité des gaz, 95.
Viscosité des liquides, 97.
Viscosité dynamique, 86, 91.
Viscosité élongationnelle, 191.
Viscosité turbulente, 613.
Viscoélasticité, 184, 221.
Visualisations et mesures de vitesse, 149.
Vitesse complexe, 339.
Vitesse de Kolmogorov, 624.
Vitesse limite de chute, 467.
Volets de bord d'attaque, 538.
Volets de bord de fuite, 538.
Volume élémentaire représentatif, 44, 487.
Vortex (voir tourbillon).
Vortex de Rankine, 363.
Vorticité, 134, 156, 165.
Vorticité absolue, 401.
Vorticité planétaire, 398.

Collection « Savoirs Actuels »

Directeur : Michèle Leduc

Physique

- *Analyse continue par ondelettes*, B. Torrésani
- *Des phénomènes critiques aux champs de jauge. Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, M. Le Bellac
- *Gravitation relativiste*, R. Hakim
- *Magnétisme et supraconductivité*, L.P. Lévy
- *Photons et atomes – Introduction à l'électrodynamique quantique*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
- *Physique des plasmas* (tome 1 et tome 2), A. Bers, J.-L. Delcroix
- *Processus d'interaction entre photons et atomes*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
- *Théorie des formes de croissance – Digitations, dendrites et flammes*, P. Pelcé
- *Théorie statistique des champs* (tome 1 et tome 2), J.-M. Drouffe, C. Itzykson

Chimie

- *Aspects de la chimie des composés macrocycliques*, B. Dietrich, J.-M. Lehn, P. Viout
- *Chimie moléculaire et supramoléculaire des sucres – Introduction chimique aux glycosciences*, S. David
- *De la solution à l'oxyde – Condensation des cations en solution aqueuse. Chimie de surface des oxydes*, J.-P. Jolivet avec le concours de M. Henry et J. Livage
- *Éléments de chimie quantique à l'usage des chimistes*, J.-L. Rivail
- *Liaisons intermoléculaires – Les forces en jeu dans la matière condensée*, A. Gerschel
- *Orbitales frontières*, Nguyên Trong Anh
- *Synthèse et catalyse asymétriques – Auxiliaires et ligands chiraux*, J. Seyden-Penne

Astrophysique

- *Les Étoiles*, F. Praderie, E. Schatzman
- *Galaxies et cosmologie*, A. Blanchard, P. Boissé, F. Combes, A. Mazure
- *Méthodes physiques de l'observation,*
  P. Léna avec le concours de F. Lebrun et F. Mignard

Mathématiques

- *Géométrie algébrique – Une introduction*, D. Perrin
- *Groupes quantiques – Introduction au point de vue formel*, A. Guichardet
- *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser,*
  S. Alinhac, P. Gérard
- *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables,*
  Ch. Laurent-Thiébaut

Composition : e-press, Angle 197 bd Zerktouni et rue d'Avignon
Casablanca, Maroc
Imprimé en France – Jouve, 18, rue Saint-Denis, 75001 Paris
Dépôt légal : Juin 2001